

Préface

Le livre qui suit est tout à fait extraordinaire. Il est issu d'un cours qu'Hilbert donna pour la première fois à Göttingen l'année universitaire 1920–21. Sa motivation première semble avoir été de faire revivre l'esprit de géométrie dans la Faculté. La désaffection pour la géométrie, au profit de la seule habileté dans l'algèbre, le calcul différentiel et intégral, a toujours provoqué une réaction inquiète chez les grands mathématiciens. Voici, entre autres, ce qu'ont dit Gauss, Klein puis André Weil. Dans une analyse de la Géométrie descriptive de Monge qui venait de paraître, Gauss écrivait en 1813 :

„Es ist auch nicht zu läugnen, dass die Vorzüge der analytischen Behandlung vor der geometrischen, ihre Kürze, Einfachheit, ihr gleichförmiger Gang, und besonders ihre Allgemeinheit, sich gewöhnlich um so entschiedener zeigen, je schwieriger und verwickelter die Untersuchungen sind. Inzwischen ist es doch immer von hoher Wichtigkeit, dass auch die geometrische Methode fortwährend cultivirt werde ... Dem vorliegenden Werke über diese Wissenschaft müssen wir insbesondere das Lob einer grossen Klarheit, ... beilegen, und daher das Studium desselben als eine kräftige Geistesnahrung empfehlen, wodurch unstreitig zur Belebung und Erhaltung des echten, in der Mathematik der Neuern sonst manchmal vermissten, geometrischen Geistes viel mit beigetragen werden kann.“

Puis en 1850 dans une lettre à Schumacher :

„Es ist der Character der Mathematik der neueren Zeit (im Gegensatz gegen das Alterthum), dass durch unsere Zeichensprache und Namengebungen wir einen Hebel besitzen, wodurch die verwickeltsten Argumentationen auf einen gewissen Mechanismus reducirt werden.

An Reichtum hat dadurch die Wissenschaft unendlich gewonnen, an Schönheit und Solidität aber, wie das Geschäft gewöhnlich betrieben wird, eben so sehr verloren. Wie oft wird jener Hebel eben nur mechanisch angewandt, ... Ich fordere, man soll bei allem Gebrauch des Calculs, bei allen Begriffsverwendungen sich immer der ursprünglichen Bedingungen bewusst bleiben ...“

Dans une conférence donnée, dans une série de douze, aux USA en 1893, sur l'intuition de l'espace, Felix Klein disait :

“It is my opinion that in teaching it is not only admissible, but absolutely necessary, to be less abstract at the start, to have constant regard to the applications, and to refer to the refinements only gradually as the student becomes able to understand

them.” . . . “I am led to these remarks by the consciousness of a growing danger in the higher educational system in Germany, — the danger of a separation between abstract mathematical science and its scientific and technical applications. Such separation could only be deplored; for it would necessarily be followed by shallowness on the side of the applied sciences, and by isolation on the part of pure mathematics.”

Enfin André Weil, dans «S.S. Chern as Geometer and Friend», écrivit en 1978 :

“Obviously everything in differential geometry can be translated into the language of analysis, just as every thing in algebraic geometry can be expressed in the language of algebra. Sometimes mathematicians, following their personal inclination or perhaps misled by a false sense of rigor, have turned their mind wholly to the translation and lost sight of the original text. It cannot be denied that this has led occasionally to work of great value; nevertheless further progress has invariably involved going back to geometric concepts. The same has happened in our times with topology. Whether one considers analytic geometry at the hands of Lagrange, tensor calculus at those of Ricci, or more modern examples, it is always clear that a purely formal treatment of geometric topics would invariably have killed the subject if it had not been rescued by true geometers, Monge in one instance, Levi-Civita and above all Elie Cartan in another.”

Dans ces textes, il ne s’agit pas de stigmatiser l’abstraction ni l’habileté dans les calculs, mais leur usage à l’état brut sans l’existence, en profondeur, d’une intuition, d’une pensée, d’une ligne directrice, d’une vision. Le calcul électronique présente un danger analogue sinon identique. Car on peut craindre que le mathématicien, qui utilise ces puissants moyens, ne se fie en dernier ressort qu’au seul résultat fourni par l’ordinateur sans que son intuition ne le lui confirme.

Ce cours de géométrie «pictoriale», «figurative», «illustrative», Hilbert le donna encore deux fois dans la suite, alors cependant que la diversité de ses enseignements est restée légendaire. Outre la motivation mentionnée précédemment, essentiellement tournée vers les étudiants, Hilbert désirait atteindre un public beaucoup plus large : il le dit dans sa préface, qu’il faut absolument lire : elle n’a pas encore pris une seule ride. Ajoutons qu’il admirait l’habileté des scientifiques des autres disciplines à présenter aux non-experts leur propre discipline et ses succès. Un très bref extrait de cette préface :

„ ... zu einer gerechteren Würdigung der Mathematik in weiteren Kreisen des Publikums beizutragen. Denn im allgemeinen erfreut sich die Mathematik, wenn auch ihre Bedeutung anerkannt wird, keiner Beliebtheit. Das liegt an der verbreiteten Vorstellung, als sei die Mathematik eine Fortsetzung oder Steigerung der Rechenkunst. Dieser Vorstellung soll unser Buch entgegenwirken, ... “

Le présent livre est dû à la plume du grand géomètre, décédé prématurément, que fut Stephan Cohn-Vossen. Le résultat est, répétons-le, est extraordinaire. Non seulement, à son époque, Hilbert a réussi à atteindre les futurs mathématiciens ainsi qu’une audience beaucoup plus large, mais ce livre continue aujourd’hui une

carrière unique et permanente. Tous les collègues que j'ai interrogés aiment, admirent ce livre. Ils ne manquent guère une occasion d'en recommander la lecture à leurs étudiants. Ceci pour les gens du sérail. Mais il continue à atteindre un large public : à l'Université de Pennsylvanie, par exemple, il figure au catalogue de cinq bibliothèques en charge de disciplines différentes, et mieux, il a disparu dans quatre d'entre elles!

Comment expliquer ce succès, cette longévité ? Voici un premier ensemble de raisons, dont le lecteur aura la joie de vérifier le bien-fondé quand il en se plongeant dans l'ouvrage. En 1920 la géométrie était déjà un corpus de connaissances très large. Pour choisir le matériel à présenter, Hilbert a donc du faire un choix draconien. «Enseigner, c'est choisir» a-t-on dit. Ce à quoi Voltaire ajoutait d'ailleurs : «L'art d'ennuyer, c'est celui de vouloir tout dire». Mais de là à pouvoir, à savoir faire le choix, quelle courage, quelle lucidité!

Hilbert a beau dire dans sa préface qu'il propose une promenade et non une marche avec un but, le livre est très fortement structuré : sous des apparences désinvolte il y court des leitmotifs sous-jacents. Et c'est un des plus grands plaisirs que donne sa lecture que de retrouver un même objet, un même concept, dans des contextes apparemment étrangers les uns aux autres. Pour ne donner qu'un exemple, le cas des quadriques homofocales est particulièrement saisissant.

Il y a aussi dans cet ouvrage un mélange très équilibré de propriétés seulement énoncées sans la moindre allusion à une démonstration et d'endroits où plus d'une page est consacrée à expliquer l'essence de la démonstration. C'est peut-être finalement ce remarquable mélange qui explique le succès de l'ouvrage auprès de lecteurs aussi variés.

Ceci n'explique qu'en partie sa longévité. Le lecteur pourrait en effet penser que la géométrie a beaucoup évolué depuis soixante ans, et ce qui en constituait tant le corps que l'essence en 1920 a, en un certain sens, complètement disparu. De plus les mathématiques ont incroyablement progressé en abstraction, dans leur maîtrise de structures très générales et toutes essentielles. Dans cette nouvelle donne, la géométrie est-elle devenue inutile ou à tout le moins un peu fanée?

Ce quoi croyant, cher lecteur, ne tombez-vous pas encore une fois dans le piège récurrent deux fois cité plus haut ? Laissez-moi argumenter quelque peu, pour éventuellement vous contredire. Je signale en premier lieu que le titre „Anschauliche Geometrie“ a été traduit en anglais par “Geometry and the Imagination”. Hilbert ne pouvait récuser un tel titre; c'est lui le héros de l'anecdote suivante :

It seems that there was a mathematician at Göttingen who became a novelist. “Why did he do that?” people at Göttingen marvelled. “How can a man who was a mathematician write novels?” “But that is completely simple,” Hilbert said. “He did not have enough imagination for mathematics, but he had enough for novels.”

Le lecteur attend probablement de nous maintenant que nous tentions de définir ce qu'est la géométrie aujourd'hui. Pour ce faire nous avons consulté, et ce depuis quelque temps déjà, de nombreux géomètres de grand talent. Il nous semble que les trois meilleures réponses que nous puissions offrir sont les suivantes. Nous les présentons par ordre de précision. Dieudonné écrivit en 1981 :

«En conclusion, peut-on dire que la Géométrie a perdu son identité? Au contraire, je pense qu'en éclatant au-delà de ses frontières traditionnelles, elle a révélé ses pouvoirs cachés, sa souplesse et sa faculté d'adaptation extraordinaire, devenant ainsi l'un des outils les plus universels et les plus utiles dans tous les secteurs des mathématiques.»

André Weil continuait ainsi le texte cité plus haut :

"The psychological aspects of true geometric intuition will perhaps never be cleared up. At one time it implied primarily the power of visualization in three-dimensional space. Now that higher-dimensional spaces have mostly driven out the more elementary problems, visualization can at best be partial or symbolic. Some degree of tactile imagination seems also to be involved. Whatever the truth of the matter, mathematics in our century would not have made such impressive progress without the geometric sense of Elie Cartan, Heinz Hopf, Chern, and a very few more. It seems safe to predict that such men will always be needed if mathematics is to go on as before."

Finalement il nous semble que la communication orale d'Eugenio Calabi qui suit est un parfait point d'orgue :

"Geometry is any branch of mathematics in which you can trace your primary source of information or intuition back to a sensorial experience."

Nous voudrions terminer enfin en donnant la parole ou presque, par la plume interposée d'Otto Blumenthal, à Hilbert lui-même. On trouve en effet dans le centre du livre, une section captivante, naïvement intitulée, comme pour donner le change : «onze propriétés de la sphère». Ici Hilbert a résumé, au lieu de disperser comme pour le cas les quadriques homofocales. Et voici ce que dit Blumenthal dans son *Lebensgeschichte* de Hilbert, et qui nous semble la meilleure conclusion possible à notre texte :

„Hier werden fast ohne Beweise, vielfach durch Demonstration am Modell, in reicher Fülle solche geometrischen Tatsachen aufgezeigt, die in tiefere Zusammenhänge einleiten können. Man nehme etwa als besonders bezeichnend den §32, Elf Eigenschaften der Kugel. Man verfolgt geradezu mit Spannung, welche Eigenschaften man da kennenlernen wird und zu welchen allgemeinen Fragenstellungen sie Anlaß geben. Wir Hilbertschüler aber sehen das freundliche, etwas schelmische Lächeln und hören die liebevolle Modulation der Stimme, mit der Hilbert an der Tafel gesagt hat: ‚Elf Eigenschaften der Kugel ... also elf Eigenschaften der Kugel.‘“

<http://www.springer.com/978-3-642-19947-9>

Anschauliche Geometrie

Hilbert, D.; Cohn-Vossen, S.

1996, XX, 364 S. Mit With an appendix by P. Alexandrov.,

Softcover

ISBN: 978-3-642-19947-9