
2.1 Wahrscheinlichkeitsrechnung

Das Ergebnis eines mit Zufälligkeit behafteten Versuchs nennen wir ein *Ereignis*. Beim Wurf einer Münze sind zwei Ereignisse möglich. Die Münze zeigt entweder Kopf (K) oder Zahl (Z). Jedem Ereignis A ordnen wir eine Zahl $P(A) \geq 0$ zu, die *Wahrscheinlichkeit* dafür, dass bei Ausführung des Versuchs A eintritt. Mit E bezeichnen wir das Ereignis, dass in jedem Versuch eintritt - in unserem Beispiel „Kopf oder Zahl“. Es erhält die Wahrscheinlichkeit $P(E) = 1$. Bezeichnen wir das Ereignis „nicht A “ mit \bar{A} , so schließen sich A und \bar{A} offenbar gegenseitig aus. (Es kann nicht gleichzeitig Kopf und Zahl fallen.) Dann gilt für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A oder \bar{A} : $P(A \text{ oder } \bar{A}) = P(E) = 1$. Damit ist $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Allgemein gilt für sich gegenseitig ausschließende Ereignisse A und B , dass die Wahrscheinlichkeit $P(A \text{ oder } B)$ dafür, dass entweder A oder B eintritt, die Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten ist, $P(A \text{ oder } B) = P(A) + P(B)$. Bei der idealen Münze ist offenbar $P(K) = P(Z) = \frac{1}{2}$, beim idealen Würfel ist die Wahrscheinlichkeit jedes der 6 möglichen Ergebnisse gleich $\frac{1}{6}$. Die Wahrscheinlichkeit für den Wurf einer geraden Zahl ist dann $P(\text{gerade}) = P(2 \text{ oder } 4 \text{ oder } 6) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

Für voneinander unabhängige Ereignisse (wie z.B. die Ergebnisse zweier aufeinander folgender Würfe der gleichen Münze) gilt, dass $P(A \text{ und } B)$, die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von A und B , das Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten ist: $P(A \text{ und } B) = P(A)P(B)$ (Für unser Beispiel des doppelten Münzwurfs: $P(K \text{ und } K) = P(K)P(K) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.)

In den hier angesprochenen einfachen Beispielen konnten Zahlwerte für Wahrscheinlichkeiten aus den Symmetrieeigenschaften der Experimente erschlossen

werden. Im allgemeinen ist das nicht der Fall. Man benutzt dann die *Häufigkeitsdefinition der Wahrscheinlichkeit*: Wenn aus N gleichartigen Experimenten n das Ergebnis A liefern, so ist n/N die *Häufigkeit* für das Eintreten von A . Als Wahrscheinlichkeit $P(A)$ dient die Häufigkeit im Grenzwert sehr vieler Experimente,

$$P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n}{N}.$$

2.2 Zufallsvariable. Verteilungsfunktion. Wahrscheinlichkeitsdichte

Messwerte haben etwas zufälliges; wir nennen sie *Zufallsvariable* und bezeichnen sie mit Symbolen wie \mathbf{x} , \mathbf{y} , \dots . Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zufallsvariable \mathbf{x} kleiner ist als ein vorgegebener Wert x , ist eine Funktion der (gewöhnlichen Variablen) x und heißt *Verteilungsfunktion*,

$$F(x) = P(\mathbf{x} < x).$$

In der Praxis nehmen Messwerte nur endliche Zahlwerte an. Die Verteilungsfunktion ist also monoton ansteigend mit den Grenzwerten

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1.$$

Wir unterscheiden zwischen *diskreten* und *kontinuierlichen* Zufallsvariablen. Erstere können nur diskrete Werte x_1, x_2, \dots, x_n annehmen (wie etwa die Augenzahlen des Würfels), letztere ein Kontinuum von Werten (z.B. die auf einer Analoguhr abgelesenen Zeiten). Für diskrete Zufallsvariable ist die Verteilungsfunktion eine Stufenfunktion und wir können jedem möglichen Wert x_i eine Wahrscheinlichkeit $P(x_i)$ zuordnen. Für kontinuierliche Zufallsvariable ist die Verteilungsfunktion gewöhnlich differenzierbar. Ihre Ableitung nach x heißt *Wahrscheinlichkeitsdichte* $f(x) = dF(x)/dx$. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zufallsvariable Werte aus dem Intervall zwischen x und $x + dx$ annimmt, ist offenbar $f(x)dx$.

Als *Erwartungswert* $E(\mathbf{x})$ oder *Mittelwert* \hat{x} von \mathbf{x} bezeichnen wir die mit den Wahrscheinlichkeiten gewichtete Summe über alle möglichen Werte von x . Für kontinuierliche Zufallsvariable wird die Summe ein Integral. Also

$$E(\mathbf{x}) = \hat{x} = \sum_{i=1}^n x_i P(\mathbf{x} = x_i) \quad \text{bzw.} \quad E(\mathbf{x}) = \hat{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

Der Erwartungswert $E(H(\mathbf{x}))$ einer Funktion $H(\mathbf{x})$ der Zufallsvariablen \mathbf{x} wird ganz entsprechend gebildet, indem man den Faktor \mathbf{x}_i bzw. den Faktor x in den obigen Formeln durch $H(\mathbf{x}_i)$ bzw. $H(x)$ ersetzt. Die *Varianz* von \mathbf{x} ist der Erwartungswert der quadratischen Abweichung vom Mittelwert,

$$\text{var}(\mathbf{x}) = \sigma^2(\mathbf{x}) = E((\mathbf{x} - \widehat{x})^2).$$

Ihre positive Quadratwurzel $\sigma(\mathbf{x}) = \sqrt{\sigma^2(\mathbf{x})}$ heißt *Standardabweichung*, *Streuung* oder *Breite* und wird mit dem Fehler der Messung identifiziert, $\sigma(\mathbf{x}) = \Delta x$.

Wählen wir $H(\mathbf{x}) = c\mathbf{x}$ mit $c = \text{const}$, so ergibt sich

$$E(c\mathbf{x}) = cE(\mathbf{x}), \quad \sigma^2(c\mathbf{x}) = c^2\sigma^2(\mathbf{x})$$

und damit

$$\sigma^2(\mathbf{x}) = E\{(\mathbf{x} - \widehat{x})^2\} = E\{x^2 - 2x\widehat{x} + \widehat{x}^2\} = E(x^2) - \widehat{x}^2.$$

Es kann praktisch sein, statt der Zufallsvariablen \mathbf{x} die *standardisierte Variable*

$$u = \frac{x - \widehat{x}}{\sigma(\mathbf{x})}$$

zu benutzen, die per Konstruktion den Erwartungswert $E(u) = 0$ und die Varianz $\sigma^2(u) = 1$ besitzt.

Mittelwert und Streuung sind wichtige Kenngrößen. Für kontinuierliche Zufallsvariablen führen wir noch weitere ein. Der *wahrscheinlichste Wert* (englisch: mode) x_m einer Verteilung ist als der Wert von x definiert, der der höchsten Wahrscheinlichkeit entspricht, $P(\mathbf{x} = x_m) = \max$. Der *Median* $x_{0.5}$ einer Verteilung ist als derjenige Wert von x definiert, für den die Verteilungsfunktion den Wert $1/2$ hat,

$$F(x_{0.5}) = P(\mathbf{x} < x_{0.5}) = 0.5, \quad \int_{-\infty}^{x_{0.5}} f(x) dx = 0.5.$$

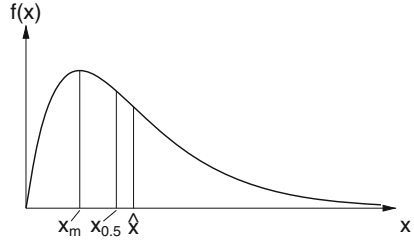
Der Median teilt den Bereich der Zufallsvariablen in zwei Teilbereiche mit gleicher Wahrscheinlichkeit. Für besonders symmetrische Verteilungen fallen x_m , \widehat{x} und $x_{0.5}$ zusammen. Abbildung 2.1 zeigt eine Verteilung, bei der sie verschieden sind.

Eine nützliche Verallgemeinerung des Medians ist das *Quantil* x_q , gegeben durch

$$F(x_q) = \int_{-\infty}^{x_q} f(x) dx = q, \quad 0 \leq q \leq 1.$$

Es teilt die Verteilung in einen Bereich der Wahrscheinlichkeit q und einen der Wahrscheinlichkeit $1 - q$.

Abb. 2.1 Wahrscheinlichster Wert x_m , Mittelwert \hat{x} und Median $x_{0.5}$ einer un-symmetrischen Verteilung



Bei der gemeinsamen Betrachtung von Paaren von Messwerten, also von zwei Zufallsvariablen x_1, x_2 gilt für Verteilungsfunktion und Wahrscheinlichkeitsdichte (letztere ist nur für kontinuierliche Variable definiert)

$$F(x_1, x_2) = P(x_1 < x_1, x_2 < x_2), \quad f(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} F(x_1, x_2).$$

Fragt man nach der Wahrscheinlichkeitsdichte jeweils nur einer Variablen unabhängig vom Wert der anderen, so erhält man die *Randverteilungen*

$$f_1(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_2, \quad f_2(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_1.$$

Analog zu der Unabhängigkeit von Ereignissen können wir jetzt die *Unabhängigkeit von Zufallsvariablen* definieren. Die Variablen x_1 und x_2 heißen unabhängig, wenn die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte beider gleich dem Produkt der Randverteilungen ist, $f(x_1, x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2)$.

Als Erwartungswert einer Funktion $H(x_1, x_2)$ definieren wir

$$E\{H(x_1, x_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(x_1, x_2) f(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

Daraus können wir die Erwartungswerte $E(x_1) = \hat{x}_1$, $E(x_2) = \hat{x}_2$ und die Varianzen $E\{(x_1 - \hat{x}_1)^2\} = \sigma^2(x_1)$, $E\{(x_2 - \hat{x}_2)^2\} = \sigma^2(x_2)$ bestimmen, die ganz dem Fall einer Variablen entsprechen. Neu ist die *Kovarianz*

$$E\{(x_1 - \hat{x}_1)(x_2 - \hat{x}_2)\} = \text{cov}(x_1, x_2),$$

die ein Maß für die gegenseitige Abhängigkeit der beiden Zufallsvariablen ist. Anstelle der Kovarianz benutzt man häufig den *Korrelationskoeffizienten*, dessen Werte nur zwischen -1 und 1 liegen können,

$$\rho(x_1, x_2) = \frac{\text{cov}(x_1, x_2)}{\sigma(x_1)\sigma(x_2)}, \quad -1 \leq \rho(x_1, x_2) \leq 1.$$

Unabhängige Variable haben $\rho = 0$ und heißen *unkorreliert*.

Für mehrere Zufallsvariable vereinfachen sich die Formeln erheblich bei Benutzung von Vektoren und Matrizen. (Eine ausführliche Darstellung der Vektor- und Matrixrechnung finden Sie in [DA-A], Anhang A.) Wir fassen die Variablen x_1, \dots, x_n zu einem Spaltenvektor \mathbf{x} zusammen; transponiert wird er zum Zeilenvektor \mathbf{x}^T :

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^T = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Die Erwartungswerte bilden den Spaltenvektor $E(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{x}}$, Die Matrix

$$C = E\{(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T\}$$

heißt *Kovarianzmatrix*. Ihre Diagonalelemente $c_{ii} = \text{var}(x_i)$ sind die Varianzen der Variablen, die Nichtdiagonalelemente $c_{ij} = \text{cov}(x_i, x_j)$ sind die Kovarianzen von Paaren von Variablen. Offenbar ist $c_{ij} = c_{ji}$; die Kovarianzmatrix ist symmetrisch.

2.3 Fehlerfortpflanzung

Es sei die Kovarianzmatrix C_x der zum Vektor \mathbf{x} zusammengefassten n Variablen x_i bekannt. Gefragt ist nach der Kovarianzmatrix C_y der r Variablen y_j , die Funktionen der x_i sind. Im Fall linearer Funktionen hat der Vektor \mathbf{y} der y_j die Form

$$\mathbf{y} = T\mathbf{x} + \mathbf{a}.$$

Dabei ist T eine Matrix mit r Zeilen und n Spalten und \mathbf{a} ein Vektor mit r Elementen. Für den Vektor der Erwartungswerte der y_j folgt

$$E(\mathbf{y}) = \hat{\mathbf{y}} = T\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{a}.$$

Für die Kovarianzmatrix der y_j findet man nach kurzer Rechnung das *Gesetz der Fehlerfortpflanzung*

$$C_y = TC_x T^T.$$

Sind die y_j nichtlineare Funktionen der x_i , so können sie doch gewöhnlich im Bereich der Breiten um die Erwartungswerte durch eine nach dem linearen Glied

abgebrochene Taylorentwicklung linearisiert werden. In dieser Näherung erhält man

$$y_i = y_i(\hat{\mathbf{x}}) + \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_1} \right)_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}} (\mathbf{x}_1 - \hat{x}_1) + \cdots + \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_n} \right)_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}} (\mathbf{x}_n - \hat{x}_n)$$

oder in Matrixschreibweise

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}(\hat{\mathbf{x}}) + T(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}).$$

Dabei sind die

$$t_{ij} = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}}$$

die Elemente der Transformationsmatrix T . Bei der Fehlerfortpflanzung müssen die Kovarianzen der Ausgangsgrößen unbedingt berücksichtigt werden. Nur wenn diese sämtlich null sind, also C_x diagonal ist, ist auch C_y diagonal. Nur dann gilt einfach

$$\sigma^2(y_i) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}}^2 \sigma^2(x_j), \quad \text{also} \quad \Delta y_i = \sqrt{\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)^2 (\Delta x_j)^2}.$$

2.4 Gauß- oder Normalverteilung

Einen zentralen Platz in der Datenanalyse nimmt die *Gaußverteilung* oder *Normalverteilung* ein. In ihrer standardisierten Form, also mit Mittelwert 0 und Streuung 1, lautet ihre Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(x) = \phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Sie ist in Abb. 2.2 dargestellt und hat eine Glockenform mit dem Maximum bei $x = 0$ und Wendepunkten bei $x = \pm 1$.

Die Normalverteilung mit Mittelwert \hat{x} und Standardabweichung σ hat die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(x) = \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{(x - \hat{x})^2}{2\sigma^2} \right\}.$$

Die Gaußverteilung erhält ihre besondere Bedeutung durch den *zentralen Grenzwertsatz*, der aussagt, dass viele zufällige Größen sich zu einer Größe addieren, die normal verteilt ist. Genauer lautet er: Sind die x_i unabhängige Zufallsvariable mit

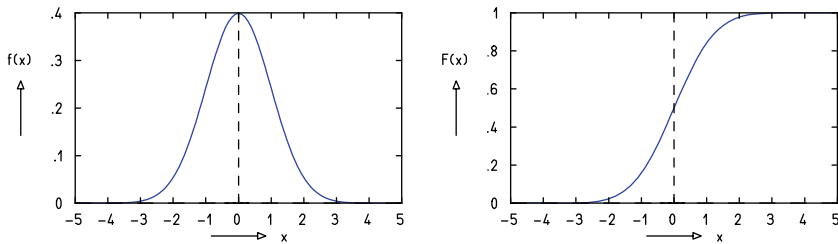


Abb. 2.2 Wahrscheinlichkeitsdichte (*links*) und Verteilungsfunktion (*rechts*) der standardisierten Normalverteilung

Mittelwert a und Varianz b^2 , so ist die Variable $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i$ im Limes $n \rightarrow \infty$ normal verteilt mit dem Mittelwert $E(\mathbf{x}) = na$ und der Varianz $\sigma^2(\mathbf{x}) = nb^2$. Man kann die Tatsache, dass die statistischen Fehler kontinuierlicher Messgrößen oft normal verteilt sind, auf eine Summe vieler kleiner Abweichungen (mit Mittelwert null) vom wahren Wert zurückführen.

Viele Rechnungen der Datenanalyse beruhen auf der Annahme normal verteilter Fehler. Als Fehler wird dabei die Standardabweichung der Verteilung genommen. Man beachte, dass ein Messwert \mathbf{x} durchaus um mehr als eine Standardabweichung vom Mittelwert der Verteilung abweichen kann. Es gelten folgende Wahrscheinlichkeiten, dafür dass \mathbf{x} höchsten eine, zwei oder drei Standardabweichungen von $\hat{\mathbf{x}}$ entfernt ist:

$$P(|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}| \leq \sigma) = 68.3\%, \quad P(|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}| \leq 2\sigma) = 95.4\%, \quad P(|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}| \leq 3\sigma) = 99.8\%.$$

Grafisch wird der Fehler durch einen *Fehlerbalken* dargestellt, der um den Messwert zentriert ist und die Länge 2σ hat. Er steht symbolisch für eine Gaußverteilung der Standardabweichung σ .

Abbildung 2.3 zeigt die Wahrscheinlichkeitsdichte einer Normalverteilung von zwei Variablen. Sie ist durch die beiden Mittelwerte \hat{x}_1 , \hat{x}_2 , die Varianzen σ_1^2 , σ_2^2 und die Kovarianz bzw. den Korrelationskoeffizienten bestimmt. Im Fall verschwindender Kovarianz ist sie einfach das Produkt zweier Normalverteilungen, die auch die Randverteilungen sind. Bei nichtverschwindender Kovarianz bleiben die Randverteilungen erhalten, die Verteilung selbst aber verschiebt sich derart, dass bei positiver (negativer) Varianz solche Bereiche wahrscheinlicher sind, in denen $x_1 - \hat{x}_1$ das gleiche (entgegengesetzte) Vorzeichen hat wie $x_2 - \hat{x}_2$.

Zur Beschreibung einer Normalverteilung von n Variablen benutzen wir die Ende des Abschn. 2.2 eingeführte Vektor- und Matrixschreibweise. Wir bilden die

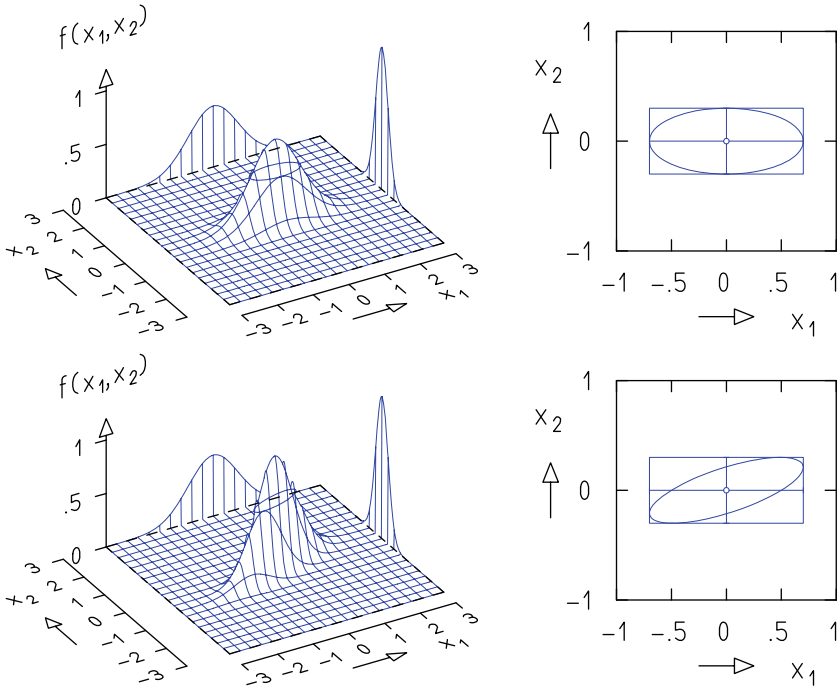


Abb. 2.3 Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x_1, x_2)$ einer Gauß-Verteilung von zwei Variablen mit Randverteilungen $f_1(x_1)$ am oberen und $f_2(x_2)$ am rechten Rand der Darstellung (*linke Spalte*) und zugehörige Kovarianzellipse (*rechte Spalte*). Die zwei Zeilen der Abbildung unterscheiden sich nur durch den Zahlwert des Korrelationskoeffizient ρ . Für die obere Zeile ist $\rho = 0$, für die untere $\rho = 0.7$. Das die Kovarianzellipse umschreibende Rechteck hat die Kantenlängen $2\sigma_1$ und $2\sigma_2$

Funktion

$$g(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T B (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}), \quad B = C^{-1}.$$

Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte ist dann

$$f(\mathbf{x}) = k \exp\left\{-\frac{1}{2}g(\mathbf{x})\right\}, \quad k = \left(\frac{\det B}{(2\pi)^n}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Hier ist $\det B$ die Determinante der Matrix B , welche ihrerseits die Inverse der Kovarianzmatrix C ist. Setzt man $g(\mathbf{x}) = 1$, so ist $f(\mathbf{x})$ eine Konstante. Angewandt auf den Fall von zwei Variablen in Abb. 2.3 entspricht das einem horizontalen

Schnitt durch die dargestellte Fläche. Die Schnittlinie ist die *Kovarianzellipse*. Sie ist einem Rechteck einbeschrieben, dessen Kantenlängen die zweifachen Standardabweichungen sind. Ohne Korrelation sind die Hauptachsen der Ellipse parallel zur x_1 - bzw. x_2 -Achse. Je größer der Betrag des Kovarianz, je mehr nähern sie sich einer der beiden Rechteckdiagonalen an. Im Grenzfall $\rho \rightarrow \pm 1$ entartet die Ellipse zu einer der Diagonalen. Grafisch wird die gemeinsame Messung zweier Variablen durch einen Punkt in der x_1, x_2 Ebene mit einem Kreuz aus beiden Fehlerbalken und - bei nicht verschwindender Korrelation - einer Kovarianzellipse wiedergegeben.

2.5 Binomial- und Poisson-Verteilung

Ein Versuch führe nur zu den Ergebnissen A bzw. \bar{A} , und zwar mit den Wahrscheinlichkeiten p bzw. $1 - p = q$. Der Versuch werde n mal ausgeführt. Wir bezeichnen das Ergebnis der Versuchs i mit $x_i = 1$ bzw. $x_i = 0$ bei A bzw. \bar{A} , das Ergebnis einer Versuchsreihe mit $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i$ und fragen nach der Wahrscheinlichkeit $P(k)$, dass $\mathbf{x} = k$, dass also bei n Versuchen k mal A auftritt. Offenbar kann k nur Werte $0 \leq k \leq n$ annehmen. Man findet

$$P(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad \text{mit} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n, \quad 0! = 1! = 1.$$

Abbildung 2.4 zeigt die *Binomialverteilung* für $n = 10$ und verschiedene Werte von p . Für $p = 0.5$ ist sie symmetrisch und entspricht dem Wurf einer idealen Münze. Für Erwartungswert und Varianz der Verteilung findet man

$$E(k) = np, \quad \sigma^2(k) = npq = np(1 - p).$$

Gehen wir zu sehr vielen Versuchen über ($n \rightarrow \infty$) und halten dabei das Produkt $\lambda = np$ fest, so geht die Binomialverteilung in die *Poisson-Verteilung* über. Für sie gilt

$$P(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad E(k) = \lambda, \quad \sigma^2(k) = \lambda.$$

Abbildung 2.4 zeigt die Poisson-Verteilung für verschiedene Werte des Parameters λ . Sie ist ausgeprägt asymmetrisch für kleine λ , nähert sich aber mit wachsendem λ immer mehr einer symmetrischen Glockenform.

Für große n und Werte von p nicht zu nahe bei 0 oder 1 ist die Wahrscheinlichkeit $P(k)$ der Binomialverteilung für sehr viele Werte von k deutlich von null

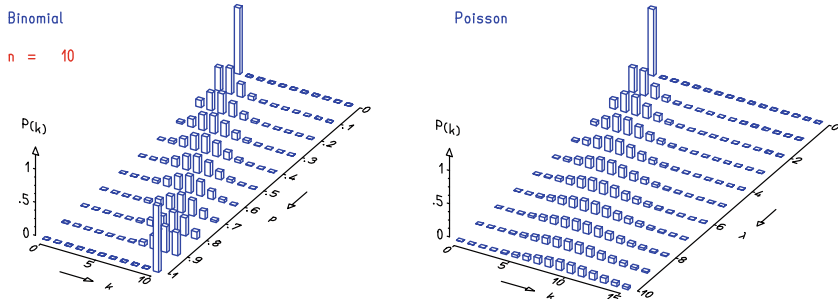


Abb. 2.4 Links: Binomialverteilungen zu festem n , aber verschiedenen p . Rechts: Poisson-Verteilungen zu verschiedenen λ .

verschieden und hat eine Glockenform um den Mittelwert np mit der Breite \sqrt{npq} . Sie entspricht einer Normalverteilung mit diesen Kenngrößen. (Auf den formalen Grenzübergang von der diskreten Variablen k zu einer kontinuierlichen Variablen verzichten wir hier.) Ganz entsprechend geht für große λ die Poisson-Verteilung in eine Normalverteilung über. Grund ist in beiden Fällen der zentrale Grenzwertsatz.

2.6 Faltung von Verteilungen

Folgen die Zufallsvariablen x_1 und x_2 Verteilungen mit den Wahrscheinlichkeitsdichten $f_1(x_1)$ bzw. $f_2(x_2)$ so wird die Summe $x = x_1 + x_2$ durch eine Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x)$ beschrieben. Man spricht von der *Faltung* zweier Verteilungen.

Insbesondere gilt für die Faltung zweier Gaußverteilungen mit Mittelwert Null, aber verschiedenen Varianzen σ_1^2 und σ_2^2 , dass sie wieder eine Gaußverteilung mit dem gleichen Mittelwert, aber der Varianz $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$ ist. Treten bei einer Messung mehrere unabhängige, normal verteilte Fehler $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ auf, so gilt für den Gesamtfehler Δx deshalb die Regel von der *quadratischen Addition der Einzelfehler*,

$$(\Delta x)^2 = (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \dots + (\Delta x_n)^2.$$

Die Faltung von zwei Poisson-Verteilungen mit den Parametern λ_1 und λ_2 ist eine Poisson-Verteilung mit dem Parameter $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.

Analyse empirischer und experimenteller Daten

Ein kompakter Überblick für Studierende und Anwender

Brandt, S.

2015, X, 33 S. 10 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-658-10068-1