

II. Kapitel

Transformationen und lineare Gleichungen

Lineare Transformationen spielen nicht nur in den Anwendungen eine bedeutsame Rolle, sondern sind auch grundlegend für den weiteren Ausbau des Matrizenkalküls, insbesondere im Hinblick auf gewisse *Normalformen*; das sind solche Matrizen, die eine maximale Anzahl von Nullen neben einer minimalen Anzahl von signifikanten Elementen enthalten.

Man unterscheidet *freie* und *gebundene Transformationen*. Die ersteren beziehen sich auf eine Matrix A allein und ermöglichen unter anderem das Auflösen linearer Gleichungen (Abschnitt 7), während die im Abschnitt 10 besprochenen gebundenen Transformationen simultan auf zwei Matrizen A und B , oder, wie man auch sagt, auf ein *Matrizenpaar* $A; B$ angewendet werden. Diese bilden die Grundlage für das im IV. Kapitel behandelte Eigenwertproblem.

Eine zentrale Stellung in Theorie und Praxis der Transformationen nimmt der Gaußsche Algorithmus mit seinen Modifikationen von Jordan, sowie Banachiewicz bzw. Cholesky ein; diese bilden den Inhalt von Abschnitt 6. Einige Ausführungen von mehr theoretischem Interesse, nämlich Fragen über lineare Abhängigkeit und Rang einer Matrix (Abschnitt 9) und ein Exkurs über Orthogonalsysteme (Abschnitt 10) beschließen das Kapitel.

5 Freie Transformationen

• 5.1 Ein- und beidseitige Transformationen

Gegeben sei eine im allgemeinen rechteckige Matrix A der Höhe m und der Breite n . Es sei L (wie links, left) eine quadratische Matrix der Ordnung m , die wir wie in (1.7) zeilenweise aufschreiben

$$L = \begin{pmatrix} l^1 \\ l^2 \\ \vdots \\ l^m \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Die Produktbildung

$$LA = \overset{L}{A} \quad (2)$$

heißt dann eine linksseitige Transformation. Dies ist nichts anderes als eine Linearkombination der Zeilen von A , denn es wird nach (1)

$$\begin{matrix} \text{L} \\ \mathbf{A} \end{matrix} = \mathbf{L}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} l^1 \mathbf{A} \\ l^2 \mathbf{A} \\ \vdots \\ l^m \mathbf{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l^1 a_1 & l^1 a_2 & \dots & l^1 a_n \\ l^2 a_1 & l^2 a_2 & \dots & l^2 a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l^m a_1 & l^m a_2 & \dots & l^m a_n \end{pmatrix}, \quad (3)$$

wo also die einzelnen Elemente der transformierten Matrix als die in (2.4a) erklärten Skalarprodukte erscheinen:

$$\begin{matrix} \text{L} \\ a_{jk} \end{matrix} = l^j a_k, \quad \begin{cases} j = 1, 2, \dots, m \\ k = 1, 2, \dots, n \end{cases}. \quad (4)$$

Analog dazu transformieren wir nun die Spalten von \mathbf{A} . Es sei \mathbf{R} (wie rechts, right) eine quadratische Matrix der Ordnung n , aufgelöst in ihre n Spalten

$$\mathbf{R} = (r_1 \quad r_2 \quad \dots \quad r_n), \quad (5)$$

dann bewirkt die Multiplikation der Matrix \mathbf{A} von rechts mit \mathbf{R} eine Linearkombination der Spalten von \mathbf{A}

$$\begin{matrix} \text{R} \\ \mathbf{A} \end{matrix} = \mathbf{A}\mathbf{R} = (\mathbf{A}r_1 \quad \mathbf{A}r_2 \quad \dots \quad \mathbf{A}r_n) = \begin{pmatrix} a^1 r_1 & a^1 r_2 & \dots & a^1 r_n \\ a^2 r_1 & a^2 r_2 & \dots & a^2 r_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^m r_1 & a^m r_2 & \dots & a^m r_n \end{pmatrix}, \quad (6)$$

und hier sind die Elemente der transformierten Matrix die Skalarprodukte

$$\begin{matrix} \text{R} \\ a_{jk} \end{matrix} = a^j r_k, \quad \begin{cases} j = 1, 2, \dots, m \\ k = 1, 2, \dots, n \end{cases}. \quad (7)$$

In beiden Fällen stimmt das Format der transformierten Matrix mit dem Format der Originalmatrix überein, wie das nachfolgende Schema zeigt:

$$\begin{array}{ccc} & & n \\ & m & \boxed{\mathbf{A}} \\ m & \boxed{\mathbf{L}} & \boxed{\mathbf{L}\mathbf{A}} & m \end{array} \quad (a) \quad \begin{array}{ccc} & & n \\ & n & \boxed{\mathbf{R}} \\ n & \boxed{\mathbf{A}} & \boxed{\mathbf{A}\mathbf{R}} & m \end{array} \quad (b) \quad (8)$$

Wir führen nun beide Transformationen (gleichgültig in welcher Reihenfolge) nacheinander aus

$$\boxed{\mathbf{L}\mathbf{A}\mathbf{R} = \tilde{\mathbf{A}}}. \quad (9)$$

Eine solche beidseitige Transformation wird als *Äquivalenztransformation* bezeichnet. Zur numerischen Durchführung gehen wir entweder nach dem Schema der Abb. 2.2 vor, beginnend mit der Matrix R (10a), oder nach dem Schema der Abb. 2.3, beginnend mit der Matrix L (10b),

		R
	A	AR
L	LAR	

(a)

	A	R
L	LA	LAR

(b)

(10)

Auch jetzt haben, ebenso wie bei einer einseitigen Transformation, die Originalmatrix A und die Transformierte \tilde{A} dasselbe Format.

Die Multiplikation der Gleichung (9) von links mit dem liegenden Einheitsvektor e^j und von rechts mit dem stehenden Einheitsvektor e_k ergibt

$$e^j L A R e_k = e^j \tilde{A} e_k . \quad (11)$$

Hier steht auf der linken Seite die Zeile $e^j L = l^j$ bzw. die Spalte $R e_k = r_k$ und auf der rechten Seite das Element \tilde{a}_{jk} der transformierten Matrix \tilde{A} ; es ist somit

$$\boxed{\tilde{a}_{jk} = l^j A r_k} , \quad \left\{ \begin{array}{l} j = 1, 2, \dots, m \\ k = 1, 2, \dots, n \end{array} \right\} . \quad (12)$$

Solche sowohl in l^j wie in r_k linearen Skalare heißen *Bilinearformen*. Die transformierte Matrix wird damit, wenn wir die $m \cdot n$ Gleichungen (12) explizit aufschreiben,

$$\tilde{A} = L A R = \begin{pmatrix} l^1 A r_1 & l^1 A r_2 & \dots & l^1 A r_n \\ l^2 A r_1 & l^2 A r_2 & \dots & l^2 A r_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l^m A r_1 & l^m A r_2 & \dots & l^m A r_n \end{pmatrix} . \quad (13)$$

Schließlich halten wir noch fest, daß die einseitigen Transformationen auch als Sonderfall der Äquivalenztransformation aufgefaßt werden können, denn es ist ja

$$L A I_n = L A , \quad I_m A R = A R . \quad (14)$$

Hier wurde also einmal $R = I_n$ und ein andermal $L = I_m$ gesetzt, und in der Tat gehen damit die Bilinearformen (12) in die Skalarprodukte (4) bzw. (7) über. Ja, wir können sogar noch spezieller $L = I_m$ und $R = I_n$ gleichzeitig setzen, das gibt die sogenannte triviale Transformation (die in Wahrheit gar keine ist)

$I_m A I_n = A$. Nun sind die Zeilen von I_m die Einheitsvektoren e^j und die Spalten von I_n die Einheitsvektoren e_k ; somit geht (12) über in die *Selbstdarstellung*

$$a_{jk} = e^j A e_k, \quad \begin{cases} j = 1, 2, \dots, m \\ k = 1, 2, \dots, n \end{cases}, \quad (15)$$

die uns für rein theoretische Formulierungen noch nützliche Dienste leisten wird.

Es folgt ein **Beispiel** zur Äquivalenztransformation mit $m = 3$ und $n = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2i \\ 7 & 5 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (a)$$

Wir rechnen nach dem Schema (10a) von oben nach unten

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} R \\ A \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2i \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 15 \\ -2 & -5+2i \\ 14 & 40 \end{pmatrix} AR \\ L \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & 35+2i \\ 18 & 45-6i \\ 30 & 80-4i \end{pmatrix} LAR = \tilde{A} \end{aligned} \quad (b)$$

und zur Kontrolle nach dem Schema (10b) von links nach rechts

$$\begin{aligned} & A \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2i \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} R \\ L \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 5+2i \\ 9 & -6i \\ 15 & 5-4i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & 35+2i \\ 18 & 45-6i \\ 30 & 80-4i \end{pmatrix} LAR = \tilde{A}. \end{aligned} \quad (c)$$

Schließlich ermitteln wir noch eine Bilinearform (12), etwa das Element $\tilde{a}_{22} = l^2 A r_2$

$$A \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2i \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} r_2 \quad (d)$$

$$l^2 (2 \ -3 \ 0) \begin{pmatrix} 9 & -6i \end{pmatrix} (45-6i) = \tilde{a}_{22},$$

vergleiche dazu das Element \tilde{a}_{22} in der Matrix b) bzw. c).

Zu diesem Beispiel ist nicht uninteressant zu bemerken, daß die Matrix L singular ist, doch wird der Mechanismus der Transformation davon in keiner Weise berührt.

• 5.2 Reguläre Transformationen

Wir setzen ab jetzt voraus, daß die beiden quadratischen Transformationsmatrizen L und R regulär seien; nach Abschnitt 1.6 sind dann ihre Determinanten von Null verschieden

$$\boxed{\det L \neq 0, \quad \det R \neq 0} . \quad (16)$$

Neben der schon in (9) betrachteten, jetzt aber ausdrücklich als regulär vorausgesetzten

$$\boxed{\text{Äquivalenztransformation} \quad LAR = \tilde{A}} \quad (17)$$

ist noch ein Sonderfall von größter Wichtigkeit. Es sei A quadratisch, $m = n$, dann sind auch L und R und damit auch die transformierte Matrix von der gleichen Ordnung n . Wir setzen jetzt

$$\boxed{L = R^* \Leftrightarrow R = L^*} \quad (18)$$

(im Reellen somit $L = R^T \Leftrightarrow R = L^T$), dann geht die Äquivalenztransformation (17) über in die

$$\boxed{\text{Kongruenztransformation} \quad LAL^* = \hat{A}} . \quad (19)$$

Sie wird mit Vorteil besonders dann angewendet, wenn A hermitesch ist, denn dann ist auch die Transformierte \hat{A} ihrerseits hermitesch, wie leicht einzusehen. Nach der aufs Komplexe übertragenen Transpositionsregel (2.9a) wird nämlich

$$\hat{A}^* = (LAL^*)^* = L^{**} A^* L^* = \hat{A} , \quad (20)$$

wo wir $L^{**} = L$ und $A^* = A$ eingesetzt haben.

Beispiel: $n = 2$.

$$\begin{aligned} A & \begin{pmatrix} 3 & 2+i \\ 2-i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} L^* = L^T \\ L & \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4+i & 4+2i \\ 5-i & 2+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 8+3i \\ 8-3i & 7 \end{pmatrix} LAL^T = \hat{A} ; \quad \hat{A} = \hat{A}^* . \end{aligned} \quad (a)$$

• 5.3 Die drei Grundoperationen

Wir lernen jetzt drei spezielle, als Grundoperationen bezeichnete Transformationen kennen, aus denen sich, wie wir noch sehen werden, jede reguläre Transfor-

mation einer rechteckigen oder quadratischen Matrix multiplikativ zusammensetzt. Um die Wirkung dieser Operationen zu erkennen, ordnen wir bei *Zeilenoperationen* die Einheitsmatrix I_m links von A und bei *Spaltenoperationen* die Einheitsmatrix I_n unterhalb von A an und führen die Operationen an den so entstehenden Doppelmatrizen gemeinsam aus.

Grundoperation Ia. Umordnen der Zeilen von A .

$$\begin{array}{|c|c|} \hline m & n \\ \hline I_m & A \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline m & n \\ \hline P_z & P_z A \\ \hline \end{array} \quad (21)$$

Grundoperation Ib. Umordnen der Spalten von A .

$$\begin{array}{|c|} \hline n \\ \hline A \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|} \hline n \\ \hline A P_s \\ \hline \end{array} . \quad (22)$$

Aus I_m entsteht eine *Permutationsmatrix* P_z der Ordnung m , aus I_n eine Permutationsmatrix P_s der Ordnung n . Jede Zeile und jede Spalte enthält außer Nullen genau ein Element 1, aber eben nicht in der regelmäßigen Diagonalanordnung der Einheitsmatrix I , aus der P hervorgegangen ist. Schreibt man unter jede Spalte der Matrix P die Nummer z_j jener Zeile, in welcher das Element 1 steht, so hat man in der so entstehenden *Indexliste* eine Kurzdarstellung der Permutationsmatrix. So bedeutet die Liste $[1 \ 2 \ \dots \ n]$ die n -reihige Einheitsmatrix, dagegen die Liste $[n \ n-1 \ \dots \ 1]$ die gespiegelte Einheitsmatrix, in welcher die Einsen in der von links unten nach rechts oben verlaufenden Diagonalen stehen. Darüber hinaus legt die Indexliste das Vorzeichen der Determinante von P fest, die nach dem Entwicklungssatz nur einen der beiden Werte $+1$ oder -1 annehmen kann, und diesen Wert findet man folgendermaßen. Stehen links von z_j Zahlen, die größer als z_j sind, so heißt deren Anzahl die Kennmarke α_j ; auf diese Weise entsteht die Doppelzeile

$$\begin{array}{c|cccc} \text{Zeilenindex } z_j & z_1 & z_2 & z_3 & \dots & z_n \\ \hline \text{Kennmarke } \alpha_j & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n \end{array} . \quad (23)$$

Damit ist die Determinante

$$\det P_n = (-1)^v \quad \text{mit} \quad v = \sum_{j=1}^n \alpha_j . \quad (24)$$

Dazu ein **Beispiel** mit $n = 5$.

$$P_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|ccccc} z_j & 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \\ \hline \alpha_j & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}$$

$$\sum \alpha_j = v = 3 . \quad \det P_5 = (-1)^3 = -1 .$$

Die Inverse einer Permutationsmatrix ist gleich ihrer Transponierten, wie durch Nachrechnen leicht zu bestätigen,

$$\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T . \quad (25)$$

Einfachster Sonderfall einer Permutation ist das Vertauschen zweier Zeilen oder Spalten, dafür gilt stets $\det \mathbf{P} = -1$.

Grundoperation IIa. Multiplikation der Zeilen von \mathbf{A} mit nichtverschwindenden Skalaren $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ (worauf die Pfeile hinweisen)

$$\begin{array}{l} \alpha_1 \rightarrow \\ \alpha_2 \rightarrow \\ \dots \\ \alpha_m \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 a_{11} & \alpha_1 a_{12} & \dots & \alpha_1 a_{1n} \\ \alpha_2 a_{21} & \alpha_2 a_{22} & \dots & \alpha_2 a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_m a_{m1} & \alpha_m a_{m2} & \dots & \alpha_m a_{mn} \end{pmatrix} . \quad (26)$$

Aus \mathbf{I}_m wird somit die Diagonalmatrix (1.21) mit den m Elementen α_j

$$\mathbf{D}_L = \text{Diag} \langle \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_m \rangle . \quad (27)$$

Grundoperation IIb. Multiplikation der Spalten von \mathbf{A} mit nichtverschwindenden Skalaren $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$.

$$\begin{array}{cccc} \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11}\beta_1 & a_{12}\beta_2 & \dots & a_{1n}\beta_n \\ a_{21}\beta_1 & a_{22}\beta_2 & \dots & a_{2n}\beta_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}\beta_1 & a_{m2}\beta_2 & \dots & a_{mn}\beta_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \beta_n \end{pmatrix} . \quad (28)$$

Aus \mathbf{I}_n wird somit die Diagonalmatrix

$$\mathbf{D}_R = \text{Diag} \langle \beta_1 \quad \beta_2 \quad \dots \quad \beta_n \rangle . \quad (29)$$

Beide Operationen und ihre Auswirkungen haben wir in anderer Bezeichnung bereits in (2.15a) und (2.15b) kennengelernt, wenn auch nicht in diesem Zusammenhang.

Die Determinante einer Diagonalmatrix

$$\mathbf{D} = \text{Diag} \langle d_{11} \ d_{22} \dots d_{nn} \rangle \quad (30)$$

ist nach dem Entwicklungssatz gleich dem Produkt ihrer Hauptdiagonalelemente

$$\det \mathbf{D} = d_{11} \cdot d_{22} \cdots d_{nn} \ , \quad (31)$$

und da die Faktoren α_j und β_k ausdrücklich als von Null verschieden vorausgesetzt wurden, gilt

$$\det \mathbf{D}_L \neq 0 \ , \quad \det \mathbf{D}_R \neq 0 \ . \quad (32)$$

Die Inverse einer regulären Diagonalmatrix ist die Diagonalmatrix ihrer Kehrwerte

$$\mathbf{D}^{-1} = \text{Diag} \langle d_{11}^{-1} \ d_{22}^{-1} \dots d_{nn}^{-1} \rangle \ , \quad (33)$$

denn es ist offenbar

$$\mathbf{D} \mathbf{D}^{-1} = \text{Diag} \langle d_{11} d_{11}^{-1} \ d_{22} d_{22}^{-1} \dots d_{nn} d_{nn}^{-1} \rangle = \text{Diag} \langle 1 \ 1 \dots 1 \rangle = \mathbf{I}_n \ . \quad (34)$$

Grundoperation IIIa. Linearkombination der Zeilen von \mathbf{A} . Eine frei wählbare Zeile der Nummer μ , die sogenannte *Pivotzeile*, bleibt ungeändert. Die mit Faktoren $q_{j\mu}$ multiplizierte Pivotzeile wird zu den übrigen $m-1$ Zeilen addiert; mit den Zeilen \mathbf{a}^j von \mathbf{A} geschrieben ergibt dies

$$\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} q_{1\mu} \\ q_{2\mu} \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ q_{m\mu} \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} \mathbf{a}^1 \\ \mathbf{a}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}^\mu \\ \vdots \\ \mathbf{a}^m \end{matrix} \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 0 & \dots & q_{1\mu} & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & q_{2\mu} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & q_{m\mu} & \dots & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \mathbf{a}^1 + q_{1\mu} \mathbf{a}^\mu \\ \mathbf{a}^2 + q_{2\mu} \mathbf{a}^\mu \\ \vdots \\ \mathbf{a}^\mu \\ \vdots \\ \mathbf{a}^m + q_{m\mu} \mathbf{a}^\mu \end{matrix} \end{array} \right) \ . \quad (35)$$

Bei dieser Operation ist die Einheitsmatrix \mathbf{I}_m in den sogenannten *Spaltenelevator* übergegangen, den wir mit \mathbf{E}_μ bezeichnen wollen. Er besitzt nur eine signifikante Spalte, sonst aber die Einheitsvektoren \mathbf{e}_1 bis \mathbf{e}_m mit Ausnahme von \mathbf{e}_μ , an dessen Stelle die Spalte

$$\mathbf{q}_\mu = \begin{pmatrix} q_{1\mu} \\ q_{2\mu} \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ q_{m\mu} \end{pmatrix} \quad \text{Position } \mu \quad (36)$$

steht, neben welcher wir noch die restringierte Spalte

$$\dot{q}_\mu = q_\mu - e_\mu = \begin{pmatrix} q_{1\mu} \\ q_{2\mu} \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ q_{m\mu} \end{pmatrix} \text{ Position } \mu \quad (37)$$

eingeführen, die anstelle der Eins eine Null enthält. Mit Hilfe der Dyade

$$\dot{q}_\mu e^\mu = \begin{pmatrix} q_{1\mu} \\ q_{2\mu} \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ q_{m\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{1\mu} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & q_{2\mu} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & q_{m\mu} & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (38)$$

läßt sich der Spaltenelevator aus (35) dann folgendermaßen schreiben

$$\boxed{E_\mu = I_m + \dot{q}_\mu e^\mu} \quad , \quad (39)$$

womit sich die Operation (35) als Linearkombination der Zeilen von A kürzer so formulieren läßt

$$\tilde{A} = E_\mu A = (I_m + \dot{q}_\mu e^\mu) A = I_m A + \dot{q}_\mu e^\mu A = A + \dot{q}_\mu a^\mu \quad . \quad (40)$$

Multiplikation dieser Gleichung von links mit e^j und von rechts mit e_k ergibt nach (12) das Element in der Zeile j und der Spalte k der transformierten Matrix \tilde{A} als die Bilinearform

$$\tilde{a}_{jk} = e^j A e_k = e^j (A + \dot{q}_\mu a^\mu) e_k = e^j A e_k + e^j \dot{q}_\mu a^\mu e_k \quad , \quad (41)$$

und das ist zufolge $e^j A e_k = a_{jk}$ nach (15), ferner $e^j \dot{q}_\mu = q_{j\mu}$ und $a^\mu e_k = a_{\mu k}$

$$\tilde{a}_{jk} = a_{jk} + q_{j\mu} a_{\mu k} \quad . \quad (42)$$

Ist $a_{\mu k} = 0$, so bleibt das Element a_{jk} unverändert. Ist aber $a_{\mu k} \neq 0$, so folgt

$$\boxed{q_{j\mu} = \frac{1}{a_{\mu k}} (\tilde{a}_{jk} - a_{jk}) \quad a_{\mu k} \neq 0} \quad , \quad (43)$$

und dadurch ist $q_{j\mu}$ festgelegt, wenn man das Element \tilde{a}_{jk} der transformierten Matrix \tilde{A} vorschreibt. Das Element $a_{\mu k}$ wird als Pivotelement oder kurz als *Pivot* bezeichnet (le pivot = Angelpunkt, im Sinne der Mathematik Leitelement).

Grundoperation IIIb. Linearkombination der Spalten von A . Eine frei wählbare Spalte der Nummer v , die *Pivotspalte*, bleibt ungeändert. Die mit Faktoren p_{vk} multiplizierte Pivotspalte wird zu den übrigen $n-1$ Spalten hinzuaddiert, damit ergibt sich analog zu (35) die folgende Operation

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccc}
 & \begin{array}{c} \nearrow \\ \nwarrow \end{array} & & & \begin{array}{c} \nearrow \\ \nwarrow \end{array} & \\
 \begin{pmatrix} p_{v1} & p_{v2} & \dots & 1 & \dots & p_{vn} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} & \Rightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{v1} & p_{v2} & \dots & 1 & \dots & p_{vn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \\
 (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_v \ \dots \ a_n) & \Rightarrow & (a_1 + a_v p_{v1} \ a_2 + a_v p_{v2} \ \dots \ a_v \ \dots \ a_n + a_v p_{vn})
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (44)$$

Die Einheitsmatrix I_n ist durch diese Operation übergegangen in den *Zeilenelevator* ε_v . Dieser besitzt die signifikante Zeile der Nummer

$$p^v = (p_{v1} \ p_{v2} \ \dots \ 1 \ \dots \ p_{vn}) . \quad (45)$$

Mit der restringierten Zeile

$$\overset{\circ}{p}^v = p^v - e^v = (p_{v1} \ p_{v2} \ \dots \ 0 \ \dots \ p_{vn}) \quad (46)$$

schreibt sich dann analog zu (39) der Zeilenelevator als¹

$$\boxed{\varepsilon^v = I_n + e_v \overset{\circ}{p}^v} , \quad (47)$$

und daraus folgt auf ähnliche Weise wie in (40) bis (42) die transformierte Matrix (48) mit den Elementen (49)

$$\hat{A} = A + a_v \overset{\circ}{p}^v , \quad (48)$$

$$\hat{a}_{jk} = a_{jk} + a_{jv} p_{vk} \quad (49)$$

und weiter, sofern das Pivot a_{jv} als von Null verschieden vorausgesetzt wird,

¹ Da das große griechische Epsilon dem E Antiqua zum Verwechseln ähnlich ist, benutzen wir ausnahmsweise einen kleinen Buchstaben für eine Matrix.

$$p_{vk} = \frac{1}{a_{jv}} (\hat{a}_{jk} - a_{jk}) , \quad a_{jv} \neq 0 . \quad (50)$$

Kommen wir schließlich zur Determinante und zur Inversen der beiden Elevatoren. Wie durch Entwickeln nach der signifikanten Spalte bzw. Zeile leicht zu sehen, gilt

$$\det E_\mu = 1 , \quad \det \varepsilon^\nu = 1 , \quad (51)$$

und die Inversen sind

$$(E_\mu)^{-1} = I_m - \dot{q}_\mu e^\mu , \quad (\varepsilon^\nu)^{-1} = I_n - e_\nu \dot{p}^\nu , \quad (52)$$

denn es ist

$$E_\mu E_\mu^{-1} = (I_m + \dot{q}_\mu e^\mu)(I_m - \dot{q}_\mu e^\mu) = I_m - \underbrace{\dot{q}_\mu e^\mu \dot{q}_\mu e^\mu}_{q_{\mu\mu}} = I_m - q_{\mu\mu} \dot{q}_\mu e^\mu = I_m \quad (53)$$

zufolge $q_{\mu\mu} = 0$, und analog verläuft der Beweis für die Inverse von ε^ν .

Beispiel. Die Inversionsformel (52) ist zu bestätigen für $n = 3$ und $\nu = 2$

$$E_2^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -q_{12} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -q_{32} & 1 \end{pmatrix} \\ E_2 \begin{pmatrix} 1 & q_{12} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & q_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} I_3 .$$

Schließlich vereinbaren wir noch die folgende Kurzschreibweise für die Multiplikation mit einem Elevator, bei welcher allein die signifikante Spalte bzw. Zeile aufgeschrieben wird:

$$\text{Spaltenelevator } E_\mu A : \boxed{q_\mu \mid A} , \quad \text{Zeilenelevator } A \varepsilon^\nu : \boxed{A \mid p^\nu} , \quad (54)$$

wobei die signifikanten Einsen an der Stelle $\mu\mu$ bzw. $\nu\nu$ durch Kursivdruck hervorgehoben werden.

Beispiel. Spaltenelevator $E_2 A = \bar{A}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 2 & 0 \\ i & -2 \end{pmatrix} , \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} , \quad q_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} . \quad (a)$$

Die vollständige Durchführung als Matrizenmultiplikation steht in b), die Kurzfassung in c)

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 10 & \\ \hline 2 & 0 & \\ \hline i & -2 & \\ \hline \end{array} \\ A \end{array} & & \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 10 & \\ \hline -3 & 2 & 0 \\ \hline 4 & i & -2 \\ \hline \end{array} \\ q_2 \quad A \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline -3 & 10 & \\ \hline 2 & 0 & \\ \hline 8+i & -2 & \\ \hline \end{array} \\ E_2 A \end{array} . \quad (c)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & -3 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 4 & 1 \\ \hline \end{array} \\ E_2 \end{array} & & \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline -3 & 10 & \\ \hline 2 & 0 & \\ \hline 8+i & -2 & \\ \hline \end{array} \\ E_2 A \end{array}
 \end{array}$$

• 5.4 Das Generalschema einer Äquivalenztransformation

Wir kommen nun zur praktischen Durchführung einer Äquivalenztransformation. Hier unterscheidet man die *explizite* und *implizite* Vorgehensweise. Wir schildern zunächst die explizite, die im sogenannten *Generalschema* durchgeführt wird, worunter wir folgendes verstehen. Man ordnet links neben A die Einheitsmatrix I_m und unterhalb von A die Einheitsmatrix I_n an und füllt das untere linke Feld durch Nullen auf. Auf diese Weise entsteht eine quadratische reguläre Über- oder *Hypermatrix* U der Ordnung $m+n$, an welcher alle Zeilen- und Spaltenoperationen durchgeführt werden,

$$U = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|} \hline I_m & A \\ \hline O & I_n \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} m \\ n \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|} \hline L & \tilde{A} \\ \hline O & R \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} m \\ n \end{array} = \tilde{U} , \quad (55)$$

ein Vorgang, der sich beliebig oft wiederholen läßt. Im akuten Stadium der Rechnung stehen in \tilde{U} stets die beiden Transformationsmatrizen L und R zusammen mit \tilde{A} , und immer gilt $LAR = \tilde{A}$. Beim Tischrechnen wird man die Nullmatrix unten links fortlassen, da sie während der Transformation unverändert bleibt, doch ist es für programmierbare Computer bequem, die gesamte Hypermatrix U mitzuführen.

Erstes Beispiel. An einer Matrix A sind einige Grundoperationen im Generalschema durchzuführen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \quad (a)$$

1. IIa. Die Zeilen von A sind mit den Skalaren $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = -1$ und $\alpha_3 = 2$ zu multiplizieren.
2. IIIa. Pivotzeile ist die dritte Zeile, $q_{13} = -3$, $q_{23} = 2$. Es ist somit die mit 2 multiplizierte dritte Zeile zur zweiten und die mit -3 multiplizierte dritte Zeile zur ersten Zeile zu addieren, wobei die Reihenfolge beliebig ist. Man achte auf die kursiv gesetzte l im Spaltenelevator.
3. Ib. Die beiden Spalten der aktuellen Matrix sind zu vertauschen.
4. IIIb. Pivotspalte ist die erste Spalte. Es ist $p_{12} = 2$. Die mit 2 multiplizierte erste Spalte ist zur zweiten zu addieren.
5. IIIa. Pivotzeile ist die zweite Zeile, $q_{12} = 0$, $q_{13} = -1$. Die mit -1 multiplizierte zweite Zeile ist zur dritten zu addieren.

Das folgende Schema zeigt die numerische Durchführung dieser fünf Grundoperationen.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 1. & A & \Rightarrow \\
 \begin{array}{cc|cc}
 3. & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\
 -1. & 0 & 1 & 0 & 1 & -3 \\
 2. & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 \hline
 I_3 & & & & 1 & 0 \\
 I_2 & & & & 0 & 1
 \end{array}
 & \Rightarrow 2. & \Rightarrow 3. \\
 \begin{array}{cc|cc}
 -3 & 3 & 0 & 0 & 6 & 0 \\
 2 & 0 & -1 & 0 & -1 & 3 \\
 I & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\
 \hline
 & & & & 1 & 0 \\
 & & & & 0 & 1
 \end{array}
 & \Rightarrow & \begin{array}{cc|cc}
 3 & 0 & -6 & 6 & -6 & -6 \\
 0 & -1 & 4 & -1 & 7 & 7 \\
 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\
 \hline
 & & & & 1 & 0 \\
 & & & & 0 & 1
 \end{array}
 \Rightarrow (b)
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 4. & \Rightarrow & 5. & \Rightarrow & \text{Ergebnis} \\
 \begin{array}{cc|cc}
 3 & 0 & -6 & -6 & 6 \\
 0 & -1 & 4 & 7 & -1 \\
 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\
 \hline
 & & & 0 & 1 \\
 & & & 1 & 0 \\
 & & & I & 2
 \end{array}
 & \Rightarrow & \begin{array}{cc|cc}
 0 & 3 & 0 & -6 & -6 & -6 \\
 I & 0 & -1 & 4 & 7 & 13 \\
 -1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 4 \\
 \hline
 & & & 0 & 1 \\
 & & & 1 & 2
 \end{array}
 & \Rightarrow & \begin{array}{cc|cc}
 3 & 0 & -6 & -6 & -6 & -6 \\
 0 & -1 & 4 & 7 & 13 & 13 \\
 0 & 1 & -2 & -5 & -9 & -9 \\
 \hline
 L & & & 0 & 1 \\
 R & & & 1 & 2
 \end{array}
 LAR = \bar{A} .
 \end{array}
 \end{array}$$

Zur Kontrolle rechnet man explizit $LAR = \bar{A}$.

Nachdem wir uns mit dem Mechanismus der Transformation vertraut gemacht haben, kommen wir nun zur Kernfrage, nämlich der Wahl der Elemente \tilde{a}_{jk} (43) bei Zeilenkombination bzw. der Elemente \hat{a}_{jk} (50) bei Spaltenkombination. Diese können beliebig vorgegeben werden, wodurch die Elemente $q_{j\mu}$ bzw. p_{vk} festgelegt sind. Allerdings kann in jeder Zeile und Spalte nur ein einziges Element a_{jk} vorgegeben werden, wie man leicht einsieht.

Zweites Beispiel. In der Matrix A soll das Element $a_{12} = 5$ in $\tilde{a}_{12} = -11$ und das Element $a_{34} = 12$ in $\tilde{a}_{34} = 0$ durch Zeilenkombination überführt werden

$$\begin{array}{c}
 q_2 \begin{array}{c|cccc}
 q_{12} & 3 & 5 & 9 & 0 \\
 I & 4 & 10 & 2 & -8 \\
 q_{32} & 1 & 1 & 1 & 12
 \end{array} A . \quad (a)
 \end{array}$$

Da die zu transformierenden Elemente in der 1. und 3. Zeile stehen, ist die zweite Zeile Pivotzeile. Mit der Spalte q_2 des Zeilenelevators E_2 wird

$$5 + 10q_{12} = -11, \quad 12 + (-8)q_{32} = 0, \quad (b)$$

und daraus berechnet sich $q_{12} = -1,6$ und $q_{32} = 1,5$, was man natürlich auch aus (43) hätte direkt entnehmen können. Anschließend erfolgt die Transformation, die in der Tat das Verlangte leistet:

$$\begin{array}{c|cccc}
 -1,6 & 3 & 5 & 9 & 0 \\
 I & 4 & 10 & 2 & -8 \\
 1,5 & 1 & 1 & 1 & 12
 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cccc|c}
 -3,4 & -11 & 5,8 & 12,8 & \\
 4 & 10 & 2 & -8 & \\
 7 & 16 & 4 & 0 &
 \end{array} . \quad (c)$$

• 5.5 Das Pivotkreuz

Eine der wichtigsten numerischen Konfigurationen ist das *Pivotkreuz*, das folgendermaßen definiert ist. Man wählt ein von Null verschiedenes Element a_{jk} der Matrix A als Pivot und schreibt alle übrigen Elemente der Spalte k und der Zeile j der transformierten Matrix $A_{tr.}$ vor. Damit sind dann die Elevatoren E_k und ε^j eindeutig festgelegt.

Ein **Beispiel** mit $m = 3$, $n = 2$. Pivot sei $a_{11} = 3$, das Pivotkreuz wird festgelegt durch die Vorgabe von $\tilde{a}_{12} = 10$, $\tilde{a}_{21} = -1$ und $\tilde{a}_{31} = 1$.

$$A = \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 5 \\ \hline 2 & -1 \\ \hline 0 & 3 \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline I & 3 & 5 \\ \hline q_{21} & 2 & -1 \\ \hline q_{31} & 0 & 3 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 10 \\ \hline -1 & \tilde{a}_{22} \\ \hline 1 & \tilde{a}_{32} \\ \hline \end{array} = A_{tr.} \quad (a)$$

$\begin{array}{|c|} \hline I \quad p_{12} \\ \hline \end{array}$

Ohne die Formeln (43) und (50) explizit zu benutzen (der Leser führe dies aber zur Kontrolle durch), bekommen wir

a) Zeilenkombination:

$$\text{zweite Zeile: } 2 + q_{21} \cdot 3 = -1 \rightarrow q_{21} = -1$$

$$\text{dritte Zeile: } 0 + q_{31} \cdot 3 = 1 \rightarrow q_{31} = 1/3$$

(b)

b) Spaltenkombination:

$$\text{zweite Spalte: } 5 + p_{12} \cdot 3 = 10 \rightarrow p_{12} = 5/3.$$

(c)

Erste Durchführung. Zuerst Zeilen-, dann Spaltenkombination.

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline I & 3 & 5 \\ \hline -1 & 2 & -1 \\ \hline 1/3 & 0 & 3 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 5 \\ \hline -1 & -6 \\ \hline 1 & 14/3 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 10 \\ \hline -1 & -23/3 \\ \hline 1 & 19/3 \\ \hline \end{array} \quad (d)$$

$\begin{array}{|c|} \hline I \quad 5/3 \\ \hline \end{array}$

Zweite Durchführung. Zuerst Spalten-, dann Zeilenkombination.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 5 \\ \hline 2 & -1 \\ \hline 0 & 3 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline I & 3 & 10 \\ \hline -1 & 2 & 7/3 \\ \hline 1/3 & 0 & 3 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 10 \\ \hline -1 & -23/3 \\ \hline 1 & 19/3 \\ \hline \end{array} \quad (e)$$

$\begin{array}{|c|} \hline I \quad 5/3 \\ \hline \end{array}$

Man könnte nun daran denken, nach Herstellung eines Pivotkreuzes ein weiteres vorzuschreiben. Man sieht aber sofort ein, daß dadurch im allgemeinen das erste Kreuz ganz oder teilweise wieder zerstört wird; mit anderen Worten, es gelingt im allgemeinen nicht, durch eine Folge von Pivotkreuzen eine Matrix A in eine vorgegebene Matrix $A_{tr.}$ zu überführen. Dies gelingt nur, wenn alle Elemente des Kreu-

zes (mit Ausnahme des Pivots selber natürlich) zu Null gemacht werden, weil eine Linearkombination von Nullen wieder nur aus Nullen bestehen kann, und auf dieser Tatsache beruht die Herstellbarkeit der Normalform einer Matrix, der wir uns als nächstes zuwenden.

• 5.6 Die Normalform einer Matrix

Ist A eine beliebige Matrix, so gelingt stets die spezielle Äquivalenztransformation auf die *Normalform*

$$LAR = \tilde{A} = N_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (56)$$

in leichtverständlicher Blockschreibweise (siehe dazu Abschnitt 22.1), wo oben links in N_r die r -reihige Einheitsmatrix I_r steht. Zum Beispiel wird für $m = 4$, $n = 6$ und $r = 2$

$$N_r = \begin{array}{c|cccc} \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} . \quad (57)$$

Die Anzahl r der Einsen ist gleich dem in (1.27) eingeführten Rang der Matrix N_r , und dieser ist, wie wir im Abschnitt 9.1 noch zeigen werden, gleich dem Rang der Originalmatrix A .

Die Matrix A sei nun hermitesch. Dann gelingt stets eine Kongruenztransformation

$$LAL^* = \hat{A} = \hat{N}_r = \begin{pmatrix} D_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad (58)$$

wo D_r eine Diagonalmatrix der Ordnung r ist, die p mal das Element $+1$ und q mal das Element -1 enthält, siehe dazu (11.21). Ist $r = n$, so ist A regulär. Sind darüber hinaus alle n Hauptdiagonalelemente von \hat{N}_r gleich $+1$ (-1), so heißt die hermitesche Matrix *positiv (negativ) definit*.

• 5.7 Das vollständige System von Elevatoren

Ein System von m Spaltenelevatoren E_μ heißt *vollständig*, wenn seine m Spalten q_μ , zusammengefaßt zu einer Matrix Q , die folgenden Eigenschaften aufweisen

$$\mathbf{Q} = (q_1 \ q_2 \ q_3 \ \dots \ q_m) = \begin{pmatrix} 1 & q_{12} & q_{13} & \dots & q_{1m} \\ q_{21} & 1 & q_{23} & \dots & q_{2m} \\ q_{31} & q_{32} & 1 & \dots & q_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{m1} & q_{m2} & q_{m3} & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (59)$$

oder auch mit den restringierten Spalten (36a) geschrieben

$$\mathbf{Q} = (q_1 \ q_2 \ q_3 \ \dots \ q_m) = \mathbf{I}_m + (\dot{q}_1 \ \dot{q}_2 \ \dot{q}_3 \ \dots \ \dot{q}_m) . \quad (60)$$

Wir sehen: wesentlich ist, daß die (zur Hervorhebung kursiv gesetzten) Einsen auf der Hauptdiagonale – und nicht anders verteilt – in der Matrix \mathbf{Q} auftreten.

Analog dazu ist ein vollständiges System von n Zeilenelevatoren ε^v von der Art

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p^1 \\ p^2 \\ p^3 \\ \dots \\ p^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & p_{12} & p_{13} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & 1 & p_{23} & \dots & p_{2n} \\ p_{31} & p_{32} & 1 & \dots & p_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (61)$$

oder

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p^1 \\ p^2 \\ p^3 \\ \dots \\ p^n \end{pmatrix} = \mathbf{I}_n + \begin{pmatrix} \dot{q}^1 \\ \dot{q}^2 \\ \dot{q}^3 \\ \dots \\ \dot{q}^n \end{pmatrix} . \quad (62)$$

Wir definieren nun eine geordnete *absteigende Folge* von Elevatoren durch die schon in (2.16d) eingeführten normierten Dreiecksmatrizen

$$\mathbf{Q} = \Delta_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ q_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ q_{31} & q_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{m1} & q_{m2} & q_{m3} & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (63)$$

bzw.

$$\mathbf{P} = \nabla_N = \begin{pmatrix} 1 & p_{12} & p_{13} & \dots & p_{1n} \\ 0 & 1 & p_{23} & \dots & p_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & p_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} . \quad (64)$$

Die Folge ist dadurch gekennzeichnet, daß in der Spalte q_μ an den Stellen $1, 2, \dots, \mu-1$ lauter Nullen stehen, und das Analoge gilt für die Zeilen p^v . Eine absteigende Folge kann aber auch ungeordnet sein, zum Beispiel wird für $m = 4$

$$Q = (q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4) = \begin{pmatrix} 1 & q_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ q_{31} & q_{32} & 1 & q_{34} \\ q_{41} & q_{42} & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\begin{matrix} & \zeta_2 & \zeta_1 & \zeta_3 & \zeta_4 \end{matrix}$$

Man erkennt hier das gleiche Bildungsgesetz wie in (63): die Spalte q_{ζ_1} ist vollbesetzt, q_{ζ_2} hat an der Stelle ζ_1 eine Null, q_{ζ_4} zwei Nullen, nämlich an den bereits vergebenen Stellen ζ_1 und ζ_2 , und so fort, und das Analoge gilt für die Zeilen p^v . Um diese Zuordnung augenfällig zu machen, legen wir zwei Indexlisten an

$$\begin{array}{c|cccc} \mu & 1 & 2 & 3 & \dots & m \\ \hline \text{Spaltenindex} & \zeta_1 & \zeta_j & \zeta_k & \dots & \zeta_s \end{array} \quad (65)$$

bzw.

$$\begin{array}{c|cccc} v & 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \hline \text{Zeilenindex} & \sigma_1 & \sigma_j & \sigma_k & \dots & \sigma_t \end{array} \quad (66)$$

Für das obige Beispiel lautet somit die Indexliste

$$\begin{array}{c|cccc} \mu & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \text{Spaltenindex} & \zeta_2 & \zeta_1 & \zeta_3 & \zeta_4 \end{array} \cdot$$

Für die geordneten Folgen (63) und (64) ist offenbar $\zeta_j = j$ und $\sigma_k = k$. Der Leser beachte aber, daß die ungeordneten Folgen keineswegs aus den geordneten durch bloße Zeilen- und/oder Spaltenumordnungen hervorgehen.

Wir bilden nun das Produkt der Elevatoren einer absteigenden Folge

$$K = E_{\zeta_1} E_{\zeta_2} \dots E_{\zeta_{m-1}} E_{\zeta_m} \quad (67)$$

bzw.

$$M = \varepsilon_{\sigma_1} \varepsilon_{\sigma_2} \dots \varepsilon_{\sigma_{n-1}} \varepsilon_{\sigma_n} \quad (68)$$

und stellen durch Ausmultiplizieren fest, daß

$$\boxed{K = Q, \quad M = P} \quad (69)$$

ist. Mit anderen Worten, die Produkte K und M brauchen explizit gar nicht ausgeführt zu werden, sondern ergeben sich durch einfaches Anschreiben der Spalten

q_μ bzw. der Zeilen p^ν in ihrer natürlichen Reihenfolge 1, 2, 3 usw. – unabhängig von der Reihenfolge ihres Auftretens in der Folge! – von selbst.

Erstes Beispiel. Gegeben sind die vier Elevatoren

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (a)$$

Sie bilden eine absteigende Folge, denn der Vektor q_2 aus E_2 ist vollständig, im Vektor q_4 aus E_4 fehlt das Element der Nummer 2, in q_1 fehlen die Nummern 2 und 4 und in q_3 schließlich die Nummern 2, 4 und 1. Der Leser überzeuge sich durch Ausmultiplizieren, daß tatsächlich

$$E_2 E_4 E_1 E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & -7 & 1 & 7 \\ 0 & 10 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{pmatrix} = Q \quad (b)$$

ist. In umgekehrter Reihenfolge dagegen entsteht das Produkt

$$L = E_3 E_1 E_4 E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 33 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 360 & 1 & 34 \\ 0 & 10 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (c)$$

und hier ist von den Spalten q_μ nichts mehr zu erkennen; auch ist die Hauptdiagonale nicht mehr mit Einsen besetzt.

Als nächstes interessieren wir uns für die Inversen von K und M . Nach (3.10a) kehrt sich die Reihenfolge der invertierten Faktoren um, es wird somit

$$K^{-1} = E_{\zeta_m}^{-1} E_{\zeta_{m-1}}^{-1} \dots E_{\zeta_2}^{-1} E_{\zeta_1}^{-1} \quad (70)$$

bzw.

$$M^{-1} = \varepsilon_{\sigma_n}^{-1} \varepsilon_{\sigma_{n-1}}^{-1} \dots \varepsilon_{\sigma_2}^{-1} \varepsilon_{\sigma_1}^{-1}. \quad (71)$$

Die Inversen von Elevatoren aber entstehen nach (52) durch Vorzeichenumkehr ihrer restringierten Spalten bzw. Zeilen, und damit lassen sich die Inversen (70) und (71) auf einfache Weise berechnen. Man bestätigt leicht, daß ebenso wie in $K = Q$ und $M = P$ auch die Hauptdiagonalen von K^{-1} und M^{-1} mit Einsen besetzt sind, und ganz evident gilt der

Satz 1: Die Inverse einer normierten unteren (oberen) Dreiecksmatrix ist ihrerseits eine normierte untere (obere) Dreiecksmatrix.

Zweites Beispiel. Wir invertieren die Matrix Q des ersten Beispiels. In den Elevatoren werden die Elemente q_{jk} ersetzt durch $-q_{jk}$, sodann wird das Produkt der einzelnen Inversen in umgekehrter Reihenfolge gebildet, wobei wir $E_3^{-1} = I^{-1} = I$ fortlassen

$$E_1^{-1} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ -9 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & -3 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ -9 & 0 & I & 20 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 27 & 0 & -3 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ -9 & -166 & I & 20 \\ 0 & -10 & 0 & I \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

Man beachte, daß auch die Hauptdiagonale von Q^{-1} mit Einsen besetzt ist!

Drittes Beispiel. Zu invertieren ist eine normierte untere Dreiecksmatrix der Ordnung $n = 3$. Wir nehmen eine Zerlegung in Spaltenelevatoren vor

$$\Delta_N = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 3 & I & 0 \\ -7 & 8 & I \end{pmatrix}, \quad E_1 = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 3 & I & 0 \\ -7 & 0 & I \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 8 & I \end{pmatrix}. \quad (a)$$

Umkehrung der Vorzeichen außerhalb der Hauptdiagonale gibt die Inversen

$$E_1^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ -3 & I & 0 \\ 7 & 0 & I \end{pmatrix}, \quad E_2^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & -8 & I \end{pmatrix}, \quad (b)$$

die nun in umgekehrter Reihenfolge miteinander multipliziert werden

$$E_2^{-1} E_1^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ -3 & I & 0 \\ 31 & -8 & I \end{pmatrix} = \Delta_N^{-1}. \quad (c)$$

Schließlich betrachten wir die in umgekehrter Reihenfolge gebildeten Produkte

$$L = E_{\zeta_m} E_{\zeta_{m-1}} \cdots E_{\zeta_2} E_{\zeta_1} \quad (72)$$

bzw.

$$R = \varepsilon_{\sigma_n} \varepsilon_{\sigma_{n-1}} \cdots \varepsilon_{\sigma_2} \varepsilon_{\sigma_1}. \quad (73)$$

Ihre Inversen sind

$$L^{-1} = E_{\zeta_1}^{-1} E_{\zeta_2}^{-1} \cdots E_{\zeta_{m-1}}^{-1} E_{\zeta_m}^{-1} \quad (74)$$

bzw.

$$R^{-1} = \varepsilon_{\sigma_1}^{-1} \varepsilon_{\sigma_2}^{-1} \cdots \varepsilon_{\sigma_{n-1}}^{-1} \varepsilon_{\sigma_n}^{-1}. \quad (75)$$

Beides sind absteigende Folgen, mithin gilt für sie die Eigenschaft (60) bzw. (62), und da sich die Inversen der einzelnen Elevatoren von diesen selbst nur durch das Vorzeichen ihrer restringierten Spalten bzw. Zeilen unterscheiden, haben wir als Ergebnis

$$L^{-1} = I_m - (\overset{\circ}{q}_1 \quad \overset{\circ}{q}_2 \quad \dots \quad \overset{\circ}{q}_{m-1} \quad \overset{\circ}{q}_m) \quad (76)$$

bzw.

$$R^{-1} = I_n - \begin{pmatrix} \overset{\circ}{p}^1 \\ \overset{\circ}{p}^2 \\ \dots\dots\dots \\ \overset{\circ}{p}^{n-1} \\ \overset{\circ}{p}^n \end{pmatrix}. \quad (77)$$

In diesem Fall ist somit die Inversion von L bzw. R geradezu geschenkt. Wir kommen auf diesen für die Numerik bedeutsamen Sachverhalt im Abschnitt 6.5 nochmals zurück.

Viertes Beispiel. Gegeben ist die absteigende Folge

$$\zeta_1 = 2: \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \zeta_2 = 3: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \zeta_3 = 1: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (a)$$

Das Produkt der drei Elevatoren wird nach leichter Rechnung

$$A = E_{\zeta_3} E_{\zeta_2} E_{\zeta_1} = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (b)$$

und die Inverse dazu ist nach (74)

$$A^{-1} = I_3 - \begin{pmatrix} \overset{\circ}{q}_1 & \overset{\circ}{q}_2 & \overset{\circ}{q}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (c)$$

Die Hauptdiagonale ist mit Einsen besetzt, wie es sein muß. Probe $A^{-1}A = I_3$.

• 5.8 Potenzen und Polynome

Schon im Abschnitt 2.6 haben wir uns im Anschluß an die Äquivalenztransformation (17) mit Potenzen und Polynomen einer Matrix A befaßt, und es entsteht nunmehr die Frage, wie das zum skalaren Polynom

$$p(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_q x^q \quad (78)$$

gehörige Matrizenpolynom, gebildet mit der transformierten Matrix $\tilde{A} = LAR$,

$$p(\tilde{A}) = a_0 I + a_1 \tilde{A} + a_2 \tilde{A}^2 + \dots + a_q \tilde{A}^q \quad (79)$$

sich durch L , A und R ausdrücken läßt. Um dies zu beantworten, erheben wir die Matrix $\tilde{A} = LAR$ in die q -te Potenz und fügen links den Faktor R und rechts den Faktor L hinzu

$$Q = \overbrace{R \cdot LAR} \cdot \overbrace{LAR} \cdot \dots \cdot \overbrace{LAR \cdot LAR} \cdot L. \quad (80)$$

Je nach Art der angedeuteten Klammerung erhalten wir damit die drei gleichwertigen Darstellungen

$$Q = RL(ARL)^q = R(LAR)^q L = (RLA)^q RL . \quad (81)$$

Multiplizieren wir dies mit einem Skalar a_q , so ist dieser mit allen Matrizen vertauschbar und kann daher passend plaziert werden, das gibt

$$a_q Q = RL[a_q(ARL)^q] = R[a_q(LAR)^q] L = [a_q(RLA)^q] RL . \quad (82)$$

Setzen wir hier $q = 0, 1, \dots, \varrho$ und summieren die $\varrho + 1$ Matrizen, so entsteht in allen drei Darstellungsarten

$$\boxed{RLp(ARL) = Rp(LAR)L = p(RLA)RL} , \quad (83)$$

wo nun im mittleren Term unser gesuchtes Polynom (79) erscheint. Will man es isolieren, so folgt durch Multiplikation der Gleichung (83) von links mit R^{-1} und von rechts mit L^{-1}

$$Lp(ARL)L^{-1} = p(LAR) = R^{-1}p(RLA)R . \quad (84)$$

Ist A regulär und damit invertierbar, so gilt diese Gleichung auch für negative Exponenten, mithin für Polynome der Art

$$p(x) = a_{-\sigma}x^{-\sigma} + \dots + a_{-2}x^{-2} + a_{-1}x^{-1} + a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{\varrho}x^{\varrho}, \quad (85)$$

wie sich leicht zeigen läßt.

Beispiel. Gegeben ist das Polynom

$$p(x) = -2x^{-2} + 3 + x , \quad (a)$$

ferner die drei Matrizen

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} , \quad A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} , \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} . \quad (b)$$

1. Der linke Term in (84) wird nach leichter Rechnung

$$A_1 = ARL = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} , \quad A_1^2 = I , \quad p(A_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} , \quad Lp(A_1)L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} . \quad (c)$$

2. Der mittlere Term:

$$\bar{A} = LAR = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \bar{A}^2 = I , \quad p(\bar{A}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} . \quad (d)$$

3. Der rechte Term:

$$A_2 = RLA = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2^2 = I, \quad p(A_2) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}, \quad R^{-1}p(A_2)R = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (e)$$

Alle drei stimmen überein, wie es sein muß.

5.9 Der Vertauschungssatz

Wie wir noch sehen werden, läßt sich jede quadratische Matrix A regulär äquivalent auf die diagonale Pivotmatrix transformieren gemäß

$$LAR = \Pi = \text{Diag} \langle d_{jj} \rangle, \quad L \text{ und } R \text{ regulär.} \quad (86)$$

Die konjugiert-transponierte Matrix

$$\Pi^* = \text{Diag} \langle \bar{d}_{jj} \rangle \quad (87)$$

ist ihrerseits diagonal und somit mit Π vertauschbar

$$\Pi^* \Pi = \Pi \Pi^*, \quad (88)$$

und dies bedeutet nach (86)

$$(LAR)^*(LAR) = (LAR)(LAR)^* \quad (89)$$

oder ausmultipliziert

$$R^* A^* L^* LAR = LARR^* A^* L^*. \quad (90)$$

Nun sei die Transformation kongruent durchgeführt, dann wird wegen $L = R^*$ (man könnte nach (18) ebensogut $R = L^*$ setzen)

$$R^* A^* R R^* A R = R^* A R R^* A^* R \quad (91)$$

oder nach Multiplikation dieser Gleichung von links mit $(R^*)^{-1}$ und von rechts mit R^{-1}

$$\boxed{A^* R R^* A = A R R^* A^*}, \quad (92)$$

und damit haben wir den bedeutsamen

Satz 2 (Vertauschungssatz): *Läßt sich eine Matrix A regulär kongruent auf Diagonalform transformieren gemäß $R^* A R = D$, so sind die Matrizen A und A^* bezüglich $R R^*$ vertauschbar.*

Der Vertauschbarkeitsrelation (92) genügt offenbar jede hermitesche oder schief-hermitesche Matrix A zufolge $A^* = A$ (4.7) bzw. $A^* = -A$ (4.9). Es existiert jedoch die umfassendere Klasse der *normalen Matrizen* bzw. *Matrizenpaare*, die durch die Bedingung (92) definiert sind und auf die wir im Abschnitt 10.5 zurückkommen werden.

• 5.10 Lineare Abbildungen

Schon im Abschnitt 1.2 hatten wir die Beziehung $y = Ax$ als eine lineare Abbildung bezeichnet: x ist der *Originalvektor* (das Original) und y der *Bildvektor* (das Bild). Ist A quadratisch von der Ordnung n , so haben auch Bild und Original die gleiche Länge n .

Ist die quadratische Matrix A regulär, so existiert die Inverse A^{-1} , und es besteht die nach (3.1), (3.2) wechselseitige Beziehung

$$y = Ax \Leftrightarrow x = A^{-1}y . \quad (93)$$

Diese ist eindeutig, weil es zu A nur eine Inverse gibt; man sagt auch, die Abbildung ist (eindeutig) umkehrbar. Bei singulärer Matrix A dagegen ist eine eindeutige Umkehrung nicht möglich; hier ist zwar bei vorgegebenem Original x das Bild $y = Ax$ eindeutig festgelegt (weil es nur *ein* Matrizenprodukt gibt), doch findet man zum Bildvektor y das Original x nicht eindeutig wieder, weil noch weitere Originale existieren, die das gleiche Bild entwerfen.

Dazu ein **Beispiel** mit $n = 2$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad y = Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 3x_1 - 4x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} . \quad (a)$$

Für vorgegebene Werte x_1 und x_2 ist y eindeutig festgelegt, doch gilt nicht das Umgekehrte, da aus $y_1 = 0$ gar keine Auskunft über das Original erfolgt, dagegen ist die Gleichung $y_2 = 3x_1 - 4x_2$ überbestimmt und hat somit unendlich viele Lösungen.

Ein extremes Beispiel für eine nicht umkehrbare Abbildung ist das *dyadische Produkt*

$$A = pq^T, \quad y = Ax = pq^Tx = ps \quad \text{mit} \quad s = q^Tx . \quad (94)$$

Wir sehen: für jedes beliebige Original x hat das Bild y die Richtung von p ; der Bildraum hat nur die Dimension $r = 1$, und diese ist nach (2.29) gleich dem Rang der Dyade; ganz allgemein gilt: Der Rang einer Matrix A ist gleich der Dimension des Bildraumes (siehe dazu die Ausführungen im Abschnitt 9).

Vorgegeben seien nun zwei Abbildungen, vermittelt durch die quadratischen Matrizen A und B

$$y_a = Ax, \quad y_b = Bx . \quad (95)$$

Im allgemeinen besitzen die beiden Bilder verschiedene Richtungen, sind sie aber *kollinear* (in eine Linie zusammenfallend) mit einem skalaren Faktor λ ,

$$y_a = \lambda y_b , \quad (96)$$

somit

$$Ax = \lambda Bx , \quad (97)$$

so heißt der Originalvektor x ein *Eigenvektor* und der Skalar λ ein *Eigenwert*. Ist speziell $B = I$, so wird

$$Ax = \lambda x . \quad (98)$$

Hier ist also das Bild Ax dem Original x selbst kollinear. Eigenwerte und Eigenvektoren spielen in Theorie und Praxis eine bedeutende Rolle. Ihnen ist das ganze IV. Kapitel gewidmet.

Beispiel. $n = 2$, $B = I$.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} , \quad x = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad y = Ax = \begin{pmatrix} 24 \\ 6 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 6x ,$$

x ist somit ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = 6$.

6 Die Algorithmen von Gauß, Banachiewicz und Gauß-Jordan

• 6.1 Zielsetzung

In diesem Paragraphen geht es um die spezielle Äquivalenztransformation

$$LAR = \Pi ; \quad \det L = 1 , \quad \det R = 1 , \quad (1)$$

durchgeführt mit Elevatoren allein, wo Π eine sogenannte *Pivotmatrix* ist. Diese ist definiert durch die Eigenschaft, daß jede Spalte ebenso wie jede Zeile als einziges von Null verschiedenes Element ein Pivot π_{jk} aufweist. Deren Anzahl r heißt Rang der Matrix Π und ist, wie wir noch zeigen werden, auch gleich dem Rang der Originalmatrix A , aus welcher Π hervorgegangen ist. Man nennt die Pivotmatrix Π (und damit auch A) *spaltenregulär* (*zeilenregulär*), wenn sie keine Nullspalte (Nullzeile) besitzt, mithin jede ihrer n Spalten (m Zeilen) mit einem Pivot besetzt ist. Dies ist offenbar nur möglich für Hochformat (Querformat) oder Quadrat. Zusammengefaßt: es bedeuten

$$\text{Spaltenregularität} \quad m \geq n ; \quad r = n , \quad (2)$$

$$\text{Zeilenregularität} \quad m \leq n ; \quad r = m . \quad (3)$$

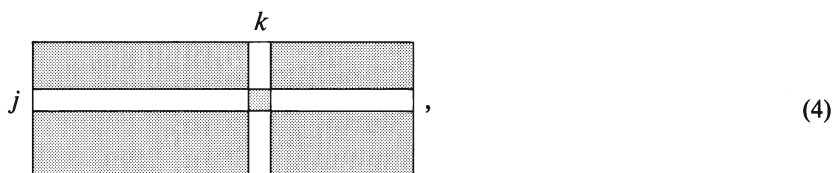
Beispiel. $n = 5$, $m = 3$, $r = 2$ mit $\pi_{13} = 4$ und $\pi_{21} = 3 + 2i$.

$$\pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 3+2i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix ist weder spalten- noch zeilenregulär, da sie zwei Nullspalten und eine Nullzeile aufweist.

• 6.2 Das Nullenkreuz

Macht man in dem im Abschnitt 5.5 eingeführten Pivotkreuz mit Hilfe des Pivots a_{jk} die übrigen Elemente im Kreuz zu Null, so entsteht ein sogenanntes *Nullenkreuz*

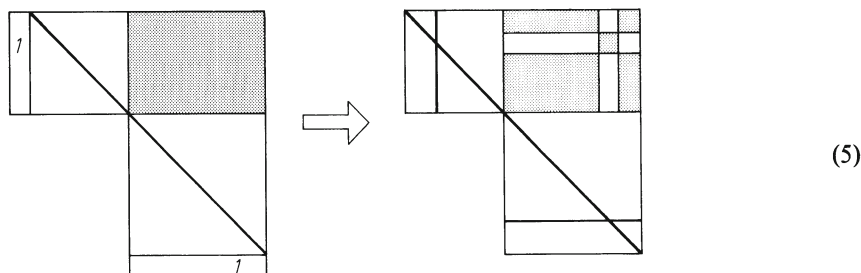


ein Vorgang, der als *Reduktion* der Spalte k bzw. der Zeile j bezeichnet wird. Bei fortgeführter Reduktion mit Hilfe weiterer Pivots bleiben die bereits erzeugten Nullenkreuze erhalten, wie man sich leicht klarmacht. Nach genau $r - 1$ Schritten ist damit die Pivotmatrix Π erzeugt. Da man in der Wahl der Pivots völlig frei ist, ist die Pivotmatrix nicht eindeutig. Auf die zweckmäßige Wahl der Pivots kommen wir später zu sprechen, hier sagen wir nur soviel, daß sie weder zu klein noch zu groß sein sollten.

Das hier geschilderte Vorgehen der $r - 1$ -fachen Reduktion ist nichts anderes als der jedem Leser von der Schule bekannte, zumeist nach Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855) benannte Algorithmus, der, wie man heute weiß, bereits vor 2000 Jahren in China praktiziert wurde [105]. Man unterscheidet zwei Arten der numerischen Durchführung, die aufwendige, dafür leichter zu beschreibende explizite und die elegantere implizite Methode. Zum Rechenaufwand siehe die Übersicht (17).

• 6.3 Der Gaußsche Algorithmus in expliziter Durchführung

Um auf die angestrebte Pivotmatrix (1) zu kommen, gehen wir nach dem bereits in (5.55) erklärten Generalschema vor und erzeugen in der Matrix A oben rechts nacheinander die Nullenkreuze (4). Im ersten Schritt wird damit



Dabei ist es einerlei, ob im Verlaufe der Rechnung jeweils zuerst die Spalte oder die Zeile reduziert wird, da beide Operationen vertauschbar sind; üblich ist aber die vorgezogene Spaltenreduktion. Der Algorithmus bricht von selbst ab, wenn die Matrix A von Pivots ausgeschöpft ist, es steht dann oben rechts im General-schema die Pivotmatrix Π , links daneben die Transformationsmatrix L und darunter die Transformationsmatrix R , ein Vorgehen, das an Einfachheit und Sinnfälligkeit der Durchführung nicht zu übertreffen ist.

Erstes Beispiel. In der Matrix A ist das Pivotkreuz zu $a_{13} = 3$ zu erzeugen,

$$A = \begin{pmatrix} 30 & -12 & 3 \\ 4 & 10 & 9 \end{pmatrix}. \quad (\text{a})$$

Wir schreiben links und unterhalb von A die Einheitsmatrizen I_2 und I_3 auf und reduzieren zuerst die erste Zeile und sodann die dritte Spalte von A . Das gibt

$$\begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 30 & -12 & 3 \\ \hline 0 & 1 & 4 & 10 & 9 \\ \hline \end{array} A \\ \begin{array}{c} I_2 \\ I_3 \end{array} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline I & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 1 & -86 & 46 & 9 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & -86 & 46 & 0 \\ \hline \end{array} \bar{A}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \\ -10 & 4 & I \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} L \\ R \end{array} \quad (\text{b})$$

Jetzt gehen wir umgekehrt vor und reduzieren zuerst die Spalte, dann die Zeile:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline I & 1 & 0 & 30 & -12 & 3 \\ -3 & 0 & 1 & 4 & 10 & 9 \\ \hline \end{array} A \\ \begin{array}{c} I_2 \\ I_3 \end{array} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 30 & -12 & 3 \\ -3 & 1 & -86 & 46 & 0 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & -86 & 46 & 0 \\ \hline \end{array} \bar{A}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \\ -10 & 4 & I \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} L \\ R \end{array} \quad (\text{c})$$

Wieder ist der zweite Schritt geschenkt. Der Leser überzeuge sich durch Ausmultiplizieren, daß in der Tat $LAR = \bar{A}$ ist.

Zweites Beispiel. Die vorgegebene Matrix A ist auf eine Pivotmatrix zu transformieren. Das folgende Schema zeigt die drei Reduktionsschritte. Das aktuelle Pivot (das im Kreuzungspunkt der beiden kursiv gesetzten Einsen steht) ist ebenfalls durch Kursivdruck hervorgehoben.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline I & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ -10 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & I & 2 & 1 \\ \hline 0 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 10 & 1 & 5 \\ \hline \end{array} & A & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline I & 1 & 1 & 0 \\ 9 & -10 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 0 & 3 & 3 \\ -27 & 0 & -19 & -5 \\ \hline \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c} I_3 \\ I_4 \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} & \Rightarrow & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -3 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline I & -1 & 0 & -1 \\ \hline \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 \\ I & -1 & 9 & 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 22 \\ \hline \end{array} & \Rightarrow & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 9 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} & \Pi \\
 \\
 \Rightarrow & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & -1 & -1 \\ \hline -3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} & \Rightarrow & \begin{array}{c} L \\ R \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & -1 & 7/4 \\ \hline -3 & 1 & 1 & -3/4 \\ 0 & 0 & 0 & -11/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \\
 \\
 & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & I & -11/4 \\ \hline \end{array} & & &
 \end{array}$$

Man überzeuge sich, daß $LAR = \Pi$ ist und wiederhole die Aufgabe mit einer anderen Pivotstrategie.

• 6.4 Der Gaußsche Algorithmus in impliziter Durchführung

Die im letzten Abschnitt vorgeführte explizite Variante besitzt einen schwerwiegenden Nachteil. Ist nämlich die vorgelegte Matrix A schwach besetzt, das heißt, besitzt sie viele Nullelemente wie z. B. die sogenannten Bandmatrizen (ein Musterexemplar steht in (17.56)), so haben zwar die zur Reduktion erforderlichen Elevatoren die gleiche schwache Besetzung, nicht aber ihre Produkte

$$L = E_{r-1} E_{r-2} \cdots E_2 E_1$$

bzw.

$$R = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{r-2} \varepsilon_{r-1} \cdot \quad (6)$$

Diesem Mangel wird in der impliziten Durchführung auf einfachste Weise abgeholfen, indem die einzelnen Elevatoren nicht miteinander multipliziert, sondern weggespeichert werden, wobei es genügt, ihre Spalten q_μ bzw. Zeilen p^ν zu speichern (bei Handrechnung aufzuschreiben). Die Transformationsmatrizen L und R sind dann, wie man sagt, als *Phantommatrizen* gespeichert. Auf deren Weiter-

verarbeitung kommen wir im Abschnitt 7.2 zurück; hier geht es zunächst nur um die Methode als solche.

Beispiel. Die Matrix A aus dem letzten Abschnitt ist in impliziter Technik auf die Pivotmatrix Π zu transformieren mit der gleichen Pivotfolge wie dort.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline I & 3 & I & 2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ -10 & 3 & 10 & 1 & 5 \\ \hline \end{array} \quad
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline I & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 9 & -27 & 0 & -19 & -5 \\ \hline \end{array} \quad
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 8 & 22 \\ \hline \end{array} \quad
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ \hline \end{array} \Pi.$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -3 & I & -2 & -1 \\ \hline \end{array} \quad
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline I & 0 & -1 & -1 \\ \hline \end{array} \quad
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & I & -11/4 \\ \hline \end{array} \quad (a)$$

• 6.5 Der Algorithmus von Banachiewicz

Wir multiplizieren die Transformationsgleichung (1) von links mit L^{-1} und von rechts mit R^{-1} und bekommen

$$A = L^{-1} \Pi R^{-1} \quad (7)$$

oder aufgelöst in das Produkt der Elevatoren (6) und (7) nach der Umkehrregel (3.10a)

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_{r-1}^{-1} \Pi \varepsilon_{r-1}^{-1} \cdots \varepsilon_2^{-1} \varepsilon_1^{-1}, \quad (7a)$$

wobei die Inversen der Elevatoren nach (5.52) durch Vorzeichenumkehr der restringierten Vektoren q_μ bzw. p^ν entstehen. Nun bilden die Elevatoren links und rechts von Π in (9) aufgrund der Konstruktion des Pivotkreuzes jeweils eine absteigende Folge; somit sind die Inversen L^{-1} und R^{-1} nach (5.76) und (5.77) auf einfachste Weise aus den restringierten Vektoren zu berechnen. Diese gegenüber dem Vorgehen von Gauß grundlegend neue Idee geht auf Banachiewicz [107] zurück und hat im Laufe der Jahrzehnte in großen Teilen der Fach- und Lehrbuchliteratur den Gaußschen Algorithmus verdrängt.

Wir greifen zurück auf das **Beispiel** des letzten Abschnitts. Die restringierten Spaltenvektoren in ihrer natürlichen Reihenfolge (die hier zufällig mit der Pivotfolge übereinstimmt) sind

$${}^0 q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -10 \end{pmatrix}, \quad {}^0 q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad {}^0 q_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (b)$$

wo die kursiv gesetzten Nullen anstelle der kursiv gesetzten Einsen stehen, und damit wird nach (5.76)

$$L^{-1} = I_3 - ({}^0 q_1 \quad {}^0 q_2 \quad {}^0 q_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -10 & 9 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 10 & -9 & 1 \end{pmatrix}. \quad (c)$$

Die restringierten Zeilenvektoren

$$\overset{\circ}{p}^1 = (0 \ 0 \ -1 \ -1) , \quad \overset{\circ}{p}^2 = (-3 \ 0 \ -2 \ -1) , \quad \overset{\circ}{p}^3 = (0 \ 0 \ 0 \ -11/4) , \quad \overset{\circ}{p}^4 = (0 \ 0 \ 0 \ 0) \quad (d)$$

ergeben auf analoge Weise

$$R^{-1} = I_4 - \begin{pmatrix} \overset{\circ}{p}^1 \\ \overset{\circ}{p}^2 \\ \overset{\circ}{p}^3 \\ \overset{\circ}{p}^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ -3 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -11/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 11/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \quad (e)$$

Kontrollen: 1. $A = L^{-1} \Pi R^{-1}$ nach (8); 2. $LL^{-1} = I_3$ und $RR^{-1} = I_4$ mit den Matrizen L und R aus dem Beispiel des Abschnitts 6.3.

Das originale Verfahren von Banachiewicz verläuft indessen sehr viel einfacher, indem aus dem Nullenkreuz (4) das im Schnittpunkt jk stehende Pivot extrahiert wird, so daß es allein aus Nullen besteht. Zu diesem Zweck wird die Spalte a_j ebenso wie die Zeile a^k durch das jetzt mit d_1 bezeichnete Pivotelement a_{jk} dividiert und aus p_1 und q^2 die Dyade D_1 nach folgendem Muster berechnet

$$p_1 := \frac{1}{d_1} a_j , \quad q^1 := \frac{1}{d_1} a^k ; \quad D_1 := p_1 d_1 q^1 . \quad (8)$$

Subtrahiert man diese von A , so verbleibt ein Rest $A - D_1 = A_1$, der offenbar das gewünschte Nullenkreuz enthält. Mit dieser Matrix wiederholt man das Verfahren, das gibt dann die Matrix $A_1 - D_2 = A_2$, und nach $r-1$ Schritten ist A_r die Nullmatrix geworden, womit das Verfahren endet. Aus der Summe

$$\left. \begin{array}{l} A = A_1 + D_1 \\ A_1 = A_2 + D_2 \\ \dots\dots\dots \\ A_{r-1} = 0 + D_r \end{array} \right\} \quad (8a)$$

aber folgt

$$A = D_1 + D_2 + \dots + D_r = p_1 d_1 q^1 + p_2 d_2 q^2 + \dots + p_r d_r q^r , \quad (8b)$$

und dies schreibt sich mit der Diagonalmatrix D der r Pivots

$$D = \text{Diag} \langle d_1 \ d_2 \ \dots \ d_r \rangle \quad (8c)$$

nach (3.33) unter Zwischenschaltung von D als dreifaches Produkt

$$\boxed{A = P D Q} \quad (9)$$

mit

$$P = (p_1 \ p_2 \ \dots \ p_r) , \quad Q = \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \\ \dots \\ q^r \end{pmatrix} , \quad (9a)$$

wobei allerdings zu beachten ist, daß diese Darstellung infolge der Vertauschbarkeit der Summanden in (8b) nicht eindeutig ist; es gibt $r!$ Möglichkeiten, die Matrix A zu zerlegen.

Ein **Beispiel** mit $m = 3$, $n = 4$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 10 & 1 & 5 \end{pmatrix} . \quad (a)$$

Erster Schritt. Pivot $a_{12} = d_1 = 1$.

$$D_1 = p_1 \cdot 1 \cdot q^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix} \cdot 1 \cdot (3 \ 1 \ 2 \ 1) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & -2 & -1 \\ 30 & 10 & 20 & 10 \end{pmatrix} . \quad (b)$$

$$A - D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \\ -27 & 0 & -19 & -5 \end{pmatrix} = A_1 . \quad (c)$$

Zweiter Schritt. Pivot $a_{21} = d_2 = 3$.

$$D_2 = p_2 \cdot 3 \cdot q^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix} \cdot 3 \cdot (1 \ 0 \ 1 \ 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -9 & 0 & -9 & -9 \end{pmatrix} \cdot 3 , \quad (d)$$

$$A_1 - D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 22 \end{pmatrix} = A_2 . \quad (e)$$

Dritter Schritt. Pivot $a_{33} = d_3 = 8$.

$$D_3 = p_3 \cdot 8 \cdot q^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 8 \cdot (0 \ 0 \ 1 \ 22/8) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 22 \end{pmatrix} . \quad (e)$$

$$A_2 - D_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_3 = \theta . \quad \text{Ende} . \quad (f)$$

Wir stellen nun P , D und Q nach (8c) und (9a) in ihrer natürlichen Reihenfolge zusammen:

$$P = (p_1 \ p_2 \ p_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 10 & -9 & 1 \end{pmatrix} , \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} , \quad Q = \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 22/8 \end{pmatrix} . \quad (f)$$

In der Tat ist $A = PDQ$ nach (9), wie leicht nachzurechnen. Es gibt aber noch fünf andere Möglichkeiten, da $r! = 3! = 6$ ist. Zum Beispiel

$$\tilde{P} = (p_3 \ p_1 \ p_2) , \quad \tilde{D} = \begin{pmatrix} d_3 & 0 & 0 \\ 0 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} , \quad \tilde{Q} = \begin{pmatrix} q^3 \\ q^1 \\ q^2 \end{pmatrix} , \quad (g)$$

und wieder ist $A = \tilde{P}\tilde{D}\tilde{Q}$, wie es auf Grund der Vertauschbarkeit der Summanden in (8b) sein muß.

Wir haben dieselbe Matrix im Abschnitt 6.4 nach Gauß implizit reduziert. Man erkennt alle Zahlen am gleichen Platz wieder mit Ausnahme der dort unterstrichenen Pivotelemente, die hier durch Nullen ersetzt sind.

Die dyadische Zerlegung (9) ist von verschiedenen Autoren angegeben worden. Sie findet sich für symmetrische Matrizen zuerst bei Doolittle [105], später in etwas abgewandelter Form bei Cholesky [106], sodann erstmals für nichtsymmetrische Matrix bei Banachiewicz [107], der seine Methode ausdrücklich als dem Gaußschen Algorithmus überlegen propagiert; seinerzeit (1938) mit Recht, da beim Arbeiten mit der Tischrechenmaschine zwar nicht die Anzahl der Operationen verringert, wohl aber eine erhebliche Einsparung an Schreibarbeit wie ein zügigerer Ablauf erreicht werden konnte. Dieser Grund entfällt seit der Erfindung des Computers, weshalb dem Gaußschen Algorithmus in seiner ursprünglichen Fassung der Vorzug gebührt. Er ist sehr viel anpassungsfähiger allein durch die Möglichkeit der Pivotregulierung und die Anwendbarkeit auf Matrizenprodukte. Nur wenn die dyadische Zerlegung von der Sache her erforderlich wird wie beispielsweise bei den Methoden im Abschnitt 22.5, hat das Verfahren von Banachiewicz noch seine Berechtigung.

• 6.6 Der Algorithmus von Gauß-Jordan

Während die Algorithmen von Gauß und Banachiewicz zweiseitige Transformationen darstellen, wobei also Zeilen *und* Spalten linear kombiniert werden, geht der Algorithmus von Gauß-Jordan einseitig vor, wobei zwei Fälle zu unterscheiden sind.

1. Zeilenkombination (Spaltenreduktion)

A sei spaltenregulär vom Range r , dann wird

$$L_J A = \Pi_L , \quad (10)$$

wozu r Schritte erforderlich sind

$$L_J A = E_{r-1} \cdots E_2 E_1 A = \Pi_L . \quad (11)$$

2. Spaltenkombination (Zeilenreduktion)

A sei zeilenregulär vom Range r , dann wird

$$A R_J = \Pi_R , \quad (12)$$

und es gilt analog zu (11)

$$AR_J = A \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{r-1} = \Pi_R . \quad (13)$$

Gegenüber dem Gaußschen Algorithmus sind die Spalten q_μ aus E_μ bzw. die Zeilen p^ν aus ε^ν im allgemeinen vollbesetzt.

Da in praxi nicht bekannt sein wird, ob die zu transformierende Matrix A die Bedingung der Spalten- bzw. Zeilenregularität erfüllt, ist der Algorithmus mit einem Risiko belastet; er muß ergebnislos abgebrochen (oder auf andere Weise weitergeführt) werden, falls während der Rechnung eine Nullspalte bzw. Nullzeile auftritt.

Ebenso wie beim Gaußschen Algorithmus haben wir auch jetzt wieder die Wahl zwischen der expliziten und der impliziten Durchführung.

Beispiel. Spaltenreduktion in drei Schritten, explizite Durchführung, $m = 4$, $n = 3$.

0	1	0	0	0	0	3	0
I	0	1	0	0	I	0	1
-2	0	0	1	0	2	5	0
0	0	0	0	1	0	-2	8

$3/2$	1	0	0	0	0	3	0
0	0	1	0	0	1	0	1
$5/2$	0	-2	1	0	0	5	-2
I	0	0	0	1	0	-2	8

I	1	0	0	$3/2$	0	0	12
$-1/12$	0	1	0	0	1	0	1
$-3/2$	0	-2	1	$5/2$	0	0	-18
$-2/3$	0	0	0	1	0	-2	8

1	0	0	$3/2$	0	0	12
$-1/12$	1	0	$-1/8$	1	0	0
$-3/2$	-2	1	$1/4$	0	0	0
$-2/3$	0	0	0	0	-2	0

L_J

Π_L

Probe: $L_J A = \Pi_L$.

In dieser Originalform ist der Algorithmus indessen zu aufwendig. Mit weniger Operationen kommt man zum Ziel, wenn im Fall 1 die Matrix L_J aus (10) in zwei Faktoren L und \hat{L} zerlegt wird. In einem ersten Durchlauf werden die Spalten wie beim Gaußschen Algorithmus reduziert, das gibt mit der gleichen Matrix L wie dort

$$LA = \hat{A} , \quad (14)$$

und nun erfolgt in einem zweiten Durchlauf die vollständige Reduktion der Spalten:

$$\hat{L}\hat{A} = \Pi_J \quad (\text{oder } \hat{L}LA = \Pi_J) \quad (15)$$

mit derselben Pivotmatrix wie bei Gauß. Entsprechend verfährt man bei der Zeilenreduktion (12) bis (13).

Ein **Beispiel** mit $m = n = 3$, explizite Durchführung.

Erster Durchlauf in zwei Schritten.

$$\begin{array}{cc} I_3 & A \\ \begin{array}{|c|ccc|} \hline I & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|ccc|} \hline I & 1 & 0 \\ 3 & 8 & -1 \\ -1 & -11 & 4 \\ \hline \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{cc} & \\ \begin{array}{|c|ccc|} \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ I & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|ccc|} \hline 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & -10 & 4 \\ \hline \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{cc} L & \hat{A} \\ \begin{array}{|c|ccc|} \hline 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|ccc|} \hline 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ \hline \end{array} \end{array} .
 \end{array} \quad (a)$$

Die Pivots liegen damit fest. In umgekehrter Reihenfolge erfolgt nun der zweite Durchlauf:

$$\begin{array}{cc} L & \hat{A} \\ \begin{array}{|c|ccc|} \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,5 & -3 & 1 & 0 \\ I & -5 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|ccc|} \hline 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ \hline \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{cc} & \\ \begin{array}{|c|ccc|} \hline -0,2 & 1 & 0 & 0 \\ I & -5,5 & 2 & 0,5 \\ 0 & -5 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|ccc|} \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} L_J & \Pi_L \\ \begin{array}{|c|ccc|} \hline 2,1 & -0,4 & -0,1 \\ -5,5 & 2 & 0,5 \\ -5 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|ccc|} \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ \hline \end{array} \end{array} . \quad (b)$$

Probe: $L_J A = \Pi_L$.

• 6.7 Hermitesche (reelsymmetrische) Matrix

Ist A hermitesch (im Reellen symmetrisch), so ist es vorteilhaft, wenn auch nicht zwingend, die Gaußsche Transformation kongruent durchzuführen, d. h. $R = L^*$ zu setzen. Wählt man darüber hinaus alle Pivots aus der Hauptdiagonale, so wird

$$L A L^* = \Pi = \text{Diag} \langle \pi_{jj} \rangle, \quad \pi_{jj} \text{ reell} . \quad (16)$$

Nach (5.12) sind nämlich die Hauptdiagonalelemente der transformierten Matrix die (jetzt als hermitesche Formen bezeichneten) Bilinearformen $\pi_{jj} = l^j A r_j = l^j A l^{j*}$, und diese sind nach (11.15) reell. (Dort steht H statt π_{jj} und x^* statt l^{j*} .)

Da die reduzierte Matrix des Gaußschen Algorithmus in jedem Stadium hermitesch (reelsymmetrisch) ist, braucht nur die untere linke Hälfte berechnet zu werden, womit sich der Gesamtaufwand halbiert, siehe dazu die Übersicht (17).

Der Konträralgorithmus von Banachiewicz wird jetzt nach Cholesky benannt, der bereits 20 Jahre früher die Kongruenztransformation für reelsymmetrische Matrizen entdeckt, wenn auch nicht publiziert hatte; siehe dazu die Arbeit von Benoit [106].

Beispiel. A hermitesch, $n = 3$. Damit die Eigenschaft $p_v = q_v^*$ besser ins Auge springt, ordnen wir die Zeilen p^v oberhalb und nicht unterhalb der aktuellen Matrix A an.

a) Gauß explizit.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc|ccc}
 & I_3 & & -i & 1 & -2 \\
 \hline
 i & 1 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\
 1 & 0 & 1 & 0 & i & 1 & 2 \\
 -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1
 \end{array}
 &
 \begin{array}{ccc|ccc}
 & & & 1 & 0 & 2i \\
 \hline
 1 & 1 & i & 0 & -1 & 0 & 2i \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 -2i & 0 & -2 & 1 & -2i & 0 & -5
 \end{array}
 &
 \begin{array}{cc|cc}
 L & & \Pi & \\
 \hline
 1 & i & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 -2i & 0 & 1 & 0 & 0 & -1
 \end{array}
 \end{array} . \quad (a)$$

In der Tat ist Π eine reelle Diagonalmatrix, wie es sein muß. Mit der Rechtstransformationsmatrix

$$R = L^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2i \\ -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (b)$$

wird $LAL^* = \Pi$, wovon der Leser sich überzeugen möge.

b) Cholesky. Mit den drei restringierten Spalten $\hat{q}_1, \hat{q}_2, \hat{q}_3$ aus dem Schema (a) wird

$$L^{-1} = I_3 - (\hat{q}_1 \ \hat{q}_2 \ \hat{q}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2i & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2i & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (c)$$

ferner

$$R^{-1} = (L^{-1})^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2i \\ i & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (d)$$

Zur Kontrolle bestätige der Leser, daß $L^{-1}L = I_3$ und $R^{-1}R = I_3$ ist.

• 6.8 Rechenaufwand

Der Rechenaufwand für die drei besprochenen Algorithmen bemißt sich nach der erforderlichen Anzahl der Additionen (bzw. Subtraktionen) und Multiplikationen (bzw. Divisionen). Man pflegt die Einheit von einer Addition und einer Multiplikation als Operation zu bezeichnen, und deren Anzahl ist in der Übersicht (17) für eine vollbesetzte quadratische Matrix A der Ordnung n zusammengestellt, wobei die zweiten und ersten Potenzen von n fortgelassen wurden, da sie gegenüber der Größe n^3 um so weniger zu Buche schlagen, je höher die Ordnung n ist.

	Beidseitige Transformation Gauß		Einseitige Transformation Gauß-Jordan
A beliebig Äquivalenz	implizit $n^3/3$ explizit $2n^3/3$	Banachiewicz $n^3/3$	in einem Durchgang $n^3/2$ in zwei Durchgängen $n^3/3$
A hermitesch Kongruenz	implizit $n^3/6$ explizit $n^3/3$	Cholesky $n^3/6$	wie oben

(17)

Wir erkennen hier nochmals, daß der Algorithmus von Gauß-Jordan die hermitesche (reellsymmetrische) Eigenschaft von A nicht nutzen kann und daher im Nachteil ist, ferner daß die explizite Durchführung des Gaußschen Algorithmus doppelt so viele Operationen erfordert wie die implizite.

Bei stark ausgeprägter Bandform der Matrix A treffen die Angaben der Übersicht (17) nicht zu. Die Potenzen n^3 sind dann zu ersetzen durch das Produkt $n \cdot b^2$, wo b die sogenannte Breite der Bandmatrix ist. Genauereres darüber findet der Leser im Abschnitt 24.15.

• 6.9 Pivotregulierung

Die Technik der jetzt zu beschreibenden *Pivotregulierung* ist nur anwendbar bei den Algorithmen von Gauß und Gauß-Jordan und besteht in folgendem Vorgehen. Das als Pivot vorgesehene Element a_{jk} im Kreuzungspunkt der Zeile j und der Spalte k wird zunächst durch Zeilenkombination nach (5.43) in $\tilde{a}_{jk} = \pi_{jk}$ bzw. durch Spaltenkombination nach (5.50) in $\hat{a}_{jk} = \pi_{jk}$ überführt, wo π_{jk} zweckmäßig zu wählen ist, und nun erst erfolgt die Reduktion der Spalte k und der Zeile j . Durch diese Maßnahme wird die Anzahl der Elevatoren gegenüber der normalen Vorgehensweise maximal um $r-1$ erhöht. Es haben somit nicht sämtliche Spalten q_μ bzw. Zeilen p^ν in einer einzigen Matrix Platz und können daher auch nicht kompaktibel sein. Aus diesem Grund kann der Algorithmus von Banachiewicz bzw. Cholesky von der Pivotregulierung keinen Gebrauch machen.

Der zusätzliche Rechenaufwand für die Pivotregulierung beträgt maximal $n^2/2$ Operationen und ist somit gegenüber der Reduktion selbst vernachlässigbar klein. Eine besonders vorteilhafte Technik besteht darin, die ersten $r-1$ Pivots zu 1 zu machen und in der Reihenfolge 11, 22 usw. vorzugehen. Die Pivotmatrix ist dann nur in der Hauptdiagonale besetzt (die bei $m \geq n$ am rechten, bei $m \leq n$ am unteren Rand anstößt) und enthält nur ein einziges von Null und Eins verschiedenes Element.

Dazu ein **Beispiel** mit $m = n = 3$. A ist in die Pivotmatrix Π zu überführen

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 & 2 \\ 1 & 3+i & -4 \\ 0 & -1 & -3-2i \end{pmatrix}, \quad \Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pi_{33} \end{pmatrix}. \quad (a)$$

Erster Schritt. Wir regulieren mit Hilfe des Elementes $a_{21} = 1$ und bekommen nach (5.43)

$$q_{12} = \frac{\pi_{11} - a_{11}}{a_{21}} = \frac{1-i}{1} = 1-i. \quad (b)$$

Damit wird die Pivotregulierung (d) durchgeführt, anschließend erfolgt die Reduktion in (e). Der zweiten Regulierung dient das aktuelle Element $a_{32} = -1$, das gibt

$$q_{23} = \frac{\pi_{22} - a_{22}}{a_{32}} = \frac{1 - (-2+3i)}{-1} = -3+3i. \quad (c)$$

Regulierung in (f), Reduktion in (g). Das Ergebnis steht in (h). Probe $LAR = \Pi$.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|ccc|ccc|}
 \hline
 1-i & 1 & 0 & 0 & i & 1 & 2 \\
 I & 0 & 1 & 0 & I & 3+i & -4 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -3-2i \\
 \hline
 \end{array} & A \\
 \\
 \begin{array}{c}
 I_3 \\
 (d) \quad I_3
 \end{array}
 \begin{array}{|ccc|}
 \hline
 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 \\
 \hline
 I & 0 & 0 \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|ccc|ccc|}
 \hline
 I & 1 & 1-i & 0 & I & 5-2i & -2+4i \\
 -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3+i & -4 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -3-2i \\
 \hline
 \end{array} & (e) \\
 \\
 \begin{array}{|ccc|}
 \hline
 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 \\
 \hline
 I & -5+2i & 2-4i \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|ccc|ccc|}
 \hline
 0 & 1 & 1-i & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 -3+3i & -1 & i & 0 & 0 & -2+3i & -2-4i \\
 I & 0 & 0 & 1 & 0 & -I & -3-2i \\
 \hline
 \end{array} & (f) \\
 \\
 \begin{array}{|ccc|}
 \hline
 1 & -5+2i & 2-4i \\
 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 \\
 \hline
 0 & I & 0 \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|ccc|ccc|}
 \hline
 0 & 1 & 1-i & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 I & -1 & i & -3+3i & 0 & I & 13-7i \\
 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -3-2i \\
 \hline
 \end{array} & (g) \\
 \\
 \begin{array}{|ccc|}
 \hline
 1 & -5-2i & 2-4i \\
 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 \\
 \hline
 0 & I & -13+7i \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|ccc|ccc|}
 \hline
 1 & 1-i & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 -1 & i & -3+3i & 0 & 1 & 0 \\
 -1 & i & -2+3i & 0 & 0 & 10-9i \\
 \hline
 \end{array} & \Pi \\
 \\
 \begin{array}{c}
 L \\
 (h) \quad R
 \end{array}
 \begin{array}{|ccc|}
 \hline
 1 & -5+2i & 53-65i \\
 0 & 1 & -13+7i \\
 0 & 0 & 1 \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}$$

• 6.10 Pivotregulierung bei hermitescher Matrix

Bei der Kongruenztransformation einer hermiteschen Matrix A müssen zur Pivotregulierung Zeilen *und* Spalten kombiniert werden, damit auch die regulierte Matrix hermitesch bleibt. Es soll a_{jj} in π_{jj} übergehen, dann greifen wir die vier beteiligten Elemente heraus und haben damit

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \curvearrowright \\ q_{jk} \end{array}
 \begin{array}{c} \curvearrowleft \\ \bar{q}_{jk} \end{array}
 \begin{pmatrix} a_{jj} & \dots & a_{jk} \\ \dots & \dots & \dots \\ \bar{a}_{jk} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}
 \Rightarrow
 \begin{pmatrix} \pi_{jj} & \dots & a_{jk} + q_{jk}a_{kk} \\ \dots & \dots & \dots \\ \bar{a}_{jk} + \bar{q}_{jk}a_{kk} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}
 \end{array}
 \quad (18)$$

Um die lästige Indizierung zu vermeiden, setzen wir vorübergehend

$$\pi_{jj} = \pi, \quad q_{jk} = q; \quad a_{jj} = a, \quad a_{jk} = b, \quad a_{kk} = c. \quad (19)$$

Damit wird dann das neue Element oben links in (18)

$$\pi = a + (\bar{q}b + q\bar{b}) + cq\bar{q} , \quad (20)$$

und hier haben wir zwei Fälle zu unterscheiden.

Fall 1. $c = 0$. Dann verbleibt von (20) der Anteil

$$\pi = a + (\bar{q}b + q\bar{b}) \quad (21)$$

oder mit

$$q = x + iy , \quad b = u + iv \quad (22)$$

nach leichter Rechnung

$$\pi - a = 2(xu + yv) , \quad (23)$$

und das ist die Gleichung einer Geraden g in der reellen x - y -Ebene mit den Achsenabschnitten

$$\hat{x} = \frac{\pi - a}{2u} , \quad \hat{y} = \frac{\pi - a}{2v} . \quad (24)$$

Jeder Punkt dieser Geraden ist bei vorgegebenem Wert von π zulässig. Zu bevorzugen sind die Punkte P_1 bzw. P_2 der Geraden nach Abb. 6.1. Liegt nämlich das Element $b = u + iv$ (22) im Gebiet I der komplexen Zahlenebene nach Abb. 6.2, so wählen wir P_1 , anderenfalls P_2 und haben damit nach (24)

$$\text{Gebiet I: } q = \hat{x} = \frac{\pi - a}{2u} \text{ reell.} \quad \text{Gebiet II: } q = \hat{y} = \frac{\pi - a}{2v} i \text{ rein imaginär.} \quad (25)$$

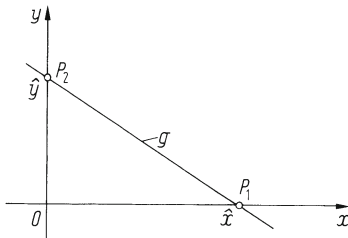


Abb. 6.1. Die Gerade g im Fall $a_{kk} = 0$

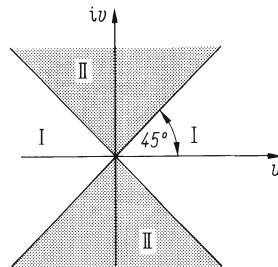


Abb. 6.2. Die Gebiete I und II in der komplexen Zahlenebene

Fall 2. $c \neq 0$. Die Beziehung (20) formen wir zweckmäßig um in

$$\pi = c \left(q + \frac{b}{c} \right) \left(\bar{q} + \frac{\bar{b}}{c} \right) + a - \frac{b\bar{b}}{c} \rightarrow (q - \mu)(\overline{q - \mu}) = r^2(\pi) \quad (26)$$

mit den Abkürzungen

$$\mu = -\frac{b}{c}, \quad \varrho = a - \frac{b\bar{b}}{c}, \quad r^2(\pi) = \frac{\pi - \varrho}{c}, \quad (27)$$

und dies stellt nach Abb. 6.3 ein reelles Rotationsparaboloid über der komplexen Zahlenebene mit dem Fußpunkt μ und der Scheitelordinate ϱ dar. Das Paraboloid ist für $c > 0$ nach oben, für $c < 0$ nach unten geöffnet, die Ordinate ϱ kann beliebige Werte annehmen. Der Wert von π dagegen wird begrenzt durch die Ungleichungen

$$c > 0: \pi \geq \varrho = a - \frac{b\bar{b}}{c}; \quad c < 0: \pi \leq \varrho = a - \frac{b\bar{b}}{c}. \quad (28)$$

Nur wenn diese erfüllt sind, schneidet die horizontale Ebene $\pi = \text{const}$ das Paraboloid in einem Kreis K mit dem Mittelpunkt $\mu = -b/c$ und dem Radius $r(\pi)$. Alle Punkte dieses Kreises sind für q zulässig; zweckmäßig ist es jedoch, einen der beiden Punkte P_1 oder P_2 auf der Verbindungslinie von 0 nach M nach Abb. 6.4 zu wählen; es ist dann $q = \beta b$ mit reellem Wert β . Setzt man dies in (20) ein, so entsteht eine quadratische Gleichung für β

$$\pi = a + 2\beta b\bar{b} + c\beta^2 b\bar{b}; \quad b\bar{b} = u^2 + v^2 \quad (29)$$

mit den beiden Lösungen

$$\beta_{1,2} = -\frac{1}{c} \pm \frac{1}{c} \sqrt{1 - (a - \pi)c(u^2 + v^2)}. \quad (30)$$

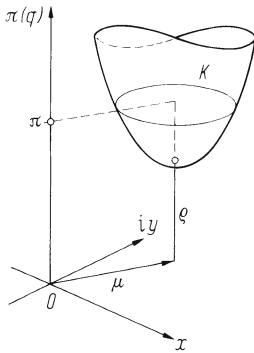


Abb. 6.3. Das reelle Rotationsparaboloid $\pi(q)$ über der komplexen Zahlenebene

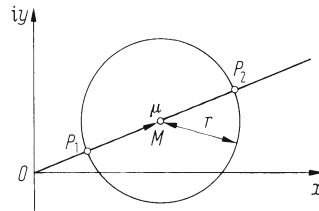


Abb. 6.4. Der Schnittkreis K in der komplexen Zahlenebene

Ist a_{jk} reell, somit $v = 0$, so liegen die Punkte P_1 , M und P_2 auf der reellen Achse, und auch q ist reell.

Beispiel. Die hermitesche Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & -i \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ i & i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (a)$$

ist kongruent auf eine Diagonalmatrix zu transformieren. Da alle vier Diagonalelemente gleich Null sind, ist eine vorangehende Pivotregulierung unverzichtbar. Wir wählen $j = 1$ und $k = 3$ ($j = 1$ und $k = 2$ würde nichts bringen, da aus vier Nullen kein endliches Pivot erzeugt werden kann.) Zufolge $a_{kk} = a_{33} = a = 0$ liegt der Fall 1 vor (gerade Linie nach Abb. 6.1), und da $b = a_{jk} = a_{13} = u + iv = 0 + i \cdot (-1)$ im Gebiet II der Abb. 6.2 liegt, wird nach (25) mit $a = a_{11} = 0$ und wenn wir $\pi = \pi_{11} = 2$ wählen,

$$q = \frac{\pi - a}{2v} i = \frac{2 - 0}{2(-1)} i = -i. \quad (b)$$

Wir rechnen Gauß implizit und bekommen:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & i & 0 & I & 0 \\ \hline -i & 0 & 0 & -i & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ I & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & i & 0 & 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & I & 0 & i/2 & i/2 \\ \hline I & 2 & 0 & -i & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ -i/2 & i & 0 & 0 & 0 \\ -i/2 & i & i & 0 & 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & 0 & 2i & -1 & I \\ \hline 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2i & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ I & 0 & i & -1/2 & -1/2 \\ \hline \end{array} \\ \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & 0 & I & -i/2 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 2 & i & 0 \\ -i/2 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ \hline \end{array} = \Pi. \quad (c) \end{array}$$

Rechnet man dasselbe explizit, so entsteht die Matrix

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i & 0 \\ -1 & 1 & i & -2i \\ -i/2 & i/2 & 1/2 & 0 \\ -i/2 & 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det L = 1. \quad (d)$$

Probe $LAL^* = \Pi$.

Zur Übung. Wählt man $\pi_{11} = 1$, somit $q_{13} = q = -i/2$ und geht nach derselben Pivotstrategie 11, 44, 22 vor, so ergibt sich die Pivotmatrix

$$\Pi = \text{Diag} \langle 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \rangle. \quad (e)$$

Wie man sieht, ist der Preis für die Herstellung der reellen Diagonalmatrix sehr hoch. Sehr viel einfacher kommt man auf ganz gewöhnliche Weise zum Ziel:

					0 0 -1 1						0 0 1 1						
0	1	0	0	0	0	0	-i	-i	0	1	0	0	0	0	0	0	-i
0	0	1	0	0	0	0	0	-i	0	0	1	0	0	0	0	i	-i
-1	0	0	1	0	i	0	0	0	1	0	0	1	-1	0	-i	0	0
1	0	0	0	1	i	i	0	0	1	0	0	0	1	i	i	0	0

L

1	0	0	0	0	0	0	-i
0	1	0	0	0	0	i	0
0	0	1	-1	0	-i	0	0
0	0	1	0	i	0	0	0

Π

(f)

Die jetzt reelle Matrix L ist kaum besetzt! Die Pivotmatrix ist hermitesch, wie es sein muß.

• 6.11 Bewegliches Pivot

Wir haben bislang stillschweigend vorausgesetzt, daß eine Spalte bzw. Zeile mit ein und demselben Pivot reduziert werden müsse, was natürlich keineswegs obligatorisch ist. Oft ist es nützlich, wenn nicht gar erforderlich, das Pivot während der Reduktion zu wechseln, was den Rechenaufwand in der impliziten Durchführung nicht erhöht.

Erstes Beispiel, $m = 4$, $n = 3$. Die erste Spalte der Matrix A ist mit beweglicher Pivotzeile von oben nach unten zu reduzieren. Wir machen die folgenden Schritte:

1. Addition der dritten Zeile zur vierten.
2. Addition der mit 0,25 multiplizierten zweiten Zeile zur dritten.
3. Addition der mit -2 multiplizierten ersten Zeile zur zweiten.

		I_4		A		L		A_{red}							
-2	↪	1	0	0	0	2	1	6	1	0	0	0	2	0	0
0,25	↪	0	1	0	0	4	8	-12	-2	1	0	0	0	6	-24
	↪	0	0	1	0	-1	4	5	0	0,25	1	0	0	6	2
1	↪	0	0	0	1	1	-3	-1	0	0	1	1	0	1	4

Probe: $LA = A_{\text{red}}$.

Der Vorteil des beweglichen Pivots gegenüber dem beim Gaußschen Algorithmus verwendeten festen Pivot liegt in der Vermeidung großer Zahlen. Man vergleiche dazu die Spaltenreduktion mittels Elevator E und der Matrix L im folgenden Beispiel.

$$\begin{array}{ccc}
 E & & L \\
 \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a^2 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a^{m-2} & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ -a^{m-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right) & \xrightarrow{\left(\begin{array}{c} a \\ a^2 \\ a^3 \\ \dots \\ a^{m-1} \\ a^m \end{array} \right)} & \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a & 1 \end{array} \right)
 \end{array}$$

Bei großer Ordnungszahl n und großem Betrag von a ist der Unterschied zwischen a (in L) und a^{m-1} (in E) erheblich. Da L ein Produkt von $m-1$ Elevatoren (mit nur jeweils einem Quotienten q_{jk}) ist, gilt ebenso wie beim Gaußschen Algorithmus $\det L = 1$.

Wie geht man nun praktisch vor? Die m Elemente der zu reduzierenden Spalte a (oder der Zeile a^T) werden nach der Größe ihrer Beträge geordnet und nummeriert von 1 bis m , wo 1 das betragskleinste und m das betragsgrößte Element bezeichne. Sodann wird ein geeignetes Element der Nummer p als *Hauptpivot* π gewählt; das ist jenes Element, das als einziges stehenbleibt und folglich in der Pivotmatrix π erscheint. Die Reduktion geht dann „von innen nach außen“ nach folgendem Schema vonstatten:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Gruppe I: } m \text{ mittels } m-1, m-1 \text{ mittels } m-2, \dots, p+1 \text{ mittels } p, \\ \text{Gruppe II: } 1 \text{ mittels } 2, \quad \quad \quad 2 \text{ mittels } 3, \dots, \quad \quad p-1 \text{ mittels } p. \end{array} \right\} \quad (31)$$

Zweites Beispiel. $n = 7$, gewählt werde $p = \boxed{4}$, das Hauptpivot ist somit $\pi = 2 + 6i$.

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 \\ 2+6i \\ 0,9 \\ 240 \\ 75i \\ -0,02 \\ 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{I II}} \left(\begin{array}{cccccc} 1 & -q_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -q_{37} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -q_{45} & 0 & 0 \\ -q_{51} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -q_{63} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -q_{72} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = L,$$

(a)

$$\det L = 1$$

mit

$$q_{45} = a_4/a_5 = 240/75i = -3,2i, \dots, q_{72} = a_7/a_2 = 5/(2+6i) = 0,25 - 0,75i. \quad (b)$$

Der Quotient q_{jk} steht in der Position jk (Zeile j , Spalte k) in L , wie es sein muß. Die zweite Spalte ist mit zwei Quotienten besetzt, da a_2 das Hauptpivot ist, während die vierte und sechste Spalte keinen Quotienten aufweisen, weil in der Gruppe I mit a_4 und in der Gruppe II mit a_6 die Reduktion beendet wird.

Soll das Hauptpivot fest vorgegeben werden, zum Beispiel als reell und ganzzahlig (insonderheit $\pi = 1$), so erfolgt vorweg eine Pivotregulierung dergestalt, daß das in der komplexen Zahlenebene (bzw. auf der reellen Zahlenachse) am nächsten gelegene Element a_j zu π gemacht wird, wie im Abschnitt 6.9 beschrieben.

• 6.12 Reelle ganzzahlige Äquivalenztransformationen

Ist die mn -Matrix A ganzzahlig, so besteht der begreifliche Wunsch, auch die Äquivalenztransformation $LAR = I$ ganzzahlig – und damit fehlerfrei! – durchzuführen. Dies gelingt in zwei Schritten, nämlich zunächst $LA = S$ (Zeilenkombination) und sodann $SR = I$ (Spaltenkombination), wozu verschiedene Methoden in der Literatur bekannt sind, am einfachsten mit Hilfe des bekannten *Euklidischen* Algorithmus, den wir deshalb zuerst beschreiben.

Herzstück der Methode ist die Reduktion einer Spalte a mit p reellen Komponenten (Elementen) auf den *Skalarvektor* $s_j = Te_j$, wo T der größte gemeinsame Teiler der p Elemente von a ist, gemäß der Transformationsvorschrift

$$La = s_j = Te_j ; \quad \det L = 1 , \quad (32)$$

und zwar geschieht dies mit Hilfe beweglicher Pivots auf folgende Weise.

EUKLID STANDARD

Gegeben: Die Spalte $a \neq 0$ mit p reellen Elementen.

START: Suche das betragsgrößte Element des Vektors a ; es heiße g . (Bei mehreren betragsgleichen Elementen hat man die Auswahl.)

ALGORITHMUS:

- 1) Suche aus den übrigen $p - 1$ Elementen (der sogenannten Konkurrenz) das betragsgrößte Element; es heiße k . (Bei mehreren betragsgleichen Elementen hat man die Auswahl.)
- 2) Bilde den Quotienten $q = g/k$ und runde zur nächstgelegenen ganzen Zahl Q .
- 3) Subtrahiere von g das Produkt $Q \cdot k$, d. h. ersetze g durch $g - Q \cdot k$. (Gaußscher Algorithmus, ein Schritt.)
- 4) Ersetze g durch k . Fahre fort mit 1)

ENDE: Die Prozedur endet mit Punkt 1), wenn $k = 0$ ist. Es sind dann $p - 1$ Elemente gleich Null, das verbleibende Element ist gleich dem größten gemeinsamen Teiler T der p Elemente des Vektors a . Führt man die Reduktion außer am Vektor a an der Einheitsmatrix I_p durch gemäß

$$(I_p | a) \rightarrow (L | s_j); \quad \det L = 1 , \quad (32a)$$

so geht I_p in die Transformationsmatrix L aus (32) über, und zwar ist $\det L = 1$, da L ein Produkt aus lauter Elevatoren (mit jeweils nur einem Quotienten) ist.

Erstes Beispiel mit $p = 4$. Wir reduzieren zunächst den Vektor a allein.

START: $g = a_4 = 10$.

ALGORITHMUS:

Erster Schritt.

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{matrix} 1) \ k = a_1 = 7. \\ 2) \ q = g/k = 10/7 = 1,43; \ Q = 1. \\ 3) \ g - Q \cdot k = 10 - 1 \cdot 7 = 3 = \tilde{a}_4. \\ 4) \ g \rightarrow k = a_1 = 7. \end{matrix} \quad (a)$$

Zweiter Schritt.

$$\tilde{a} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \\ \tilde{a}_3 \\ \tilde{a}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{matrix} 1) k = \tilde{a}_3 = -3 \text{ (auch } k = \tilde{a}_4 = 3 \text{ wäre möglich).} \\ 2) q = g/k = 7/(-3) = -2,33 \dots; Q = -2. \\ 3) g - Q \cdot k = 7 - (-2) \cdot (-3) = 1 = \tilde{a}_1. \\ 4) g \rightarrow k = \tilde{a}_3 = -3. \end{matrix} \quad (b)$$

Insgesamt sind die folgenden 6 Schritte zur Reduktion erforderlich

$$a = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot e_1. \quad (c)$$

Vollständige Durchführung. Mit den 6 Schritten (c) erhält man nach (32a) die Transformationsmatrix

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det L = 1. \quad (d)$$

Probe $La = 1 \cdot e_1$.

Es sei nun eine $m \times n$ -Matrix A vom Range r gegeben. Nachdem eine erste Spalte a_k mit m Elementen nach Euklid auf $T_1 e_j$ reduziert ist, wird die Zeile j und die Spalte k gesperrt und aus der verbleibenden Untermatrix eine Spalte mit jetzt nur noch $m-1$ Elementen reduziert, und so fort. Dies führt dann ebenso wie beim Gaußschen Algorithmus auf $LA = S$, wo S eine gestaffelte Matrix ist.

Zweites Beispiel mit $m = 4$, $n = 3$.

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -1 & -15 \\ -30 & 4 & 35 \\ 60 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}. \quad (a)$$

Reduktion der ersten Spalte gibt $L_1 A = A_1$ mit

$$L_1 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -5 \\ -6 & 2 & 5 \\ 0 & 11 & 66 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}. \quad (b)$$

Reduktion der zweiten Restspalte von A_1 führt auf $L_2 L_1 A = A_2$ mit

$$L_2 L_1 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -15 & -4 & 1 & 1 \\ 10 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -6 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 83 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}. \quad (c)$$

Reduktion der dritten Restspalte von A_2 ergibt schließlich $L_3 L_2 L_1 A = LA = S$.

$$L = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 195 & 80 & 1 & 64 \\ -770 & -316 & -4 & -253 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -6 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (d)$$

Probe: $LA = S$.

Kommen wir jetzt zur zweiten Transformation (Spaltenkombination) $SR = \Pi$. Damit auch diese ganzzahlig verläuft, berechnen wir das Produkt

$$\varrho = \pi_1 \pi_2 \cdots \pi_r \quad (33)$$

der r Pivots und starten mit der Skalarmatrix $D = \varrho I_n$; es wird dann nach r Schritten

$$SR = LAR = \varrho \Pi, \quad (33a)$$

wo L , R und Π ganzzahlig sind.

Wir führen das **zweite Beispiel** fort. In der Matrix S (d) stehen die $r = 3$ Pivots, deren Produkt ist $\varrho = (-6) \cdot 1 \cdot (-1) = 6$. Damit folgt in zwei Schritten

$$\begin{array}{c} S \\ D \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline I & 1/3 & 5/6 \\ \hline 0 & 1 & -3 \\ -6 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & I & 3 \\ \hline 0 & 1 & -3 \\ -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 6 & 2 & 5 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 6 & 2 & 11 \\ 0 & 6 & 18 \\ 0 & 0 & 6 \\ \hline \end{array} \end{array} \Pi \cdot \quad (e)$$

Probe: $SR = \varrho \Pi = 6 \Pi$.

Eine ganz andere Methode des ganzzahligen Rechnens besteht in einer Modifikation des Gaußschen Algorithmus, die allerdings nur dann zu empfehlen ist, wenn A die *Hessenberg-Form* besitzt:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (34)$$

a) Regelfall. Es sind alle n Hauptabschnittsdeterminanten

$$H_1 = a_{11}, \quad H_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad \dots, H_n = \det A \quad (35)$$

von Null verschieden. Dann gelingt die ganzzahlige Transformation $LA = \nabla$ mit

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ * & H_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ * & * & H_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & * & \dots & H_{n-2} & 0 \\ * & * & * & \dots & * & H_{n-1} \end{pmatrix}; \quad \nabla = \begin{pmatrix} H_1 & \delta_{12} & \delta_{13} & \dots & \delta_{1,n-1} & \delta_{1n} \\ 0 & H_2 & \delta_{23} & \dots & \delta_{2,n-1} & \delta_{2n} \\ 0 & 0 & H_3 & \dots & \delta_{3,n-1} & \delta_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & H_{n-1} & \delta_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & H_n \end{pmatrix}. \quad (35a)$$

Aus $LA = \nabla$ folgt nach dem Determinantensatz $\det L \cdot \det A = \det \nabla$ und daraus offensichtlich $\det A = H_n$.

Die Transformation beruht auf einem einfachen Kunstgriff. Bevor man die zweite Zeile reduziert, wird sie mit $a_{11} = H_1$ multipliziert, womit der störende Nenner in $q_{21} = -a_{21}/a_{11}$ beseitigt ist, und so fort in allen folgenden Zeilen. Es entsteht somit der Algorithmus

$$\tilde{a}^{\mu+1} = a_{\mu\mu} a^{\mu+1} - a_{\mu+1,\mu} \tilde{a}^{\mu}; \quad \mu = 1, 2, \dots, m-1. \quad (36)$$

Führt man diese $m-1$ Zeilenersetzungen auch an der Einheitsmatrix I_n durch, so wird

$$(I_n | A) \rightarrow (L | \nabla). \quad (37)$$

b) Ist das Hauptdiagonalelement $H_\mu = 0$, so werden die beiden Zeilen a^μ und $a^{\mu+1}$ miteinander vertauscht.

Drittes Beispiel. $n = 4$, Regelfall.

$$A = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \\ a^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 4 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}. \quad (a)$$

Die erste Zeile bleibt unverändert. Dann folgt nach (36)

$$\begin{aligned} \mu = 1: \tilde{a}^2 &= a_{11}a^2 - a_{21}a^1 = (0 \ 14 \ 12 \ 35); & H_2 &= \tilde{a}_{22} = 14. \\ \mu = 2: \tilde{a}^3 &= H_2a^3 - a_{32}\tilde{a}^2 = (0 \ 0 \ 16 \ -105); & H_3 &= \tilde{a}_{33} = 16. \\ \mu = 3: \tilde{a}^4 &= H_3a^4 - a_{43}\tilde{a}^3 = (0 \ 0 \ 0 \ 331); & H_4 &= \tilde{a}_{44} = 331. \end{aligned} \quad (b)$$

Somit ist

$$\nabla = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \\ a^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 14 & 12 & 35 \\ 0 & 0 & 16 & -105 \\ 0 & 0 & 0 & 331 \end{pmatrix}, \quad \det A = H_4 = 331. \quad (c)$$

Ferner wird nach (37) die Transformationsmatrix

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 14 & 0 \\ 6 & 9 & -42 & 16 \end{pmatrix}. \quad (d)$$

Probe: $LA = \nabla$.

Selbst bei kleinen Elementen a_{jk} entstehen bei hohen Ordnungszahlen m und n im allgemeinen sehr große Zahlen, weshalb die praktische Durchführbarkeit eines ganzzahligen Algorithmus durch die Mantissenlänge begrenzt wird. Grundsätzlich aber kann jede Matrix ganzzahlig transformiert werden; denn sind die Elemente von A Dezimalzahlen, so wird die Matrix vor Beginn der Rechnung mit einer geeigneten Zehnerpotenz 10^σ multipliziert dergestalt, daß alle Elemente ganzzahlig werden. Nach erfolgter Transformation ist dann die Matrix S bzw. die Pivotmatrix Π mit $10^{-\sigma}$ zu multiplizieren.

Schließlich sei noch erwähnt, daß es Matrizen gibt, die überhaupt nur ganzzahlig transformiert werden können, da andernfalls zufolge von Rundungsfehlern das Ergebnis um 1000% und mehr verfälscht wird. Das bekannteste Beispiel dafür ist die nach Dekker benannte quadratische Matrix T der Ordnung n mit den Elementen

$$t_{jk} = \binom{n+j-1}{j-1} \binom{n-1}{n-k} \cdot \frac{n}{j+k-1}; \quad \det T = 1. \quad (37a)$$

Viertes Beispiel. Die Determinante der Dekker-Matrix (37a) ist zu ermitteln nach den folgenden fünf Strategien:

1. Gauß. Pivots sind die Elemente $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$. (Hauptdiagonale, sogen. Schul-Gauß)
2. Gauß. Pivots sind die Elemente $a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n1}$. (Nebendiagonale)
3. Gauß. Totale Pivotsuche. Pivot ist das betragsgrößte Element der aktuellen Restmatrix T_μ . (Beim Start ist $T_1 = T$.)
4. Gauß. Totale Pivotsuche. Pivot ist das betragskleinste Element der aktuellen Restmatrix T_μ . (Beim Start ist $T_1 = T$.)
5. Euklid. Spaltenfolge a_1, a_2, \dots, a_n .

Die nachfolgende Tabelle zeigt für einige Ordnungszahlen die Ergebnisse.

	$n = 5$	$n = 10$	$n = 12$	$n = 14$	$n = 18$
1.	0,999 999 999 999 0	1,000 007	0,999 7	-11,664	$1,4 \cdot 10^{14}$
2.	1	1	1	1	1
3.	0,999 999 999 999 6	0,999 990	0,966	36,248	$-2,3 \cdot 10^{13}$
4.	1	1	1	1	1
5.	1	1	1	1	$-2,5 \cdot 10^{49}(!!)$

Nach (37a) muß $\det T = 1$ sein, aber was ist herausgekommen?

Daß die Strategien 2 und 4 identisch sind, liegt an einer speziellen Eigenschaft der Dekker-Matrix. (Bei beliebiger Matrix trifft dies nicht zu.) Der Euklidische Algorithmus liefert seiner Natur nach fehlerfreie Ergebnisse, ist allerdings bei 16stelliger Mantisse, mit der hier gerechnet wurde, ab $n = 19$ nicht mehr durchführbar. Rechnet man mit doppelt so langer Mantisse (was leicht möglich ist), so sind exakte Ergebnisse noch bei wesentlich höheren Ordnungszahlen erreichbar.

Der Leser beachte, daß bei der Strategie 1 ab $n = 14$ und bei der Strategie 3 ab $n = 12$ total unbrauchbare Ergebnisse resultieren. Daß anstelle des exakten Wertes $\det T = 1$ einige Billionen herauskommen, darf nicht überraschen, da die Kondition der Dekker-Matrix nach Konstruktion eben extrem schlecht ist. Etwa für $n = 100$ ist bei dem heutigen Stand der Rechentechnik an eine exakte Ermittlung der Determinante überhaupt nicht zu denken.

• 6.13 Der verkürzte Euklidische Algorithmus

Der Euklidische Algorithmus in seiner hier geschilderten Grundform ist im allgemeinen recht aufwendig. Es empfiehlt sich daher eine Kombination mit dem Gaußschen Algorithmus auf folgende Weise.

Aus dem Vektor a der Länge p greift man β Elemente heraus, wo $2 \leq \beta < p$ ist, und reduziert diesen verkürzten Vektor b nach Euklid auf einen Skalarvektor Te_j der Länge β .

- a) Regelfall: Es ist $T = +1$ oder $T = -1$. Dann dient T als festes Pivot zur Annullierung aller übrigen Elemente des Vektors a nach Gauß.
- b) Ausnahmefall:
 - b1) Bilde die Quotienten $q_k = a_k/T$ für die noch nicht annullierten restlichen Elemente von a . Sind diese alle ganzzahlig, so erfolgt die Reduktion nach Gauß mit T als festem Pivot.
 - b2) Trifft dies nicht zu, so kombiniert man das Element T mit einem oder mehreren noch nicht annullierten Elementen zu einem neuen Vektor b . Dies führt im allgemeinen zum Regelfall a). Falls nicht, so wird das Verfahren fortgesetzt, bis der Vektor a reduziert ist.

Optimal ist im allgemeinen die Wahl $\beta = 2$. Dazu zunächst zwei Beispiele.

Erstes Beispiel. Aus dem Vektor a der Länge p greifen wir zwei Elemente heraus und reduzieren, das gibt

$$a = \begin{pmatrix} \dots \\ 97 \\ \dots \\ \dots \\ 104 \\ \dots \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 97 \\ 104 \end{pmatrix};$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline I & 1 & 0 & 97 \\ \hline -1 & 0 & 1 & 104 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -14 & 1 & 0 & 97 \\ \hline I & -1 & 1 & 7 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline I & 15 & -14 & -1 \\ \hline 7 & -1 & 1 & 7 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 15 & -14 & -1 \\ \hline 104 & -97 & 0 \\ \hline \end{array} \quad (a)$$

$I_2 \quad b \qquad \qquad \qquad L \quad s$

Probe: $Lb = s$.

Zweites Beispiel. Aus dem Vektor a der Länge $p = 4$ werden die ersten beiden Elemente herausgegriffen.

$$a = \begin{pmatrix} 12 \\ -30 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ -30 \end{pmatrix};$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline I & 1 & 0 & 12 \\ \hline 2 & 0 & 1 & -30 \\ \hline \end{array} &
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 0 & 12 \\ \hline I & 2 & 1 & -6 \\ \hline \end{array} &
 \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 2 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline \end{array} &
 \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline -6 \\ \hline \end{array} \\
 I_2 & b & L & s
 \end{array} \quad (a)$$

Probe: $Lb = s$.

Es seien nun a^μ und a^ν zwei Zeilen einer Matrix A , und die Spalte a_j soll reduziert werden. Dann bilden die beiden Elemente $a_{\mu j}$ und $a_{\nu j}$ den Vektor b der Länge $\beta = 2$, der nach Euklid reduziert wird auf einen Skalarvektor; die zugehörige zwei-reihige Transformationsmatrix heiße $L_{\mu\nu}$. Mit dieser multiplizieren wir die beiden Zeilen der Nummern μ und ν der aktuellen Matrizen L und A und bekommen

$$\begin{pmatrix} l^\mu & a^\mu \\ l^\nu & a^\nu \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} L_{\mu\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{l}^\mu & \tilde{a}^\mu \\ \tilde{l}^\nu & \tilde{a}^\nu \end{pmatrix} \quad (37b)$$

In L und A sind somit die Zeilen l^μ , l^ν und a^μ , a^ν zu ersetzen durch \tilde{l}^μ , \tilde{l}^ν und \tilde{a}^μ , \tilde{a}^ν .

Drittes Beispiel. $m = 4$, $n = 3$.

I. Transformation $LA = S$.

$$\begin{array}{c}
 I_4 \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 12 & -1 & -15 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & -30 & 4 & 35 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 60 & 3 & -4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ \hline \end{array} & A & (a) ; &
 \begin{array}{c}
 L_{12} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 12 & -1 & -15 \\ \hline & & & & 0 & 1 & 0 & 0 & -30 & 4 & 35 \\ \hline 5 & 2 & 5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -5 \\ \hline 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 2 & 5 \\ \hline \end{array} & (b)
 \end{array}$$

I.1. Reduktion der ersten Spalte. Wir wählen $\mu = 1$, $\nu = 2$. Mit der im zweiten Beispiel berechneten Matrix L_{12} bekommen wir nach (37b) in (b) die beiden transformierten Zeilen, die in (a) substituiert werden; anschließend wird reduziert mit dem Pivot $\pi_{21} = -6$.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -5 \\ \hline I & 2 & 1 & 0 & 0 & -6 & 2 & 5 \\ \hline 10 & 0 & 0 & 1 & 0 & 60 & 3 & -4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ \hline \end{array} &
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -5 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 0 & -6 & 2 & 5 \\ \hline 20 & 10 & 1 & 0 & 0 & 23 & 46 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ \hline \end{array} & (c)
 \end{array}$$

I.2. Reduktion der zweiten Spalte. Die zweite Zeile ist gesperrt und scheidet daher aus. Wir wählen $\mu = 1$ und $\nu = 4$.

$$L_{14} \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 3 \\ & & -2 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 10 & 4 & 0 & 3 & 0 & 0 & -4 \\ \hline \end{array} . \quad (d)$$

Die beiden unteren Zeilen werden anstelle der ersten und vierten Zeile in (c) substituiert, sodann erfolgt die Reduktion der Restspalte (das heißt mit Ausnahme des zweiten Elementes) mittels des Pivots $\pi_{21} = 1$.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline I & 5 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -23 & 20 & 10 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 4 & 0 & 3 \\ \hline 0 & I & -3 \\ -6 & 2 & 5 \\ 0 & 23 & 46 \\ 0 & 0 & -4 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 5 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -95 & -36 & 1 & -23 \\ 10 & 4 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 1 & -3 \\ -6 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 115 \\ 0 & 0 & -4 \\ \hline \end{array} . \quad (e)$$

I.3. Reduktion der dritten Spalte. Die zweite und erste Zeile scheiden aus. Die Matrix L_{34} wird bestimmt, mit dieser erfolgt die Linksmultiplikation der dritten und vierten Zeile und anschließend die Substitution. Das ergibt

$$L_{34} \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 115 \\ & & -4 \\ \hline 4 & 115 & 0 \\ 1 & 29 & -1 \\ \hline \end{array} L \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 5 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & -6 & 2 & 5 \\ 770 & 316 & 4 & 253 & 0 & 0 & 0 \\ 195 & 80 & 1 & 64 & 0 & 0 & -1 \\ \hline \end{array} S . \quad (f)$$

Probe: $LA = S$.

II. Transformation $SR = \varrho \Pi$. Die Pivots stehen an den Plätzen 21, 12 und 43, damit wird das Produkt

$$\varrho = \pi_{21} \pi_{12} \pi_{43} = (-6) \cdot 1 \cdot (-1) = 6. \quad (g)$$

Zeilenreduktion mit der Startmatrix $D = 6I_3$ in der Reihenfolge 1, 2, (3) ergibt

$$S \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & -3 \\ -6 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & I & -3 \\ -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \hline \end{array} \Pi \\ D \begin{array}{|c|c|c|} \hline 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ \hline I & 1/3 & 5/6 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 6 & 2 & 5 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ \hline 0 & I & 3 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 6 & 2 & 11 \\ 0 & 6 & 18 \\ 0 & 0 & 6 \\ \hline \end{array} R . \quad (h)$$

Kontrolle der Rechnung: $SR = \varrho \Pi$, somit insgesamt $LAR = \varrho \Pi = 6\pi$. Man vergleiche das zweite Beispiel aus dem Abschnitt 6.12.

• 6.14 Reelle ganzzahlige Kongruenztransformationen

Es sei nun A reellsymmetrisch von der Ordnung n und dem Range $r \leq n$ mit ganzzahligen Elementen, dann ist es zweckmäßig, zunächst die Kongruenztransformation

$$LAL^T = T, \quad \det L = 1 \quad (38)$$

auf die *Tridiagonalmatrix* T vorzunehmen, wo L und T ganzzahlig sind. Wir beschreiben den dazugehörigen Algorithmus

EUKLID STANDARD bzw. EUKLID/GAUSS .

1)

1a) Reduktion der ersten Spalte von A mit Ausnahme des Elementes a_{11} . Es verbleibt das Element T_{k1} in der Zeile k .

1b) Reduktion der ersten Zeile. Es verbleibt das Element $T_{1k} = T_{k1}$ in der Spalte k .

2) Falls $k \neq 2$, vertausche

2a) die Spalten k und 2 und

2b) die Zeilen k und 2.

Auf diese Weise ist eine reellsymmetrische Matrix entstanden, deren erste Spalte und Zeile mit Ausnahme der ersten beiden Elemente mit Nullen besetzt sind. Auf die verbleibende Untermatrix A_{22} , die nach Streichen der ersten Zeile und Spalte entsteht, wird die gleiche Prozedur angewendet. Nach höchstens $r - 1$ Schritten ist die Transformation (38) abgeschlossen.

Prinzipiell ist auch eine ganzzahlige Kongruenztransformation auf eine Diagonalmatrix D möglich, doch führt dies im allgemeinen auf sehr große Zahlen, weshalb es zweckmäßiger ist, nach (38) vorzugehen und anschließend, da T eine (spezielle) Hessenberg-Matrix ist, die Transformation $L T = \nabla$ nach (36), (37) vorzunehmen.

Ein **Beispiel** mit $n = 4$, $r = 3$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & -6 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & -3 \\ -6 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}. \quad (a)$$

Die Reduktion der ersten Spalte mit Ausnahme des Elementes a_{11} ergibt

$$1 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} \right) \quad -2 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \quad 2 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \quad 1 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \quad \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right). \quad (b)$$

Führt man dies an der Einheitsmatrix I_4 durch, so geht diese über in die Transformationsmatrix L_1 , womit sich die Matrix $L_1 A L_1^T = A_1$ berechnen läßt.

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_1 A L_1^T = A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & -9 & -9 \\ 0 & -9 & -20 & -20 \\ 0 & -9 & -20 & -20 \end{pmatrix}. \quad (c)$$

Sodann erfolgt die Reduktion der Restspalte der Nummer 2, indem die mit -1 multiplizierte dritte Zeile zur vierten addiert wird. Führt man das gleiche an den Spalten durch, so folgt das Ergebnis

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad LAL^T = T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & -9 & 0 \\ 0 & -9 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (d)$$

Der Leser führe die Transformation nach dem Programm 1 a) bis 2 b) durch ohne Erstellung der Transformationsmatrix L und vergleiche den Rechenaufwand.

6.15 Komplexe ganzzahlige Transformationen

Es sei der zu reduzierende Vektor $a = u + i v$ der Länge p komplex, wo die reellen Vektoren u und v ganzzahlig sind. Dann wird zunächst der Vektor v nach EUKLID STANDARD oder EUKLID/GAUSS reduziert auf $s_j = T_j e_j$, sodann erfolgt die Reduktion des Vektors u mit Ausnahme des Elementes u_j auf $T_k e_k$. Wir haben dann die Situation

$$\tilde{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ \tilde{u}_j + i T_j \\ \dots \\ T_k \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ T_k \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (39)$$

1. **Regelfall.** Es ist $T_k = +1$ oder $T_k = -1$. Dann dient T_k als Pivot zur Annullierung des Elementes $\tilde{a}_j = \tilde{u}_j + i T_j$.
2. **Ausnahme.** Trifft 1. nicht zu, so wird der größte gemeinsame Teiler t_{jk} der drei reellen Zahlen \tilde{u}_j , T_j , T_k ermittelt, das Element \tilde{a}_j mit T_k/t_{jk} multipliziert und dann erst mittels T_k reduziert.
3. **Alternative** zu 2. Will man die Ermittlung von t_{jk} vermeiden, so wird \tilde{a}_j mit T_k multipliziert und sodann reduziert; doch führt dies auf unnötig große Zahlen im folgenden.

Dehnt man diese Operationen auf die Einheitsmatrix I_p aus, so gewinnt man die Transformation

$$La = T_k e_k, \quad T_k \text{ reell.} \quad (40)$$

Im Fall 1 ist $\det L = 1$, im Fall 2 $\det L = T_k/t_{jk}$, im Fall 3 $\det L = T_k$, wie man sich leicht klarmacht.

Es ist danach evident, wie der Algorithmus für eine komplexe ganzzahlige Matrix A verläuft. Zunächst erfolgt $LA = S$, wo S eine gestaffelte Matrix ist, und sodann $SR = \varrho II$ wie im vorangegangenen geschildert.

Ist A hermitesch, so empfiehlt sich die Kongruenztransformation $LAL^* = T$ auf die *reell*symmetrische Tridiagonalmatrix T auf die gleiche Weise, wie im Abschnitt 6.14 beschrieben. Prinzipiell wäre auch eine ganzzahlige Kongruenztransformation $LAL^* = D$ auf eine reelle Diagonalmatrix D möglich, doch führt dies im allgemeinen auf sehr große Zahlen, weshalb der Umweg über T zweckmäßiger ist.

Ein **Beispiel**. Die komplexe Matrix A ist ganzzahlig auf eine gestaffelte Matrix S zu transformieren, $LA = S$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2i & 0 \\ 2+i & 0 & -5 \\ 3-i & 1 & 1+i \end{pmatrix} \quad (\text{a}) ; \quad u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{b})$$

1. Reduktion der ersten Spalte $a_1 = u_1 + i v_1$ mit den reellen Vektoren u_1 und v_1 (b). Die dritte Zeile der Gesamtmatrix $(I_3 | a_1)$ wird zur zweiten addiert, das gibt

$$(I_3 | a_1) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3-i \end{array} \right), \quad \tilde{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}. \quad (\text{c})$$

Damit ist der Vektor v_1 reduziert, und u_1 ist übergegangen in den Vektor \tilde{u}_1 , dessen erste beide Elemente zu reduzieren sind mit der leicht zu berechnenden Matrix L_{12} , die wir auch zu einer dreireihigen Matrix \tilde{L}_{12} ergänzen können (was für das Programmieren bequemer ist):

$$L_{12} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \tilde{L}_{12} = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right). \quad (\text{d})$$

Wir multiplizieren die Matrix (c) von links mit \tilde{L}_{12} und reduzieren anschließend nach Gauß mit dem Pivot $\tilde{a}_{11} = 1$ (Regelfall), das gibt

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 1 \\ -5 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3-i \end{array} \right) \xrightarrow{-3+i} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 1 \\ -5 & 5 & 5 & 0 \\ -6+2i & 3-i & 4-i & 0 \end{array} \right) = (L_1 | e_1). \quad (\text{e})$$

Probe: $L_1 a_1 = e_1$.

2. Reduktion der zweiten (transformierten) Spalte. Diese wird zunächst berechnet aus

$$L_1 a_2 = L_1 \begin{pmatrix} 2i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+4i \\ 3-10i \\ -13i \end{pmatrix} = \tilde{a}_2 = \tilde{u}_2 + i \tilde{v}_2; \quad \tilde{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ -13 \end{pmatrix}. \quad (\text{f})$$

Die beiden letzten – in (f) eingerahmten – Elemente von \tilde{v}_2 werden nach Euklid reduziert mit Hilfe der Matrix L_{23} , die wir zu \tilde{L}_{23} erweitern durch eine sogenannte Ränderung

$$L_{23} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -13 & 10 \end{pmatrix}, \quad \tilde{L}_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & -13 & 10 \end{pmatrix}. \quad (\text{g})$$

Sodann berechnen wir das Produkt

$$\tilde{L}_{23}L_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2-6i & 3+3i & 3i \\ 5+20i & -9-10i & 1-10i \end{pmatrix} = L_2 \quad (\text{h})$$

und daraus die transformierte Spalte \tilde{a}_2

$$L_2 a_2 = \tilde{a}_2 = \begin{pmatrix} -1+4i \\ 12-i \\ -39 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{21} \\ \tilde{a}_{22} \\ \tilde{a}_{23} \end{pmatrix}. \quad (\text{i})$$

Hier ist nun $\tilde{a}_{23} = T_k = -39$ das reelle Pivot, mit dem das komplexe Element $\tilde{a}_{22} = 12-i$ zu annullieren ist. Es liegt der Fall 2 vor. Die drei Zahlen $\tilde{u}_j = 12$, $T_j = -1$ und $T_k = -39$ haben den größten gemeinsamen Teiler $t_{jk} = 1$, somit ist die zweite Zeile mit -39 zu multiplizieren; sodann wird die mit $-(12-i)$ multiplizierte dritte Zeile zur zweiten addiert, womit die Matrix L_2 (h) übergeht in die endgültige Transformationsmatrix L . Mit dieser wird dann die gestaffelte Matrix $S = LA$ berechnet.

$$L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2-i & 1-6i & -2+4i \\ 5+20i & -9-10i & 1-10i \end{pmatrix}, \quad LA = \begin{pmatrix} 1 & -1+4i & 4-i \\ 0 & 0 & -11+32i \\ 0 & -39 & 56+41i \end{pmatrix} = S. \quad (\text{j})$$

Schließlich ermitteln wir noch die Determinante von A gemäß

$$\det A = \frac{\det S}{\det L} = \frac{1 \cdot 39 \cdot (-11+32i)}{-39} = 11-32i. \quad (\text{k})$$

6.16 Die Normalform

Von der Pivotmatrix Π ist es nicht mehr weit bis zu der in (5.56) definierten Normalform einer Matrix A . Halten wir nochmals fest, daß bislang zur Transformation $LAR = \Pi$ ausnahmslos die Grundoperation III benötigt wurde; demzufolge ist $\det L = \det R = 1$. Erst an dieser Stelle benötigen wir erstmalig die Grundoperationen I und II aus Abschnitt 5.3.

Grundoperation I

Die Zeilen und Spalten der Pivotmatrix Π werden so umgeordnet, daß die r Pivots auf die Plätze $11, 22, \dots, rr$ geraten. Dies bedeutet die Transformation $P_z \Pi P_s = \Pi$ mit zwei Permutationsmatrizen P_z (Zeilenumordnung) und P_s (Spaltenumordnung). Ist A hermitesch (reellsymmetrisch) und definit (somit auch regulär), so entfällt diese Umordnung, da die Pivots bereits auf der Hauptdiagonale stehen.

Grundoperation II

Es werden nach (5.26) bis (5.28) entweder die ersten r Zeilen oder die ersten r Spalten von \tilde{L} durch die Pivots dividiert bzw. mit deren Kehrwerten multipliziert. Es läßt sich auch beides kombinieren durch die Produktzerlegung des Pivots, z. B. $\pi = 100 = 4 \cdot 25$; es wird die Zeile durch 4 und die Spalte durch 25 dividiert oder umgekehrt.

Ist A quadratisch und regulär, so empfiehlt es sich, via Pivotregulierung die ersten $n-1$ Pivots zu Eins zu machen und in die Hauptdiagonale zu verlegen. Es resultiert dann die allein durch die Grundoperation III hergestellte sogenannte *Determinantenform* N_d

$$LAR = N_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \det A \end{pmatrix} ; \quad \det L = 1, \quad \det R = 1. \quad (41)$$

Dieses Verfahren versagt nur dann, wenn im Verlaufe der Transformation die Situation eintritt, daß unterhalb und rechts des Diagonalelementes $a_{jj} = \pi_{jj}$ lauter Nullen stehen. Dies trifft zum Beispiel in der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 11 \end{pmatrix} \quad (41a)$$

schon beim ersten Schritt zu.

Dazu ein **Beispiel** mit $m = n = 3$, Gauß-Jordan explizit in einem Durchlauf.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline I & 1 & 0 & 0 \\ \hline -3 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline I & -2 & 1 \\ \hline 3 & 0 & 10 \\ \hline 0 & 1 & 2 \\ \hline \end{array} \quad \text{PV} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline -5 & -3 & 1 & 0 \\ \hline I & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & -2 & 1 \\ \hline 0 & 6 & 7 \\ \hline 0 & I & 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 0 & 0 \\ \hline I & -3 & 1 & -5 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & -2 & 1 \\ \hline 0 & I & -3 \\ \hline 0 & 1 & 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & -5 & 2 & -10 \\ \hline 0,6 & -3 & 1 & -5 \\ \hline I & 3 & -1 & 6 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & -5 \\ \hline 0 & 1 & -3 \\ \hline 0 & 0 & 5 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -2 & 1 & -4 \\ \hline -1,2 & 0,4 & -1,4 \\ \hline 3 & -1 & 6 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 5 \\ \hline \end{array}, \quad \det A = \det \Pi = 5.$$

$L \qquad \qquad \Pi$

Probe: $LA = \Pi$. (Anmerkung: die Abkürzung PV weist auf Pivotregulierung hin.)

6.17 Dreieckszerlegung einer quadratischen Matrix

Es sei A quadratisch und regulär. Werden die Pivots aus der Hauptdiagonale auf den Plätzen $11, 22, \dots, nn$ gewählt, so wird offenbar L eine untere normierte Dreiecksmatrix, Π eine Diagonalmatrix D_n und R eine obere Dreiecksmatrix:

$$L = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \diagup & & & & \\ \hline \end{array}, \quad \Pi = D_n = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \diagup & & & & \\ \hline \end{array}, \quad R = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \diagdown & & & & \\ \hline \end{array} \quad (42)$$

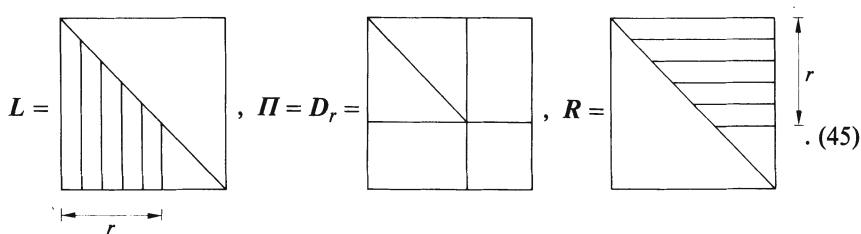
Wir zeigten in Satz 1 aus Abschnitt 5.7, daß die Inverse einer normierten unteren (oberen) Dreiecksmatrix ihrerseits eine normierte untere (obere) Dreiecksmatrix ist, es wird somit

$$LAR = D \rightarrow A = L^{-1}DR^{-1} = L^{-1}(\underbrace{DR^{-1}}_{\tilde{D}}) = (\underbrace{L^{-1}D}_{\tilde{L}})R^{-1} \quad (43)$$

oder

$$A = \Delta_L \quad \nabla_R = \tilde{\Delta}_L \quad \tilde{\nabla}_R, \quad (44)$$

je nachdem, ob man die Diagonalmatrix D zum rechten oder zum linken Faktor schlägt; in beiden Fällen resultiert eine sogenannte *Dreieckszerlegung* der Matrix A . Ist A singulär, $r < n$, und gelingt es dennoch, die Pivotfolge $11, 22, \dots, rr$ einzuhalten (was nicht immer möglich sein muß), so sind in L^{-1} die letzten $d_r = n - r$ Spalten und in R^{-1} die letzten d_r Zeilen Einheitsvektoren; die Konfiguration (42) geht damit über in



$$L = \begin{array}{|c|} \hline \text{Matrix mit } r \text{ Spalten} \\ \hline \end{array}, \quad D_r = \begin{array}{|c|} \hline \text{Matrix mit } r \text{ Zeilen} \\ \hline \end{array}, \quad R = \begin{array}{|c|} \hline \text{Matrix mit } r \text{ Zeilen} \\ \hline \end{array}. \quad (45)$$

Ist A hermitesch (reellsymmetrisch) und transformiert man kongruent, so wird

$$A = L^{-1}D(L^{-1})^*, \quad D \text{ reell}, \quad (46)$$

und hier wird man die reelle Diagonalmatrix D weder nach rechts noch nach links in die Klammer nehmen.

Eine – für manche Zwecke erwünschte – Dreieckszerlegung ist jedoch keineswegs immer durchführbar, wie wir oben schon andeuteten. Wir erinnern bei dieser Gelegenheit an die reguläre hermitesche Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & -i \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ i & i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det A = 1$$

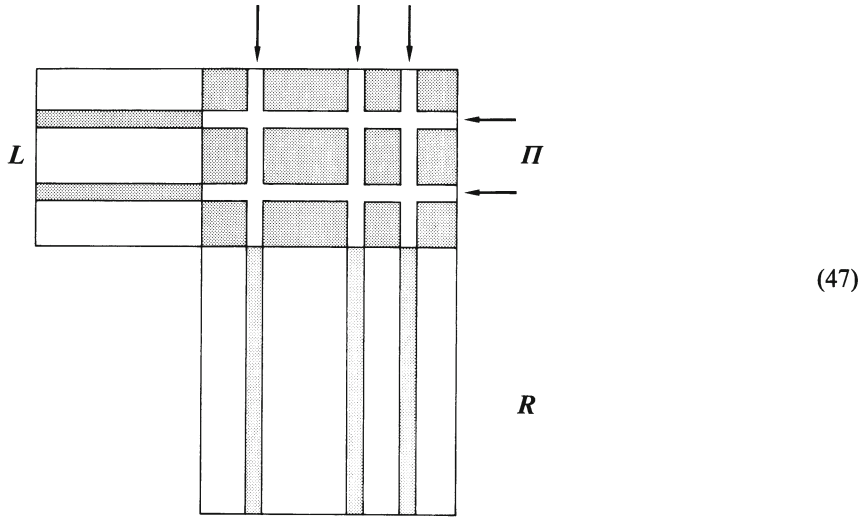
aus dem Abschnitt 6.10. Auch die zweireihige Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix}, \quad \det A \neq 0$$

läßt sich nicht in das Produkt von zwei Dreiecksmatrizen zerlegen.

• 6.18 Eigenzeilen und Eigenspalten einer singulären Matrix

Die Pivotmatrix Π habe $m-r = d_m$ Nullzeilen und $n-r = d_n$ Nullspalten, zum Beispiel mit $d_m = 2$ und $d_n = 3$



Dann gilt offenbar für die durch Pfeile markierten Zeilen und Spalten

$$e^j \Pi = o^T, \quad \Pi e_k = o \quad (48)$$

oder mit $\Pi = LAR$

$$e^j LAR = o^T, \quad LAR e_k = o, \quad (49)$$

und wenn wir die erste Gleichung von rechts mit R^{-1} und die zweite von links mit L^{-1} multiplizieren,

$$\boxed{l^j A = o^T, \quad A r_k = o} \quad (50)$$

Die d_m Vektoren l^j heißen *Eigenzeilen* und die d_n Vektoren r_k *Eigenspalten* der Matrix A . Sie sind jeweils unter sich linear unabhängig, weil die Einheitsvektoren in (48) es sind.

Nun ist jede Linearkombination der d_m Eigenzeilen (die wir im Gegensatz zum Schema (47), aus dem sie gewonnen werden, von 1 bis d_m durchnummerieren)

$$l^m = c^1 l^1 + c^2 l^2 + \dots + c^{d_m} l^{d_m} \quad (51)$$

und jede Linearkombination der d_n Eigenspalten

$$r_n = c_1 r_1 + c_2 r_2 + \dots + c_{d_n} r_{d_n} \quad (52)$$

ebenfalls eine Eigenzeile bzw. Eigenspalte von A ; denn multipliziert man (51) von rechts mit A bzw. (52) von links mit A , so wird zufolge (50)

$$l^m A = c^1 o^T + c^2 o^T + \dots + c^{d_m} o^T \quad (53)$$

bzw.

$$A r_n = c_1 o + c_2 o + \dots + c_{d_n} o, \quad (54)$$

wie immer man die reellen oder komplexen Koeffizienten c^j , c_k wählt. Man sagt: die Gesamtheit der Eigenzeilen spannt einen *Linkseigenraum* (auch *Linksnullraum* oder *Zeilenkern*) der Dimension d_m und die Gesamtheit der Eigenspalten einen *Rechtseigenraum* (auch *Rechtsnullraum* oder *Spaltenkern*) auf.

Ist $d_m = 1$, so gibt es nur eine Eigenzeile, und diese ist bis auf ihre Länge, das heißt bis auf den Faktor c^1 eindeutig, gleichviel, welche Pivotstrategie eingeschlagen wurde. Ist aber $d_m > 1$, so hängt die Erscheinungsform der Eigenzeilen von der Pivotstrategie ab; man kann daher nicht sagen, die Matrix A besäße diese oder jene Eigenzeilen – dies verbietet sich schon im Hinblick auf die lineare Kombinierbarkeit (51) –, sondern unabhängig vom numerischen Vorgehen und daher der Matrix wirklich eigentümlich (im Sinne dieses Wortes) ist allein der von den d_m Eigenzeilen (gleich welcher Erscheinungsform) aufgespannte d_m -dimensionale Linkseigenraum, und das Entsprechende gilt für die d_n Eigenspalten.

Erstes Beispiel. Die Matrix Π aus Abschnitt 6.1 mit $n = 5$, $m = 3$, $r = 2$. Es ist $d_m = m - r = 3 - 2 = 1$, $d_n = n - r = 5 - 2 = 3$, somit gibt es eine Eigenzeile e^3 , weil die Nullzeile die Nummer 3 hat,

$$e^3 = (0 \ 0 \ 1) , \quad (a)$$

und es gibt die drei Eigenspalten der Nummern 2, 3 und 5, weil dies die Nummern der Nullspalten von Π sind,

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (b)$$

In der Tat sind damit die Gleichungen (48) erfüllt, denn es ist

$$e^3 \Pi = o^T; \quad \Pi e_2 = o, \quad \Pi e_3 = o, \quad \Pi e_5 = o. \quad (c)$$

Zweites Beispiel. $m = n = 4$, Gauß explizit. Nach zwei Reduktionsschritten bricht das Verfahren ab, der Rang ist somit $r = 2$.

I	1	0	0	0
-2	0	1	0	0
-3	0	0	1	0
-1	0	0	0	1

 I_4

1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1

 I_4

1	-3	5	-4
---	----	---	----

 A

0	1	0	0	0
I	-2	1	0	0
-7/3	-3	0	1	0
1/3	-1	0	0	1

1	0	0	0
0	-3	6	-6
0	-7	14	-14
0	1	-2	2

1	-3	5	-4
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1

0	I	2	-2
---	-----	---	----

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|cccc|}
 \hline
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 -2 & 1 & 0 & 0 \\
 5/3 & -7/3 & 1 & 0 \\
 -5/3 & 1/3 & 0 & 1 \\
 \hline
 \end{array} &
 \begin{array}{|cccc|}
 \hline
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -3 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 \end{array} &
 \Pi &
 \begin{array}{l}
 l^3 = \begin{pmatrix} 5/3 & -7/3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 l^4 = \begin{pmatrix} -5/3 & 1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{array} \\
 (a) & & & (b)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 L \\
 R
 \end{array}
 \begin{array}{|cccc|}
 \hline
 1 & -3 & -1 & 2 \\
 0 & 1 & 2 & -2 \\
 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 r_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
 \end{array}
 \quad
 (c)$$

Wir haben hier im Gegensatz zu (51), (52) die korrekte Numerierung gewählt, die mit dem Generalschema (a) übereinstimmt. Man überzeuge sich, daß $l^3 A = o^T$, $l^4 A = o^T$ und $A r_3 = o$, $A r_4 = o$ ist. Jede Linearkombination

$$l = c^3 l^3 + c^4 l^4 \quad \text{bzw.} \quad r = c_3 r_3 + c_4 r_4 \quad (d)$$

ist wiederum eine Eigenzeile bzw. Eigenspalte. Zum Beispiel wird mit $c_3 = -10$, $c_4 = 2$

$$r = -10 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -24 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad (e)$$

und tatsächlich ist $A r = o$, wie es sein muß.

Werden die d_m Eigenzeilen l^j zu einer *Linkseigenmatrix* L_e und die d_n Eigenspalten r_k zu einer *Rechtseigenmatrix* R_e zusammengefaßt,

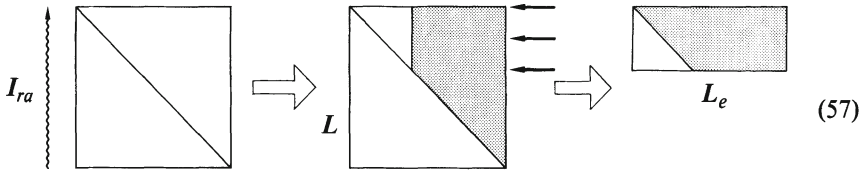
$$L_e = \begin{pmatrix} l^1 \\ \vdots \\ l^{d_m} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ d_m \\ \downarrow \end{array}, \quad R_e = \begin{pmatrix} r_1 & \dots & r_{d_n} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ n \\ \downarrow \end{array}, \quad (55)$$

$\longleftarrow m \longrightarrow \qquad \qquad \qquad \longleftarrow d_n \longrightarrow$

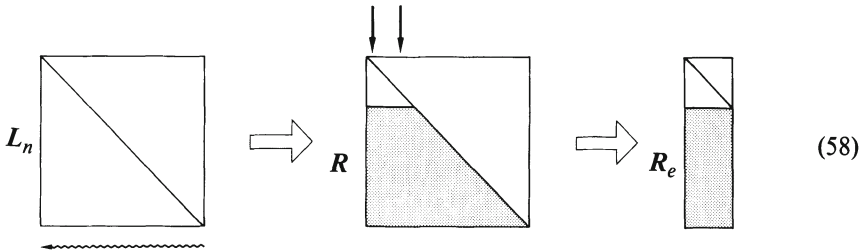
so schreiben sich damit die Gleichungen (50) kompakter als

$$\boxed{L_e A = o, \quad A R_e = o} \quad (56)$$

Die Erscheinungsform der beiden Eigenmatrizen hängt wesentlich ab von der gewählten Pivotstrategie, wie wir abschließend noch zeigen wollen. Zuerst die Eigenzeilen. Wählt man die Pivots zeilenweise von unten nach oben, so geht die Einheitsmatrix I_m in eine normierte obere Dreiecksmatrix über. Erscheinen darüber hinaus in der Pivotmatrix Π die d_m Nullzeilen als die letzten ganz oben (was die Pfeile im Schema (57) andeuten), so sind demnach aus der Matrix L die oberen d_m Zeilen herauszugreifen, und das bedeutet, daß L_e von Trapezform ist, wie unmittelbar aus dem Schema ersichtlich



Das Analoge gilt für die Matrix R_e , wenn die Pivots spaltenweise von rechts nach links gewählt werden und die d_n Nullspalten in π ganz links auftreten



Wir nennen dies die *Normalform* der Eigenmatrizen L_e und R_e . Sollen beide diese (numerisch erwünschte) Normalform besitzen, so müssen demnach die Pivots aus der von unten rechts nach oben links verlaufenden Diagonale (das ist bei quadratischen Matrizen die Hauptdiagonale) gewählt werden, also fortschreitend in der Reihenfolge $mn, m-1, n-1$ usw., was allerdings im allgemeinen nicht möglich sein wird. Aber selbst die Normalform von nur einer der beiden Eigenmatrizen L_e oder R_e ist dann nicht gegeben, wenn wie im Schema (47) die Pfeile wie wir sagen wollen "fehlplaziert" sind, die Nullzeilen bzw. Nullspalten in Π somit nicht erst geschlossen am Ende der Reduktion, sondern im Laufe der Rechnung schon vorher erscheinen. Wir kommen auf diesen wichtigen Sachverhalt im Abschnitt 10.10 noch einmal zurück.

Wir wiederholen das letzte **Beispiel** mit der Pivotfolge 44, 33, also von rechts unten nach links oben fortschreitend. Man erhält

		↓ ↓ Π								
L	1	0	-1/10	-7/10	0	0	0	0	← ←	
	0	1	-1/2	-1/2	0	0	0	0		
	0	0	1	1/3	0	0	-10/3	0		
	0	0	0	1	0	0	0	6		
						(a)				
		1	0	0	0					← ← ← ←
		0	1	0	0					
		1	1	1	0					
		1	1/2	7/6	1					
						(b)				

$L_2 = \begin{pmatrix} l^1 \\ l^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -0,1 & -0,7 \\ 0 & 1 & -0,5 & -0,5 \end{pmatrix}$

$R = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0,5 \end{pmatrix}$

In der Tat stehen in (b) und (c) die Normalformen (57) und (58) vor uns.

6.19 Die normierte Eigendyade als Projektor

Es sei jetzt die singuläre Matrix A quadratisch von der Ordnung n mit dem Rang r , somit ist der Defekt $d_m = d_n = d = n - r$, und wir fassen ebenso wie in (55) die Eigenzeilen und Eigenspalten zusammen zu den beiden Rechteckmatrizen

$$L_e = \begin{pmatrix} l^1 \\ l^2 \\ \vdots \\ l^d \end{pmatrix}, \quad R_e = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_d \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \updownarrow \\ n \end{matrix} \quad (59)$$

$\leftarrow n \rightarrow$

Deren Erscheinungsform hängt auch jetzt wieder ab von der Pivotstrategie, oder anders ausgedrückt: wählen wir zwei reguläre, aber sonst beliebige d -reihige Matrizen C_l und C_r , so erfüllen die transformierten Eigenmatrizen

$$C_l L_e = \tilde{L}, \quad R_e C_r = \tilde{R} \quad (60)$$

ebenfalls die beiden Gleichungssysteme (56), denn es ist ja

$$\tilde{L} A = \underbrace{C_l L_e A}_{=0} = C_l 0 = 0, \quad A \tilde{R} = \underbrace{A R_e C_r}_{=0} = 0 C_r = 0. \quad (61)$$

Wir können dies auch so sehen: Alle die unendlich vielen Matrizen L_e und R_e (59), die durch verschiedene Pivotstrategien erzeugt werden, gehen ineinander über durch eine bestimmte Wahl der beiden Matrizen C_l und C_r . Es wäre daher wünschenswert, eine Repräsentation der beiden Eigenräume von A zu haben, die unabhängig ist von der willkürlich eingeschlagenen Pivotstrategie, und eine solche Darstellung ist in der Tat möglich für den Fall, daß die Produktmatrix $L_e R_e$ regulär ist. Dann nämlich existiert ihre Inverse und damit auch das normierte d -fache dyadische Produkt, die sogenannte *Eigendyade*

$$D = R_e (L_e R_e)^{-1} L_e \quad (62)$$

der Ordnung n vom Range d , und diese Matrix ist wie gewünscht invariant gegenüber der Wahl von C_l und C_r , denn die transformierte Eigendyade \tilde{D} wird mit den Matrizen (60)

$$\begin{aligned} \tilde{D} &= \tilde{R} (\tilde{L} \tilde{R})^{-1} \tilde{L} = R_e C_r (C_l L_e R_e C_r)^{-1} C_l L_e \\ &= R_e C_r C_r^{-1} (L_e R_e)^{-1} C_l^{-1} C_l L_e = R_e (L_e R_e)^{-1} L_e = D. \end{aligned} \quad (63)$$

Die Matrizen C_r und C_l heben sich wieder heraus, und damit haben wir einen Repräsentanten der beiden von L_e und R_e aufgespannten Eigenräume der Matrix A gefunden, der unabhängig ist von der Pivotstrategie.

Die Eigendyade (62) hat einige bemerkenswerte Eigenschaften, wie wir jetzt aufzeigen wollen. Zunächst bilden wir das Quadrat von D

$$DD = R_e(L_e R_e)^{-1} \underbrace{L_e \cdot R_e(L_e R_e)^{-1} L_e}_{= D} = R_e(L_e R_e)^{-1} L_e = D, \quad (64)$$

es gilt somit

$$\boxed{D^2 = D}, \quad (65)$$

und damit weiter zufolge $D^3 = D^2 D = DD = D$ usw. auch

$$D^p = D, \quad p = 2, 3, \dots \quad (66)$$

Matrizen dieser Eigenschaft heißen *idempotent* und werden als *Projektor* bezeichnet.

Satz 2: Die Eigendyade D ist ein Projektor.

Ferner gilt ein einfacher Satz über die Spur und die Determinante einer Eigendyade, nämlich

$$\text{sp } D = n - r = d; \quad \det D = 0. \quad (67)$$

Den Beweis dafür können wir erst später erbringen mit Hilfe der Eigenwerte des Paares $D; I_n$ – Kenntnisse, die uns im Augenblick noch nicht zur Verfügung stehen.

Bevor wir eine weitere bedeutsame Beziehung herleiten, wollen wir eine Erweiterung vornehmen, die sich in vielen Fällen als nützlich, wenn nicht erforderlich erweist. Es sein N eine reguläre, aber sonst beliebige Normierungsmatrix der Ordnung n , und das damit gebildete dreifache Produkt $L_e N R_e$ sei ebenfalls regulär. Dann definieren wir damit die verallgemeinerte Eigendyade

$$\boxed{D = N R_e (L_e N R_e)^{-1} L_e N}, \quad (68)$$

die für $N = I_n$ in (62) übergeht, und auch diese Matrix ist ein *verallgemeinerter* oder *N-Projektor*, welcher zufolge

$$\begin{aligned} D \cdot N^{-1} \cdot D &= N R_e (L_e N R_e)^{-1} L_e N \cdot N^{-1} \cdot N R_e (L_e N R_e)^{-1} L_e N \\ &= N R_e (L_e N R_e)^{-1} L_e N = D \end{aligned} \quad (69)$$

der Gleichung

$$\boxed{D N^{-1} D = D} \quad (70)$$

und somit auch wieder als Verallgemeinerung von (66) der erweiterten Relation

$$DN^{-1}DN^{-1}D \cdots N^{-1}D = D \quad (71)$$

genügt. Schließlich multiplizieren wir den Projektor (68) von links mit L_e und so-
dann von rechts mit R_e

$$L_e D = \underbrace{L_e N R_e (L_e N R_e)^{-1}} L_e N ; \quad D R_e = N R_e \underbrace{(L_e N R_e)^{-1} L_e N R_e} \quad (72)$$

und bekommen damit die angekündigten Beziehungen

$$\boxed{L_e D = L_e N ; \quad D R_e = N R_e} . \quad (73)$$

Daß es Matrizen gibt, die eine Darstellung mittels Eigendyaden nicht zulassen, zeigt das folgende Beispiel

$$A = \Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad L_e = e^3 , \quad R_e = e_1 ; \quad L_e R_e = 0 .$$

Hier ist das Produkt $L_e R_e$ nicht invertierbar, weil Eigenzeile und Eigenspalte zueinander orthogonal sind. A ist eine sogenannte *Jordan-Zelle*, vergleiche (18.69).

Erstes Beispiel. Die singuläre Matrix A hat den Rang $r = 1$. Man findet nach leichter Rechnung die Eigenzeile l_e^T und die Eigenspalte r_e . In der Tat ist $l_e^T A = o^T$ und $A l_e = o$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} , \quad l_e^T = (-2 \quad 1) , \quad r_e = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} ; \quad l_e^T r_e = 4 \neq 0 . \quad (a)$$

Natürlich ist auch $a l_e^T$ eine Eigenzeile und $r_e b$ eine Eigenspalte, wo a und b von Null verschiedene, aber sonst beliebige (auch komplexe) Skalare sind. Dagegen ist die Eigendyade

$$D = (r_e b)(a l_e^T \cdot r_e b)^{-1} (a l_e)^T = r_e (l_e^T r_e)^{-1} l_e^T = r_e \cdot \frac{1}{4} \cdot l_e^T = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix} \quad (b)$$

von a und b unabhängig. Nach (67) ist $\text{sp } D = n - r = 2 - 1 = 1$ und $\det D = 0$.

Zweites Beispiel.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -30 \\ 2 & 4 & -20 \\ -1 & -2 & 10 \end{pmatrix} . \quad (a)$$

Erstes Pivot sei $a_{11} = 3$, dann gibt Gauß explizit bereits nach dem ersten Schritt

$$\begin{array}{ccc|ccc}
 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\
 -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1/3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \Pi, \quad L_e = \begin{pmatrix} -2/3 & 1 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_e = \begin{pmatrix} -2 & 10 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (b)$$

$$\begin{array}{cc|ccc}
 L & & 1 & -2 & 10 \\
 & R & 0 & 1 & 0 \\
 & & 0 & 0 & 1
 \end{array}$$

Rang $r = 1$, Defekt $d = 2$.

Das Produkt $L_e R_e$ ist regulär und damit invertierbar. Man findet nach leichter Rechnung

$$L_e R_e = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 & -20 \\ -2 & 13 \end{pmatrix}, \quad (L_e R_e)^{-1} = \frac{3}{51} \begin{pmatrix} 13 & 20 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad D = R_e (L_e R_e)^{-1} L_e = \frac{1}{51} \begin{pmatrix} 42 & -18 & 90 \\ -6 & 39 & 60 \\ 3 & 6 & 21 \end{pmatrix}. \quad (c)$$

Probe: $\text{sp } D = n - r = 3 - 1 = 2$ und $\det D = 0$ nach (67).

Wählt man ein anderes erstes Pivot, etwa $a_{13} = -30$, so ergeben sich andere Matrizen L_e und R_e , doch wird die Eigendyade D (c) davon nicht betroffen, wovon der Leser sich überzeugen möge.

Schließlich überprüfe man noch die Beziehungen (73) mit $N = I_3$, also $L_e D = L_e$ und $D R_e = R_e$ mit den Eigenmatrizen (b) und der Eigendyade (c).

• 6.20 Schlußbemerkung

Es ist nicht übertrieben zu sagen, daß der Gaußsche Algorithmus das Kernstück der Matrizenalgebra darstellt. Dies betrifft sowohl das Auflösen linearer Gleichungssysteme (Abschnitt 7), die Biorthonormierung zweier Matrizen B und A (Abschnitt 8), die Transformation einer Matrix bzw. eines Matrizenpaares auf die Normalform, die Behandlung des Eigenwertproblems und zahlreiche andere Problemkreise, die wir erst im Teil 2 des Buches erschließen werden. So gesehen basiert letztendlich der gesamte Matrizenkalkül auf der numerisch problemgerechten Erstellung der Pivotmatrix Π , die wir deshalb so ausführlich in allen ihren Varianten dargelegt haben.

Der Nachteil der Algorithmen von Banachiewicz bzw. Cholesky liegt in der Starrheit ihres Ablaufs begründet, ein Umstand, der unter anderem weder eine Pivotregulierung noch ganzzahliges Rechnen ermöglicht. Der Algorithmus von Gauß-Jordan besitzt diese Nachteile nicht, leidet aber daran, daß er bei spaltensingulärer bzw. zeilensingulärer Matrix A überhaupt versagt. Wir werden uns deshalb in den weiteren Partien unseres Studiums aus guten Gründen fast ausschließlich auf den Gaußschen Algorithmus stützen.

Zum Schluß dieses Abschnitts sei nochmals nachdrücklich vermerkt, daß alle hier vorgeführten Modifikationen weder Zeilen- noch Spaltenvertauschungen erforderlich machen, so daß in den Äquivalenztransformationen

$$LAR = \Pi, \quad L_J A = \Pi_L, \quad AR_J = \Pi_R, \quad A = L^{-1} \Pi R^{-1} \text{ usw.} \quad (74)$$

ausnahmslos

$$\det L = 1, \quad \det R = 1 \quad (75)$$

richtig ist.

Lösungen sind hier

$$x_1 = 9 + 6x_3, \quad x_2 = 7 - 2x_3, \quad (1e)$$

wo x_3 beliebig wählbar ist.

Die praktische Lösung eines Gleichungssystems geschieht stets über die Pivotmatrix Π . Da ein System der Art $\Pi y = c$ *entkoppelt* ist, können die n Unbekannten y_1, \dots, y_n in beliebiger Reihenfolge, daher auch gleichzeitig und unabhängig voneinander berechnet werden: das Nonplusultra einer Gleichungsauflösung!

Beispiel: $\Pi y = c$ mit $m = n = 3$.

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 3 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix} \rightarrow \left. \begin{array}{l} y_2 = -3 \\ y_1 = -1/3 \\ y_3 = 10/2i = -5i \end{array} \right\} \rightarrow y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -3 \\ -5i \end{pmatrix}.$$

Diese triviale Lösbarkeit ist einer der Gründe, weshalb wir uns im Abschnitt 6 so ausführlich mit der Äquivalenztransformation

$$LAR = \Pi \quad (2)$$

befaßt haben.

In den Anwendungen sind häufig zu einer Matrix A mehrere rechte Seiten b_1, b_2, \dots, b_p gegeben. In der Baustatik beispielsweise sind die p rechten Seiten die verschiedenen Lastfälle wie Eigengewicht, Verkehrslast, Winddruck usw. Man faßt dann die p Gleichungssysteme

$$Ax_1 = b_1, \quad Ax_2 = b_2, \dots, Ax_p = b_p \quad (3)$$

mit den Matrizen

$$(x_1 \ x_2 \ \dots \ x_p) = X, \quad (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_p) = B \quad (4)$$

zusammen zu der einzigen Gleichung

$$AX = B, \quad (5)$$

was für theoretische Fragestellungen wie auch beim Programmieren für Digitalautomaten oft zweckmäßig ist.

• 7.2 Drei Kardinalforderungen

Die verschiedenen rechten Seiten (4) sind in praxi nicht immer von vornherein gegeben, sondern fallen im Laufe der Problemaufbereitung (Testläufe, Serienrechnung) an. Aus diesem Grund sollte der Algorithmus zur Auflösung des Glei-

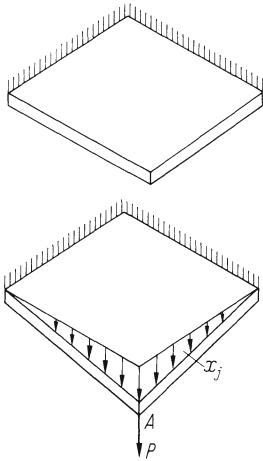


Abb. 7.1. Zweiseitig eingespannte verformbare Platte unter einer Einzellast P

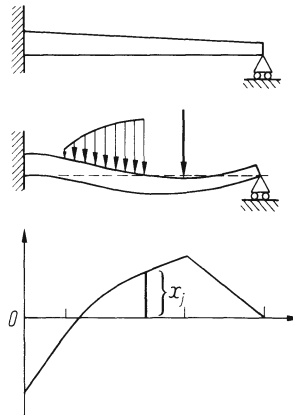


Abb. 7.2. Biegemomentenverlauf eines geraden verformbaren Balkens unter verteilter Last

chungssystems (1) so angelegt werden, daß er jederzeit auf Abruf wiederholbar ist, ohne daß bei einer neu hinzutretenden rechten Seite die aufwendige Transformation (2) aufs neue durchgeführt werden muß.

Zweitens sind in den Anwendungen nur selten alle n Unbekannten der Gleichung (1) gesucht. Die Abb. 7.1 zeigt eine belastete verformbare Rechteckplatte, deren Auslenkungen x_1, \dots, x_n nach einer geeigneten Finite-Element-Methode (FEM) durch ein Gleichungssystem festgelegt sind. Von den Auslenkungen interessieren im allgemeinen nur die maximalen Werte, und diese befinden sich in der Nähe des Lastangriffspunktes A ; man wird deshalb nur diese wenigen berechnen wollen.

Ähnlich liegt die Situation bei dem Balken der Abb. 7.2. Hier sind die Unbekannten die Biegemomente x_j eines finiten Modells, und auch hier interessiert nur das maximale Biegemoment x_{\max} , das unter der Einzellast liegen muß.

Drittens schließlich ist bei zahlreichen Aufgabenstellungen der Praxis die Matrix A des Gleichungssystems (1) nicht nur quadratisch, sondern darüber hinaus reellsymmetrisch (selten hermitesch). Um diese Symmetrie numerisch zu nutzen, wird man deshalb die Transformation (2) kongruent durchführen.

Fassen wir das Gesagte in einem Forderungskatalog zusammen.

1. Rechnen auf Abruf (Serienrechnung);
2. die Reihenfolge der interessierenden Unbekannten legt die Reihenfolge der Vorgehensweise fest;
3. bei reellsymmetrischer (hermitescher) Matrix A erfolgt eine Kongruenztransformation.

Nun zur Pivotauswahl. Die Reihenfolge der Pivotspalten und damit der Unbekannten x_j sei

$$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n \cdot$$

(6)

Sie ist frei wählbar. Sollte im Laufe der Rechnung eine Nullspalte in der aktuellen Matrix auftreten, so stört dies in keiner Weise; der zugehörige Reduktionsschritt fällt dann einfach aus. Die Reihenfolge der Zeilen

$$\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_m \quad (7)$$

dagegen ist durch die Festlegung (6) nicht immer frei wählbar, da die zur Reduktion vorgesehene Zeile in der aktuellen Matrix eine Nullzeile sein kann; man muß dann auf eine andere Zeile ausweichen. Gibt es eine solche Zeile nicht, so fällt der Schritt einfach aus.

Wir werden noch sehen, daß die Unbekannten x_j sich nacheinander in der umgekehrten Reihenfolge $\sigma_n, \sigma_{n-1}, \dots, \sigma_1$ berechnen; die Numerierung hat daher so zu erfolgen, daß die interessierenden Werte die letzten (und nicht die ersten!) Nummern bekommen. Im Beispiel der Rechteckplatte nach Abb. 7.1 ist damit die Strategie klar. Beim Balken der Abb. 7.2 dagegen wird man von einem geeignet gewählten Punkt A aus nach links und rechts abwechselnd die letzten Nummern verteilen, bei $n = 100$ etwa bekommt die Unbekannte x_A die Nummer 100, so daß damit die Reihenfolge festgelegt ist.

Zur Transformation von A auf die Pivotmatrix Π stehen uns die in der Übersicht (6.17) zusammengestellten Algorithmen zur Verfügung. Halten wir dabei fest, daß die Einbeziehung der rechten Seite b (von der im Abschnitt 6 noch keine Rede war!) in den Algorithmus bei vollbesetzter Matrix A nur rund n^2 Operationen erfordert und daher gegenüber der Transformation selbst nicht ins Gewicht fällt.

• 7.3 Der Algorithmus von Gauß

Das vorgelegte Gleichungssystem $Ax = b$ wird von links mit L multipliziert, $LAx = Lb = \tilde{b}$ mit

$$\tilde{b} = Lb, \quad (8)$$

außerdem führen wir die zum Vektor z zusammengefaßten neuen Unbekannten z_1, \dots, z_n ein

$$x = Rz. \quad (9)$$

Beides zusammen führt auf $LARz = \tilde{b}$, somit zufolge $LAR = \Pi$ nach (2) auf das entkoppelte Gleichungssystem

$$\boxed{\Pi z = \tilde{b}}. \quad (10)$$

Die Lösung des vorgelegten Gleichungssystems (1) geschieht somit in drei Schritten.

Erster Schritt. Transformation der rechten Seite nach (8).

- a) Explizit. Die Matrix L wird im Generalschema mitgeführt.
 b) Implizit. Es werden nur die Spalten q_μ der Spaltenelevatoren E_μ mitgeführt.
 Aus diesen wird anschließend (oder irgendwann später, sofern auf Abruf transformiert wurde) der Vektor \tilde{b} auf folgende Weise berechnet

$$\tilde{b} = Lb = E_{r-1}\tilde{E}_{r-1} \cdots E_2\tilde{E}_2E_1\tilde{E}_1b. \quad (11)$$

Dabei wurden die der Pivotregulierung dienenden Spaltenelevatoren \tilde{E}_μ mit einer Tilde versehen. Entfällt vor einem Reduktionsschritt diese Regulierung, so wird der Elevator durch die Einheitsmatrix I_m ersetzt und kann somit im Produkt (11) fehlen. Der Vektor b wird nun von rechts nach links fortschreitend mit den Elevatoren multipliziert, wofür wir wieder die Kurzschreibweise (5.54) benutzen.

Erstes Beispiel mit $m = n = 3$. Es wurde auf Pivotregulierung verzichtet, die Spalten $q_{\sigma_1} = q_3$ und $q_{\sigma_2} = q_2$ wurden in dieser Reihenfolge gespeichert. Irgendwann später tritt die rechte Seite b hinzu

$$q_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ I \end{pmatrix}, \quad q_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ I \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}. \quad (a)$$

Es erfolgen somit die beiden Transformationen mit q_3 und sodann mit q_2

$$\begin{array}{|c|c|} \hline -3 & 5 \\ \hline 2 & 0 \\ \hline I & -7 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 26 & -14 \\ \hline -14 & -7 \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 26 \\ \hline I & -14 \\ \hline 0 & -7 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline -2 \\ \hline -14 \\ \hline -7 \\ \hline \end{array} = \tilde{b}. \quad (b)$$

Unabhängig davon, ob für die Zukunft noch weitere rechte Seiten erwartet werden oder nicht, wird man die bei der Aufgabenstellung bereits vorliegenden rechten Seiten gemeinsam mit A transformieren. Diese Methode wollen wir mit „Standard“ bezeichnen; sie ergibt in dem um die Spalte b bzw. die Matrix B (4) erweiterten Generalschema folgendes Bild

$$\begin{array}{ll} \text{Standard} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline q & L & A & B \\ \hline & & R & \\ \hline & & p & \\ \hline \end{array} & \text{Standard} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline q & A & B \\ \hline & p & \\ \hline \end{array} \\ \text{explizit} & & \text{implizit} & \end{array} \quad (12)$$

Zweiter Schritt. Die Diskussion des entkoppelten Gleichungssystems $\Pi z = b$ (10).

Fall I: Das System ist lösbar.

Fall II: Das System ist widersprüchlich, somit nicht lösbar. Näheres dazu im Abschnitt 7.10.

Dritter Schritt. Im Fall I erfolgt die Rücktransformation (9) von z auf x .

a) Explizit. Die Matrix R wird im Generalschema (12) mitgeführt, dann ist $x = Rz$.

b) Implizit. Es werden allein die Zeilen p^v der Elevatoren ε^v gespeichert. Es sei nun v ein beliebiger Vektor, dann wird

$$\varepsilon^v = \begin{pmatrix} e^1 \\ e^2 \\ \dots \\ e^v \\ \dots \\ e^n \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_v \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^v v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ p^v v \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Das Produkt aus einem Zeilenelevator ε^v und einem Vektor v ist somit auf einfachste Weise zu bilden: ersetze die Komponente v_v durch das Skalarprodukt $p^v v$, die übrigen $n-1$ Komponenten bleiben unverändert. Wenn wir Pivotregulierung durch Spaltenkombination ausschließen (was keine Einschränkung bedeutet, weil das Produkt (11) bereits allfällige Pivotregulierungen beinhaltet), so besteht die Matrix R aus dem Produkt von $r-1$ Zeilenelevatoren in der gewählten Reihenfolge (6). Somit ist nach (9)

$$x = Rz = \varepsilon_{\sigma_1} \varepsilon_{\sigma_2} \dots \varepsilon_{\sigma_{r-1}} z, \quad (14)$$

und da der letzte Elevator eine (in (14) nicht aufgeführte) Einheitsmatrix I_n ist, gilt

$$x_{\sigma_n} = z_{\sigma_n}. \quad (15)$$

Die Zeilen p^v enthalten ebenso wie die Spalten q_μ mit fortschreitender Reduktion immer weniger signifikante Elemente, nämlich für σ_r überhaupt keines, weshalb die Beziehung (15) gilt, beim vorletzten Schritt σ_{r-1} nur ein einziges und so fort, und daraus folgt offenbar, daß die Skalarprodukte $p^v v$ im aktuellen Vektor (13) die gesuchten Unbekannten in der vorgegebenen Reihenfolge (6) sind. Das Verfahren kann demnach abgebrochen werden, sobald die interessierenden Werte ermittelt wurden.

Zweites Beispiel mit $m = n = 3$, Gauß Standard explizit nach Schema (12), anschließend implizit. Gegeben

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -11 \\ 3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & -6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}. \quad (a)$$

Reihenfolge der Spalten $\sigma_1 = 2, \sigma_2 = 3, (\sigma_3 = 1)$. Reihenfolge der Zeilen $\zeta_1 = 1, \zeta_2 = 3, (\zeta_3 = 2)$.

A

I	1	0	0	2	I	-11	0	0	1	0	0	0
-1	0	1	0	3	1	7	1	-3,6	-1	1	0	1
-1	0	0	1	2	1	-6	-3	I	-1	0	1	-3
I_3				1	0	0			1	0	0	
I_3				0	1	0			-2	1	11	
				0	0	1			0	0	1	
				-2	I	11			0	0	I	

 $\Pi \quad \tilde{b}$

1	0	0	0	1	0	0	0	$\rightarrow z_2 = 0$
2,6	1	-3,6		1	0	0	11,8	$\rightarrow z_1 = 11,8$, $z = \begin{pmatrix} 11,8 \\ 0 \\ -0,6 \end{pmatrix}$
-1	0	1		0	0	5	-3	$\rightarrow z_3 = -0,6$
L				1	0	0		
R				-2	1	11		
				0	0	1		

(c)

Die Rücktransformation ergibt den gesuchten Vektor x

$$Rz = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11,8 \\ 0 \\ -0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11,8 \\ -30,2 \\ -0,6 \end{pmatrix} = x . \quad (d)$$

Implizite Methode. Jetzt sind nur die im Schema (c) angegebenen Spalten q_μ und Zeilen p^ν gespeichert. Wir berechnen zunächst den transformierten Vektor $Lb = E_{\sigma_2} E_{\sigma_3} b = E_3 E_1 b = \tilde{b}$

$$\left(\begin{pmatrix} I & 0 \\ -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -3,6 \\ I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right) = \tilde{b} . \quad \Pi z = \tilde{b} \rightarrow z = \begin{pmatrix} 11,8 \\ 0 \\ -0,6 \end{pmatrix} . \quad (e)$$

Nun die Rücktransformation (14) mit den Skalarprodukten $p^\nu v = x_\nu$. Zunächst ist nach (15) $x_1 = z_1 = 11,8$, weil $\sigma_\pi = \sigma_3 = 1$ ist. Sodann wird

$$\begin{matrix} x_1 \rightarrow \\ z \end{matrix} \begin{pmatrix} 11,8 \\ 0 \\ -0,6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\quad} \begin{pmatrix} 11,8 \\ 0 \\ -0,6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\quad} \begin{pmatrix} 11,8 \\ -30,2 \\ -0,6 \end{pmatrix} = x . \quad (f)$$

$p^3 (0 \ 0 \ I) \ (-0,6) = x_3$, $p^2 (-2 \ I \ 11) \ (-30,2) = x_2$

Man sieht: Wären nur die beiden Unbekannten x_1 und x_3 gesucht, so brauchte der letzte Schritt gar nicht ausgeführt zu werden. Bei großen Gleichungssystemen, etwa $n = 100$ oder $n = 1000$, ist der Gewinn an Rechenzeit nicht unerheblich.

• 7.4 Der Algorithmus von Banachiewicz

Im Generalschema werden lediglich die Spalten q_μ und die Zeilen p^ν mitgeführt und mit Hilfe der restringierten Vektoren \mathring{q}_μ und \mathring{p}^ν nach (5.76), (5.77) die Inversen

$$L^{-1} = I_m - \begin{pmatrix} \mathring{q}_1 & \mathring{q}_2 & \dots & \mathring{q}_m \end{pmatrix} \quad (16)$$

und

$$R^{-1} = I_n - \begin{pmatrix} \mathring{p}^1 \\ \mathring{p}^2 \\ \dots \\ \mathring{p}^n \end{pmatrix} \quad (17)$$

berechnet.

Erster Schritt. Aus dem Gleichungssystem

$$L^{-1} \tilde{b} = b \rightarrow \tilde{b} \quad (18)$$

wird die transformierte rechte Seite \tilde{b} berechnet. Dieses Gleichungssystem ist *gestaffelt* in der Reihenfolge

$$\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_m, \quad (19)$$

das heißt, es ist jeweils nur eine lineare Gleichung mit einer Unbekannten zu lösen.

Zweiter Schritt. Diskussion des entkoppelten Gleichungssystems $\Pi z = \tilde{b}$ (10).

Fall I: Das System ist lösbar.

Fall II: Das System ist widersprüchlich, es existiert somit keine Lösung.

Näheres dazu im Abschnitt 7.10.

Dritter Schritt. Im Fall I werden die Unbekannten x_j aus dem Gleichungssystem

$$R^{-1} x = z \rightarrow x \quad (20)$$

berechnet. Dieses System ist gestaffelt in der Reihenfolge

$$\sigma_n, \sigma_{n-1}, \dots, \sigma_2, \sigma_1, \quad (21)$$

und wie in (15) gilt

$$x_{\sigma_n} = z_{\sigma_n}. \quad (22)$$

Dazu das zweite **Beispiel** aus dem letzten Abschnitt. Zunächst werden nach (16) und (17) die Matrizen L^{-1} und R^{-1} zusammengestellt

$$L^{-1} = I_3 - \begin{pmatrix} \overset{\circ}{q}_1 & \overset{\circ}{q}_2 & \overset{\circ}{q}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -3,6 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3,6 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (a)$$

$$R^{-1} = I_3 - \begin{pmatrix} \overset{\circ}{p}_1 \\ \overset{\circ}{p}_2 \\ \overset{\circ}{p}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -11 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (b)$$

Aus dem gestaffelten Gleichungssystem (18) gewinnt man die Komponenten des Vektors \tilde{b} in der Reihenfolge $\tilde{b}_1, \tilde{b}_3, \tilde{b}_2$

$$L^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 & \tilde{b}_2 & \tilde{b}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \tilde{b}_1 = 0 \\ \tilde{b}_2 = 11,8 \\ \tilde{b}_3 = -3 \end{matrix}, \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 11,8 \\ -3 \end{pmatrix}. \quad (c)$$

Auflösen des entkoppelten Gleichungssystems $\Pi z = \tilde{b}$ gibt den Vektor z , und damit werden die Unbekannten in der Reihenfolge x_1, x_3, x_2 berechnet

$$R^{-1} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ -0,6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_1 = 11,8 \\ x_2 = -30,2 \\ x_3 = -0,6 \end{matrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 11,8 \\ -30,2 \\ -0,6 \end{pmatrix}. \quad (d)$$

• 7.5 Der Algorithmus von Gauß-Jordan

Voraussetzung ist nach (6.10) die Spaltenregularität der Matrix A .

a) Gauß-Jordan in **einem Durchgang**. Die Gleichung $Ax = b$ wird von links mit L_J multipliziert, wir haben dann $L_J Ax = L_J b$, somit wegen $L_J A = \Pi_J$

$\Pi_J x = \hat{b}$

(23)

mit

$$\hat{b} = L_J b, \quad (24)$$

was explizit oder implizit, auch nach der Methode Standard durchgeführt werden kann. Wieder haben wir zu unterscheiden:

Fall I: Das System ist lösbar. Dies gilt stets für $m = n$ zufolge der vorausgesetzten Spaltenregularität.

Fall II: Das System ist widersprüchlich. Näheres dazu im Abschnitt 7.10.

b) Gauß-Jordan in **zwei Durchgängen** nach (6.15) mit

$$L_J A = \hat{L} L A = \Pi_L, \quad (25)$$

sonst wie oben beschrieben.

Wir wiederholen das **Beispiel** aus dem letzten Abschnitt, Gauß-Jordan implizit Standard mit derselben Pivotfolge wie dort. Es wird nach drei Schritten (nicht nach zwei, weil hier das letzte Pivot wirklich als Pivot dient im Unterschied zu den Algorithmen von Gauß und Banachiewicz):

$$\begin{array}{cc|cc|c} I & 2 & 1 & -11 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -6 & -3 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc|cc|c} 2,2 & 2 & 1 & -11 & 0 \\ -3,6 & 1 & 0 & 18 & 1 \\ I & 0 & 0 & 5 & -3 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc|cc|c} -2 & 2 & 1 & 0 & -6,6 \\ I & I & 0 & 0 & 11,8 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -3 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc|cc|c} 0 & 1 & 0 & -30,2 \\ 1 & 0 & 0 & 11,8 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_2 = -30,2 \\ x_1 = 11,8 \\ x_3 = -0,6 \end{array} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 11,8 \\ -30,2 \\ -0,6 \end{pmatrix}.$$

(a)

Jetzt in zwei Durchgängen. Der erste Durchgang mit der gleichen Pivotfolge wie oben gibt

$$\begin{array}{cc|cc|c} I & 2 & 1 & -11 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -6 & -3 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc|cc|c} 0 & 2 & 1 & -11 & 0 \\ -3,6 & 1 & 0 & 18 & 1 \\ I & 0 & 0 & 5 & -3 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc|cc|c} 2 & 1 & -11 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 11,8 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{array}.$$

(b)

Das Gleichungssystem ist gestaffelt und könnte daher bereits gelöst werden. Besser, weil systematischer, ist dagegen die Reduktion in der rückwärtigen Folge der Pivots. Das gibt im zweiten Durchgang die Pivotmatrix Π_J und daraus die Lösung \mathbf{x}

$$\begin{array}{cc|cc|c} -2 & 2 & 1 & -11 & 0 \\ I & 1 & 0 & 0 & 11,8 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -3 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc|cc|c} 2,2 & 0 & 1 & -11 & -23,6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 11,8 \\ I & 0 & 0 & 5 & -3 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc|cc|c} 0 & 1 & 0 & -30,2 \\ 1 & 0 & 0 & 11,8 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{array} \quad \begin{array}{l} x_2 = -30,2 \\ x_1 = 11,8 \\ x_3 = -0,6 \end{array}.$$

(c)

• 7.6 Reguläre quadratische Matrix. Determinante, Inverse und Adjungierte

Zunächst die Determinante. Nach der Produktvorschrift (2.10a) gilt

$$\det \Pi = \det (\mathbf{L} \mathbf{A} \mathbf{R}) = \det \mathbf{L} \cdot \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{R} = 1 \cdot \det \mathbf{A} \cdot 1, \quad \text{somit}$$

$$\det \mathbf{A} = \det \Pi. \quad (26)$$

Die Determinante von Π aber ist, wenn wir die Pivots π_j unabhängig von ihrer Plazierung durchnummerieren,

$$\det \mathbf{A} = (-1)^v \pi_1 \pi_2 \dots \pi_n, \quad (27)$$

wo die ganze Zahl v aus der Indexliste nach dem Muster (5.23) gewonnen wird.

Nun zur Inversen. Aus $\mathbf{L} \mathbf{A} \mathbf{R} = \Pi$ folgt durch Inversion nach (3.10a) $\mathbf{R}^{-1} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{L}^{-1} = \Pi^{-1}$, mithin nach Multiplikation dieser Gleichung von links mit \mathbf{R} und von rechts mit \mathbf{L}

$$\boxed{A^{-1} = R\Pi^{-1}L} . \quad (28)$$

Die Inversion einer regulären quadratischen Matrix wird somit auf die Inversion der ebenfalls regulären quadratischen Pivotmatrix abgewälzt, und diese ist trivial, nämlich

$$\boxed{\Pi^{-1}(\pi_{jk}) = \Pi^T(\pi_{jk}^{-1})} , \quad (29)$$

wovon man sich leicht überzeugt. In Worten: man ersetze die Pivots durch ihre Kehrwerte und transponiere anschließend die so entstandene Matrix.

Kommen wir nun zur Adjungierten. Nach (3.17) ist die Inverse mit der Determinante zu multiplizieren, also wird mit (28)

$$\boxed{A_{\text{adj}} = R(\Pi^{-1} \det A)L} , \quad (30)$$

wo die Produktbildung $\Pi^{-1} \det A$ mit der Determinante (27) nur n Multiplikationen erfordert.

Ein Beispiel. Determinante, Inverse und Adjungierte einer dreireihigen Matrix A sind zu bestimmen. Man findet, beginnend mit dem Pivot $a_{13} = -1$, nach leichter Rechnung mit $\tilde{a}_{32} = 60$ als zweitem Pivot

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 8 & -1 \\ 5 & 2 & 11 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix} , \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,5 & 1 & -1,5 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -11/15 & 1 & 0 \\ 2/15 & 8 & 1 \end{pmatrix} , \quad \Pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 60 & 0 \end{pmatrix} . \quad (a)$$

a) **Determinante.** Die Pivots 5, 60 und -1 stehen der Reihe nach in den Zeilen 2, 3 und 1, damit wird die Indexliste

Zeilenindex	2 3 1
Inversionen	0 0 2 \rightarrow Summe $\nu = 2$.

Folglich wird die Determinante nach (27)

$$\det A = (-1)^2 [5 \cdot 60 \cdot (-1)] = -300 , \quad (b)$$

und dies hätte man in diesem einfachen Fall natürlich auch durch Entwickeln nach einer Spalte oder Zeile der Matrix Π (a) bekommen können. Doch ist bei großen Matrizen, insbesondere bei Maschinenrechnung, der Weg über die Indexliste angemessen.

b) **Inverse.** Wir ersetzen die Pivotelemente durch ihre Kehrwerte und gehen anschließend zur transponierten Matrix über

$$\Pi(\pi_{jk}^{-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1/60 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Pi^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/60 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{300} \begin{pmatrix} 0 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ -300 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (c)$$

und nun wird nach (28) mit den Matrizen L und R aus (a)

$$A^{-1} = R\Pi^{-1}L = \frac{1}{300} \begin{pmatrix} 30 & 60 & -90 \\ 13 & -44 & 71 \\ -16 & 8 & 28 \end{pmatrix}. \quad (d)$$

c) **Adjungierte.** Es wird, ohne daß wir die Formel (30) benutzen müßten (der Leser führe dies aber durch),

$$A_{adj} = \Delta A^{-1} = (-300)A^{-1} = \begin{pmatrix} -30 & -60 & 90 \\ -13 & 44 & -71 \\ 16 & -8 & -28 \end{pmatrix}. \quad (e)$$

Die Adjungierte einer ganzzahligen Matrix ist ihrerseits ganzzahlig, was zur Kontrolle dient. Machen wir noch eine weitere Probe. Nach (3.13) ist

$$A_{11} = \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 11 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = 14 - 44 = -30, \quad (f)$$

und dieser Wert steht in der Tat oben links in der Matrix (e).

7.7 Pivotregulierung. Wiederholung der Rechnung

Es sei A eine n -reihige reguläre quadratische Matrix. Dann ist die Determinante gleich dem vorzeichenbehafteten Produkt der n Pivotelemente

$$\det A = (-1)^v \pi_1 \pi_2 \dots \pi_n, \quad (31)$$

die bis auf das letzte frei wählbar sind. Wählt man sie zu Anfang zu groß (zu klein), so fallen die letzten zu klein (zu groß) aus, und beides wirkt sich nachteilhaft auf die noch nicht reduzierten Untermatrizen aus, was bei großen Ordnungszahlen, etwa $n = 100$ oder $n = 1000$ nicht nur zu großen Fehlern führt, sondern bei schlechter Beschaffenheit der Matrix (schlechter *Kondition*, siehe dazu Abschnitt 25.5) den Algorithmus völlig zum Erliegen bringen kann. Wir ermitteln daher in einer als Vorlauf zu betrachtenden ersten, implizit durchgeführten Rechnung die Pivotmatrix Π , berechnen das im allgemeinen komplexe Produkt

$$p = \pi_1 \pi_2 \dots \pi_n = u + iv = r e^{i\varphi} \quad (32)$$

und daraus als reelles *Leitpivot* die Größe

$$\pi = +\sqrt[n]{r} = +\sqrt[2n]{u^2 + v^2}. \quad (33)$$

Jetzt wiederholen wir die Transformation $LAR = \Pi$, nun aber mit Pivotregulierung, wobei wir die ersten $n-1$ Pivots als

$$\pi_1 = \pi_2 = \dots = \pi_{n-1} = \pi \quad (34)$$

wählen und in die Hauptdiagonale verlegen. Die Pivotmatrix wird dann zum Beispiel bei Einhaltung der natürlichen Reihenfolge 11, 22, ..., $n-1$ $n-1$

$$\Pi = \text{Diag} \langle \underbrace{\pi \ \pi \ \dots \ \pi}_{n-1 \text{ mal}} \ \pi_{nn} \rangle, \quad (35)$$

wo bei fehlerfreier Rechnung das im allgemeinen komplexe Element π_{nn} den Betrag von π haben muß; doch erfüllt das Leitpivot π auch dann seinen Zweck, wenn die Wurzel (33) nicht allzu genau berechnet wird; eine leichte Rundung ist manchmal angebracht. Bei extrem schlecht konditionierter Matrix können mehrere Wiederholungen erforderlich sein.

Allerdings ist auf folgendes zu achten. Es werde das Element $a_{j\mu}$ (Zeile j , Spalte μ) in das Pivot $\tilde{a}_{j\mu}$ überführt und sodann der Rest der Spalte μ reduziert nach dem Schema

$$\begin{pmatrix} \swarrow \\ q_{jk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^j \\ a^k \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \swarrow \\ q_{kj} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a}^j \\ a^k \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{a}^j \\ \tilde{a}^k \end{pmatrix} .$$

erster zweiter
Schritt Schritt

Nach dem ersten Schritt ist daher die Pivotzeile

$$\tilde{a}^j = a^j + q_{jk} a^k \quad \text{mit} \quad q_{jk} = \frac{\tilde{a}_{j\mu} - a_{j\mu}}{a_{k\mu}}. \quad (35a)$$

Beim zweiten Schritt wird $a_{k\mu}$ annulliert mit $q_{kj} = -a_{k\mu}/\tilde{a}_{j\mu}$, was entweder direkt geschehen kann oder auch kürzer auf folgende Weise

$$\tilde{a}^k = \frac{a_{j\mu}}{\tilde{a}_{j\mu}} a^k + q_{kj} a^j, \quad (35b)$$

wie man leicht nachrechnet.

Bei schlecht konditionierter Matrix ist die Methode (35b) vorzuziehen, da bei der direkten Vorgehensweise die Gefahr der Stellenauslöschung infolge von kleinen Differenzen großer Zahlen besteht.

Beispiel. Nach der direkten Methode wird mit $\mu = 2$

$$\begin{pmatrix} a^j \\ a^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -2 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -12 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{1,5} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -11 \\ 4,5 & 0 & -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{a}^j \\ \tilde{a}^k \end{pmatrix}. \quad (a)$$

Nach (35b) wird dagegen

$$\tilde{a}^k = \frac{4}{-2} \cdot (3 \quad 3 \quad 5) + 1,5 \cdot (7 \quad 4 \quad -2) = (4,5 \quad 0 \quad -13) . \quad (b)$$

• 7.8 Homogene Gleichungssysteme

Vorgelegt sei das homogene Gleichungssystem

$$\boxed{Ax = o} , \quad (36)$$

wo also die rechte Seite verschwindet. Derartige Systeme bilden einerseits die Grundlage auch der allgemeinen inhomogenen Gleichungen mit $m \neq n$, andererseits treten sie mit quadratischer Matrix im Zusammenhang mit der im IV. Kapitel zu behandelnden *Eigenwertaufgabe* auf. Zunächst hat das homogene System unter allen Umständen die sogenannte *triviale* Lösung

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0 , \quad \text{kurz} \quad x = o , \quad (37)$$

die freilich in der Regel ohne Interesse ist. Bedeutsam sind allein nichttriviale Lösungen, und dies sind gerade die im Abschnitt 6.15 gefundenen $d_n = n - r$ linear unabhängigen Eigenspalten r_j . Damit ist dann auch jede beliebige Linearkombination

$$\boxed{x_h = c_1 r_1 + c_2 r_2 + \dots + c_{d_n} r_{d_n}} ; \quad d_n = n - r \quad (38)$$

mit beliebig wählbaren Konstanten c_1 bis c_{d_n} eine Lösung. Setzt man alle Konstanten gleich Null, so resultiert als Sonderfall die Trivillösung (37). Der Vektor x_h (38) wird im Zusammenhang mit der Aufgabe (36) als *homogene* Lösung bezeichnet, worauf der Index h hinweisen soll.

Die numerische Ermittlung der Eigenspalten haben wir im Abschnitt 6.15 ausführlich behandelt. Da die Eigenzeilen von A nicht gesucht sind, braucht die Matrix L auch nicht mitgeführt zu werden.

Dazu ein **Beispiel** mit $m = n = 4$, Gauß explizit,

$$\begin{array}{c}
 A \\
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|}
 \hline
 I & 1 & 3 & -5 & 4 \\
 \hline
 -2 & 2 & 3 & -4 & 2 \\
 \hline
 -3 & 3 & 2 & -1 & -2 \\
 \hline
 -1 & 1 & 4 & -7 & 6 \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|}
 \hline
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 3 & 0 & -3 & 6 & -6 \\
 \hline
 7 & 0 & -7 & 14 & -14 \\
 \hline
 I & 0 & 1 & -2 & 2 \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \downarrow \quad \downarrow \\
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|}
 \hline
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \Pi \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|}
 \hline
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 R ; \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array}$$

$$r_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (a)$$

Zur Bezeichnung. Anstatt die Eigenspalten wie in (38) durchzunummerieren (was in der Theorie nicht anders geht, da man die Nummern der Eigenspalten im konkreten Fall gar nicht kennt), ist es in praxi zweckmäßiger, bei den Indizes des Generalschemas zu bleiben. Die allgemeine homogene Lösung lautet damit

$$x_h = c_3 r_3 + c_4 r_4 = c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (b)$$

Probe: $Ar_3 = 0$, $Ar_4 = 0$.

Wir wiederholen das Ganze mit einer anderen Pivotstrategie und erhalten diesmal

-5	1	3	-5	4
-4	2	3	-4	2
I	3	2	-I	-2
-7	1	4	-7	6

1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1

3	2	I	-2
---	---	---	----

-1,4	-14	-7	0	14
I	-10	-5	0	10
0	0	0	-1	0
-2	-20	-10	0	20

1	0	0	0
0	1	0	0
3	2	1	-2
0	0	0	1

I	-0,5	0	1
---	------	---	---

$\downarrow \quad \downarrow$

0	0	0	0
-10	0	0	0
0	0	-1	0
0	0	0	0

 Π

1	-0,5	0	1
0	1	0	0
3	0,5	1	1
0	0	0	1

 R

$\downarrow \quad \downarrow$

(c)

Jetzt lautet die homogene Lösung

$$\hat{x}_h = c_2 \hat{r}_2 + c_4 \hat{r}_4 = c_2 \begin{pmatrix} -0,5 \\ 1 \\ 0,5 \\ 0 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (d)$$

Die beiden Lösungen (b) und (d) spannen trotz des unterschiedlichen äußeren Erscheinungsbildes den gleichen Nullraum (Spaltenkern) der Dimension $d_n = n - r = 4 - 2 = 2$ auf. Beispielsweise wird für die speziellen Werte $c_3 = 1$, $c_4 = 2$ und $\hat{c}_2 = -2$, $\hat{c}_4 = 2$

$$\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad (\text{e})$$

• 7.9 Hermitesche (reellsymmetrische) Matrix

Im Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ bzw. $\mathbf{Ax} = \mathbf{o}$ sei nun die Matrix \mathbf{A} hermitesch (im Reellen symmetrisch). Legt man die Transformation kongruent an (was keineswegs zwingend ist), so wird zufolge $\mathbf{R} = \mathbf{L}^*$

$$\mathbf{LAL}^* = \mathbf{\Pi}, \quad \mathbf{\Pi}^* = \mathbf{\Pi}, \quad (39)$$

auch $\mathbf{\Pi}$ hermitesch. Wählt man darüber hinaus alle Pivots aus der Hauptdiagonale, so wird $\mathbf{\Pi}$ eine reelle Diagonalmatrix

$$\mathbf{LAL}^* = \mathbf{\Pi} = \text{Diag} \langle \pi_{jj} \rangle, \quad \pi_{jj} \text{ reell}, \quad (40)$$

wozu allerdings Pivotregulierung erforderlich werden kann.

Die Determinante

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{\Pi} = \pi_{11} \pi_{22} \cdots \pi_{nn} \quad (41)$$

ist stets reell. Bei regulärer Matrix \mathbf{A} ist sie von Null verschieden, und es existiert die nach Satz 2 aus Abschnitt 4.4 ebenfalls hermitesche Inverse, die sich nach (28) mit $\mathbf{R} = \mathbf{L}^*$ berechnet zu

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{L}^* \mathbf{\Pi}^{-1} \mathbf{L}. \quad (42)$$

Der Gaußsche Algorithmus (39) bis (41) führt stets sicher zum Ziel, während bei indefiniter Matrix \mathbf{A} der Algorithmus von Cholesky versagen kann.

Erstes Beispiel. Federkette nach Abb. 7.3. a) allein unter Eigengewicht, b) mit Zusatzgewicht $P = 2 \text{ mg}$. Gefragt ist nach der Auslenkung x_3 der dritten Masse. Bleibt diese auf dem Tisch liegen oder nicht?

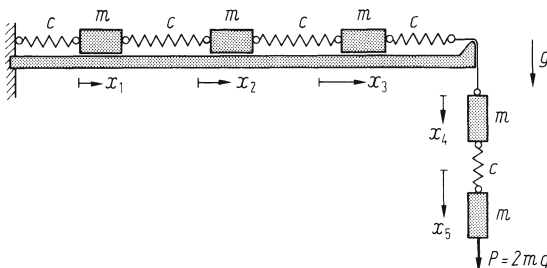


Abb. 7.3. Federkette unter Eigengewicht

Wir fassen die beiden rechten Seiten b_1 (Fall a) und b_2 (Fall b) nach (4) zur Matrix B zusammen, dann lautet das Gleichungssystem (5) $AX = B$ mit $X = (x_1, x_2)$, wo alles dimensionslos gemacht wurde. Die gesuchten Auslenkungen sind dann $\bar{X} = X \text{ mg/c}$. Da uns allein die dritte Komponente x_3 des Vektors x interessiert, wählen wir die Pivotfolge 11, 22, 44, 55, (33). Auch jede andere ist möglich, die mit (33) endet. Gauß Standard implizit ergibt:

	1	1/2	0	0	0	
1	2	-1	0	0	0	0 0
1/2	-1	2	-1	0	0	0 0
0	0	-1	2	-1	0	0 0
0	0	0	-1	2	-1	1 1
0	0	0	0	-1	1	1 3

A

	0	1	2/3	0	0	
0	2	0	0	0	0	0 0
1	0	3/2	-1	0	0	0 0
2/3	0	-1	2	-1	0	0 0
0	0	0	-1	2	-1	1 1
0	0	0	0	-1	1	1 3

B

(a)

	0	0	1/2	1	1/2	
0	2	0	0	0	0	0 0
0	0	3/2	0	0	0	0 0
1/2	0	0	4/3	-1	0	0 0
1	0	0	-1	2	-1	1 1
1/2	0	0	0	-1	1	1 3

A

	0	0	1	0	1	
0	2	0	0	0	0	0 0
0	0	3/2	0	0	0	0 0
1	0	0	5/6	0	-1/2	1/2 1/2
0	0	0	0	2	0	1 1
1	0	0	-1/2	0	1/2	3/2 7/2

B

(b)

	2	0	0	0	0	0	0
	0	3/2	0	0	0	0	0
	0	0	1/3	0	0	2	4
	0	0	0	2	0	1	1
	0	0	0	0	1/2	3/2	7/2

Π

LB

(c)

Fall (a) $z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 1/2 \\ 3 \end{pmatrix}$

, Fall (b) $z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \\ 1/2 \\ 7 \end{pmatrix}$

(d)

Da nach (15) $x_3 = z_3$ ist, haben wir damit die Lösungen

Fall (a) $\bar{x}_3 = 6 \text{ mg/c}$, Fall (b) $\bar{x}_3 = 12 \text{ mg/c}$.

Bei vorgegebenen Werten von mg und c kann daraus abgelesen werden, ob die dritte Masse auf dem Tisch verbleibt. Falls nicht, sind die rechten Seiten b_1, b_2 abzuändern, da nun auch die dritte Masse durch ihr Eigengewicht belastet wird.

Zweites Beispiel. Die Inverse der hermiteschen Matrix aus Abschnitt 6.10 ist zu berechnen. Es war

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & -i \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ i & i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i & 0 \\ -1 & 1 & i & -2i \\ -i/2 & i/2 & 1/2 & 0 \\ -i/2 & 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Pi = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}. \quad (a)$$

Mit

$$L^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & i/2 & i/2 \\ 0 & 1 & -i/2 & 0 \\ i & -i & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 2i & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (b)$$

findet man nach einiger Rechnung gemäß (42) die Inverse

$$A^{-1} = L^* \Pi^{-1} L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & i & -i \\ i & -i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad \text{Probe: } A A^{-1} = I. \quad (c)$$

Zum Vergleich gehen wir von der komplexen Pivotmatrix, Formel (f) aus dem zweiten Beispiel von Abschnitt 6.10 aus und bekommen

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Pi(\pi_{jk}^{-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Pi^T(\pi_{jk}^{-1}) = \Pi^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (d)$$

und nun folgt nach (42) $A^{-1} = L^T \Pi^{-1} L$ mit dem gleichen Ergebnis wie in (c). Die Rechnung ist aber sehr viel einfacher, da die Matrix L jetzt reell ausfällt:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (e)$$

7.10 Allgemeine inhomogene Gleichungssysteme

Es sei nun wieder das inhomogene Gleichungssystem

$$Ax = b \quad (43)$$

vorgelegt. A habe den Rang r , somit die Defekte

$$\text{Zeilendefekt } d_m = m - r \geq 0, \quad \text{Spaltendefekt } d_n = n - r \geq 0. \quad (44)$$

Ist $m < n$, so gibt es mehr Unbekannte als Gleichungen, das System heißt dann *unterbestimmt*, ist $m > n$, so gibt es mehr Gleichungen als Unbekannte, das System heißt *überbestimmt*. Bei quadratischer Matrix A , $m = n$ stehen n Gleichungen für n Unbekannte zur Verfügung, hier ist $d_m = d_n = d$ der Defekt schlechthin.

Die Diskussion erfolgt stets in drei Schritten.

1. Lösbar oder nicht?
2. Falls lösbar, Berechnung einer Partikularlösung.
3. Fallunterscheidung:

$\left. \begin{array}{l} \text{3 a. Die Lösung ist eindeutig,} \\ \text{3 b. Die Lösung ist mehrdeutig.} \end{array} \right\} \quad (45)$

Wie geht man nun praktisch vor? Wie immer geschieht die Transformation auf das Gleichungssystem $\Pi z = \tilde{b}$ (10) mittels des Gaußschen Algorithmus, wo die Linksmatrix L nicht interessiert und somit nicht mitgenommen zu werden braucht.

Das transformierte Gleichungssystem hat nun folgendes Aussehen

$$\Pi z = \tilde{b} \quad , \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cc} z_1 & z_n \end{array} \\ \begin{array}{c} \updownarrow m \\ \boxed{\begin{array}{c} \bullet \qquad \bullet \qquad \bullet \end{array}} \\ \leftarrow n \rightarrow \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \dots \\ \tilde{b}_m \end{array} \quad , \quad (46)$$

woran die Fallunterscheidung (45) leicht zu treffen ist.

1. Lösbar oder nicht?

Die Pivotmatrix hat $d_m \geq 0$ Nullzeilen. Prüfe, ob auf den Zeilen gleicher Nummer auch im Vektor \tilde{b} Nullen stehen

$$\tilde{b}_\sigma = e^\sigma \tilde{b} \quad ; \quad \sigma = 1, 2, \dots, d_m \quad . \quad (47)$$

1 a. Dies trifft nicht zu. Dann ist das Gleichungssystem (46) und damit auch das Originalsystem (43) widersprüchlich, da, wie man sagt, die rechte Seite \tilde{b} mit Π und damit auch die rechte Seite b mit A unverträglich ist. Es existiert keine Lösung. Schluß der Diskussion.

1 b. Die d_m Verträglichkeitsbedingungen (47) sind erfüllt. Dies trifft sicherlich zu für $d_m = 0$; es gibt keine Nullzeile, A ist zeilenregulär.

2. Berechnung einer *Partikularlösung* (*Sonderlösung*). Im System (46) sind jene d_n Unbekannten z_j , die über den Nullspalten stehen, beliebig wählbar. Wir setzen sie der Einfachheit halber gleich Null. Die übrigen Unbekannten werden aus den restlichen r Gleichungen eindeutig berechnet, das gibt den Vektor x_p und daraus nach (9) die

$$\text{Partikularlösung} \quad x_p = R z_p \quad . \quad (48)$$

3. Eindeutig oder nicht?

3 a. Die Pivotmatrix besitzt keine Nullspalten, $d_n = 0$; Π und damit auch A ist spaltenregulär. Dann ist (48) die einzige Lösung, das System ist eindeutig lösbar.

3b. Die Pivotmatrix besitzt d_n Nullspalten, dann existiert nach (7.8) die homogene Lösung $Ax_h = o$ mit d_n frei wählbaren Konstanten c_j , und damit wird die gesuchte Gesamtlösung

$$\boxed{x = x_p + x_h} \quad , \quad (49)$$

denn es ist

$$Ax = A(x_p + x_h) = Ax_p + Ax_h = b + o = b \quad , \quad (50)$$

wie in (43) verlangt.

Sonderfall. Die Matrix ist zeilenregulär, dann gibt es keine Verträglichkeitsbedingungen, und sie ist spaltenregulär, dann gibt es keine homogene Lösung, somit ist für jede beliebige rechte Seite b die eindeutige Lösung $x = x_p$. Beides zugleich ist aber nur möglich für $m = n = r$, und das ist die reguläre quadratische Matrix A , siehe Satz 1 im Abschnitt 7.1.

Die Lösung (49), ausführlich

$$x = x_p + x_h = x_p + c_1 r_1 + \dots + c_{d_n} r_{d_n} \quad , \quad (51)$$

stellt eine Hyperebene der Dimension d_n dar, die jetzt aber zufolge der rechten Seite b nicht mehr den Nullpunkt 0 enthält, sondern parallel verschoben wurde; ein Beispiel im Reellen für $m = n = 3$ und $r = 1$ zeigt die Abb. 7.4. Die Lösungsebene E enthält ∞^2 Punkte, die beschrieben werden durch den Koordinatennullpunkt x_p innerhalb von E , die beiden Basisvektoren r_1 und r_2 und die Koordinaten c_1 und c_2 .

Nun hängt aber die Erscheinungsform der Vektoren x_p und r_1, \dots, r_{d_n} ab von der gewählten Pivotstrategie, mit der A in Π transformiert wird; man kann daher nicht sagen, es gäbe *die* Partikularlösung (48) ebensowenig wie es *die* Eigenspalten r_j gibt. Eine andere Strategie führt auf andere Vektoren $\tilde{x}_p, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2$; ein festgewählter Punkt Q der Hyperebene ist somit auf viele Arten darstellbar, siehe dazu Abb. 7.4.

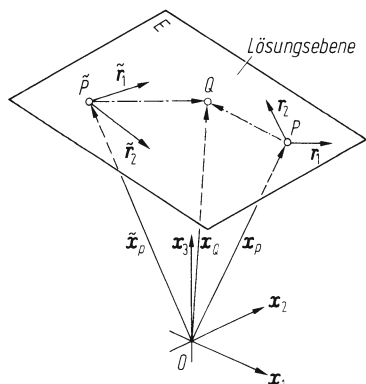


Abb. 7.4. Die Lösungsebene E für $m = n = 3$, $r = 1$ im Reellen

Fassen wir als das wichtigste Ergebnis zusammen: Das inhomogene Gleichungssystem $Ax = b$ hat genau *eine* eindeutige Lösung $x = x_p$ unter den folgenden Bedingungen:

- a. $m \geq n$. Das Gleichungssystem ist nicht überbestimmt.
- b. $r = m$. Die Matrix A ist spaltenregulär.
- c. Die rechte Seite b erfüllt die d_m Verträglichkeitsbedingungen (47).

Dazu wiederholen wir nochmals: Ist A quadratisch und regulär, somit $m = n = r$, $d_m = 0$, so sind alle drei Bedingungen erfüllt.

Erstes Beispiel. $m = n = 2$.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3/4 \\ 3x_1 + 6x_2 &= 9/4 \end{aligned}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 9/4 \end{pmatrix}. \quad (a)$$

In diesem einfachen Fall können wir uns die Transformation auf die Pivotmatrix ersparen. Wir schreiben das Gleichungssystem (a) spaltenweise auf, bekommen

$$Ax - b = 0 \rightarrow a_1 x_1 + a_2 x_2 - b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} x_2 - \begin{pmatrix} 3/4 \\ 9/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \left(x_1 + 2x_2 - \frac{3}{4} \right) = 0, \quad (b)$$

und daraus folgt die Gleichung einer Geraden

$$g(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 - \frac{3}{4} = 0 \quad (c)$$

nach Abb. 7.5. Jeder Punkt auf der Lösungsgeraden (c) ist eine Lösung des Gleichungssystems (a). Ohne die Einführung von Begriffen wie Rang, Verträglichkeit usw. kommen wir somit zum Ziel.

Um nun dennoch unsere Theorie zu bestätigen, berechnen wir Eigenzeile und Eigenspalte aus den Gleichungssystemen $l^T A = 0^T$ bzw. $A r = 0$

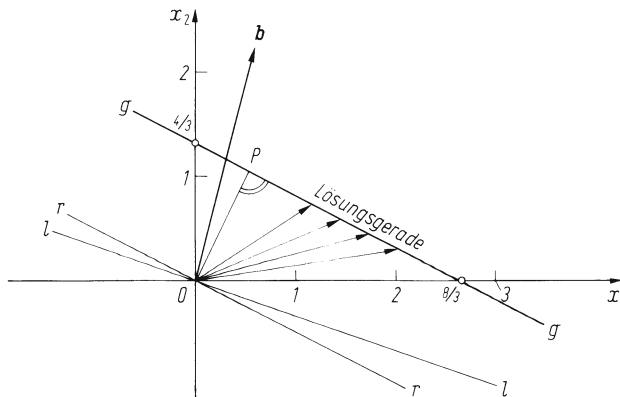


Abb. 7.5. Die Lösungsgerade g zum ersten Beispiel

$$I^T(l_1 \ l_2) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} A \quad \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} r \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow r = \beta \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} . \quad (d)$$

Der Rang von A ist $r = 1$, somit nach (44) $d_m = m - r = 2 - 1 = 1$ (es gibt eine Eigenzeile) und $d_n = n - r = 2 - 1 = 1$ (es gibt eine Eigenspalte). Die Dimension der „Hyperebene“ ist hier $d = 2 - 1 = 1$, und das ist unsere Gerade gg .

Da beide Vektoren (d) von unbestimmter Länge sind (α und β können ja beliebig gewählt werden, sogar komplex, sie müssen nur von Null verschieden sein), gehört zu l eine Gerade l und zu r eine Gerade r durch den Nullpunkt in Richtung von l bzw. r . Wir sehen, die Lösungsgerade gg ist der Eigenspalte r parallel. Für $b = 0$ geht die Lösungsgerade über in die Eigenspalte r , und das ist die homogene Lösung. Wir bemerken noch, daß der Vektor b auf der Eigenzeile l senkrecht steht. Dies ist kein Zufall, siehe Satz 3 im Anschluß an Formel (53).

Der Leser vergewissere sich, daß ein solches direktes Vorgehen ohne Transformation auf die Pivotmatrix schon im nächsten Beispiel mit $m = n = 3$ nicht mehr praktikabel ist.

Zweites Beispiel mit $m = n = 3$; Gauß Standard explizit.

A					b	$\downarrow \Pi$					\tilde{b}						
l	2	l	3	1	1	0	1	0	0	1	1	verträglich!					
0	1	0	-1	2	2	l	-1	0	l	-2	0						
-3	5	3	10	1	-2	0	0	1	0	-2	-2						
<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div>$1 \ 0 \ 0$</div> <div>$0 \ 1 \ 0$</div> <div>$0 \ 0 \ 1$</div> </div>						<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div>$1 \ 0 \ 0$</div> <div>$-2 \ 1 \ -3$</div> <div>$0 \ 0 \ 1$</div> </div>						<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div>$1 \ 0 \ 0$</div> <div>$-5 \ 1 \ -3$</div> <div>$1 \ 0 \ 1$</div> </div>					R
$-2 \ l \ -3$						$1 \ 0 \ l$						r_1					

$$z_p = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} . \quad (a)$$

Die Partikularlösung z_p wird zurücktransformiert und die allgemeine Lösung angeschrieben

$$x_p = R z_p = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} , \quad x = x_p + c_1 r_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} . \quad c_1 = 2 \rightarrow x = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} . \quad (b)$$

Das **dritte Beispiel** wählen wir aus der Statik, siehe Abb. 7.6.

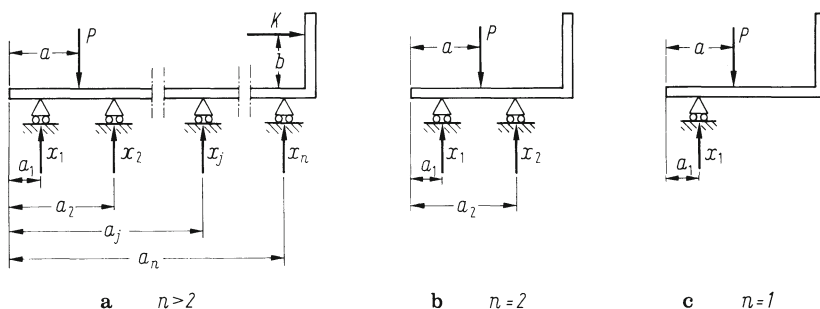
Die Gleichgewichtsbedingungen lauten $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix} , \quad b = \begin{pmatrix} P \\ K \\ Pa + Kb \end{pmatrix} \quad (a)$$

mit den n unbekannten Auflagerkräften x_1, x_2, \dots, x_n .

Wir wählen $a_{11} = 1$ als erstes Pivot und bekommen

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 - a_1 & \dots & a_{n-1} - a_1 & a_n - a_1 \end{pmatrix} , \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} P \\ K \\ P(a - a_1) + Kb \end{pmatrix} . \quad (b)$$

**Abb. 7.6.** Starrer Balken auf n Stützen

Verträglichkeit. Unabhängig von der Anzahl n der Stützen muß $K = 0$ sein, damit Gleichgewicht möglich ist, denn anderenfalls würde der Balken davonrollen. Jetzt unterscheiden wir:

Fall a) $n > 2$. Das Gleichungssystem ist überbestimmt. Gleichgewicht ist möglich, aber nicht eindeutig.

Fall b) $n = 2$. Das Gleichungssystem ist bestimmt, sofern $a_2 \neq a_1$ ist,

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & a_2 - a_1 \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} P \\ 0 \\ P(a - a_1) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} z_1 = P \\ \text{verträglich} \\ z_2 = P \end{array}; \quad x = Rz. \quad (c)$$

Fall c) $n = 1$. Von der Matrix \bar{A} verbleibt nur noch die erste Spalte

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} P \\ 0 \\ P(a - a_1) \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{verträglich} \\ \text{verträglich?} \end{array} \quad (d)$$

Eine weitere Verträglichkeitsbedingung lautet jetzt $a = a_1$. Die Kraft P muß somit im Auflagerpunkt A angreifen, damit Gleichgewicht möglich ist. Die dann eindeutige Lösung ist $x_1 = P$.

Viertes Beispiel. Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 &= 2 \\ -2x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 &= -1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 8x_3 - 3x_4 + x_5 &= 4, & Ax = b \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 + x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 10x_3 + 7x_5 &= 4 \end{aligned} \quad (a)$$

ist zu lösen. Wir rechnen Gauß Standard explizit. Gewählte Reihenfolge

$$\sigma_k = 1, 4, 2, (3, 5), \quad \zeta_j = 1, 2, 3, (4, 5). \quad (b)$$

1	1	-3	2	-1	0	2
2	-2	6	-4	3	2	-1
-3	3	-7	8	-3	1	4
-1	1	-1	4	-1	1	0
-2	2	0	10	0	7	4

1	3	-2	1	0
---	---	----	---	---

0	1	0	0	0	0	2
1	0	0	0	1	2	3
0	0	2	2	0	1	-2
0	0	2	2	0	1	-2
-2	0	6	6	2	7	0

0	0	0	1	-2
---	---	---	---	----

0	1	0	0	0	0	2
0	0	0	0	1	0	3
1	0	2	2	0	1	-2
-1	0	2	2	0	1	-2
-3	0	6	6	0	3	-6

0	1	-1	0	-0,5
---	---	----	---	------

1	0	0	0	0	2
0	0	0	1	0	3
0	2	0	0	0	-2
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

$$\begin{aligned} z_1 &= 2 \\ z_4 &= 3 \\ z_2 &= -1 \end{aligned}, \quad \begin{aligned} &\text{verträglich} \\ &\text{verträglich} \end{aligned}$$

$$z_p = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (c)$$

Das System ist verträglich. Die Partikularlösung x_p wird berechnet, die Eigenspalten sind e_3 und e_5 . Diese drei Vektoren werden jetzt in der umgekehrten Reihenfolge der Zeilen, nach (b) also 3, 2, 1 zurücktransformiert, wie in (13), (14) beschrieben.

$$\begin{aligned} (z_p \ e_3 \ e_5) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -0,5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ (0 \ 1 \ -1 \ 0 \ -0,5) \quad (-1 \ -1 \ -0,5) \quad (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ -2) &\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -0,5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -5 & -3,5 \\ -1 & -1 & -0,5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (x_p \ r_3 \ r_5) \\ (1 \ 3 \ -2 \ 1 \ 0) \quad (2 \ -5 \ -3,5) & \end{aligned} \quad (d)$$

Hier ist zufällig $x_p = z_p$. Die Gesamtlösung lautet somit

$$x = x_p = x_h = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + z_3 \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z_5 \begin{pmatrix} -3,5 \\ -0,5 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (e)$$

Der Leser überzeuge sich, daß das Gleichungssystem (a) erfüllt ist für beliebige Werte von z_3 und z_5 .

Abschließend leiten wir noch zwei Sätze her, die zwar in praxi nicht allzuviel nützen, für theoretische Fragestellungen jedoch unentbehrlich sind. Setzen wir in die Verträglichkeitsbedingungen (47) $\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{L}\mathbf{b}$ ein, so wird daraus

$$\mathbf{e}^\sigma \mathbf{L}\mathbf{b} = \mathbf{l}^\sigma \mathbf{b} = 0 ; \quad \sigma = 1, 2, \dots, d_m , \quad (52)$$

und damit haben wir den

Satz 2: Das Gleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ist genau dann verträglich, wenn die rechte Seite \mathbf{b} zu allen $d_m = m - r$ Eigenzeilen orthogonal ist.

Sodann denken wir uns die Pivotmatrix $\mathbf{\Pi}$ vom Rang r und die rechte Seite \mathbf{b} umgeordnet und zusammengefaßt zur Gesamtmatrix

$$(\mathbf{\Pi}, \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{D}_r & \mathbf{0} & \mathbf{b}_r \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{o} \end{array} \right) . \quad (53)$$

Der Rang dieser um eine Spalte erweiterten Matrix ist ebenfalls r , da mit Hilfe der r Pivots durch Zeilenkombination die r Komponenten von \mathbf{b} annulliert werden können; die Anzahl der Pivots wird davon nicht berührt. Nun werden wir im Abschnitt 9.1 zeigen, daß der Rang einer Matrix invariant ist gegenüber Äquivalenztransformationen, somit gilt das soeben Gesagte auch für die erweiterte Originalmatrix (\mathbf{A}, \mathbf{b}) , und diesen Sachverhalt sprechen wir aus als

Satz 3: Das Gleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ist genau dann verträglich, wenn der Rang der erweiterten Matrix (\mathbf{A}, \mathbf{b}) gleich dem Rang von \mathbf{A} ist.

Speziell für die quadratische Matrix \mathbf{A} stellen wir alles in den letzten Abschnitten Gesagte im sogenannten *Alternativsatz* übersichtlich zusammen:

$m = n$	$\det \mathbf{A} \neq 0, r = n$	$\det \mathbf{A} = 0, r < n$
homogen $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{o}$	Fall 1.1: $\mathbf{x} = \mathbf{o}$ Trivillösung	Fall 1.2: a) $\mathbf{x} = \mathbf{o}$ Trivillösung b) $\mathbf{x} = c_1 \mathbf{r}_1 + \dots + c_\mu \mathbf{r}_\mu$; $\mu = n - r$ Eigenspalten
inhomogen $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$	Fall 2.1: $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}$ eindeutig	Fall 2.2: a) Keine Lösung vorhanden, Widerspruch, b) Falls \mathbf{b} verträglich, Lösung vorhanden, aber nicht eindeutig.

(54)

Wir werden diesem Satz in (26.1a) mit einem erweiterten Inhalt wortwörtlich wiederbegegnen, und zwar im Zusammenhang mit dem Eigenwertproblem.

7.11 Ganzzahlige Gleichungssysteme

Das Gleichungssystem $Ax = b$ sei spaltenregulär und die rechte Seite verträglich, so daß eine eindeutige Lösung existiert. Sind nun die Elemente von A und b reell und ganzzahlig, so läßt sich, wie wir im Abschnitt 6.12 gezeigt haben, auch die Auflösung ganzzahlig durchführen mit Hilfe des Produktes

$$\varrho = \pi_1 \pi_2 \cdots \pi_n, \quad (55)$$

und zwar am einfachsten nach Gauß-Jordan, Standard, explizit oder implizit. Im ersten Durchlauf wird

$$L_1 Ax = L_1 b = \tilde{b}, \quad (56)$$

womit die n Pivots festliegen. Sodann wird das Produkt (55) berechnet und mit diesem Wert die Gleichung (56) multipliziert, das gibt

$$L_1 A \hat{x} = \hat{b} \quad \text{mit} \quad \hat{x} = \varrho x \quad \text{und} \quad \hat{b} = \varrho \tilde{b}. \quad (57)$$

Jetzt erfolgt der zweite Durchlauf ebenfalls ganzzahlig

$$\underbrace{L_2 L_1 A \hat{x}} = L_2 \hat{b} \quad \text{oder} \quad \Pi \hat{x} = \hat{\hat{b}} \quad \text{mit} \quad \hat{\hat{b}} = L_2 \hat{b}, \quad (58)$$

und damit wird die Lösung

$$x = \frac{\hat{x}}{\varrho}; \quad x_i = \frac{\hat{x}_i}{\varrho}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (59)$$

Ist A quadratisch, so ist nach (27) $\varrho = \det A(-1)^v$, und damit bedeutet die letzte Gleichung nichts anderes als die Cramersche Regel (3.20), wo die im Zähler stehenden Unterdeterminanten $A_i = x_i(-1)^v$ natürlich ganzzahlig sein müssen.

Erstes Beispiel. Das Gleichungssystem $Ax = b$ ist ganzzahlig zu lösen. Gegeben

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -1 & -15 \\ -30 & 4 & 35 \\ 60 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -79 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (a)$$

Die Matrix A hatten wir im Abschnitt 6.12 auf $\tilde{A} = L_1 A$ transformiert. Wir berechnen dazu den Vektor $\tilde{b} = L_1 b$ und stellen fest, daß das System verträglich ist.

$$\tilde{A} = L_1 A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -6 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad L_1 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 770 & 316 & 4 & 253 \\ 195 & 80 & 1 & 64 \end{pmatrix}, \quad \tilde{b} = L_1 b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ verträglich.} \quad (b)$$

Es war $q = 6$, somit wird $\tilde{b} = 6\tilde{b}$, und damit erfolgt der zweite Durchlauf.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline -3 & 0 & 1 & -3 & 12 \\ \hline 5 & -6 & 2 & 5 & 6 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -1 & 6 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 1 & 0 & -6 \\ \hline -2 & -6 & 2 & 0 & 36 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 6 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 & -6 \\ \hline -6 & 0 & 0 & 48 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 6 \\ \hline \end{array} \stackrel{\circ}{b}. \quad (c)$$

Daraus ergibt sich die Lösung

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad x = \frac{\hat{x}}{q} = \frac{\hat{x}}{6} = \begin{pmatrix} -4/3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (d)$$

Probe: $Ax = b$.

Zweites Beispiel. $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 12 & 8 & 4 \\ 7 & 7 & 5 & 2 \\ 17 & 11 & 2 & 11 \\ 3 & -4 & -3 & -9 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (a)$$

1. Durchlauf, Gauß-Jordan, Standard explizit.

Erster Schritt. Erste Spalte. Wir wählen $a_{11} = 12$ und $a_{21} = 7$. Der Euklidische Algorithmus ergibt die Teilermatrix L_{12} (b), damit werden die ersten beiden Zeilen der Matrix A einschließlich der rechten Seite b multipliziert und das Produkt in $(A|b)$ substituiert (c), sodann erfolgt die Reduktion nach Gauß in (d).

$$L_{12} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -7 & 12 \end{pmatrix}, \quad (b) \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & -1 & 2 & 9 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 4 & -4 & -21 \\ \hline -17 & 17 & 11 & 2 & 11 & -5 \\ \hline -3 & 3 & -4 & -3 & -9 & 1 \\ \hline \end{array}, \quad (c)$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & -1 & 2 & 9 \\ \hline 0 & 0 & 4 & -4 & -21 \\ \hline 0 & -6 & 19 & -23 & -158 \\ \hline 0 & -7 & 0 & -15 & -26 \\ \hline \end{array}. \quad (d)$$

Zweiter Schritt. Zweite Spalte. Wir kombinieren die Elemente $a_{32} = -6$ und $a_{42} = -7$ nach Euklid und bekommen die Matrix L_{34} (e). Sodann erfolgt die Linksmultiplikation der dritten und vierten Zeile von $(A|b)$ und die Substitution. Die Reduktion nach Gauß entfällt, da $a_{22} = a_{32} = 0$ ist,

$$L_{34} = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (e) , \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & -21 \\ 0 & 0 & 133 & -71 & -950 \\ 0 & -1 & -19 & 8 & 132 \end{array} \right] . \quad (f)$$

Dritter Schritt. Dritte Spalte mit $a_{23} = 4$ und $a_{33} = 133$. Die Reduktion entfällt, da $a_{23} = 0$ ist,

$$L_{23} = \begin{pmatrix} 133 & -4 \\ -33 & 1 \end{pmatrix} \quad (g) , \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -248 & 1007 \\ 0 & 0 & 1 & 61 & -257 \\ 0 & -1 & -19 & 8 & 132 \end{array} \right) = (L_1 A, \tilde{b}) . \quad (h)$$

Das Produkt der vier Pivots beträgt

$$\varrho = 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot (-248) = 248 , \quad (i)$$

und damit wird die neue rechte Seite $\tilde{b} = 248 \tilde{b}$.

2. Durchlauf.

$$\left[\begin{array}{c|cccc|c} 2/248 & 1 & 1 & -1 & 2 & 2232 \\ I & 0 & 0 & 0 & -248 & 249736 \\ 61/248 & 0 & 0 & 1 & 61 & -63736 \\ 8/248 & 0 & -1 & -19 & 8 & 32736 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{c|cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 4246 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -248 & 249736 \\ I & 0 & 0 & 1 & 0 & -2309 \\ 19 & 0 & -1 & -19 & 0 & 40792 \end{array} \right] \quad (j)$$

$$\left[\begin{array}{c|cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1937 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -248 & 249736 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2309 \\ I & 0 & -1 & 0 & 0 & -3079 \end{array} \right] \quad \Pi \quad \left[\begin{array}{c|cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1142 & -1142 \\ 0 & 0 & 0 & -248 & 249736 & -1007 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2309 & -2309 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -3079 & 3079 \end{array} \right] \rightarrow \begin{array}{l} \hat{x}_1 = -1142 \\ \hat{x}_4 = -1007 \\ \hat{x}_3 = -2309 \\ x_2 = 3079 \end{array} \quad (k)$$

Man findet den Vektor \hat{x} und daraus die gesuchte Lösung x :

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} -1142 \\ 3079 \\ -2309 \\ -1007 \end{pmatrix} , \quad x = \frac{\hat{x}}{248} = \begin{pmatrix} -4,604838710 \\ 12,415322580 \\ -9,310483871 \\ -4,060483871 \end{pmatrix} . \quad (l)$$

• 7.12 Zusammenfassung

Die Abschnitte 5 bis 7 dienten in erster Linie der Auflösung linearer Gleichungssysteme $Ax = b$ bzw. $Ax = o$, oder auch, wenn sogleich p rechte Seiten zu einer Matrix B zusammengefaßt werden,

$$AX = B \quad \text{bzw.} \quad AX = 0 \quad (60)$$

mit

$$X = (x_1 x_2 \dots x_p) , \quad B = (b_1 b_2 \dots b_p) . \quad (61)$$

Kernpunkt des Problems ist in jedem Fall die Transformation von A auf die Pivotmatrix Π , was für nichtquadratische Matrizen nur äquivalent möglich ist, $LAR = \Pi$, für quadratische dagegen auch kongruent, $LAL^* = \Pi$, wo dann mit A zugleich auch Π hermitesch (im Reellen symmetrisch) ist. Halten wir nachdrücklich fest, daß die Algorithmen von Gauß-Jordan wie auch von Banachiewicz bzw. im hermiteschen Fall von Cholesky nicht ausnahmslos praktikabel sind; wir werden uns daher in den folgenden Partien des Buches vornehmlich auf den Gaußschen Algorithmus stützen.

Den Schluß dieses Abschnittes möge eine nützliche Betrachtung allgemeinerer Art bilden. Da die Gleichung (60) drei Teilnehmer enthält, gibt es auch drei verschiedene Problemstellungen.

1. A und X gegeben, B gesucht.

Mit den Originalspalten x_j aus X lassen sich die Bilder b_j aus B unabhängig von Format und Rang der Matrix A eindeutig berechnen.

2. A und B gegeben, X gesucht.

Diese Umkehraufgabe bereitet – wie alle Umkehraufgaben der Mathematik – nicht nur grundsätzliche Schwierigkeiten, sondern zwingt auch zur Einführung neuer Begriffe und Methoden. Dies haben wir in den Abschnitten 6 und 7 durchgeführt.

3. X und B gegeben, A gesucht.

Ist X quadratisch und regulär, so lautet die eindeutige Lösung

$$A = BX^{-1} . \quad (62)$$

Anderenfalls aber ist die Aufgabe verwickelt und füllt bereits eine beachtliche Literatur insbesondere auf dem Gebiet der Schwingungstechnik, wo diese Fragestellung im Zusammenhang mit der sogenannten *Systemidentifizierung* von wachsender Bedeutung ist.

Mit diesen drei Grundmöglichkeiten sind die praktischen Anwendungen indessen nicht erschöpft; denn es ist denkbar, daß von den drei Matrizen A , X und B einige Originale x_j , einige Bilder b_k und nicht alle Elemente von A gegeben sind, und dies kann noch komplizierter ausfallen, wenn die Aufgabe nicht spalten-, sondern elementweise zerfällt. Die einschlägigen Theorien und Lösungsvorschläge sind zur Zeit in Entwicklung begriffen.

8 Orthogonalsysteme

8.1 Die Normalform eines Matrizenproduktes

Ein spezielles Kapitel innerhalb des Matrizenkalküls bildet die Konstruktion von *Biorthogonalsystemen* zweier vorgegebener Matrizen B und A auf der Grundlage der Transformation ihres Produktes

$$BA = C, \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & t \\ n & n \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline A \\ \hline B \\ \hline C \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (1)$$

auf die Normalform (5.56)

$$N = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} r \\ s-r \end{array}, \quad \begin{array}{cc} r & t-r \end{array} \quad (2)$$

wo r der Rang des Produktes C ist. Diese Transformation wird zweckmäßig im Generalschema durchgeführt und geschieht nach Unger [109] in den folgenden drei Schritten:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline A \\ \hline C \quad B \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\text{Transformation}} \begin{array}{|c|c|} \hline \tilde{A} \\ \hline \Pi \quad \tilde{B} \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\text{Permutation}} \begin{array}{|c|c|} \hline A_p \\ \hline \Pi_p \quad B_p \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\text{Normierung}} \begin{array}{|c|c|} \hline A_N \\ \hline N \quad B_N \\ \hline \end{array} \quad (3)$$

1. Schritt. Einseitige reguläre Transformation von B und A gemäß

$$\tilde{B} = LB, \quad \det L = 1, \quad (4)$$

$$\tilde{A} = AR, \quad \det R = 1 \quad (5)$$

und damit Äquivalenztransformation des Produktes

$$\tilde{C} = \tilde{B}\tilde{A} = LBAR = LCR = \Pi \quad (6)$$

auf die Pivotmatrix Π vom Range r .

2. Schritt. Permutation. Die Zeilen von L , Π und B und/oder die Spalten von R , Π und A werden so umgeordnet, daß die r Pivots in die Hauptdiagonale geraten; es wird dann

$$\Pi_p = \begin{pmatrix} D_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} r \\ s-r \end{array}, \quad \begin{array}{cc} r & t-r \end{array} \quad (7)$$

mit der Diagonalmatrix der jetzt umnummerierten Pivots

$$D_r = \text{Diag} \langle \pi_{11} \dots \pi_{rr} \rangle, \quad (8)$$

siehe das Generalschema (3), wo der Index p auf die Permutation hinweist.

3. Schritt. Normierung der Diagonalmatrix D_r . Die Pivots werden in Faktoren zerlegt

$$\pi_{11} = l_1 r_1, \dots, \pi_{rr} = l_r r_r \quad (9)$$

und sodann die ersten r Zeilen von L_p und B_p durch l_1, \dots, l_r sowie die ersten r Spalten von R_p und A_p durch r_1, \dots, r_r dividiert. Natürlich kann man auch alle Faktoren l_j oder alle Faktoren r_j gleich Eins setzen, doch empfiehlt sich namentlich bei betragsgroßen Pivots eine Aufteilung nach (9).

Im Generalschema (3) stehen nun die fünf Matrizen fertig vor uns, wo mit

$$B_N = L_N B, \quad A_N = A R_N \quad (10)$$

die gestellte Forderung nach der Normalform (2) erfüllt ist:

$$L_N (B A) R_N = B_N A_N = N = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} r \\ s-r \\ r & t-r \end{matrix}. \quad (11)$$

Beispiel. Gegeben sind A und B , das Produkt $BA = C$ wird berechnet.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -6 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad BA = C = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (a)$$

Der Gaußsche-Algorithmus, durchgeführt im Generalschema (3), ergibt

$$\begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 1 \end{array} & A & & \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & & & \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & -6 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{array} & B & \\ \hline \end{array} \\ \Rightarrow & \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -4 & 5 \end{array} & \bar{A} & & \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & & & \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array} & \bar{B} & \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \quad (b)$$

Wir vertauschen jetzt die beiden Zeilen der Horizontalleiste des Zahlenkreuzes und anschließend die zweite und dritte Spalte der Vertikalleiste (dies kann auch in umgekehrter Reihenfolge geschehen). Es resultiert das Kreuz (c)

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & -1 & 2 \\ \hline 1 & -2 & 2 \\ \hline 1 & -2 & 1 \\ \hline -2 & 5 & -4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} A_p \\ B_p \end{array} \\
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 3 & 0 & 5 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 2 & 1 \\ \hline 3 & 1 & 0 & 2 \\ \hline \end{array} \quad (c) \\
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & -0,2 & 2 \\ \hline 1 & -0,4 & 2 \\ \hline 1 & -0,4 & 1 \\ \hline -2 & 1 & -4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} A_N \\ B_N \end{array} \\
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 2 & 1 \\ \hline 3 & 1 & 0 & 2 \\ \hline \end{array} \quad (d) \\
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline L_N & 1 & -0,4 & 0 \\ \hline R_N & 0 & 0 & 1 \\ \hline & 0 & 0,2 & 0 \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

Eine Zerlegung von $\pi_{22} = 5$ wäre hier wenig sinnvoll. Wir dividieren die gesamte zweite Spalte durch 5 und bekommen das Ergebnis in (d) mit den fünf gesuchten Matrizen der Transformation. Probe: $B_N A_N = N$, ferner $A R_N = A_N$ und $L_N B = B_N$. Der Leser wiederhole die Aufgabe mit einer anderen Pivotstrategie.

8.2 Biorthonormalsysteme

Es sei nun $s = t$, dann ist die Produktmatrix C_t quadratisch von der Ordnung t

$$BA = C, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline & t \\ \hline n & n \\ \hline & A \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline n & n \\ \hline B & C \\ \hline \end{array}. \quad (12)$$

Sie sei überdies regulär, also vom Range $r = t$, dann wird die Normalform

$$B_N A_N = N = I_r \quad (13)$$

gleich der r -reihigen Einheitsmatrix, und diesen Sachverhalt können wir mit den Zeilen bzw. Spalten von B und A

$$B = \begin{bmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^t \end{bmatrix}, \quad B_N = \begin{bmatrix} b_N^1 \\ \vdots \\ b_N^t \end{bmatrix}, \quad (14)$$

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_t \end{bmatrix}, \quad A_N = \begin{bmatrix} a_{N,1} & \dots & a_{N,t} \end{bmatrix} \quad (15)$$

auch so formulieren:

$$b_N^j a_{N,k} = 1 \quad \text{für } j = 1, 2, \dots, t \quad (16)$$

$$b_N^j a_{N,k} = 0 \quad \text{für } j, k = 1, 2, \dots, t; j \neq k \quad (17)$$

oder mit dem Kronecker-Symbol (2.43) kürzer gefaßt

$$\boxed{b_N^j a_{N,k} = \delta_{jk}} ; \quad j, k = 1, 2, \dots, t . \quad (18)$$

Die beiden vorgelegten Matrizen B und A sind damit zu B_N und A_N *biorthonormiert* worden; ihre Zeilen b_N^j und Spalten $a_{N,k}$ bilden ein *Orthonormalsystem*. Sind B und/oder A komplex, so wird diese Operation als *normierte Unitarisierung* bezeichnet.

Beispiel. Die Matrizen B und A sollen biorthonormiert werden:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -4 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad C = BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 4 & -3 & 4 \end{pmatrix}. \quad (a)$$

$\begin{matrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}$	A	$\begin{matrix} 3 & -2 & -4 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & -4 & -5 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}$
$\begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 4 & -3 & 4 \end{matrix}$	B	
$\begin{matrix} I & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 3 \\ -4 & 4 & 4 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & -2 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -4 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -3 & 2 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ I & 0 & 1 & -3 \\ 7 & 0 & -7 & -4 \end{matrix}$
$\begin{matrix} 1 & -1 & -2 \end{matrix}$		$\begin{matrix} 1 & -2 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & 2 & 3 & -7 \\ 2 & 6 & 5 & 2 & -7 \end{matrix}$
		$\begin{matrix} 0 & I & 3 \end{matrix}$

$\begin{matrix} 3 & -2 & -14 \\ -1 & 4 & 14 \\ 2 & -4 & -17 \\ 1 & -4 & -12 \\ 0 & 1 & 4 \end{matrix}$	\tilde{A}	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -25 \end{matrix}$
	\tilde{B}	
$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -25 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & -2 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & 2 & 3 & -7 \\ -2 & 55 & 19 & 23 & -56 \end{matrix}$	(b)

Die Pivotmatrix ist regulär, somit ist eine Biorthonormierung möglich. Die Permutation entfällt, da wir die Pivots aus der Hauptdiagonale gewählt haben. Jetzt erfolgt die Normierung, die sich hier fast ohne Rechnung erledigt. Wir dividieren die dritte Spalte von \tilde{A} durch 5 und die dritte Zeile von \tilde{B} durch -5 und bekommen

$$B_N = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & 2 & 3 & -7 \\ 0,4 & -11 & -3,8 & -4,6 & 11,2 \end{pmatrix}, \quad A_N = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2,8 \\ -1 & 4 & 2,8 \\ 2 & -4 & -3,4 \\ 1 & -4 & -2,4 \\ 0 & 1 & 0,8 \end{pmatrix}. \quad (c)$$

Probe: $B_N A_N = I_3$.

8.3 Das vervollständigte Matrizenprodukt

Es sei jetzt B eine zeilenreguläre Matrix mit r Zeilen und n Spalten und A eine spaltenreguläre Matrix mit r Spalten und n Zeilen

$$\boxed{B} \begin{matrix} n \\ r \end{matrix} ; \quad \boxed{A} \begin{matrix} r \\ n \end{matrix} ; \quad d = n - r . \quad (19)$$

Wie im Abschnitt 6.15 dargelegt, gehören zur Matrix B genau d linear unabhängige Eigenzeilen und zu A d linear unabhängige Eigenspalten, die wir zur Matrix L_e bzw. R_e zusammenfassen

$$L_e = \left(\begin{array}{c} l^1 \\ \vdots \\ l^d \end{array} \right) \begin{matrix} \updownarrow \\ d \\ \updownarrow \end{matrix}, \quad R_e = \left(\begin{array}{ccc} r_1 & \dots & r_d \end{array} \right) \begin{matrix} \updownarrow \\ n \\ \updownarrow \end{matrix}, \quad (20)$$

$\xleftarrow{\quad n \quad} \qquad \qquad \xleftarrow{\quad d \quad}$

und mit diesen bestehen die beiden homogenen Gleichungssysteme

$$L_e A = 0 ; \quad B R_e = 0 . \quad (21)$$

Mittels der beiden Matrizen L_e und R_e ergänzen wir nun das Paar (19) zu je einer vollständigen quadratischen Matrix der Ordnung n in folgender Anordnung

$$B_v = \left(\begin{array}{c} B \\ L_e \end{array} \right) \begin{matrix} r \\ d \\ n \end{matrix} ; \quad A_v = \left(\begin{array}{cc} A & R_e \end{array} \right) \begin{matrix} n \\ r \\ d \end{matrix} . \quad (22)$$

Das Produkt dieser beiden Matrizen ist dann

$$C_v = B_v A_v = \left(\begin{array}{c} B \\ L_e \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} A & R_e \\ BA & BR_e \\ L_e A & L_e R_e \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} BA & 0 \\ 0 & L_e R_e \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} C_r & 0 \\ 0 & C_d \end{array} \right) \quad (23)$$

mit den beiden quadratischen Matrizen der Ordnung r bzw. d

$$C_r = BA , \quad C_d = L_e R_e , \quad (24)$$

und es gilt nach dem Entwicklungssatz für Determinanten

$$\det C_v = \det C_r \cdot \det C_d . \quad (25)$$

Damit ist das Produkt C_v entkoppelt, und nun können getrennt und unabhängig voneinander die beiden Matrizen C_r und C_d auf ihre Normalform transformiert werden

$$L_r C_r R_r = N_r ; \quad L_d C_d R_d = N_d , \quad (26)$$

insgesamt also ist

$$\begin{pmatrix} L_r & 0 \\ 0 & L_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_r & 0 \\ 0 & C_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_r & 0 \\ 0 & R_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_r & 0 \\ 0 & N_d \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} \diagdown & 0 \\ \hline 0 & \diagdown \end{array} \right) \begin{matrix} r \\ d \end{matrix} . \quad (27)$$

Wir heben an dieser Stelle hervor, daß zwar r gleich dem Zeilenrang von B und gleich dem Spaltenrang von A ist, doch nicht etwa gleich dem Rang des Produktes $C_r = BA$ sein muß, sondern sehr wohl kleiner sein kann, wie das einfache Beispiel zweier vom Nullvektor verschiedener orthogonaler Vektoren b^T und a mit $b^T a = 0$ zeigt. Das Produkt ist eine $1-1$ -Matrix vom Range Null, während b^T und a selbst den Rang Eins haben.

Es sei nun die Produktmatrix $C_r = BA$ ausdrücklich regulär, dann ist $N_r = I_r$. Was aber ist mit $C_d = L_e R_e$? Um dies zu klären, fragen wir, ob das homogene Gleichungssystem

$$A_v c = A c_1 + R_e c_2 = 0 \quad (28)$$

nichttriviale Lösungen besitzt, bejahendenfalls wäre nämlich A_v singulär. Die Multiplikation der Gl. (28) von links mit B ergibt nun

$$B A_v c = B A c_1 + B R_e c_2 = B A c_1 + 0 = 0 , \quad (29)$$

und daraus folgt $c_1 = 0$, da BA als regulär vorausgesetzt wurde. Es verbleibt somit

$$A_v c = A 0 + R_e c_2 = 0 , \quad (30)$$

denn da R_e spaltenregulär ist, muß auch c_2 verschwinden, so daß insgesamt $c = 0$ wird, und das bedeutet, daß die Gesamtmatrix C_v regulär ist. Die Determinanten von C_v und C_r sind somit von Null verschieden, also muß nach (25) auch die Determinante von C_d von Null verschieden, somit C_d selbst regulär sein. Wir sprechen diesen Sachverhalt aus als

Satz 1: Die Regularität der Produktmatrix $C_r = BA$ zieht die Regularität der Produktmatrix $C_d = L_e R_e$ nach sich.

Damit wird dann auch $N_d = I_d$; die Normalform von $C_v = B_v A_v$ ist daher gleich der n -reihigen Einheitsmatrix

$$\mathbf{B}_{vN} \mathbf{A}_{vN} = \mathbf{N} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_d \end{pmatrix} = \mathbf{I}_n . \quad (31)$$

Die beiden Matrizen \mathbf{B}_{vN} und \mathbf{A}_{vN} bilden jetzt ein *vollständiges Biorthonormalsystem* bzw. bei unterlassener Normierung ein *vollständiges Biorthogonalsystem*.

Wir erläutern das Vorgehen wieder an einem **Beispiel**. Gegeben sind die Matrizen \mathbf{B} und \mathbf{A} , die vollständig biorthonormiert werden sollen,

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \\ 4 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{B}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 13 & 5 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}. \quad (a)$$

Als erstes berechnen wir die Eigenspalten der Matrix \mathbf{B} . Gauß implizit gibt

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline I & 1 & -3 & 2 & 0 \\ \hline -3 & 3 & -2 & -1 & 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline I & 0 & 7 & -7 & 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \\ \hline \end{array} \Pi_B . \quad (b)$$

$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline I & 3 & -2 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & -3,5 & 3,5 & I \\ \hline \end{array}$

Eigenspalten der Pivotmatrix Π_B sind somit \mathbf{e}_2 und \mathbf{e}_3 , mithin sind die Eigenspalten von \mathbf{B} die Vektoren $\mathbf{r}_2 = \mathbf{R}\mathbf{e}_2$ und $\mathbf{r}_3 = \mathbf{R}\mathbf{e}_3$:

$$\begin{array}{c} (\mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3) \\ (0 \ -3,5 \ 3,5 \ I) \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(I \ 3 \ -2 \ 0)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -3,5 & 3,5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -3,5 & 3,5 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -3,5 & 3,5 \end{pmatrix}$$

Beide Spalten multiplizieren wir mit 2, um auf ganze Zahlen zu kommen, und gewinnen damit die Matrix \mathbf{R}_e (c). Probe: $\mathbf{B}\mathbf{R}_e = \mathbf{0}$!

$$\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ -7 & 7 \end{pmatrix} = \mathbf{R}_e . \quad (c)$$

Es folgen die Eigenzeilen der Matrix \mathbf{A} nach der gleichen Vorgehensweise:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline -2 & 2 & 1 \\ \hline 1 & -1 & -2 \\ \hline -4 & 4 & -1 \\ \hline I & I & 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 5 & 0 & -5 \\ \hline I & 0 & I \\ \hline 13 & 0 & -13 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \Pi_A \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array} \leftarrow \leftarrow . \quad (d)$$

$\begin{array}{|c|c|} \hline I & -3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & I \\ \hline \end{array}$

Eigenzeilen von Π_A sind \mathbf{e}^1 und \mathbf{e}^2 . Die Eigenzeilen $\mathbf{l}^1 = \mathbf{e}^1 \mathbf{L}$ und $\mathbf{l}^3 = \mathbf{e}^3 \mathbf{L}$ der Matrix \mathbf{A} sind demnach

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline -2 \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{|c|} \hline 13 \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline -4 \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 5 & 0 & 0 & 3 \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline 9 \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 13 & 1 & 9 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array} = L_e \cdot
 \end{array}
 \quad (e)$$

Probe: $L_e A = 0$.

Nach (22) werden nun die gegebenen Matrizen ergänzt und ihr Produkt (23) berechnet, das gibt

$$\begin{array}{c}
 \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 6 & -4 \\ -1 & -2 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -7 & 7 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} A & R_e \end{array} \right) = A_v \\
 \\
 B_v = \left(\begin{array}{c} B \\ L_e \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 2 & 0 & 13 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & 2 & 6 & 14 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 5 & 0 & 3 & 0 & 0 & -5 & 17 \\ 0 & 13 & 1 & 9 & 0 & 0 & -37 & 65 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} C_r & 0 \\ 0 & C_d \end{array} \right) = B_v A_v \cdot \quad (f)
 \end{array}$$

Eine Zerlegung der beiden Matrizen C_r und C_d lohnt hier nicht. Wir berechnen nach (3.19) ihre Inversen

$$C_r^{-1} = \begin{pmatrix} 13 & 5 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{152} \begin{pmatrix} 14 & -5 \\ -6 & 13 \end{pmatrix}, \quad C_d^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 17 \\ -37 & 65 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{304} \begin{pmatrix} 65 & -17 \\ 37 & -5 \end{pmatrix} \quad (g)$$

und multiplizieren nun B von links (oder auch A von rechts) mit C_r^{-1} und L_e von links (oder auch R_e von rechts) mit C_d^{-1} . Auf diese Weise bekommen wir die beiden zueinander reziproken Matrizen

$$B_{vN} = \frac{1}{304} \begin{pmatrix} -2 & -64 & 66 & -20 \\ 66 & -16 & -50 & 52 \\ 65 & 104 & -17 & 42 \\ 37 & 120 & -5 & 66 \end{pmatrix}, \quad A_{vN} = A_v = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 & -4 \\ -1 & -2 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -7 & 7 \end{pmatrix} \quad (h)$$

Probe: $B_{vN} A_{vN} = I_4 = A_{vN} B_{vN}$.

8.4 Kongruenztransformation. Orthogonalsysteme

Es sei A spaltenregulär, dann ist A^* zeilenregulär. Wählen wir nun als Faktormatrix $B = A^*$, so wird das jetzt hermitesche Produkt $C_r = A^* A$ regulär, weil es nach (11.22) positiv definit ist. Aus (13) bzw. (18) wird daher das *Orthonormal-system* (im Komplexen *normiert unitäre System*)

$$\boxed{A_N^* A_N = I_r; \quad a_{N,j}^* a_{N,k} = \delta_{jk}} \quad (32)$$

und das vervollständigte System (22) geht über in

$$B_v = A_v^* = \begin{pmatrix} A^* & \\ & R_e^* \end{pmatrix} \begin{matrix} r \\ d \end{matrix}, \quad A_v = \begin{pmatrix} A & R_e \end{pmatrix} \begin{matrix} r \\ d \end{matrix} \quad n \quad (33)$$

mit der Produktmatrix nach (23)

$$C_v = A_v^* A_v = \begin{pmatrix} A^* A & 0 \\ 0 & R_e^* R_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_r & 0 \\ 0 & C_d \end{pmatrix} \quad \text{pos. def.} , \quad (34)$$

$$C_r = A^* A \quad \text{pos. def.} , \quad C_d = R_e^* R_e \quad \text{pos. def.} , \quad (35)$$

wo die drei Matrizen C_v , C_r und C_d hermitesch und positiv definit sind. Wir haben somit anstelle von (26), (27) die *Kongruenztransformationen*

$$R_r^* C_r R_r = N_r = I_r ; \quad R_d^* C_d R_d = N_d = I_d \quad (36)$$

oder en bloque

$$\begin{pmatrix} R_r^* & 0 \\ 0 & R_d^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_r & 0 \\ 0 & C_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_r & 0 \\ 0 & R_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & I_d \end{pmatrix} = I_n . \quad (37)$$

Die Transformation der vervollständigten Matrix A_v auf die n -reihige Einheitsmatrix I_n wird auch jetzt wieder in zwei getrennten Rechengängen durchgeführt. Zunächst die Matrix A . Da C_r hermitesch und positiv definit ist, lassen sich die Pivots (in beliebiger Reihenfolge!) aus der Hauptdiagonale wählen, π_r hat dann die Diagonalform

$$\Pi_r = \text{Diag} \langle \pi_{11} \dots \pi_{rr} \rangle , \quad \pi_{jj} > 0 , \quad \text{Diag} \langle \pi_{11} \dots \pi_{rr} \rangle , \quad \pi_{jj} > 0 , \quad (38)$$

so daß die Permutation entfällt. Das Generalschema vereinfacht sich daher zu

$$\begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline C_r \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\text{Transformation}} \begin{array}{|c|} \hline \tilde{A} \\ \hline \Pi_r \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\text{Normierung}} \begin{array}{|c|} \hline A_N \\ \hline I_r \\ \hline \end{array} . \quad (39)$$

Die nach dem ersten Schritt vorliegende Matrix $\tilde{A} = A R$ ist damit bereits orthogonal (im Komplexen unitär), wenn auch nicht normiert. Sollte eine Normierung erwünscht oder erforderlich sein, so werden die Spalten von \tilde{A} der Reihe nach durch die Werte $\sqrt{\pi_{11}}, \dots, \sqrt{\pi_{rr}}$ dividiert, wodurch \tilde{A} in A_N übergeht; es ist dann endgültig

$$A_N = A R_N , \quad A_N^* A_N = I_r , \quad (40)$$

und analog verfährt man mit der Matrix R_e nach dem Schema

$$\begin{array}{|c|} \hline R_e \\ \hline C_d \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\text{Transformation}} \begin{array}{|c|} \hline \tilde{R}_e \\ \hline \Pi_d \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\text{Normierung}} \begin{array}{|c|} \hline R_{eN} \\ \hline I_d \\ \hline \end{array} . \quad (41)$$

Erstes Beispiel. Zwei Vektoren a_1 und a_2 sind zu orthonormieren und orthonormal zu vervollständigen

$$A = (a_1 \ a_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} . \quad (a)$$

Als erstes bestimmen wir die Eigenzeile zur Matrix A als vektorielles Produkt

$$r_e = l_e^T = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = a_1 \times a_2 . \quad (b)$$

(Der Leser führe dies zur Übung auch nach Gauß durch.)

Damit ist die Matrix A vervollständigt, und nun wird

$$\begin{array}{c} A \\ \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{array} \right) \end{array} \quad \begin{array}{c} r_e \\ \left(\begin{array}{c} 1 \\ -3 \\ 1 \end{array} \right) \end{array}$$

$$A^T \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \end{array} \right) = \begin{array}{c} C_r \quad 0 \\ 0 \quad C_d \end{array} = A_v^T A_v . \quad (c)$$

Erste Transformation der Matrix C_r aus (c) nach dem Schema (39), die aus nur einem Schritt besteht:

$$\begin{array}{|c|cc|} \hline & 2 & 1 \\ \hline I & 1 & 1 \\ -5/6 & 6 & 5 \\ \hline & 5 & 6 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|cc|} \hline & 2 & -2/3 \\ \hline & 1 & 1/6 \\ 6 & 0 & 0 \\ \hline & 1 & 7/6 \\ 0 & 11/6 & \\ \hline \end{array} ; \quad \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc} \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{3}\alpha \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{6} - \alpha \end{array} \right) \alpha = \sqrt{6/11} = 0,738\,549 \\ \left(\begin{array}{cc} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{7}{6} - \alpha \end{array} \right) \end{array} = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{cc} 0,816\,497 & -0,492\,366 \\ 0,408\,248 & 0,123\,091 \\ 0,408\,248 & 0,861\,640 \end{array} \right) = A_N . \end{array} \quad (d)$$

Transformation

Normierung

Probe: $A_N^T A_N = I_2$.

Zweite Transformation. Diese besteht allein aus der Normierung des Vektors r_e . Es ist $r_e^T r_e = 11$, somit

$$r_{eN} = \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,301\,511 \\ -0,904\,534 \\ 0,301\,511 \end{pmatrix} . \quad (e)$$

Die orthonormierte vervollständigte Matrix ist daher mit (d) und (e)

$$A_{vN} = (A_N \ r_{eN}) = \left(\begin{array}{cc|c} 0,816497 & -0,492366 & 0,301511 \\ 0,408248 & 0,123091 & -0,904534 \\ 0,408248 & 0,861640 & 0,301511 \end{array} \right). \quad (f)$$

Probe: $A_{vN}^T A_{vN} = I_3$.

Zweites Beispiel. Die Matrix A ist vollständig zu orthonormieren:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 1 & 0 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}. \quad (a)$$

Ermittlung der Pivotmatrix Π_r und der Matrix L_e durch Rücktransformation:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline I & 3 & I \\ \hline -2 & -1 & 2 \\ \hline 1 & 3 & -1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 2 & -4 & -2 \\ \hline & -3 & I \\ \hline \end{array} \quad , \quad \Pi_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow e^2 \\ \leftarrow e^3 \\ \leftarrow e^5 \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & & 0 & & & I \\ & & 7 & & & -2 \\ & & -6 & & & 1 \\ & & I & & & 0 \\ & & -2 & & & 2 \\ \hline e^2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ e^3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -6 \\ e^5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & & & I \\ & & & & & -2 \\ & & & & & 1 \\ & & & & & 0 \\ & & & & & 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = L_e. \quad (c)$$

Wir vervollständigen die Matrix A durch $R_e = L_e^T$ zu A_v und berechnen das Produkt $A_v^T A_v = C_v$

$$A_v = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 7 & -6 & -2 \\ -4 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 36 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 54 & -44 & -18 \\ 0 & 0 & -44 & 38 & 14 \\ 0 & 0 & -18 & 14 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_r & 0 \\ 0 & C_d \end{pmatrix} = C_v. \quad (d)$$

Mit Hilfe der Matrix C_r wird die Matrix A transformiert und normiert, das gibt

$$\begin{array}{c}
 A \\
 \begin{array}{|c|cc|}
 \hline
 & 3 & 1 \\
 & -1 & 2 \\
 \hline
 1 & 3 & -1 \\
 & 1 & 0 \\
 & -4 & -2 \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|cc|}
 \hline
 & 3 & 1/2 \\
 & -1 & 13/6 \\
 \hline
 1 & 3 & -3/2 \\
 & 1 & -1/6 \\
 & -4 & -4/3 \\
 \hline
 \end{array}
 , \quad A_N = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ -3 & 13 \\ 9 & -9 \\ 3 & -1 \\ -12 & -8 \end{pmatrix}
 \end{array}
 \quad (e)$$

Dasselbe führen wir jetzt für die Matrix R_e durch mit Pivots an den Plätzen 11 und 22 und bekommen

$$\begin{array}{c}
 R_e \\
 \begin{array}{|ccc|}
 \hline
 -2 & 1 & 2 \\
 1 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 1 & 0 \\
 7 & -6 & -2 \\
 0 & 0 & 1 \\
 \hline
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{|ccc|}
 \hline
 -2 & -0,629630 & 1,137931 \\
 1 & 0,814815 & 0,586207 \\
 \hline
 0 & 1 & 0,310345 \\
 7 & -0,296296 & 0,241380 \\
 0 & 0 & 1 \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\Rightarrow
 \begin{array}{|ccc|}
 \hline
 54 & -44 & -18 \\
 -44 & 38 & 14 \\
 -18 & 14 & 9 \\
 \hline
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{|ccc|}
 \hline
 54 & 0 & 0 \\
 0 & 2,148148 & 0 \\
 0 & 0 & 2,793103 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\Rightarrow
 \begin{array}{|ccc|}
 \hline
 -0,272165 & -0,429589 & 0,680883 \\
 0,136083 & 0,555939 & 0,350758 \\
 0 & 0,682288 & 0,185695 \\
 \hline
 0,952580 & -0,202159 & 0,144430 \\
 0 & 0 & 0,598351 \\
 \hline
 \end{array}
 = R_{e,N} \quad (f)$$

Damit ist $A_{vN} = (A_N | R_{e,N})$. Probe: $A_{vN}^T A_{vN} = I_5 = A_{vN} A_{vN}^T$.

8.5 Eine Variante

Die in den vorangehenden Abschnitten 8.1 bis 8.4 beschriebene (Bi-)orthonormierung läßt sich nach einem Vorschlag von Budich¹ wesentlich vereinfachen, wenn mittels Pivotregulierung anstelle der Pivotmatrix Π in (6) sogleich die (im allgemeinen rechteckige) Normalform N_d (6.41) hergestellt wird, welche dann an die Stelle der Matrix Π_p (7) tritt. Die Normierung als dritter Schritt im Schema (3) besteht demzufolge aus einer einzigen Division durch die Rumpfdeterminante Δ bzw. aus zwei Divisionen, falls analog zu (9) die Zerlegung $\Delta = \Delta_l \cdot \Delta_r$ vorgenommen wird.

¹ Mündliche Mitteilung vom 9. November 1990.

Beispiel. Nach (1) sei $s = 4$, $n = 10$, $t = 5$ mit den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2-3i & 0+2i & 1 & 0+6i & 0+i \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 6 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0-i & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (a)$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0+i & 0 & 1-i \\ 1+i & 0 & 2 & -1 & 0 & 1+3i & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & -1-i & 1 & -2 & 1+2i & -2 & 2-2i \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1+i & 3 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (b)$$

$$BA = C = \begin{pmatrix} 4-3i & 2+2i & 2-i & 7+6i & 1+i \\ 11 & -2 & 5 & -8 & -1 \\ -1+3i & -10-2i & -10-2i & -15-6i & -5-i \\ 9-9i & 14+6i & 14 & 29+18i & 7+3i \end{pmatrix}. \quad (c)$$

Der erste Schritt gemäß (4) und (5) mit $\det L = \det R = 1$ ergibt nach (6) die Matrix

$$\tilde{C} = \tilde{B}\tilde{A} = LBAR = LCR = N_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (d)$$

mit der Rumpfdeterminante

$$\Delta = 218/3 + 70i, \quad (e)$$

wo die Elemente der beiden Transformationsmatrizen L und R zufolge der Pivotregulierung nicht mehr ausnahmslos ganzzahlig sind, wovon der Leser sich überzeugen möge. Dividiert man die dritte Zeile von L oder die dritte Spalte von R durch Δ , so ist damit die Endform (11) auf einfachste Weise berechnet.

8.6 Überbestimmte Gleichungssysteme. Kondensation. Die Pseudoinverse

Vorgelegt sei das überbestimmte Gleichungssystem

$$Ax = b, \quad m > n, \quad r = n, \quad (42)$$

wo die $m \times n$ -Matrix A spaltenregulär und die rechte Seite b verträglich ist. Dann existiert, wie wir aus Abschnitt 7.10 wissen, eine eindeutige Lösung x . Ein besonderer Kunstgriff besteht nun in der sogenannten *Kondensation* des überbestimmten Systems auf ein bestimmtes System der Ordnung r mittels geeigneter Linearkombination der m Zeilen von A auf nur n Zeilen einer quadratischen Matrix der Ordnung n . Die einfachste Kondensation besteht offenbar im Herausgreifen von n geeigneten Zeilen des Gleichungssystems (42)

$$a^j x = b_j, \quad j = \zeta_1, \dots, \zeta_n, \quad (43)$$

doch ist es im allgemeinen zweckmäßiger, eine geeignete zeilenreguläre Matrix B zu wählen und mit dieser zu kondensieren

$$BAx = Bb, \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & n \\ m & \begin{array}{|c|c|} \hline A & b \\ \hline \end{array} \\ m & \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline B & BA & Bb \\ \hline \end{array} \\ n \end{array} \quad (44)$$

wozu allerdings die Regularität der Produktmatrix $C = BA$ vorausgesetzt werden muß. Es existiert dann deren Inverse, und damit wird die Lösung des kondensierten Systems

$$x = C^{-1} Bb = K_{BA} b \quad (45)$$

mit der sogenannten BA -Inversen

$$\boxed{K_{BA} = C^{-1} B \quad \text{mit} \quad C = BA}, \quad (46)$$

und es ist offensichtlich

$$K_{BA} A = C^{-1} BA = C^{-1} C = I_n, \quad (47)$$

so daß die Inverse K_{BA} die Rolle der gewöhnlichen Inversen A^{-1} im Falle $m = n$ übernimmt.

In der Wahl von B ist man relativ frei, doch ist es vom numerischen wie vom theoretischen Standpunkt aus optimal, $B = A^*$ zu setzen; dann wird aus (47) (ohne den jetzt überflüssigen Index)

$$\boxed{K = C^{-1} A^* \quad \text{mit} \quad C = A^* A \quad \text{pos. def.}}, \quad (48)$$

Diese spezielle Matrix heißt die *Pseudoinverse*, auch *generalisierte* oder *Halbinverse* der spaltenregulären Matrix A .

Dazu ein **Beispiel**. Gegeben ist das Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \\ 9 \\ -7 \end{pmatrix}. \quad (a)$$

A ist spaltenregulär und die rechte Seite b mit A verträglich, mithin existiert eine eindeutige Lösung x . Wir berechnen das Produkt $C = A^T A$ und daraus die Inverse nach (3.19)

$$A^T A = C = \begin{pmatrix} 18 & -9 \\ -9 & 15 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \frac{1}{189} \begin{pmatrix} 15 & 9 \\ 9 & 18 \end{pmatrix} = \frac{1}{63} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}. \quad (b)$$

Die Pseudoinverse K und die Lösung x sind damit leicht berechnet

$$K = C^{-1} A^T = \frac{1}{63} \begin{pmatrix} 11 & -12 & 1 & -7 \\ 15 & -3 & -12 & 0 \end{pmatrix}, \quad x = K b = \frac{1}{63} \begin{pmatrix} 189 \\ -63 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (c)$$

Proben: $Ax = b$ und $KA = I_2$.

Zur Kontrolle der Rechnung setzt man die Lösung x in die Ausgangsgleichung (42) ein und bekommt

$$Ax - b = 0, \quad (49)$$

wie verlangt. War aber die rechte Seite nicht verträglich (was man oft vorher nicht wissen kann), so entsteht eine Gleichung mit Resten (*Fehlern, Residuen, Defekten*)

$$Ax - b = v, \quad (50)$$

und nun kann man fordern, daß das überbestimmte Gleichungssystem (42) wenigstens „im Mittel verträglich“ wird. Diese Forderung führt dann auf die von Gauß begründete Ausgleichsrechnung, auf die wir im Abschnitt 12.1 noch zu sprechen kommen.

Wie leicht nachzurechnen, bekommt man auf Grund der Definitionsgleichung (48) die folgenden hermiteschen Matrizenprodukte

$$KK^* = C^{-1} \quad \text{Ordnung } n, \text{ Rang } r, \text{ pos. def.} \quad (51)$$

$$AA^* = K^* C^2 K \quad (52)$$

$$K^* K = A^* C^{-2} A \quad (53)$$

$$G = AK = AC^{-1}A^* \quad (54)$$

Das letzte, gemischte Produkt besitzt die bemerkenswerte Eigenschaft

$$G^2 = \underbrace{AK \cdot AK}_{= AI_r} K = AK = G, \quad (55)$$

woraus dann auch $G^p = G$ für jede natürliche Zahl p folgt. Matrizen dieser Eigenschaft werden *idempotent* genannt oder auch als *Projektor* bezeichnet.

Die Pseudoinverse wird nicht allein zur Lösung von überbestimmten Gleichungssystemen herangezogen, sondern erfüllt innerhalb des Matrizenkalküls noch mannigfache andere Funktionen, weshalb es zweckmäßig sein kann, die

konjugiert-komplexe Matrix K^* anstelle von K als Pseudoinverse einzuführen, worauf beim Literaturstudium zu achten ist. Der an diesen Fragen interessierte Leser sei auf die zusammenfassende Notiz bei Maess [37, S. 163] und auf eine Arbeit von Zielke [110c] hingewiesen.

9 Lineare Abhängigkeit und Rang

• 9.1 Die Pivotmatrix

Wir haben schon in den Abschnitten 1.6 und 2.3 den Begriff der linearen Abhängigkeit und im Zusammenhang damit den Rang einer Matrix eingeführt und wollen nun unsere Kenntnisse in wesentlichen Punkten ergänzen. Beginnen wir mit der

Definition 1: Der Rang ist ein Maß für die Singularität einer Matrix und fügen sogleich hinzu den

Satz 1: Der Rang r ist gleich der Anzahl der Pivotelemente.

Dies besagt aber, daß man im allgemeinen nicht um die Äquivalenztransformation

$$LAR = \Pi = \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} \text{Diagram of an } m \times n \text{ matrix } \Pi \text{ with four dots representing pivots. The width is labeled } n \text{ and the height is labeled } m. \end{array} \\ \hline \end{array} \quad (1)$$

herumkommen wird, um den Rang einer Matrix A zu bestimmen, und da die Anzahl der Pivots nicht größer sein kann als die kleinere der beiden Reihenzahlen von Π und somit auch von A , gilt trivialerweise

$$r \leq \min(m, n) . \quad (2)$$

Natürlich entsteht sofort die Frage, ob nicht verschiedene Pivotstrategien auf Pivotmatrizen mit verschieden vielen Elementen führen können. Dies ist leicht verneint; denn wird eine vorgelegte mn -Matrix A mittels zweier regulärer quadratischer, aber sonst beliebiger Matrizen S und T transformiert auf

$$SAT = \hat{A} , \quad (3)$$

und transformieren wir diese Matrix ein weiteres Mal mit den beiden Matrizen

$$\hat{L} = LS^{-1} , \quad \hat{R} = T^{-1}R , \quad (4)$$

so resultiert insgesamt

$$\hat{L}\hat{A}\hat{R} = \underbrace{LS^{-1}} \underbrace{SATT^{-1}} R = LAR = \Pi \quad (5)$$

mit derselben Pivotmatrix Π wie in (1), und da S und T beliebig waren, gilt der

Satz 2: Zwei äquivalente Matrizen A und $\hat{A} = SAT$ haben denselben Rang.

• 9.2 Die Basis

Die einfachste Basis ist die Einheitsmatrix, entweder aufgefaßt als Spaltenbasis I_n oder Zeilenbasis I^n

$$I_n = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{pmatrix}, \quad I^n = \begin{pmatrix} e^1 \\ e^2 \\ \dots \\ e^n \end{pmatrix} \quad (6)$$

mit den Einheitsvektoren e_k und ihren Transponierten e^k .

Nun ist die Einheitsmatrix eine Pivotmatrix mit n Elementen, somit ist nach Satz 1 ihr Rang $r = n$. Entfernt man aus I_n einige Spalten (aus I^n einige Zeilen), so bleibt offensichtlich der Rest spaltenregulär (zeilenregulär); zum Beispiel wird für $n = 6$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ n \\ \downarrow \end{matrix}, \quad E^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad r = 4. \quad (7)$$

$r = 3 \qquad \longleftrightarrow n$

Ist nun A eine reguläre quadratische Matrix der Ordnung n , so wird

$$AE_r = A \begin{pmatrix} e_{j_1} & e_{j_2} & \dots & e_{j_r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{j_1} & a_{j_2} & \dots & a_{j_r} \end{pmatrix}; \quad E^r A = \begin{pmatrix} e^{j_1} A \\ e^{j_2} A \\ \dots \\ e^{j_r} A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{j_1} \\ a^{j_2} \\ \dots \\ a^{j_r} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

und da man auch hier wieder die Matrix AE_r von links mit A^{-1} bzw. die Matrix $E^r A$ von rechts mit A^{-1} multiplizieren und damit die Aussage auf die Pivotmatrizen (7) zurückführen kann, haben wir den

Satz 3: Irgend $r < n$ ($r \neq 0$) Spalten (Zeilen) einer regulären quadratischen Matrix A sind spaltenregulär (zeilenregulär) und damit linear unabhängig. Die Matrix A selbst bildet eine Basis.

Fügt man andererseits zu einer Basis eine oder mehrere Spalten (Zeilen) hinzu, so ist die so entstehende Rechteckmatrix spaltensingulär (zeilensingulär), wie man sich anhand der Pivotmatrix leicht klarmacht.

9.3 Dyadische Zerlegung

Wir multiplizieren die Gleichung (1) von links mit L^{-1} und von rechts mit R^{-1} und nennen diese Matrizen zwecks Erleichterung der Schreibweise P und Q , dann wird

$$A = P \Pi Q . \quad (9)$$

Schreibt man nun die Pivotmatrix mit den Rechts- und Linkseigenvektoren e_j bzw. e^k als dyadische Zerlegung

$$\Pi = \sum e_j \pi_{jk} e^k , \quad (10)$$

so geht die Gleichung (9) über in

$$A = P \left[\sum e_j \pi_{jk} e^k \right] Q = \sum P e_j \pi_{jk} e^k Q = \sum p_j \pi_{jk} q^k \quad (11)$$

mit r Spalten p_j aus P und r Zeilen q^k aus Q , und diese sind je für sich linear unabhängig nach Satz 3, da sie einer Basis P bzw. Q entnommen wurden. Die Darstellung (11) der Matrix A heißt deshalb eine *reguläre* (auch *minimale dyadische*) Zerlegung von A oder eine *Basisfaktorisierung*. Numerisch durchgeführt stellt sie nichts anderes dar als den Algorithmus von Banachiewicz aus Abschnitt 6.5.

Faßt man die Spalten p_j und die Zeilen q^k in einer Matrix P_r bzw. Q^r und die Pivots zur Diagonalmatrix D_r zusammen,

$$P_r = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_r \end{pmatrix} , \quad Q^r = \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \\ \dots \\ q^r \end{pmatrix} , \quad D_r = \text{Diag} \langle \pi_v \rangle , \quad (12)$$

wo wir der Einfachheit halber alles durchnummerieren (um die lästige Doppelindizierung jk zu umgehen), so läßt sich aufgrund der Lesart (2.33) die Gleichung (11) auch als dreifaches Produkt schreiben

$$A = P_r D_r Q^r : \begin{array}{c} \begin{array}{c} r \\ r \end{array} \begin{array}{|c|} \hline Q^r \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{c} D_r \\ P_r \end{array} \begin{array}{|c|} \hline D_r Q^r \\ \hline A \\ \hline \end{array} \end{array} , \quad (13)$$

und dies ist oft zweckmäßiger als die Darstellung durch eine Summe.

9.4 Der dominierende Minor

Wir kommen nun zu einer ganz anderen Auffassung des Ranges. Ist die Matrix A quadratisch und regulär, so hat sie den vollen Rang $r = n$. Ist aber A eine beliebige $m \cdot n$ -Matrix, so beherbergt sie doch stets eine quadratische *reguläre* Untermatrix, einen sogenannten *dominierenden Minor* M_r der Ordnung r , während alle übrigen etwa vorhandenen Minoren höherer Ordnung singulär sind. Dies führt uns zu der

Definition 2: Der Rang einer Matrix ist gleich der Ordnung des dominierenden regulären Minors (oder irgendeines der dominierenden Minoren).

Ist zum Beispiel A eine Dyade, so sind, wie wir im Abschnitt 2.5 sahen, alle Minoren von zweiter und höherer Ordnung singulär; reguläre Minoren sind somit, falls vorhanden, von der Ordnung 1, und das sind die von Null verschiedenen Elemente selber; mithin ist auch der Rang der Dyade höchstens gleich 1. Sind alle $m \cdot n$ Elemente gleich Null, so ist A die Nullmatrix und besitzt den Rang 0.

Wir greifen nun irgendeinen dominierenden Minor M_r der Ordnung r aus A heraus und schaffen ihn der einfachen Darstellung wegen durch Umordnung der Zeilen und Spalten in die linke obere Ecke. Sodann transformieren wir M_r auf die r -reihige Pivotmatrix

$$L_r M_r R_r = \Pi_r, \quad (14)$$

die als *Rumpfmatrix* bezeichnet werde. Diese Transformation betrifft auch die ersten r Zeilen von B und die ersten r Spalten von C , es wird somit insgesamt

$$\begin{pmatrix} M_r & B \\ C & Q \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} L_r M_r R_r & L_r B \\ C R_r & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi_r & \tilde{B} \\ \tilde{C} & Q \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Benutzen wir jetzt die r Pivots zur Reduktion nach unten und rechts, so verbleibt

$$\left(\begin{array}{c|c} \Pi_r & \tilde{B} \\ \hline \tilde{A} & Q \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{c|c|c} \Pi_r & & 0 \\ \hline & & \\ \hline 0 & & 0 \end{array} \right), \quad (16)$$

wo nun nicht allein \tilde{A} und \tilde{B} , sondern auch die Matrix Q unten rechts in die Nullmatrix übergegangen ist. Denn besäße Q auch nur ein einziges von Null verschiedenes Element, so könnten wir dies in die obere linke Ecke von Q bringen und hätten damit einen regulären Minor der Ordnung $r + 1$ (in (16) eingezeichnet), was aber nicht sein kann, denn M_r wurde ja als dominierender Minor angenommen.

Natürlich ist es gar nicht erforderlich, den zur Pivotalisierung ausgewählten dominierenden Minor in die linke obere Ecke zu schaffen; dies geschah nur der einfachen Darstellung halber. De facto bleiben alle Elemente der Matrix M_r auf ihrem Platz, und da zur Transformation ausschließlich Elevatoren benutzt werden, bleibt auch die Determinante erhalten,

$$\det M_r = \det \Pi_r ; \quad (17)$$

mithin gilt der

Satz 4: Die Determinante der Rumpfmatrix Π_r ist gleich der Determinante der durch die Pivotstrategie favorisierten dominierenden Minors M_r .

Dazu ein **Beispiel** mit $m = 3$ und $n = 4$.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline -3 & -2 & 3 & -4 & -5 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ \hline 6 & 4 & -6 & 8 & 10 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & -8 & 0 & -16 & -20 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 16 & 0 & 32 & 40 \\ \hline \end{array} \quad \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Pi . \quad (a)$$

Rumpfmatrix Π_2 und Minor M_2 (beide eingerahmt) haben dieselbe Determinante,

$$\Pi_2 = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad M_2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} , \quad \det \Pi_2 = \det M_2 = -8 . \quad (b)$$

Mit einer anderen Strategie resultiert bereits nach dem ersten Schritt das Ergebnis (d).

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & -2 & 3 & -4 & -5 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 4 & -6 & 8 & 10 \\ \hline \end{array} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Pi . \quad (c)$$

$$\Pi_2 = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} , \quad M_2 = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} , \quad \det \Pi_2 = \det M_2 = 20 . \quad (d)$$

9.5 Lineare Abhängigkeit von Vektoren und Matrizen

Kommen wir schließlich zum Begriff der linearen Abhängigkeit. Dieser bringt im Prinzip nichts Neues; anstatt mit der Matrix A selbst operiert man lediglich mit dem zugeordneten homogenen Gleichungssystem

$$Ac = 0 , \quad A = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n) \quad (18)$$

oder spaltenweise geschrieben

$$a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_n c_n = 0 \quad (19)$$

und postuliert damit wie schon in (1.25) als

Definition 3: Folgt aus der Gleichung (19) notwendig $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$, so heißen die n Spalten a_1, a_2, \dots, a_n der Matrix A linear unabhängig.

Denselben Sachverhalt können wir auch so formulieren: Besitzt das homogene Gleichungssystem $A\mathbf{c} = \mathbf{0}$ nur die Trivallösung, so sind die Spalten von A linear unabhängig, andernfalls linear abhängig. Der Leser wiederhole dazu die Abschnitte 1.6 und 7.8.

Der Begriff der linearen Abhängigkeit ist ohne weiteres von Vektoren auf Matrizen übertragbar. Wieder gilt: Gibt es Skalare c_1, c_2, \dots, c_p derart, daß sich aus p vorgegebenen Matrizen M_j gleichen Formates die Nullmatrix kombinieren läßt,

$$M_1 c_1 + M_2 c_2 + \dots + M_p c_p = \mathbf{0} , \quad (20)$$

ohne daß alle c_j verschwinden, so heißen die Matrizen linear unabhängig. Faßt man die n Spalten der Länge m einer Matrix zu einem *Hypervektor* mit $m \cdot n$ Elementen (Komponenten) zusammen, so überträgt sich die Forderung (20) auf die ihr nun gleichwertige Forderung (19), und wieder ist klar, daß mehr als $m \cdot n$ $m \cdot n$ -Matrizen linear abhängig sein müssen. Ist aber A quadratisch, und betrachtet man speziell die $n+1$ (nicht n^2+1 !) Matrizenpotenzen $A^0 = I_n, A^1 = A, A^2, \dots, A^n$, so besteht bereits zwischen diesen eine lineare Abhängigkeit (mit $c_n = 1$)

$$I_n c_0 + A c_1 + A^2 c_2 + \dots + A^{n-1} c_{n-1} + A^n = \mathbf{0} \quad (21)$$

mit gewissen durch die Matrix A selbst festgelegten Koeffizienten c_0 bis c_{n-1} . Dies ist der berühmte Satz von Cayleigh und Hamilton, einer der tiefstgreifenden und faszinierendsten Sätze des Kalküls überhaupt, den wir im Abschnitt 14.3 beweisen werden.

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} , \quad A^2 = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} . \quad \text{Behauptung: } c_0 = 2, c_1 = -3 , \quad (a)$$

und wirklich ist

$$2I_2 - 3A + A^2 = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \quad (b)$$

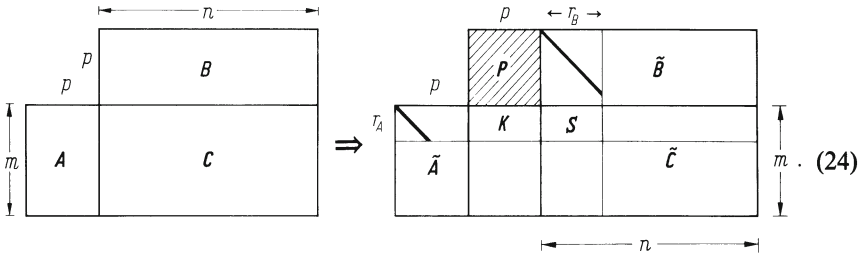
9.6 Der Rang eines Matrizenproduktes

Wir fragen jetzt, welche Beziehungen zwischen dem Rang r_C eines Matrizenproduktes $AB = C$ und den Rängen r_A und r_B der beiden Faktormatrizen A und B bestehen. Um dies zu beantworten, multiplizieren wir die Gleichung $AB = C$ beidseitig mit zwei regulären Matrizen L_a und R_b , nehmen eine innere Erweiterung vor

$$\underbrace{L_a A R_a}_{\tilde{A}} \underbrace{(L_b R_a)^{-1}}_P \underbrace{L_b B R_b}_{\tilde{B}} = \underbrace{L_a C R_b}_{\tilde{C}} \quad (22)$$

$$\tilde{A} P \tilde{B} = \tilde{C}, \quad P = (L_b R_a)^{-1} \text{ regulär} \quad (23)$$

und bestimmen die beiden Paare $L_a; R_a$ und $L_b; R_b$ so, daß A und B in ihre Normalformen (6.13) übergehen:



Aus der Matrix P wurde somit eine Matrix K der Höhe r_A und der Breite p herausgeschnitten, die mit \tilde{B} multipliziert den oberen Teil S der Matrix C ergibt; deren dominierender Minor bestimmt dann den Rang von \tilde{C} und damit den der Ausgangsmatrix C . Da P regulär ist, muß nach Satz 2 die Matrix K zeilenregulär sein und besitzt demnach mindestens einen dominierenden Minor der Ordnung r_A . Dieser kann sich innerhalb von K irgendwo befinden, im Extremfall ganz links oder ganz rechts, und beide Fälle haben wir jetzt zu diskutieren anhand der drei folgenden nichtnegativen Größen

$$\text{Spaltendefekt von } A: d_A = p - r_A \geq 0, \quad (25)$$

$$\text{Zeilendefekt von } B: d_B = p - r_B \geq 0, \quad (26)$$

$$\Delta_{AB} = r_B - d_A = r_A - d_B \geq 0 \quad (27)$$

oder, was dasselbe ist,

$$\Delta_{AB} = (r_A + r_B) - p = p - (d_A + d_B) \geq 0. \quad (27a)$$

Wir verfolgen nun den Rang r_C als ganzzahlige Funktion (Relation) von r_B , indem wir r_B die Werte $0, 1, 2, \dots, p$ annehmen lassen. Dies bedeutet, daß aus der Matrix K die ersten r_B Spalten herausgeschnitten werden, wodurch sich im Fall $\textcircled{1}$ (der Minor sitzt links) die gestrichelte und im Fall $\textcircled{2}$ (der Minor sitzt rechts) die durchgezogene Linie, insgesamt somit das Parallelogramm $OEFG$ der Abb. 9.1 ergibt, und damit ist der Rang r_C als Ordinate dieses Parallelogramms in Schranken eingeschlossen, wobei die drei in Abb. 9.1 eingerahmten Fälle zu unterscheiden sind.

Nun basiert diese Abbildung auf der Annahme, daß in der Matrix K zwischen dem Minor links und dem Minor rechts eine Lücke besteht, mithin die Differenz

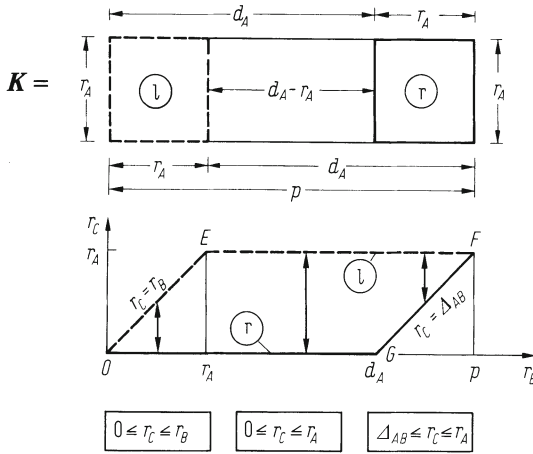


Abb. 9.1. Der Rang r_C als ganzzahlige Funktion des Ranges r_B für den Fall I: $d_A < r_A$

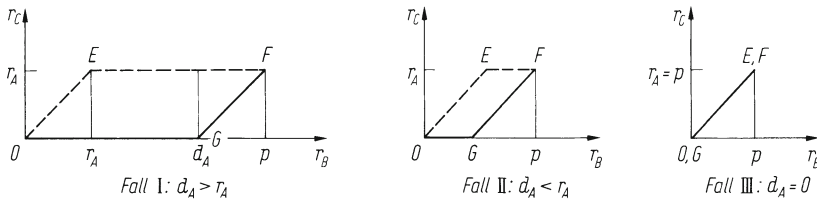


Abb. 9.2. Die drei Fallunterscheidungen bezüglich r_A

$p - 2r_A = d_A - r_A$ eine positive Größe ist, Fall I. Die Abb. 9.2 zeigt diesen Fall nochmals und dazu die Fälle II und III, womit das Problem erschöpfend beschrieben ist.

Insgesamt haben wir damit die folgende Einschließung gewonnen

$$\Delta_{AB} \leq r_C \leq \left\{ \begin{matrix} r_A \\ r_B \end{matrix} \right\}_{\min} . \quad (28)$$

Unsere Einschließung enthält aber auch zwei Gleichungen, nämlich die Punkte O und F des Parallelogramms. Für den Nullpunkt O ist zufolge $r_C = 0$ C die Nullmatrix, und das ist klar, da ja zufolge $r_B = 0$ auch B die Nullmatrix ist. Interessanter ist der Punkt F . In den Fällen I und II bedeutet dies

$$r_B = p \rightarrow r_C = r_A \quad (29)$$

und im Fall III

$$r_A = p \rightarrow r_C = r_B . \quad (30)$$

Beide Aussagen fassen wir zusammen zum

Satz 5: Ist B zeilenregulär (A spaltenregulär), so übernimmt die Produktmatrix $AB = C$ den Rang von A (von B).

Dieser Satz läßt noch eine weitere wichtige Folgerung zu. Fall a: Sind B und A zeilenregulär, so ist nach (29) $r_C = r_A = m$ und C ist somit ebenfalls zeilenregulär, und das Analoge gilt im Fall b.

$$\begin{array}{cc}
 \text{Fall a} & \text{Fall b} \\
 \begin{array}{c} n \geq p \\ \begin{array}{|c|c|} \hline \begin{array}{c} p \\ p \end{array} & B \\ \hline m \leq p & \begin{array}{c} A \\ C \end{array} \\ \hline \end{array} \end{array} & \begin{array}{c} n \leq p \\ \begin{array}{|c|c|} \hline \begin{array}{c} p \\ p \end{array} & B \\ \hline m \geq p & \begin{array}{c} A \\ C \end{array} \\ \hline \end{array} \end{array} \quad . \quad (31)
 \end{array}$$

Es gilt somit der

Satz 6: Das Produkt zweier spaltenregulärer (zeilenregulärer) Matrizen ist spaltenregulär (zeilenregulär).

Sind A und B quadratisch, so heißt dies: Das Produkt zweier regulärer quadratischer Matrizen ist regulär, und das ist trivial.

10 Gebundene Transformationen

• 10.1 Die simultane Äquivalenztransformation

Gebundene oder simultan durchgeführte Transformationen beziehen sich nicht auf eine einzelne Matrix A , sondern auf ein *Matrizenpaar* $A; B$, und es ist von vornherein klar, daß wir jetzt nicht mehr so frei über die beiden regulären Transformationsmatrizen L und R verfügen können, wie dies bei den in den Abschnitten 5 bis 9 betrachteten freien Transformationen möglich war.

Wir beschränken uns für das folgende auf den Fall, daß A und B quadratisch von der Ordnung n seien, dann steht allen Ausführungen voran die simultane Äquivalenztransformation zweier Matrizen

$$LAR = \tilde{A} ; \quad LBR = \tilde{B} , \quad L \text{ und } R \text{ regulär} , \quad (1)$$

die nur durchführbar ist, wenn auch L und R quadratisch von der Ordnung n sind.

Es sei nun B und damit auch \tilde{B} regulär, dann folgt durch Inversion der zweiten Gleichung (1) und anschließende Multiplikation von links mit R und von rechts mit L

$$R^{-1}B^{-1}L^{-1} = \tilde{B}^{-1} \rightarrow R\tilde{B}^{-1}L = B^{-1} . \quad (2)$$

Wir verlangen jetzt, daß das Paar $L; R$ die Matrix B in die Einheitsmatrix $\tilde{B} = I_n$ transformiert

$$\boxed{LAR = \tilde{A} \ , \ LBR = I_n} \ . \quad (3)$$

Eine solche spezielle Äquivalenztransformation heißt *Ähnlichkeitstransformation*, man sagt auch, die beiden Matrizen A und \tilde{A} seien einander ähnlich bezüglich B oder einfach *B-ähnlich*. Aus (2) folgt dann mit $\tilde{B} = I_n$

$$\boxed{RL = B^{-1}} \quad (4)$$

oder auch, wenn diese Gleichung von links bzw. von rechts mit B multipliziert wird,

$$\boxed{BRL = I_n = RLB} \ . \quad (5)$$

Ist speziell B gleich der n -reihigen Einheitsmatrix, so haben wir anstelle von (3) die *strikte Ähnlichkeitstransformation*

$$LAR = \tilde{A} \ , \ LI_nR = I_n \ , \quad (6)$$

und die Gleichungen (4) und (5) besagen dann, daß

$$LR = I_n = RL \quad (7)$$

ist, somit die beiden Matrizen L und R zueinander reziprok sind

$$L^{-1} = R \ , \ R^{-1} = L \ . \quad (8)$$

Ein Sonderfall der Äquivalenz ist die schon im Abschnitt 5.2 besprochene *Kongruenz*, das ist die wechselseitige Beziehung

$$L = R^* \Leftrightarrow R = L^* \ , \quad (9)$$

die zur Folge hat, daß nur noch eine der beiden Matrizen L oder R frei verfügbar ist; die Gleichungen (3) bis (5) gehen dann der Reihe nach über in

$$LAL^* = \hat{A} = R^*AR \ ; \ LBL^* = I_n = R^*BR \ , \quad (10)$$

$$L^*L = B^{-1} = RR^* \quad (11)$$

und

$$BL^*L = I_n = RR^*B \ . \quad (12)$$

Die Matrix B ist nun nicht mehr frei wählbar, weil nach (4.22) das Produkt L^*L und damit nach (11) die Matrix B^{-1} hermitesch und positiv definit ist; folglich muß nach Satz 1 aus Abschnitt 4.4 auch die Matrix B selber hermitesch und positiv definit sein

$$B = B^* \text{ pos. def.}$$

(13)

Wir stellen abschließend die freien und gebundenen Transformationen noch einmal übersichtlich in der Tabelle 10.1 zusammen und bemerken, daß es außer diesen weitere nicht geben kann.

Tabelle 10.1

	gewöhnlich L und R quadratisch und regulär	konjunktiv (= hermitesch kongruent) $L = R^*$, $R = L^*$ quadratisch und regulär
frei	a) <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">Äquivalenz</div> A rechteckig oder quadratisch $LAR = \tilde{A}$	b) <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">Hermitesche Äquivalenz</div> A quadratisch $LAL^* = \hat{A} = R^*AR$
gebunden	c) <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">B-Ähnlichkeit</div> A und B quadratisch, B regulär $\begin{cases} LAR = \tilde{A} , \\ LBR = I_n \rightarrow RL = B^{-1} \end{cases}$	d) <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">B-Unitarität</div> A und B quadratisch, $B^* = B$ pos. def. $\begin{cases} LAL^* = \hat{A} = R^*AR , \\ LBL^* = I_n = R^*BR \rightarrow RR^* = B^{-1} = L^*L \end{cases}$

Sind alle beteiligten Matrizen reell, so entfällt der Übergang auf das konjugiert Komplexe; das Zeichen $*$ ist dann zu ersetzen durch das gewöhnliche Transpositionszeichen T .

Ist speziell $B = I_n$, so wird nach (10)

$$LAL^* = \hat{A} = R^*AR ; \quad LI_nL^* = I_n = R^*I_nR \quad (14)$$

bzw. im Reellen

$$LAL^T = \hat{A} = R^TAR ; \quad LI_nL^T = I_n = R^TI_nR . \quad (15)$$

Die Matrizen L und R sind jetzt *strikt normiert unitär* bzw. im Reellen *normiert orthogonal* oder, wie man mit einem Kunstwort sagt, *orthonormal*.

Die Kongruenztransformation ist besonders dann angebracht, wenn außer B auch A hermitesch ist; auch \hat{A} ist dann hermitesch. Wir werden aber im Abschnitt 10.5 zeigen, daß es noch eine umfassendere Klasse von Matrizenpaaren gibt, die bei Kongruenztransformationen in sich selbst übergeht.

Für gewisse Formulierungen ist es oft zweckmäßiger, anstelle des Matrizenpaares $A; B$ die *charakteristische Matrix*

$$F(\lambda) = A - \lambda B \quad (16)$$

einzuführen, wo λ ein beliebiger (im allgemeinen komplexer) skalarer Parameter ist.

Die allgemeine simultane Äquivalenztransformation (1) lautet dann in der geschlossenen Schreibweise

$$LF(\lambda)R = \tilde{F}(\lambda) , \quad (17)$$

und analog wird bei der allgemeinen Kongruenztransformation (10)

$$LAL^* = \hat{A} = R^*AR ; \quad LBL^* = \hat{B} = R^*BR \quad (18)$$

$$LF(\lambda)L^* = \hat{F}(\lambda) = R^*F(\lambda)R , \quad (19)$$

wo beim Übergang auf das konjugiert Komplexe auch der Skalar λ durch $\bar{\lambda}$ zu ersetzen ist.

• 10.2 Die dyadische Zerlegung eines Matrizenpaares

Wir studieren im folgenden die spezielle simultane Äquivalenztransformation auf zwei Block-Diagonalmatrizen

$$LAR = \tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{A}_{ss} \end{pmatrix} ; \quad LBR = \tilde{B} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tilde{B}_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{B}_{ss} \end{pmatrix} , \quad (20)$$

wo die quadratischen Hauptdiagonalblöcke die Ordnungen σ_1 bis σ_s haben; es ist also

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_s = n . \quad (21)$$

Nach dem Determinanten-Entwicklungssatz gilt zufolge der Diagonalstruktur (20) offenbar

$$\det \tilde{A} = \det \tilde{A}_{11} \cdot \det \tilde{A}_{22} \cdots \det \tilde{A}_{ss} ; \quad \det \tilde{B} = \det \tilde{B}_{11} \cdot \det \tilde{B}_{22} \cdots \det \tilde{B}_{ss} , \quad (22)$$

und da wir auch jetzt wieder B als regulär, mithin $\det B \neq 0$ voraussetzen, sind auch die einzelnen Blöcke regulär:

$$\det \tilde{B}_{jj} \neq 0 \quad \text{für} \quad j = 1, 2, \dots, s . \quad (23)$$

Auch die Transformationsmatrizen L und R unterteilen wir passend zu A und B in s Blockzeilen bzw. Blockspalten, dann vollzieht sich die Berechnung des dreifachen Produktes LAR (und analog für LBR) nach dem Blockmuster

$$\begin{array}{c} \sigma_1 \downarrow \\ \sigma_2 \downarrow \\ \dots \\ \sigma_s \downarrow \end{array} \begin{pmatrix} A \\ L^1 \\ L^2 \\ \dots \\ L^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \leftarrow \sigma_1 \rightarrow & \leftarrow \sigma_2 \rightarrow & \dots & \leftarrow \sigma_s \rightarrow \\ R_1 & R_2 & \dots & R_s \\ AR_1 & AR_2 & \dots & AR_s \\ L^1 AR_1 & L^1 AR_2 & \dots & L^1 AR_s \\ L^2 AR_1 & L^2 AR_2 & \dots & L^2 AR_s \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L^s AR_1 & L^s AR_2 & \dots & L^s AR_s \end{pmatrix} \quad (24)$$

Die s^2 Blöcke von \tilde{A} und \tilde{B} sind somit die *Block-Bilinearformen*

$$L^j A R_j = \tilde{A}_{jj} \quad ; \quad L^j B R_j = \tilde{B}_{jj} \quad \text{für } j = 1, 2, \dots, s, \quad (25)$$

$$L^j A R_k = \tilde{A}_{jk} = 0 \quad ; \quad L^j B R_k = \tilde{B}_{jk} = 0 \quad \text{für } j \neq k \quad ; \quad j, k = 1, 2, \dots, s. \quad (26)$$

Um nun zu einer bemerkenswerten Darstellung des Paares $A; B$ zu gelangen, greifen wir zurück auf die schon früher eingeführten Eigendyaden (6.68). Als Normierungsmatrix wählen wir $N = B$, was erlaubt ist, da die Blöcke (23) invertierbar sind. Wir haben somit (in etwas anderer Bezeichnungsweise als dort) die Eigendyaden (27), die wir aus sogleich verständlichen Gründen erweitern zu (28), denn dann läßt sich mit den Abkürzungen (29) die Eigendyade kompakter schreiben in der Form (30).

$$B_j = B R_j (L^j B R_j)^{-1} L^j B = B R_j \tilde{B}_{jj}^{-1} L^j B, \quad (27)$$

die wir aus sogleich verständlichen Gründen erweitern zu

$$B_j = B R_j \tilde{B}_{jj}^{-1} \tilde{B}_{jj} \tilde{B}_{jj}^{-1} L^j B, \quad (28)$$

$$\hat{L}^j = \tilde{B}_{jj}^{-1} L^j B, \quad \hat{R}_j = B R_j \tilde{B}_{jj}^{-1}, \quad (29)$$

$$B_j = \hat{R}_j \tilde{B}_{jj}^{-1} \hat{L}^j. \quad (30)$$

Da sich die beiden Matrizen \tilde{A} und \tilde{B} im Aufbau (20) in nichts unterscheiden, bilden wir das zu B_j analoge dyadische Produkt, indem wir \tilde{B}_{jj} durch \tilde{A}_{jj} ersetzen und haben damit das dyadische Matrizenpaar

$$\boxed{A_j = \hat{R}_j \tilde{A}_{jj} \hat{L}^j \quad ; \quad B_j = \hat{R}_j \tilde{B}_{jj} \hat{L}^j} \quad , \quad (31)$$

dessen Eigenschaften wir jetzt untersuchen wollen. Zu diesem Zweck multiplizieren wir das Paar von links mit L^μ und von rechts mit R_ν und bekommen somit die s^2 Blöcke der transformierten Matrizen LA_jR und LB_jR als

$$L^\mu A_j R_\nu = L^\mu \hat{R}_j \tilde{A}_{jj} \hat{L}^j R_\nu = \underbrace{L^\mu B R_j}_{\tilde{B}_{\mu j}} \tilde{B}_{jj}^{-1} \tilde{A}_{jj} \tilde{B}_{jj}^{-1} \underbrace{L^j B R_\nu}_{\tilde{B}_{j\nu}} = \tilde{B}_{\mu j} \tilde{B}_{jj}^{-1} \tilde{A}_{jj} \tilde{B}_{jj}^{-1} \tilde{B}_{j\nu} ; \quad (32)$$

$$L^\mu B_j R_\nu = L^\mu \hat{R}_j \tilde{B}_{jj} \hat{L}^j R_\nu = \underbrace{L^\mu B R_j}_{\tilde{B}_{\mu j}} \tilde{B}_{jj}^{-1} \tilde{B}_{jj} \tilde{B}_{jj}^{-1} \underbrace{L^j B R_\nu}_{\tilde{B}_{j\nu}} = \tilde{B}_{\mu j} \tilde{B}_{jj}^{-1} \tilde{B}_{jj} \tilde{B}_{jj}^{-1} \tilde{B}_{j\nu} . \quad (33)$$

Für $\mu = \nu = j$ wird daraus

$$L^j A_j R_j = \tilde{A}_{jj} , \quad L^j B_j R_j = \tilde{B}_{jj} . \quad (34)$$

Alle übrigen Blöcke aber verschwinden (auch für $\mu = \nu = k \neq j!$), und damit hat das transformierte Matrizenpaar (31) die überraschend einfache Blockstruktur mit je $s^2 - 1$ Nullblöcken

$$LA_jR = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \tilde{A}_{jj} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} , \quad LB_jR = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \tilde{B}_{jj} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} . \quad (35)$$

Summieren wir über j , so resultiert gerade das transformierte Paar (20)

$$\sum_{j=1}^s LA_jR = L \left(\sum_{j=1}^s A_j \right) R = \tilde{A} ; \quad \sum_{j=1}^s LB_jR = L \left(\sum_{j=1}^s B_j \right) R = \tilde{B} , \quad (36)$$

und nun zeigt ein Vergleich mit $LAR = \tilde{A}$, $LBR = \tilde{B}$, daß gilt

$$A = \sum_{j=1}^s A_j ; \quad B = \sum_{j=1}^s B_j \quad (37)$$

oder ausführlich mit den Dyaden (31)

$$\boxed{A = \sum_{j=1}^s \hat{R}_j \tilde{A}_{jj} \hat{L}^j ; \quad B = \sum_{j=1}^s \hat{R}_j \tilde{B}_{jj} \hat{L}^j} , \quad (38)$$

und dies ist die angestrebte *dyadische Zerlegung* des Paares $A; B$, die sich bald als von fundamentaler Bedeutung erweisen wird. Um noch eine weitere wichtige Beziehung aufzudecken, multiplizieren wir die zerlegte Matrix A aus (38) von links mit L^k und bekommen mit (29) und (26)

$$L^k A = \sum_{j=1}^s \underbrace{L^k B R_j}_{\text{}} \tilde{B}_{jj}^{-1} \tilde{A}_{jj} \tilde{B}_{jj}^{-1} \hat{L}^j B = \sum_{j=1}^s \tilde{B}_{kj} \tilde{B}_{jj}^{-1} \tilde{A}_{jj} \tilde{B}_{jj}^{-1} \hat{L}^j B . \quad (39)$$

Dies verschwindet für alle $k \neq j$, weil $B_{kj} = \mathbf{0}$ ist nach (26); für $k = j$ aber bleibt genau ein Summand stehen, und damit wird

$$L^k A = \tilde{A}_{kk} \tilde{B}_{kk}^{-1} L^k B ; \quad A R_k = B R_k \tilde{B}_{kk}^{-1} \tilde{A}_{kk} , \quad (40)$$

wo die zweite Gleichung resultiert, wenn man die Matrix A aus (38) von rechts mit R_k multipliziert.

Ein **Beispiel**.

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 19 \\ -5 & 11 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} ;$$

$$L = \begin{pmatrix} l^1 \\ l^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} ; \quad R = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} . \quad (a)$$

Die Transformation ergibt wie verlangt die (hier skalare) Diagonalform (20):

$$L A R = \tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & 0 \\ 0 & \tilde{a}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad L B R = \tilde{B} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_{11} & 0 \\ 0 & \tilde{b}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \quad (b)$$

Mit den Vektoren aus (a) berechnen wir nach (29)

$$\hat{l}^1 = \tilde{b}_{11}^{-1} l^1 B = (-1 \quad 2) ; \quad \hat{r}_1 = B r_1 \tilde{b}_{11}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

$$\hat{l}^2 = \tilde{b}_{22}^{-1} l^2 B = (-1 \quad 3) ; \quad \hat{r}_2 = B r_2 \tilde{b}_{22}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c)$$

und daraus die Eigendyaden (31) und deren Summe (38)

$$A_1 = \hat{r}_1 \tilde{a}_{11} \hat{l}^1 = \begin{pmatrix} -8 & 16 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} , \quad A_2 = \hat{r}_2 \tilde{a}_{22} \hat{l}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} ; \quad A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} -9 & 19 \\ -5 & 11 \end{pmatrix} = A! \quad (d)$$

$$B_1 = \hat{r}_1 \tilde{b}_{11} \hat{l}^1 = \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} , \quad B_2 = \hat{r}_2 \tilde{b}_{22} \hat{l}^2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} ; \quad B_1 + B_2 = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = B! \quad (e)$$

• 10.3 Die Spektralzerlegung eines Matrizenpaares

Die dyadischen Zerlegungen (35) bis (38) erlangen eine besondere Bedeutung, wenn es zwei Transformationsmatrizen L^j und R_j aus L und R gibt derart, daß die Blöcke \tilde{A}_{jj} und \tilde{B}_{jj} einander proportional sind mit einem skalaren Faktor λ_j , der als *Eigenwert* des Blockes \tilde{A}_{jj} ; \tilde{B}_{jj} bezeichnet wird; es ist dann

$$\tilde{A}_{jj} = \lambda_j \tilde{B}_{jj} , \quad (41)$$

und damit wird die Dyade A_j (31), wenn wir den Skalar λ_j nach links herausziehen, ein Vielfaches der Dyade B_j

$$A_j = \hat{R}_j(\lambda_j \tilde{B}_{jj}) \hat{L}^j = \lambda_j \hat{R}_j \tilde{B}_{jj} \hat{L}^j = \lambda_j B_j . \quad (42)$$

Gilt dies für alle s Blöcke, so geht die dyadische Darstellung (38) über in die *Spektralzerlegung*

$$A = \sum_{j=1}^s \lambda_j B_j ; \quad B = \sum_{j=1}^s B_j , \quad (43)$$

so genannt, weil die s Eigenwerte λ_j des Paares $A; B$ dessen *Spektrum* bilden. Die beiden Gleichungen (43) lassen sich mit der charakteristischen Matrix (16) zusammenziehen zu einer einzigen

$$F(\lambda) = A - \lambda B = \sum_{j=1}^s (\lambda_j - \lambda) B_j , \quad (44)$$

eine Schreibweise, die besonders für theoretische Herleitungen wegen ihrer Kürze von Vorteil ist.

Die Gleichungen (40) gehen nun zufolge (41) über in

$$\boxed{L^k A = \lambda_k L^k B ; \quad A R_k = B R_k \lambda_k} ; \quad k = 1, 2, \dots, s , \quad (45)$$

und dies ist eine Beziehung von grundlegender Bedeutung, die uns einen direkten Zugang zu dem schon des öfteren erwähnte Eigenwertproblem eröffnen wird. Wir weisen aber ausdrücklich darauf hin, daß zwar jedes Matrizenpaar (wenn B regulär ist) die spezielle Transformation (20) zuläßt, nicht aber gilt ausnahmslos die Proportionalität der Eigenblöcke gemäß (41); genaueres darüber werden wir im Abschnitt 18 erarbeiten.

Macht man die Unterteilung (20) so fein, daß $s = n$ wird, so gehen die Blockzeilen L^j in die Zeilen l^j und die Blockspalten R_k in die Spalten r_k über, womit (45) sich schreibt als

$$l^k A = \lambda_k l^k B ; \quad A r_k = B r_k \lambda_k ; \quad k = 1, 2, \dots, n , \quad (46)$$

und die *Spektralzerlegung* (38) bzw. (43), (44) erstreckt sich nun über n Summanden

$$A = \sum_{j=1}^n \lambda_j B_j ; \quad B = \sum_{j=1}^n B_j ; \quad F(\lambda) = \sum_{j=1}^n (\lambda_j - \lambda) B_j \quad (47)$$

mit den Eigendyaden

$$B_j = \frac{B r_j l^j B}{l^j B r_j} . \quad (48)$$

• 10.4 Normale Matrizenpaare

Ist die Matrix B hermitesch und positiv definit, so liegt es nahe, anstatt der Äquivalenztransformation (1) eine Kongruenztransformation (9) bis (13) vorzunehmen. Wir haben dann anstelle von (20)

$$R^* A R = \hat{A} = \begin{pmatrix} \hat{A}_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \hat{A}_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \hat{A}_{ss} \end{pmatrix} ; \quad R^* B R = \hat{B} = \begin{pmatrix} \hat{B}_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \hat{B}_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \hat{B}_{ss} \end{pmatrix} \quad (49)$$

mit den Hauptdiagonalblöcken

$$\hat{A}_{jj} = R_j^* A R_j ; \quad \hat{B}_{jj} = R_j^* B R_j = \hat{B}_{jj}^* \quad \text{pos. def.} \quad (50)$$

Die Eigendyaden (31) sind jetzt mit $\hat{L}^j = \hat{R}_j^*$

$$\boxed{A_j = \hat{R}_j \hat{A}_{jj} \hat{R}_j^* ; \quad B_j = \hat{R}_j \hat{B}_{jj} \hat{R}_j^*} ; \quad j = 1, 2, \dots, s , \quad (51)$$

und man sieht, daß zufolge $\hat{B}_{jj}^* = \hat{B}_{jj}$ nach (50) auch die s Dyaden B_j hermitesch und positiv definit sind.

Es seien nun die s Blöcke aus \hat{A} ihrerseits Diagonalmatrizen (dies ist zum Beispiel garantiert für $s = n$, dann ist $\hat{A}_{jj} = \hat{a}_{jj}$ sogar ein Skalar), dann wird auch die Gesamtmatrix \hat{A} diagonal

$$R^* A R = \hat{A} = \text{Diag} \langle \hat{a}_{jj} \rangle . \quad (52)$$

Nun hatten wir im Abschnitt 5.9 gezeigt: Läßt sich eine Matrix A kongruent auf Diagonalform transformieren, so folgt daraus als äußeres Kriterium der Vertauschungssatz

$$A^* R R^* A = A R R^* A^* ; \quad (53)$$

und dies galt für die freie Transformation ohne Bindung an einen Partner B .

Nun sei die Kongruenztransformation (49) B -unitär, $R^* B R = I_n$, dann folgt aus (11) die Beziehung $R R^* = B^{-1}$, und damit geht (53) über in

$$\boxed{A^* B^{-1} A = A B^{-1} A^*} ; \quad B = B^* \quad \text{pos. def.}, \quad (54)$$

eine Relation, die wir ebenso wie bei der freien Transformation aussprechen wollen als

Satz 1: (Vertauschungssatz) *Läßt sich ein Matrizenpaar $A; B$ mit hermitescher und positiv definiten Matrix B kongruent simultan auf das Diagonalpaar $A; I_n$ transformieren, so sind die Matrizen A und A^* bezüglich B^{-1} vertauschbar.*

Matrizenpaare mit dieser Eigenschaft heißen *B-normal* oder *normal bezüglich B*, für $B = I_n$ (strikt) *normal*. Aufgrund des Kriteriums (54) läßt sich somit nachprüfen, ob ein vorgelegtes Matrizenpaar $A; B$ mit $B = B^*$ pos. def. sich kongruent simultan auf Diagonalform transformieren läßt, ohne daß die Transformation faktisch durchgeführt werden müßte. Die Gleichung (54) heißt deshalb auch ein *äußeres Kriterium* für die kongruente Transformierbarkeit eines Paares $A; B$ auf ein Diagonalpaar $A; I_n$.

Es ist evident, daß die Bedingung (54) für hermitesche und schiefhermitesche Matrizen A erfüllt ist, gleichviel, welche hermitesche und positiv definite Matrix B als Partner fungiert. Anstelle der bloßen Gleichheit der beiden dreifachen Produkte (54) kann man sehr viel schärfer fordern, daß beide einer dritten gegebenen Matrix H gleich sind,

$$A^* B^{-1} A = H = A B^{-1} A^* ; \quad H = H^* \quad \text{pos. (semi-)def.} , \quad (55)$$

was dann eine Forderung an die Diagonalmatrix A beinhaltet. Speziell für $H = I_n$ wird zum Beispiel

$$A^* B^{-1} A = I_n = A B^{-1} A^* , \quad (56)$$

die Matrix A heißt dann *normiert B-unitär*, und die Gleichung (56) sagt etwas über die Inverse aus, nämlich

$$A^{-1} = A^* B^{-1} = B^{-1} A^* . \quad (57)$$

Im Sonderfall $B = I_n$ geht (56) über in die bereits in (4.15) aufgeführte Normalitätsbedingung

$$A^* A = A A^* , \quad (58)$$

und (57), (58) bedeuten die gewöhnliche normierte Unitarität (4.12), (4.13)

$$A^* A = I_n = A A^* \rightarrow A^{-1} = A^* . \quad (59)$$

Bei reellen Matrizen A und B ist überall das Zeichen $*$ durch T und das Wort unitär durch orthogonal zu ersetzen.

Wir fragen schließlich, wie sich ein normales Matrizenpaar gegenüber Kongruenztransformationen verhält. Es sei C eine beliebige reguläre Matrix der Ordnung n , dann wird das transformierte Paar

$$A_t = C^* A C ; \quad B_t = C^* B C , \quad B_t = B_t^* \quad \text{pos. def.}, \quad (60)$$

denn es ist $B_t^* = (C^* B C)^* = C^* B^* C^{**} = C^* B C = B_t$, und auch die positive Definitheit ist leicht nachzuweisen. Mit der linksseitig transformierten Matrix

$$C R = R_t \quad (61)$$

geht nun das Originalgleichungspaar

$$R^* A R = A ; \quad R^* B R = I_n \quad (62)$$

über in

$$R_t^* C^* A C R_t = A ; \quad R_t^* C^* B C R_t = I_n , \quad (63)$$

somit nach (60) in

$$R_t^* A_t R_t = A ; \quad R_t^* B_t R_t = I_n . \quad (64)$$

Also ist die transformierte Matrix A_t normal bezüglich der transformierten Matrix B_t , und es besteht das äußere Kriterium

$$A_t^* B_t^{-1} A_t = A_t B_t^{-1} A_t^* . \quad (65)$$

Setzt man hier A_t und B_t nach (60) ein, so hebt sich einiges heraus; es verbleibt

$$C^* \underline{A^* B^{-1} A} C = C^* \underline{A B^{-1} A^*} C , \quad (66)$$

und dies ist richtig, weil die beiden unterklammerten Terme nach (54) einander gleich sind.

Man kann nun verlangen, daß bei dieser Kongruenztransformation die Matrix B in sich selbst übergeht, womit C der Bedingung

$$C^* B C = B \quad (67)$$

genügen muß. Speziell für $B = I_n$ bedeutet dies, daß zufolge

$$C^* C = I_n \quad (68)$$

die Matrix C strikt normiert unitär sein muß.

• 10.5 Potenzen und Polynome

Wir hatten uns im Abschnitt 5.8 mit Potenzen und darauf aufbauend mit dem Polynom

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_q x^q \quad (69)$$

einer *freien* Äquivalenztransformation $LAR = \tilde{A}$ befaßt und fragen nun, wie die dort gewonnenen Ergebnisse sich auf die *gebundene* (*simultane*) Äquivalenztransformation

$$LAR = \tilde{A} ; \quad LBR = \tilde{B} \quad (70)$$

übertragen lassen. Nun gilt nach (5.83) (in vertauschter Reihenfolge der Gleichungen) getrennt für die Polynome in A und B

$$p(RLA)RL = Rp(LAR)L = RLp(ARL) ; \quad (71)$$

$$p(RLB)RL = Rp(LBR)L = RLp(BRL) . \quad (72)$$

Speziell für die reguläre Ähnlichkeitstransformation gehen zufolge $RL = B^{-1}$ diese beiden Gleichungen über in

$$p(B^{-1}A)B^{-1} = Rp(LAR)L = B^{-1}p(AB^{-1}) \quad (73)$$

und

$$p(B^{-1}B)B^{-1} = Rp(LBR)L = B^{-1}p(BB^{-1}) \quad (74)$$

oder mit $LBR = I_n$ und da $p(I_n) = p(x)I_n$ eine Skalarmatrix und als solche mit jeder anderen Matrix vertauschbar ist,

$$p(x)B^{-1} = p(x)B^{-1} = p(x)B^{-1} , \quad (75)$$

und dies ist eine nichtssagende Identität. Von Bedeutung ist somit allein die Gleichung (73), doch wird man für die praktische Rechnung (71) bevorzugen. Multipliziert man diese Gleichung von links mit R^{-1} und von rechts mit L^{-1} , so entsteht daraus wieder die Ausgangsgleichung (5.84)

$$\boxed{R^{-1}p(RLA)R = p(LAR) = Lp(ARL)L^{-1}} ; \quad RL = B^{-1} . \quad (76)$$

Ist A regulär, so gilt diese Beziehung auch für die allgemeinere Funktion (5.85)

$$p(x) = a_{-\sigma}x^{-\sigma} + \dots + a_{-2}x^{-2} + a_{-1}x^{-1} + a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_\varrho x^\varrho . \quad (77)$$

Betrachten wir schließlich noch die *strikte* Ähnlichkeitstransformation $LAR = \tilde{A}$; $LI_nR = I_n$. Mit $B = I_n$ geht die Formel (73) über in die einzige Gleichung

$$\boxed{p(A) = Rp(LAR)L} ; \quad RL = I_n . \quad (78)$$

Beispiel. Gegeben ist das Polynom

$$p(x) = 1 + 2x - 8x^2, \quad (\text{a})$$

ferner die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } LBR = I. \quad (\text{b})$$

Wir berechnen als erstes die drei in Klammern stehenden Matrizenprodukte aus (71)

$$RLA = A_1 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad LAR = \tilde{A} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad ARL = A_2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{c})$$

sowie deren Quadrate

$$A_1^2 = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 13 & -12 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}^2 = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ -18 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2^2 = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{d})$$

und damit weiter die Polynome $p(A_1) = I + 2A_1 - 8A_1^2$ usw. gemäß (a), das gibt

$$p(A_1) = \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad p(\tilde{A}) = \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}, \quad p(A_2) = \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{e})$$

Nach (71) werden nun die drei Matrizenprodukte

$$p(A_1)RL = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -29 & 1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}, \quad Rp(\tilde{A})L = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -29 & 1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}, \quad RLp(A_2) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -29 & 1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{f})$$

einander gleich, wie es sein muß. Der Leser beachte besonders, daß die Matrix B^{-1} an keiner Stelle explizit erscheint; die Gleichung (73) hat daher nur theoretischen Wert.

Wie sieht nun das Polynom in der dyadischen Blockzerlegung (38) aus? Um das zu klären, betrachten wir das dreifache Produkt mit der Dyade A_j aus (31)

$$A_j B^{-1} A_j = \hat{R}_j \tilde{A}_{jj} \tilde{B}_{jj}^{-1} \underbrace{L^j B \cdot B^{-1} \cdot B R_j}_{\tilde{B}_{jj}^{-1}} \tilde{A}_{jj} \tilde{L}^j = \hat{R}_j \tilde{A}_{jj} \tilde{B}_{jj}^{-1} \tilde{A}_{jj} \tilde{L}^j, \quad (79)$$

und erkennen darin ein getreues Abbild der linken Seite, umrahmt von der Blockspalte \hat{R}_j und der Blockzeile \tilde{L}^j . Für höhere Potenzen folgt ebenso

$$A_j B^{-1} A_j B^{-1} A_j \cdots B^{-1} A_j = \hat{R}_j \tilde{A}_{jj} \tilde{B}_{jj}^{-1} \tilde{A}_{jj} \tilde{B}_{jj}^{-1} \tilde{A}_{jj} \cdots \tilde{B}_{jj}^{-1} \tilde{A}_{jj} \tilde{L}^j, \quad (80)$$

und dies schreiben wir mit einer zweckmäßigen Erweiterung

$$B(B^{-1} A_j)^p = \hat{R}_j \tilde{B}_{jj} (\tilde{B}_{jj}^{-1} \tilde{A}_{jj})^p \tilde{L}^j \quad \text{bzw.} \quad (A_j B^{-1})^p B = \hat{R}_j (\tilde{A}_{jj} \tilde{B}_{jj}^{-1})^p \tilde{B}_{jj} \tilde{L}^j. \quad (81)$$

Multiplizieren wir diese Ausdrücke mit dem Koeffizienten a_p und addieren die so entstehenden Terme, so folgt mit dem Polynom (69) für jede der s Dyaden A_j

$$Bp(B^{-1}A_j) = \hat{R}_j \tilde{B}_{jj} p(\tilde{B}_{jj}^{-1} \tilde{A}_{jj}) \tilde{L}^j \quad \text{bzw.} \quad p(A_j B^{-1}) B = \hat{R}_j p(\tilde{A}_{jj} \tilde{B}_{jj}^{-1}) \tilde{B}_{jj} \tilde{L}^j. \quad (82)$$

Summation über alle s Polynomdyaden gibt dann endgültig

$$Bp(B^{-1}A) = \sum_{j=1}^s \hat{R}_j \tilde{B}_{jj} p(\tilde{B}_{jj}^{-1} \tilde{A}_{jj}) \tilde{L}^j$$

bzw.

$$p(AB^{-1})B = \sum_{j=1}^s \hat{R}_j p(\tilde{A}_{jj} \tilde{B}_{jj}^{-1}) \tilde{B}_{jj} \tilde{L}^j \quad (83)$$

mit der bei dieser Prozedur unverändert gebliebenen Matrix

$$B = \sum_{j=1}^s \hat{R}_j \tilde{B}_{jj} \tilde{L}^j = \sum_{j=1}^s B_j. \quad (83a)$$

Ist nun insonderheit $\tilde{A}_{jj} = \lambda_j \tilde{B}_{jj}$, so wird $\tilde{A}_{jj} \tilde{B}_{jj}^{-1} = \tilde{B}_{jj}^{-1} \tilde{A}_{jj} = \lambda_j I_{jj}$, ferner $p(\lambda_j I_{jj}) = p(\lambda_j) I_{jj}$, und damit folgt aus (81) nach leichter Rechnung

$$Bp(B^{-1}A_j) = p(\lambda_j) B_j = p(A_j B^{-1}) B. \quad (84)$$

Trifft die Bedingung $\tilde{A}_{jj} = \lambda_j \tilde{B}_{jj}$ für alle s Blöcke zu, so haben wir damit die *Spektalzerlegung* des Matrizenpolynoms in der zweifachen Ausführung

$$\boxed{Bp(B^{-1}A) = \sum_{j=1}^s p(\lambda_j) B_j = p(AB^{-1})B} ; \quad B = \sum_{j=1}^s B_j. \quad (85)$$

Dazu ein **Beispiel**, Gegeben ist das spezielle Paar $A; I_2$ und das Polynom $p(x)$

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad p(x) = 3 - 5x + 2x^3. \quad (a)$$

Die Matrix $p(A)$ ist zu berechnen a) auf direktem Weg, b) über die Eigendyaden.

a) Es wird

$$A^2 = \begin{pmatrix} 91 & -90 \\ 10 & -9 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 820 & -819 \\ 91 & -90 \end{pmatrix}, \quad p(A) = 3I_2 - 5A + 2A^3 = \begin{pmatrix} 1593 & -1593 \\ 177 & -177 \end{pmatrix}. \quad (b)$$

b) Die Eigenwerte und -vektoren und daraus die Eigendyaden sind zu berechnen:

$$\lambda_1 = 1: I^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \frac{r_1 I^1}{I^1 r_1} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 9 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}. \quad (c)$$

$$\lambda_2 = 9: I^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad r_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \frac{r_2 I^2}{I^2 r_2} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -9 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (d)$$

Mit

$$p(\lambda_1) = p(1) = 0, \quad p(\lambda_2) = p(9) = 1416 \quad (e)$$

bekommen wir die Spektralzerlegung (85) mit $B = I_2$ in der Form

$$p(A) = p(\lambda_1)B_1 + p(\lambda_2)B_2 = 0 \cdot B_1 + 1416 \cdot B_2 = 1416 \cdot \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -9 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1593 & -1593 \\ 177 & -177 \end{pmatrix} \quad (f)$$

wie unter (c).

10.6 Die Produktzerlegung einer diagonalähnlichen Matrix

Es sei das spezielle Paar $A; I_n$ diagonalähnlich

$$LAR = A = \text{Diag} \langle \lambda_j \rangle ; \quad LI_n R = I_n \quad (86)$$

oder auch als Umkehrung geschrieben

$$A = RAL \quad (87)$$

Nun folgt aus $LR = I_n$ auch $(LR)^* = I_n^* = I_n$, somit

$$R^* L^* = I_n \quad (88)$$

Wir nehmen jetzt in (87) eine Erweiterung vor, das gibt

$$A = RI_n AL = RR^* L^* AL \quad (89)$$

und dies schreiben wir als *Produktzerlegung*

$$\boxed{A = H^{-1} G} \quad (90)$$

mit

$$H^{-1} = RR^* \quad \text{pos. def.}, \quad G = L^* AL \quad (91)$$

wo der erste Faktor H^{-1} hermitesch und positiv definit ist.

Ist nun die Spektralmatrix A reell, dann ist sie auch hermitesch, denn es gilt $A^* = \bar{A}^T = \bar{A} = A$, damit ist aber auch G hermitesch zufolge $G^* = (L^* AL)^* = L^* A^* L^{**} = L^* AL = G$, und dieses Ergebnis formulieren wir als

Satz 2: Eine diagonalähnliche Matrix A mit reeller Spektralmatrix A läßt sich darstellen als Produkt $A = H^{-1} G$, wo H^{-1} und damit auch H hermitesch und positiv definit und G hermitesch ist.

Ist dagegen A komplex, so sind die beiden dreifachen Produkte

$$G^* H^{-1} G = \underbrace{L^* A^* L}_{\text{hermitesch}} \cdot \underbrace{RR^*}_{\text{hermitesch}} \cdot \underbrace{L^* AL}_{\text{hermitesch}} = L^* A^* AL \quad (92)$$

$$GH^{-1} G^* = \underbrace{L^* AL}_{\text{hermitesch}} \cdot \underbrace{RR^*}_{\text{hermitesch}} \cdot \underbrace{L^* A^* L}_{\text{hermitesch}} = L^* A A^* L \quad (93)$$

einander gleich, weil die Diagonalmatrizen A und A^* vertauschbar sind, somit gilt

$$G^* H^{-1} G = G H^{-1} G^* , \quad (94)$$

mithin ist nach (54) das Paar $G; H$ normal. Dies besagt dann der

Satz 3: *Jede diagonalähnliche Matrix A läßt sich darstellen als Produkt $A = H^{-1} G$, wo H^{-1} und damit auch H hermitesch und positiv definit und G normal bezüglich H ist.*

Ist insonderheit die Ähnlichkeitstransformation (86) kongruent mit $L = R^*$,

$$R^* A R = A = \text{Diag } \langle \lambda_j \rangle ; \quad R^* I_n R = I_n , \quad (95)$$

dann lautet mit $H^{-1} = R^* R = I_n$ die „Zerlegung“ (90) $A = I_n G = G$ mit $G^* I_n G = G I_n G^*$ nach (94). Demnach ist A selbst I_n -normal (strikt normal), und die Produktzerlegung (90) geht über in eine Identität.

• 10.7 Normalformen von Matrizenpaaren

Schon im Abschnitt 5.6 hatten wir die Normalform bezüglich der freien Transformation $LAR = \tilde{A}$ aufgeführt, und wir fragen jetzt nach der Normalform eines Matrizenpaares bezüglich der simultanen Transformation

$$LAR = A_N ; \quad LBR = I_n . \quad (96)$$

Auch jetzt ist A_N eine Matrix, die eine maximale Anzahl von Nullen und Einsen enthält, allerdings – und das ist neu gegenüber der freien Transformation – daneben mit einer Anzahl von weiteren signifikanten Elementen; und hier sind nun zwei Typen von Normalformen zu unterscheiden, nämlich solche, die sich allein durch rationale Operationen, d. h. durch Anwendung der vier Grundrechenarten herstellen lassen, und andere, die algebraisch irrationale Operationen zu ihrer Ermittlung erfordern. Bei letzterem Typ erweisen sich als signifikante Element gerade die n Eigenwerte λ_j des Paares $A; B$. Diese aber sind, wie wir bald zeigen werden, die Nullstellen (Wurzeln) einer algebraischen Gleichung n -ten Grades und können als solche im allgemeinen nicht rational sein.

Ohne Beweis und auch ohne weitere Begründung stellen wir im folgenden die Normalformen übersichtlich zusammen, wobei uns die praktische Durchführbarkeit der zugehörigen Transformation (96) im Augenblick nicht interessieren soll.

I. Rationale Transformationen

Ia.

$$A_N = G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & g_{1n} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & g_{2n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & g_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & g_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & g_{nn} \end{pmatrix}. \quad (97)$$

Das ist die sogenannte *Begleitmatrix* von Günther [131]¹. Die Transformation selbst wird im Abschnitt 10.10 beschrieben. Sie verläuft stets unsymmetrisch und kann daher die etwa bestehende Eigenschaft $A^* = A$ bzw. $A^T = A$ nicht nutzen.

Ib. Ist das Paar $A; B$ hermitesch, B überdies positiv definit, so führt eine Kongruenztransformation mit im allgemeinen komplexer Matrix L auf die reelsymmetrische *Tridiagonalmatrix* T , deren Kodiagonalelemente negativ sind.

$$A_N = T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ t_{12} & t_{22} & t_{23} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & t_{23} & t_{33} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t_{n-1,n-1} & t_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t_{n-1,n} & t_{nn} \end{pmatrix}. \quad (98)$$

Beide Normalformen können in Ausnahmefällen entarten zu einer Blockmatrix (Hypermatrix)

$$A_N = \begin{pmatrix} A_{N1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{N2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_{N\varrho} \end{pmatrix}, \quad (99)$$

wo jeder der ϱ Hauptdiagonalblöcke die Normalform (97) bzw. (98) aufweist.

II. Nichtrationale Transformationen

IIa. Normalform ist hier die *Jordan-Matrix*

$$A_N = J = \begin{pmatrix} \diagup & 0 \\ 0 & \diagdown \end{pmatrix}. \quad (100)$$

Die Hauptdiagonale ist besetzt mit den Eigenwerten des Paares $A; B$, in der oberen Kodiagonale stehen entweder Nullen oder Einsen. Sind alle $n-1$ Kodiagonalelemente gleich Null, so ist $J = \text{Diag} \langle \lambda_j \rangle$ die Spektralmatrix A . Das Paar $A; B$ ist dann diagonalähnlich.

¹ Oft auch benannt nach Frobenius (1849–1917).

IIb. Ist das Paar $A; B$ normal, so führt eine Kongruenztransformation auf

$$A_N = A = \text{Diag} \langle \lambda_j \rangle , \quad (101)$$

und dies ist die einfachste Normalform überhaupt, weil sie außer den n Eigenwerten nur Nullen enthält im Gegensatz zur Jordan-Matrix (100), die im allgemeinen (keineswegs immer) noch einige Einsen aufweist.

• 10.8 Die strikte Ähnlichkeitstransformation. Die drei Grundoperationen

Die simultane Ähnlichkeitstransformation

$$LAR = \tilde{A} ; \quad LBR = I_n \quad (102)$$

ist in einem einzigen geschlossenen Rechengang im allgemeinen nicht ökonomisch durchführbar, sondern verlangt eine vorgezogene Äquivalenztransformation der Matrix B nach Gauß oder Gauß-Jordan auf die reguläre Pivotmatrix Π , wo A im Generalschema mitgeführt wird, das gibt zunächst

$$L_0 A R_0 = A_0 ; \quad L_0 B R_0 = \Pi . \quad (103)$$

Sodann wird wiederum im Generalschema die Pivotmatrix in die Einheitsmatrix überführt,

$$(\Pi^{-1} L_0) A R_0 = A_B ; \quad (\Pi^{-1} L_0) B R_0 = I_n , \quad (104)$$

und nun erst erfolgt die strikte Ähnlichkeitstransformation mit dem Paar $A_B; I_n$, wo wir im folgenden aber anstelle von A_B einfach A schreiben wollen.

Es geht also um die strikte Ähnlichkeitstransformation

$$\boxed{LAR = \tilde{A} ; \quad L I_n R = I_n} , \quad (105)$$

wo die Transformationsmatrizen L und R zueinander reziprok sind

$$L^{-1} = R \Leftrightarrow R^{-1} = L . \quad (106)$$

Multiplizieren wir die Gleichung $LAR = \tilde{A}$ von links mit $R = L^{-1}$ bzw. von rechts mit $L = R^{-1}$, so wird

$$\boxed{AR = R\tilde{A} , \quad LA = \tilde{A}L} , \quad (107)$$

und diese Form einer strikten Ähnlichkeitstransformation ist zumeist vorteilhafter als die Darstellung (105); es genügt dann, entweder L oder R mitzuführen. Auch für Kontrollzwecke ist die Gleichung (107) vorzuziehen.

Zwei einander ähnliche Matrizen A und \tilde{A} gehorchen einer Invarianzeigenschaft, die wir ohne Beweis aussprechen als

Satz 4: Die Summe aller σ -zeiligen Hauptunterdeterminanten einer Matrix A ist invariant gegenüber einer Ähnlichkeitstransformation.

Von größerer Wichtigkeit sind aber nur die Fälle $\sigma = 1$ und $\sigma = n$. Im ersten Fall sind die einzeiligen Hauptunterdeterminanten die Hauptdiagonalelemente a_{jj} selbst; deren Summe ist somit die schon in (2.30) eingeführte Spur der Matrix, also gilt nach Satz 4

$$\text{sp } A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \tilde{a}_{11} + \tilde{a}_{22} + \dots + \tilde{a}_{nn} = \text{sp } \tilde{A} , \quad (108)$$

und im zweiten Fall $\sigma = n$ gibt es nur eine einzige Haupt(unter)determinante, das ist die Determinante von A selbst. Deren Invarianz ist evident, denn aus (107) folgt $\det A \cdot \det R = \det R \cdot \det \tilde{A}$ (oder auch $\det L \cdot \det A = \det \tilde{A} \cdot \det L$) und weiter, da $\det R$ (ebenso wie $\det L$) von Null verschieden ist,

$$\det A = \det \tilde{A} . \quad (109)$$

Die Invarianz der Spur werden wir im Abschnitt 13.5 beweisen. Der allgemeine Beweis des Satzes 4 dagegen ist weitläufig und kann etwa bei Gröbner [8, S. 153] nachgelesen werden.

Wir rechnen ein einfaches **Beispiel**.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix} , \quad L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} , \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} ,$$

$$LR = I_3 , \quad LAR = \tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \quad (a)$$

1. $\sigma = 1$. $\text{sp } A = 0 + 1 + 1 = 2$, $\text{sp } \tilde{A} = 3 - 2 + 1 = 2$. (b)
2. $\sigma = 2$. Es gibt drei zweizeilige Hauptunterdeterminanten, das sind die Determinanten der drei Hauptminoren (Hauptuntermatrizen)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} , \quad (c)$$

und deren Summe $\sum \det$ ist

$$\sum \det(A) = 2 + 0 - 2 = 0 , \quad \sum \det(\tilde{A}) = -6 + 7 - 1 = 0 . \quad (d)$$

3. $\sigma = 3$. $\det A = -6$, $\det \tilde{A} = -6$. (e)

Unabhängig von irgendeiner Zielsetzung fragen wir jetzt, wie die Ähnlichkeitstransformation (105) numerisch bewerkstelligt werden kann. Dies gelingt auch

hier mit Hilfe der im Abschnitt 5.3 eingeführten drei Grundoperationen; es sind dies der Reihe nach:

Grundoperation I. Gleichnamige Permutation der Zeilen und Spalten. Zufolge $P^{-1} = P^T$ ist

$$PAP^T = \tilde{A} ; \quad PI_nP^T = I_n . \quad (110)$$

Diese Permutation bewirkt einen Austausch einiger oder aller Elemente a_{jk} von A , insbesondere den Austausch der Hauptdiagonalelemente untereinander. Deren Summe bleibt somit erhalten, und folglich gilt $\text{sp } A = \text{sp } \tilde{A}$. Ist A hermitesch (reelsymmetrisch), so ist es auch \tilde{A} .

Grundoperation II. Dies ist die sogenannte *Skalierung* mittels einer regulären Diagonalmatrix D

$$DAD^{-1} = \tilde{A} ; \quad DI_nD^{-1} = I_n , \quad (111)$$

bei welcher die Elemente von A übergehen in

$$\tilde{a}_{jk} = d_j a_{jk} d_k^{-1} ; \quad j, k = 1, 2, \dots, n . \quad (112)$$

Insbesondere für $j = k$ wird $\tilde{a}_{jj} = d_j a_{jj} d_j^{-1} = a_{jj}$. Die Hauptdiagonalelemente werden somit von der Skalierung nicht betroffen, daher gilt wiederum $\text{sp } A = \text{sp } \tilde{A}$.

Ist A hermitesch (reelsymmetrisch), so geht diese Eigenschaft auf jeden Fall verloren.

Grundoperation III. Linearkombination der Zeilen und/oder Spalten mittels Elevatoren.

IIIa. Mit dem Spaltenelevator E_μ und seiner Inversen

$$E_\mu = I_n + \dot{q}_\mu e^\mu , \quad E_\mu^{-1} = I_n - \dot{q}_\mu e^\mu \quad (113)$$

geht die Ähnlichkeitstransformation in zwei Schritten vonstatten, und zwar

1. Schritt. Transformation von links, d.h. Linearkombination der Zeilen

$$\hat{A} = E_\mu A = (I_n + \dot{q}_\mu e^\mu) A = A + \dot{q}_\mu e^\mu A = A + \dot{q}_\mu a^\mu . \quad (114)$$

Der erste Schritt unterscheidet sich somit in keiner Weise von der freien Gauß-Transformation.

2. Schritt. Transformation von rechts, d.h. Linearkombination der Spalten

$$\tilde{A}_\mu = \hat{A} E_\mu^{-1} = \hat{A} (I_n - \dot{q}_\mu e^\mu) = \hat{A} - (\hat{A} \dot{q}_\mu) e^\mu = \hat{A} - t_\mu e^\mu ; \quad (115)$$

mit anderen Worten: Berechne den Bildvektor $t_\mu = \hat{A} \hat{q}_\mu$ und subtrahiere ihn von der Spalte der Nummer μ gemäß

$$\tilde{a}_\mu = \hat{a}_\mu - t_\mu \quad \text{mit} \quad t_\mu = \hat{A} \hat{q}_\mu . \quad (116)$$

IIIb. Mit dem Zeilenelevator ε^\vee verläuft alles analog zu (113) bis (116), was im einzelnen wohl nicht vorgeführt werden muß.

Ist A hermitesch (reellsymmetrisch), so geht diese Eigenschaft verloren, während sie bei der freien Gauß-Transformation erhalten blieb.

Wir rechnen ein einfaches **Beispiel**. Die Matrix A soll ähnlich transformiert werden mit einem vorgegebenen Spaltenelevator $L = E_2$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -8 & -5 \\ 1 & 10 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{sp } A = -4 .$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{q}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} . \quad (a)$$

a) Explizites Ausmultiplizieren ergibt

$$LAR = E_2 A E_2^{-1} = \tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & -11 & 4 & 10 \\ 0 & -7 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -5 \\ 1 & 7 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{sp } \tilde{A} = -4 = \text{sp } A ! \quad (b)$$

b) Wir rechnen nach der Vorschrift (114) bis (116).

1. Schritt.

$$\hat{A} = A + \hat{q}_2 a^2 = A + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & -5 \\ 1 & 9 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \quad (c)$$

2. Schritt. Berechne den Bildvektor t_2 mit dem restringierten Vektor (a) und damit die Differenz der Spalten (116)

$$t_2 = \hat{A} \hat{q}_2 = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \hat{a}_2 - t_2 = \begin{pmatrix} -11 \\ -7 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \tilde{a}_2 , \quad (d)$$

das gibt dieselbe Matrix wie in (c).

Kontrolle: $LA = \tilde{A}L$ nach (107) mit $L = E_2$.

Damit ist im Grunde alles gesagt. Ebenso wie bei der freien Äquivalenztransformation $LAR = \Pi$, durchgeführt nach Gauß bzw. Gauß-Jordan, lösen wir auch jetzt die Gesamttransformation auf in endlich viele Teiltransformationen gemäß

$$LAL^{-1} = L_0 \cdots \underbrace{L_2 L_1 A L_1^{-1} L_2^{-1}}_{A_1} \cdots L_0^{-1} = \tilde{A} , \quad (119)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{A_2 \text{ usw.}}$

wobei nun über die Vektoren q_μ bzw. q^ν aus E_μ bzw. ε^ν geeignet verfügt werden kann, etwa so, daß A in eine der im Abschnitt 10.7 aufgeführten Normalformen A_N transformiert wird.

Auf weitere technische Einzelheiten sowie numerische Aspekte der Ähnlichkeitstransformation kommen wir im Teil 2 dieses Werkes ausführlich zu sprechen.

• 10.9 Die gequantelte Ähnlichkeitstransformation

Um zu einer äußerst flexiblen und erweiterungsfähigen Technik zu gelangen, zerlegen wir die Grundoperation III bewirkenden Elevatoren in ihre kleinstmöglichen Wirkungseinheiten, das sind solche, die nur ein einziges signifikantes Element q_{kj} enthalten und daher geradezu als *Quant* bezeichnet werden. Es sei zum Beispiel $n = 5$ und das Element $q_{42} = 6$, dann ist

$$E_{42} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad E_{42}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \quad (120)$$

Ein solches Quant ist sowohl Spalten- wie Zeilenelevator, wir könnten daher für E_{42} sowohl E_2 wie ε^4 schreiben, bleiben statt dessen aber beim doppelten Index und vereinbaren weiterhin, daß wir fortan E_{kj} selbst als Links- und E_{kj}^{-1} als Rechtstransformationsmatrix verwenden (auch das Umgekehrte wäre möglich), somit ist

$$L_{kj} = E_{kj} ; \quad R_{kj} = E_{kj}^{-1} = L_{kj}^{-1} . \quad (121)$$

Wie unschwer einzusehen, läßt sich der bislang verwendete vollständige Elevator E_μ bzw. ε^ν seinerseits in ein Produkt von höchstens $n - 1$ Quanten auflösen, doch brauchen wir gar nicht auf diese Möglichkeit zurückzugreifen. Schon bei der Definition der drei Grundoperationen im Abschnitt 5.3 hätten wir das Quant einführen können, ohne den Elevator je zu erwähnen, so daß es an dieser Stelle keiner weiteren Begründung bedarf. Das mehrfache Produkt (119) besteht infolge der Quantelung zwar aus sehr viel mehr Faktoren, doch ist der Gesamtaufwand deshalb nicht größer, dafür die Programmierung äußerst einfach und vor allem konsequenter, weil die Pivotregulierung nun nicht mehr als besondere Maßnahme aus dem Rahmen fällt, sondern sich störungsfrei in den Algorithmus einordnet.

Beginnen wir mit dem Fall $n = 2$, wo bereits alles Wesentliche hervortritt. Um den Anschluß an das folgende zu erleichtern, schreiben wir anstelle der Indizes 1 und 2 schon jetzt j und k ,

$$L_{kj} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q_{kj} & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{jk} = \begin{pmatrix} a_{jj} & a_{jk} \\ a_{kj} & a_{kk} \end{pmatrix}, \quad R_{kj} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -q_{kj} & 1 \end{pmatrix}, \quad (122)$$

und damit wird die Ähnlichkeitstransformation Quant

$$\begin{aligned} L_{kj} A_{jk} R_{kj} &= \tilde{A}_{jk} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{jj} & \tilde{a}_{jk} \\ \tilde{a}_{kj} & \tilde{a}_{kk} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{jj} - \underbrace{a_{jk} q_{kj}} & a_{jk} \\ a_{kj} + \underbrace{q_{kj} a_{jj}} - \underbrace{a_{kk} q_{kj}} - \underbrace{q_{kj} a_{jk} q_{kj}} & a_{kk} + \underbrace{q_{kj} a_{jk}} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (123)$$

Wir sehen: Das Element a_{jk} bleibt ungeändert, die Elemente \tilde{a}_{jj} und \tilde{a}_{kk} sind linear, und das Element \tilde{a}_{kj} ist quadratisch abhängig von q_{kj} . Notabene ist $\text{sp } A = a_{11} + a_{22} = \text{sp } \tilde{A}$ gemäß (108).

Anstelle dieser formalen Schreibweise vollzieht sich die praktische Rechnung natürlich sehr viel einfacher in zwei Schritten wie im Gaußschen Schema, zuerst durch Zeilen-, dann Spaltenkombination, wo die kursiv gesetzte l wie früher die Pivotzeile bzw. Pivotspalte kennzeichnet

(124)

Natürlich ist auch die umgekehrte Reihenfolge erlaubt, doch wollen wir uns fürderhin der Einfachheit halber an dieses Schema halten.

Beispiel. Gegeben die Matrix $A = (a_{jk})$ und $q_{kj} = 3$.

$$\begin{array}{c} A \end{array} \quad \begin{array}{c} \tilde{A} \end{array} \quad \begin{array}{c} \tilde{A} \end{array} \quad ; \quad \text{sp } A = 8 = \text{sp } \tilde{A}, \quad \det A = -8 = \det \tilde{A}.$$

<i>l</i>	-2	-3
3	4	10

-2	-3
-2	1
-3	<i>l</i>

7	-3
-5	1

Es sei nun $n > 2$. Dann greifen wir aus der Matrix A der Ordnung n zwei Zeilen und Spalten gleicher Nummer j und k heraus und wenden auf den so festgelegten Hauptminor (122) die Transformation (123) an nach folgendem Schema

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{c} \text{Spalte } j \\ \text{Spalte } k \end{array} \\
 \begin{array}{c} \text{Zeile } j \\ \text{Zeile } k \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline \begin{array}{c} a_{jj} \quad a_{jk} \\ a_{kj} \quad \tilde{a}_{kk} \end{array} \\ \hline \end{array}
 \end{array} \quad (125)$$

So betrachtet, kann die Ähnlichkeitstransformation Quant als Gaußscher Algorithmus aufgefaßt werden, allerdings mit der Einschränkung, daß der zweite Schritt nun nicht mehr der Zeilenreduktion, sondern der Wiederherstellung der Einheitsmatrix I_n dient, die durch den ersten Schritt zerstört worden ist.

Kommen wir nun zum Eigentlichen. Das sogenannte *Zielelement* $a_{\mu\nu}$ soll in $\tilde{a}_{\mu\nu}$ überführt werden (speziell in $\tilde{a}_{\mu\nu} = 0$ bei Reduktion, doch ist dies für den Mechanismus selbst nicht wesentlich), und dies kann auf vielerlei Weise geschehen: innerhalb der Spalte μ von oben nach unten oder umgekehrt und innerhalb der Zeile ν von links nach rechts oder umgekehrt. Wir schildern im folgenden die ersten beiden Fälle, wobei nach Schema (125) $j < k$ sei, das heißt, die Zeile j steht oberhalb der Zeile k .

1. Reduktion nach unten.

1a) Das Zielelement $a_{k\mu}$ (Zeile k , Spalte μ) soll übergehen in $\tilde{a}_{k\mu}$. Dies bewirkt der Quotient q_{kj} aus (5.43) (dort in etwas anderer Bezeichnungsweise)

$$\boxed{q_{kj} = \frac{\tilde{a}_{k\mu} - a_{k\mu}}{a_{j\mu}} ; \quad a_{j\mu} \neq 0, \quad \mu \neq j .} \quad (126)$$

Hier dürfen wir das Pivot $a_{j\mu}$ nicht aus der Hauptdiagonale wählen ($\mu \neq j$), weil sonst infolge der Spaltenkombination im 2. Schritt das Zielelement $\tilde{a}_{k\mu}$ (insonderheit $\tilde{a}_{k\mu} = 0$ bei Reduktion) wieder geändert würde.

1b) Zeilenkombination. Die mit q_{kj} multiplizierte Zeile a^j wird zur Zeile a^k addiert:

$$\tilde{a}^k = a^k + q_{kj} \underline{a^j} . \quad (127)$$

1 c) Spaltenkombination. Die mit $-q_{kj}$ multiplizierte Spalte \check{a}_k wird zur Spalte \check{a}_j addiert:

$$\check{a}_j = \check{a}_j - \underbrace{\check{a}_k q_{kj}} . \quad (128)$$

Der Leser beachte in allen diesen Formeln das Gesetz der *Indexkette* nach (22.18). Die angegebene Unterklammerung ist nicht nur sinnfällig und dient der Kontrolle, sondern bewirkt, daß sich der Algorithmus beinahe von selbst programmiert.

Ein **Beispiel**. Vorgelegt ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 7 \\ 4 & 8 & 10 \end{pmatrix} . \quad (a)$$

Mittels einer Ähnlichkeitstransformation soll das Element $a_{32} = 8$ überführt werden in $\check{a}_{32} = 2$ mit Hilfe des Pivots $a_{12} = 2$. Hier ist also $j = 1$, $k = 3$ und $\mu = 2$, Reduktion nach unten. Aus (126) folgt

$$q_{31} = \frac{\check{a}_{32} - a_{32}}{a_{12}} = \frac{2 - 8}{2} = -3 . \quad (b)$$

Wir rechnen explizit und bekommen

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline I & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline -3 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & -1 \\ \hline 0 & -4 & 7 \\ \hline 4 & 8 & 10 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 0 & I \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline -3 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & -1 \\ \hline 0 & -4 & 7 \\ \hline 1 & 2 & 13 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline -2 & 2 & -1 \\ \hline 21 & -4 & 7 \\ \hline 40 & 2 & 13 \\ \hline \end{array} \quad LAR = \check{A} . \quad (c)$$

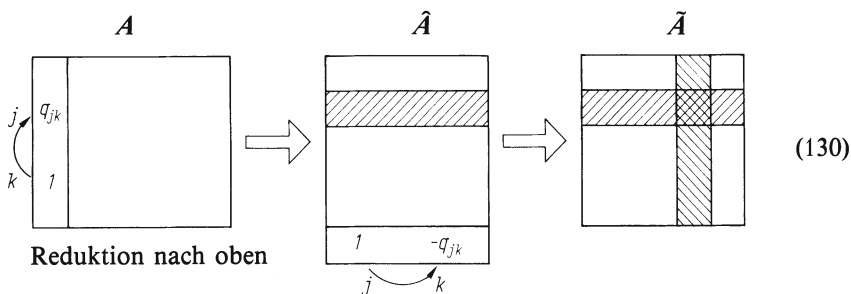
$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 3 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \quad R$$

Probe: $LAR = \check{A}$ und $LIR = I = RIL$.

Kommen wir zur Reduktion von unten nach oben. Anstelle von (123) haben wir jetzt

$$\begin{aligned} L_{jk} A_{kj} R_{jk} &= \check{A}_{kj} = \begin{pmatrix} 1 & q_{jk} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{jj} & a_{jk} \\ a_{kj} & a_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -q_{jk} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{jj} + q_{jk} \underbrace{a_{kj}} & a_{jk} + q_{jk} \underbrace{a_{kk}} - \underbrace{a_{jj} q_{jk}} - \underbrace{q_{jk} a_{kj} q_{jk}} \\ a_{kj} & a_{kk} - \underbrace{a_{kj} q_{jk}} \end{pmatrix} , \end{aligned} \quad (129)$$

während das Schema (124) übergeht in



Es sind somit lediglich die Indizes j und k zu vertauschen, womit die für die numerische Durchführung grundlegenden Formeln (126) bis (128) übergehen in

2. Reduktion nach oben.

2a) Das Zielelement $a_{j\mu}$ (Zeile j , Spalte μ) soll übergehen in $\tilde{a}_{j\mu}$. Dann ist

$$q_{jk} = \frac{\tilde{a}_{j\mu} - a_{j\mu}}{a_{k\mu}}, \quad a_{k\mu} \neq 0, \quad \mu \neq k. \quad (131)$$

2b) Zeilenkombination. Die mit q_{jk} multiplizierte Zeile \mathbf{a}^k wird zur Zeile $\mathbf{\check{a}}^j$ addiert:

$$\mathbf{\check{a}}^j = \mathbf{a}^j + q_{jk} \mathbf{a}^k. \quad (132)$$

2c) Spaltenkombination. Die mit $-q_{jk}$ multiplizierte Spalte $\mathbf{\check{a}}_j$ wird zur Spalte $\mathbf{\check{a}}_k$ addiert:

$$\mathbf{\hat{a}}_k = \mathbf{\check{a}}_k - \mathbf{\check{a}}_j q_{jk}. \quad (133)$$

10.10 Die Ähnlichkeitstransformation auf die Begleitmatrix

Die für Theorie und Praxis wohl wichtigste Ähnlichkeitstransformation ist die einer beliebigen Matrix A auf die *Günthersche Begleitmatrix* G (97). Sie geschieht in drei Etappen. Als erstes wird die Matrix A auf die sogenannte *Hessenberg-Matrix* oder *Fastdreiecksmatrix* H transformiert

$$L_H A R_H = H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & \dots & h_{1,n-1} & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & \dots & h_{2,n-1} & h_{2n} \\ 0 & h_{32} & h_{33} & \dots & h_{3,n-1} & h_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & h_{n-1,n-1} & h_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & h_{n,n-1} & h_{nn} \end{pmatrix}; \quad L_H I R_H = I \quad (138)$$

mit den *Kodiagonalelementen*

$$h_{21}, h_{32}, \dots, h_{n,n-1}, \quad (139)$$

denen, wie wir gleich sehen werden, eine besondere Bedeutung zukommt.

Wir schildern zunächst den **Regelfall**. Es sei $a_{21} \neq 0$, dann kann dieses Element als Pivot dienen, mit dem die erste Spalte nach unten reduziert wird, während a_{11} ebenso wie $a_{21} = h_{21}$ unverändert stehenbleibt. Die erste Spalte von H liegt damit fest. Sodann berechnet man den Bildvektor t_2 nach (116) und subtrahiert ihn von der zweiten Spalte, womit die erste Transformation beendet ist. So schreitet man fort, bis nach $n-2$ Schritten die Hessenberg-Matrix (138) erstellt ist. Für $n = 4$ zum Beispiel verläuft das folgendermaßen:

$$A \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & \boxed{*} & * & * \\ 0 & 0 & \boxed{*} & * \end{pmatrix} H. \quad (140)$$

Wie leicht zu sehen, sind auf Grund der Vorgehensweise L und R normierte untere Dreiecksmatrizen, deren Determinante gleich eins ist:

$$L_H = \Delta_H, \quad \det L_H = 1; \quad R_H = \Delta_H, \quad \det R_H = 1. \quad (141)$$

Ausnahmesituation. Sollte im Laufe der Rechnung ein Kodiagonalelement gleich Null werden, so wird dieses durch Pivotregulierung via Quant nach Abschnitt 10.9 zu eins gemacht, und dann erst erfolgt die Reduktion nach unten. Stehen aber unterhalb des verschwindenden Kodiagonalelementes lauter Nullen, so fällt dieser Reduktionsschritt einfach aus; die Hessenberg-Matrix zerfällt dann an dieser Stelle. Für $n = 5$ etwa ergibt das folgenden Verlauf, falls nach dem ersten Schritt $\tilde{h}_{32} = 0$ geworden ist:

$$A \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ 0 & \boxed{0} & * & * & * \\ 0 & 0 & \boxed{*} & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{*} & * \end{pmatrix} H. \quad (142)$$

Infolge der Pivotregulierung sind L_H und R_H nun keine unteren Dreiecksmatrizen mehr, doch ist nach wie vor $\det L_H = \det R_H = 1$.

Erstes Beispiel. Ähnlichkeitstransformation einer Matrix A auf die Hessenberg-Form H mit $n = 4$, halbexplizit, das heißt, wir führen nur R mit, nicht L . Da $a_{21} = 0$ ist, liegt die Ausnahmesituation vor, die Transformation beginnt daher mit einer Pivotregulierung.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} A \\
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|}
 \hline
 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
 -1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\
 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\
 \hline
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c} I_4 \\
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|}
 \hline
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 \hline
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 0 & 1 & 0 & 1 \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c} H \\
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|}
 \hline
 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\
 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\
 1 & -2 & 2 & 1 & 2 \\
 \hline
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|}
 \hline
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
 \hline
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 0 & -1 & 0 & 1 \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c} R \\
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 2 & 0 & 0 & 1 \\
 1 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & -1 & 2 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 3 \\
 \hline
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & -1 & 0 & 1 \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \quad . \quad (a)$$

Damit ist die erste Spalte reduziert. Zufällig ist hier $h_{42} = 0$, so daß wir schon fertig sind. Probe nach (107): $AR = RH$. Wir merken noch an, daß R keine untere Dreiecksmatrix ist zufolge der Pivotregulierung, es gilt dennoch $\det R = 1$, da ausschließlich Elevatoren benutzt wurden.

Eine zweite Ähnlichkeitstransformation überführt die Hessenberg-Matrix auf die sogenannte *Kodiagonalmatrix* K gemäß

$$L_K H R_K = K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & k_{1n} \\ h_{21} & 0 & 0 & \dots & 0 & k_{2n} \\ 0 & h_{32} & 0 & \dots & 0 & k_{3,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & k_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & h_{n,n-1} & k_{nn} \end{pmatrix} ; \quad L_K I R_K = I , \quad (143)$$

wo also die Kodiagonalelemente (139) aus H stehenbleiben. Im Regelfall sind sie alle von Null verschieden und können somit als Pivots dienen, mit deren Hilfe der rechte obere Teil in H abgeräumt wird mit Ausnahme der letzten Spalte, die nach der Transformation die neuen Elemente k_{1n} bis k_{nn} enthält.

Während man bei der ersten Transformation (138) noch die Wahl hat zwischen dem gequantelten und dem normalen Vorgehen, ist nun der Algorithmus Quant obligatorisch, weil andernfalls der Algorithmus numerisch instabil wird, siehe dazu [110]. Die Reduktion geschieht zeilenweise von links nach rechts, beginnend mit der ersten Zeile und endend mit der vorletzten. Für $n = 4$ beispielsweise ergibt sich das folgendes Reduktionsmuster

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & * \\ * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & * \\ * & 0 & 0 & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & * \\ * & 0 & 0 & * \\ 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix} , \quad (143a)$$

$H \qquad H_1 \qquad H_2 \qquad H_3 = K$

wo der Index die Anzahl der erzeugten Nullzeilen (mit Ausnahme des letzten Elementes) kennzeichnet. Man vergleiche dazu auch das Schema (179a).

L_K und R_K sind obere normierte Dreiecksmatrizen. Insgesamt haben wir damit beim Übergang von A auf K

$$\underbrace{L_K L_H}_L \underbrace{A}_A \underbrace{R_H R_K}_R = K \rightarrow \underbrace{A}_A \underbrace{R_H R_K}_R = \underbrace{R_K R_H}_R \underbrace{A}_A \quad (144)$$

$$\text{oder } L \quad A \quad R = K \rightarrow A \quad R = R \quad A . \quad (145)$$

Die Produktmatrizen L und R (sofern man sie überhaupt ausmultipliziert) sind im allgemeinen vollbesetzt, da aber in beiden Transformationen ausnahmslos Elevatoren verwendet wurden, ist in jedem Fall

$$\det L = 1 \quad , \quad \det R = 1 . \quad (146)$$

Eine dritte, als *Skalierung* bezeichnete Ähnlichkeitstransformation auf die Günthersche Begleitmatrix G

$$DKD^{-1} = G ; \quad D = \text{Diag} \langle d_1 \quad d_2 \quad \dots \quad d_{n-1} \quad 1 \rangle \quad (147)$$

mit den Diagonalelementen

$$\begin{aligned} d_{n-1} &= h_{n,n-1} \quad , \quad d_{n-2} = h_{n-1,n-2} h_{n,n-1} \cdot \dots \quad , \\ d_1 &= h_{21} h_{32} \cdot \dots h_{n-1,n-2} h_{n,n-1} \end{aligned} \quad (148)$$

überführt dann schließlich die Kodiagonalelemente in Einsen und die letzte Spalte von K in die letzte Spalte der Matrix G (97)

$$g_n = D k_n \quad , \quad (149)$$

doch zeigt es sich, daß die Skalierung nicht unproblematisch ist, da die Produkte (148) bei hoher Ordnungszahl n und betragsgroßen Kodiagonalelementen beträchtlich anwachsen können, weshalb die Begleitmatrix G zumeist nur von theoretischem Wert ist. Für weitere Einzelheiten sei der Leser auf die Arbeiten [110] und [126] verwiesen.

Zweites Beispiel. Ähnlichkeitstransformation einer Hessenberg-Matrix H auf die Kodiagonalmatrix K und anschließende Skalierung. Wir rechnen via Quant implizit und bekommen

$$\begin{array}{c} H \\ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & -4 & 4 & 17 \\ \hline I & 2 & 1 & -11 \\ \hline 0 & 0 & 3 & -8 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline I & -2 & 0 \\ \hline \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -2 & 0 & 6 & -5 \\ \hline 0 & 2 & -3 & -11 \\ \hline I & 0 & 3 & -8 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline I & 0 & 2 \\ \hline \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 11 \\ \hline 1 & 2 & -3 & -7 \\ \hline I & 0 & 3 & -8 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & I & -1 \\ \hline \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c} K \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 11 \\ \hline 2 & 0 & -15 \\ \hline 0 & 3 & -11 \\ \hline \end{array} ; \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & k_{13} \\ h_{21} & 0 & k_{23} \\ 0 & h_{32} & k_{33} \end{pmatrix} = K \quad , \quad (\text{vergleiche (143)}) \quad . \quad (a)$$

Mittels der Spaltenelevatoren erzeugen wir jetzt die Matrix L_K

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ I & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ I & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ I & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} L_K . \quad (b)$$

Nun zur Skalierung. Die Diagonalelemente der Matrix D (147) sind nach (148)

$$d_3 = 1, \quad d_2 = h_{32} = 3, \quad d_1 = h_{21}h_{32} = 2 \cdot 3 = 6, \quad (c)$$

und damit wird die letzte Spalte von G nach (149) mit $n = 3$

$$g_3 = Dk_3 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ -15 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66 \\ -45 \\ -11 \end{pmatrix} \rightarrow G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 66 \\ 1 & 0 & -45 \\ 0 & 1 & -11 \end{pmatrix}. \quad (d)$$

Zur Kontrolle rechne man noch $(DL_K)H = G(DL_K)$ mit

$$DL_K = \begin{pmatrix} 6 & 12 & -12 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (e)$$

• 10.11 Normiert-unitäre Transformationen. Unitäre Ergänzung

Unitäre Transformationen werden vorzugsweise auf normale (insonderheit hermitesche) Paare, aufgrund ihrer numerischen Stabilität jedoch ebenso auf beliebige Paare angewendet. Ist nun ein solches vorgelegt, so überführt man nach (103), (104) zunächst B in I und anschließend I in I_n . Ist das Paar aber normal, so erfolgt statt dessen die Kongruenztransformation

$$L_0 A L_0^* = A_0; \quad L_0 B L_0^* = D = \text{Diag} \langle d_{jj} \rangle \quad \text{pos. def.} \quad (150)$$

und in einem zweiten Schritt die Normierung von D auf I_n

$$D_w A_0 D_w = A_B; \quad D_w D D_w = I_n \quad (151)$$

mittels der positiven Diagonalmatrix

$$D_w = \text{Diag} \langle +\sqrt{d_{jj}} \rangle. \quad (152)$$

Wir beziehen uns deshalb im folgenden auf das spezielle Paar $A; I_n$, einerlei, ob A normal ist oder nicht und vollführen die unitäre Kongruenztransformation

$$L A L^* = \hat{A}, \quad L I_n L^* = I_n. \quad (153)$$

Ebenso wie bei der Ähnlichkeitstransformation haben wir auch hier die beiden Möglichkeiten der kompakten Durchführung mit der ganzen Zeile bzw. Spalte oder der Quantelung.

a) **Kompakt.** Dem lange vor Gauß bekannten *Elevator* entspricht hier die erst in neuerer Zeit von Householder [19] kreierte normiert-unitäre und gleichzeitig hermitesche (und somit nach der Eigenschaftstafel 4.1 involutorische) als *Reflektor* bezeichnete Transformationsmatrix

$$\Phi = I_n - 2 \frac{q q^*}{q^* q}, \quad \Phi^{-1} = \Phi = \Phi^*, \quad (154)$$

denn in der Tat ist

$$\Phi \Phi = \left(I_n - 2 \frac{q q^*}{q^* q} \right) \left(I_n - 2 \frac{q q^*}{q^* q} \right) = I_n + (4 - 2 - 2) \frac{q q^*}{q^* q} = I_n. \quad (155)$$

b) **Gequantelt.** Durch einen einfachen Kunstgriff werden die Matrizen der Ähnlichkeitstransformation Quant unitär ergänzt, eine Maßnahme, von welcher die grundlegenden Gleichungen (126) bzw. (131) zur Bestimmung des Quotienten q_{kj} bzw. q_{jk} gar nicht berührt werden.

1. Reduktion nach unten.

Die zweiten Spalten der beiden Matrizen aus (122) – wo jetzt der Index G auf Gauß hinweisen soll –

$$\overset{G}{L}_{kj} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q_{kj} & 1 \end{pmatrix}; \quad \overset{G}{R}_{kj} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -q_{kj} & 1 \end{pmatrix} = L_{kj}^{-1} \quad (156)$$

werden *unitär ergänzt* auf

$$L_{kj} = \begin{pmatrix} 1 & -\bar{q}_{kj} \\ q_{kj} & 1 \end{pmatrix}; \quad R_{kj} = \begin{pmatrix} 1 & \bar{q}_{kj} \\ -q_{kj} & 1 \end{pmatrix} = L_{kj}^*. \quad (157)$$

Das (vertauschbare) Produkt dieser beiden Matrizen ist

$$L_{kj} R_{kj} = \begin{pmatrix} w_{kj}^2 & 0 \\ 0 & w_{kj}^2 \end{pmatrix} = w_{kj}^2 I_n \quad (158)$$

mit dem Längenquadrat der Zeilen und Spalten von L_{kj} und R_{kj}

$$w_{kj}^2 = 1 + q_{kj} \bar{q}_{kj} > 1, \quad (159)$$

(das gleich der Determinante von L_{jk} und R_{jk} ist), also sind L_{kj} und $R_{kj} = L_{kj}^*$ zueinander unitär, wie verlangt.

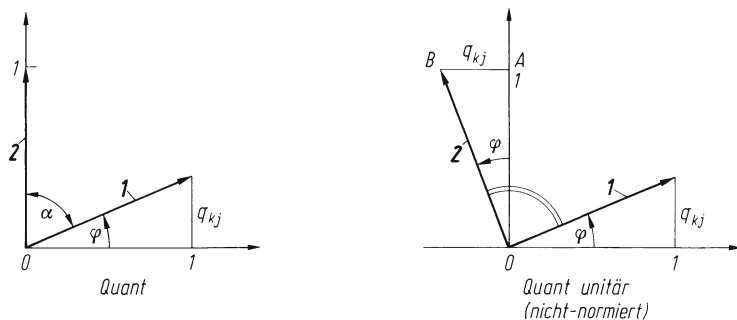


Abb. 10.1. Der Übergang von Quant auf Quant unitär durch orthogonale Ergänzung im Reellen

Die Abb. 10.1 verdeutlicht nochmals diesen einfachen Kunstgriff im Reellen. Durch Hinzufügen der waagerechten Strecke \overline{AB} wird der Winkel α der Ähnlichkeitstransformation Quant zu einem rechten ergänzt, und die beiden mit 1 und 2 bezeichneten Spalten der Matrix L_{kj} haben dadurch die gleiche Länge bekommen.

Wir berechnen nun mit den beiden Matrizen (157) das Produkt

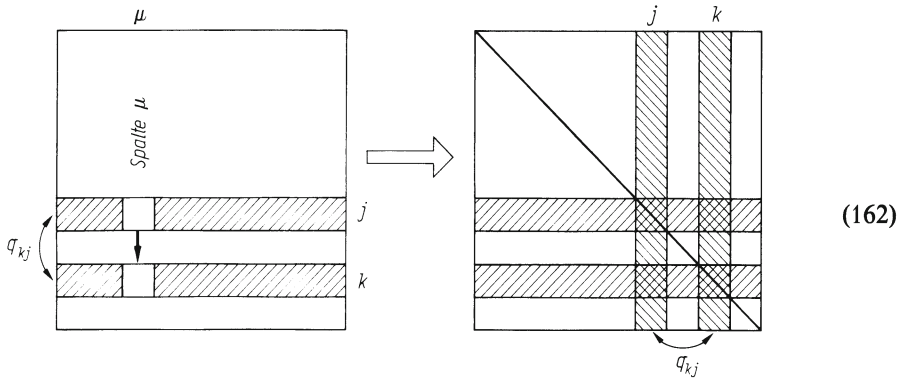
$$\begin{aligned} \hat{A}_{jk} &= L_{kj} A_{jk} R_{kj} = \begin{pmatrix} 1 & -\bar{q}_{kj} \\ q_{kj} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{jj} & a_{jk} \\ a_{kj} & a_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \bar{q}_{kj} \\ -q_{kj} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{a}_{jj} & \hat{a}_{jk} \\ \hat{a}_{kj} & \hat{a}_{kk} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{jj} - a_{jk} q_{kj} + (-\bar{q}_{kj} a_{kj} + \bar{q}_{kj} a_{kk} q_{kj}) & a_{jk} + (-\bar{q}_{kj} a_{kk} + a_{jj} \bar{q}_{kj} - \bar{q}_{kj} a_{kj} \bar{q}_{kj}) \\ a_{kj} + q_{kj} a_{jj} - a_{kk} q_{kj} - q_{kj} a_{jk} q_{kj} & a_{kk} + q_{kj} a_{jk} + (a_{kj} \bar{q}_{kj} + q_{kj} a_{jj} \bar{q}_{kj}) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (160)$$

und konstatieren, daß alle vier Elemente der transformierten Matrix quadratisch von q_{kj} abhängig sind, wobei der Deutlichkeit halber die gegenüber (123) auf Grund des Elementes \bar{q}_{kj} neu hinzugekommenen Summanden in Klammern stehen.

Um nun die beiden Transformationsmatrizen (157) zu normieren, braucht man sie nur durch die Größe w_{kj} aus (159) zu dividieren und bekommt somit

$$L_{kj}^N = \frac{1}{w_{kj}} \begin{pmatrix} 1 & -\bar{q}_{kj} \\ q_{kj} & 1 \end{pmatrix}, \quad R_{kj}^N = \frac{1}{w_{kj}} \begin{pmatrix} 1 & \bar{q}_{kj} \\ -q_{kj} & 1 \end{pmatrix}; \quad w_{kj} = +\sqrt{1 + q_{kj} \bar{q}_{kj}}. \quad (161)$$

Kommen wir nun zur Gesamttransformation. Das Schema (125) ist im Hinblick auf die jetzt vollbesetzten Transformationsmatrizen (161) offenbar zu erweitern auf



wo die Elemente der doppelt schraffierten Reihen quadratisch, diejenigen der einfach schraffierten linear und die übrigen überhaupt nicht von q_{kj} abhängig sind. Als Erweiterung der Transformationsvorschriften (127) und (128) haben wir demnach:

Erster Schritt. Zeilenkombination. Ersetze die Zeilen a^j und a^k der Matrix A durch

$$\check{a}^j = (a^j - \underbrace{a^k \bar{q}_{kj}}_{w_{kj}}) / w_{kj} \quad , \quad \check{a}^k = (a^k + \underbrace{q_{kj} a^j}_{w_{kj}}) / w_{kj} \quad . \quad (163)$$

Zweiter Schritt. Spaltenkombination. Ersetze die Spalten \check{a}_j und \check{a}_k der Matrix \check{A} durch

$$\hat{a}_j = (\check{a}_j - \underbrace{\check{a}_k q_{kj}}_{w_{kj}}) / w_{kj} \quad , \quad \hat{a}_k = (\check{a}_k + \underbrace{\bar{q}_{kj} \check{a}_j}_{w_{kj}}) / w_{kj} \quad . \quad (164)$$

Damit wurde die Matrix A über \check{A} in \hat{A} transformiert.

Noch eine Randbemerkung. Ist q_{kj} reell und setzt man $q_{kj} = \tan \varphi$, so geht zu-

$$w_{kj} = \sqrt{1 + q_{kj}^2} = \sqrt{1 + \tan^2 \varphi} = \frac{1}{\cos \varphi} \quad (165)$$

die Matrix (161) über in

$$\overset{N}{L}_{kj} = \cos \varphi \begin{pmatrix} 1 & -\tan \varphi \\ \tan \varphi & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad , \quad (166)$$

und das ist die bereits im Abschnitt 1.2 eingeführte Matrix der ebenen Drehung, siehe auch Abb. 10.1. Doch wird weder die Winkelfunktion noch der Winkel selbst etwa explizit ermittelt; die Darstellung (166) ist daher nur von akademischem Wert und führt vollends im Komplexen zur Absurdität, wenn zusätzlich noch Hyperbelfunktionen herangezogen werden. Um nochmals ganz klar heraus-

zustellen, daß der für die Transformation allein maßgebliche Quotient q_{kj} ursprünglich dem Gaußschen Algorithmus und somit einer Äquivalenztransformation entstammt (worauf der Index G hinweisen soll), sei dies nochmals zusammengefaßt:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Gauß} \\ \text{äquivalent} \\ \text{Quant} \\ \text{ähnlich} \\ \text{Quant unitär} \\ \text{normiert unitär} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \underbrace{\overset{G}{L}_{kj} \overset{G}{A}_{jk} \overset{G}{R}_{kj} = \tilde{A}_{jk} ; \quad \overset{G}{L}_{kj} \overset{G}{A}_{jk} \overset{G}{L}_{kj}^{-1} = \tilde{A}_{jk}} \\ \overset{G}{L}_{kj} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q_{kj} & 1 \end{pmatrix} \\ \end{array} \quad \begin{array}{l} \underbrace{L_{kj} A_{jk} L_{kj}^* = \hat{A}_{jk}} \\ L_{kj} = \frac{1}{w_{kj}} \begin{pmatrix} 1 & -\bar{q}_{kj} \\ q_{kj} & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right\} . \quad (167)$$

In jedem Fall ist demnach die erste Spalte der Transformationsmatrix $\overset{G}{L}_{kj}$ bzw. L_{kj} durch den zur Reduktion ausersehenen Quotienten q_{kj} festgelegt.

2. Reduktion nach **oben**.

Die beiden Transformationsmatrizen (156) werden ergänzt zu

$$L_{jk} = \begin{pmatrix} 1 & q_{jk} \\ -\bar{q}_{jk} & 1 \end{pmatrix}, \quad R_{jk} = \begin{pmatrix} 1 & -q_{jk} \\ \bar{q}_{jk} & 1 \end{pmatrix} = L_{jk}^* \quad (168)$$

und anschließend normiert

$$\overset{N}{L}_{jk} = \frac{1}{w_{jk}} \begin{pmatrix} 1 & q_{jk} \\ -\bar{q}_{jk} & 1 \end{pmatrix}, \quad \overset{N}{R}_{jk} = \frac{1}{w_{jk}} \begin{pmatrix} 1 & -q_{jk} \\ \bar{q}_{jk} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad w_{jk}^2 = 1 + q_{jk} \bar{q}_{jk} > 1. \quad (169)$$

Abschließend noch zwei Bemerkungen zur normiert unitären Transformation. Ist A hermitesch (reellsymmetrisch), so ist es auch die transformierte Matrix \hat{A} . Man braucht daher nur den linken unteren (rechten oberen) Teil einschließlich der Hauptdiagonale zu berechnen und den rechten oberen (linken unteren) Teil hermitesch (reellsymmetrisch) zu ergänzen, wodurch der Rechenaufwand sich annähernd auf die Hälfte reduziert. Und noch ein Zweites zur Information. Wir sahen in (166), daß alle vier Elemente \hat{a}_{jj} , \hat{a}_{jk} , \hat{a}_{kj} und \hat{a}_{kk} quadratisch von q_{kj} abhängig sind. Wählt man daher das zu reduzierende Zielelement im doppelt schraffierten Innenfeld der Matrix (162), so hat man eine quadratische Gleichung zu lösen. Eine solche Transformation benutzte als erster Jacobi [110b], während die lineare Reduktion im Außenfeld auf Givens [110a] zurückgeht, weshalb die Transformationsmatrizen (161) und (170) in der Literatur oft nach Jacobi bzw. Givens benannt werden.

Außer der hier besprochenen zweiseitigen wird bisweilen auch die nur einseitige unitäre Transformation herangezogen, und zwar speziell für eine Variante des Gaußschen Algorithmus, was zwar größeren Aufwand erfordert, dafür aber ge-

wisse numerische Vorteile bringt; wir kommen im Abschnitt 28 noch darauf zurück. Wird eine Matrix A mit n Spalten mit einer normiert-unitären Matrix U von links multipliziert, was einer Linearkombination ihrer m Zeilen gleichkommt, $UA = \tilde{A}$, mithin $Ua_j = \tilde{a}_j$, so gilt zufolge $a_j^* U^* = \tilde{a}_j^*$ die Beziehung

$$\tilde{a}_j^* \tilde{a}_j = a_j^* \underbrace{U^* U}_{I_n} a_j = a_j^* I_n a_j = a_j^* a_j ; \quad j = 1, 2, \dots, n , \quad (170)$$

und Entsprechendes gilt bei normiert-unitärer Linearkombination der Spalten einer Matrix.

Ein **Beispiel**. Gegeben ist die Matrix A (a), und es werden mittels der vier normiert-unitären Matrizen L_{jk} (b) die Zeilen 1, 2; 1, 4; 3, 4 und 2, 4 der Matrix A linear kombiniert.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4+i & 2 \\ i & 1 & 0 \\ -5 & 0 & -1 \\ 0 & 3+2i & 6 \end{pmatrix} , \quad (a)$$

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} , \quad \begin{matrix} 1 \\ 4 \end{matrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & -2+i \\ 2+i & 1 \end{pmatrix} , \quad \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} , \quad \begin{matrix} 2 \\ 4 \end{matrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} . \quad (b)$$

Man erhält nach einiger Rechnung die transformierte Matrix

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0,387298 - 0,387298 i & -3,136887 - 0,279149 i & -4,640781 + 2,449490 i \\ 2,134936 + 3,753308 i & 2,526215 + 1,098944 i & 1,259991 + 1,570352 i \\ -1,196837 - 0,346410 i & 1,210915 + 1,076707 i & 2,205557 - 0,230940 i \\ 3,306094 + 1,889987 i & -0,242697 + 3,287562 i & 1,570352 + 1,423290 i \end{pmatrix} . \quad (c)$$

Zur Probe bestätigen wir die Relation (170):

$$\tilde{a}_1^* \tilde{a}_1 = a_1^* a_1 = 35 , \quad \tilde{a}_2^* \tilde{a}_2 = a_2^* a_2 = 31 , \quad \tilde{a}_3^* \tilde{a}_3 = a_3^* a_3 = 41 . \quad (d)$$

Führt man die vier Transformationen (b) an der Einheitsmatrix I_4 durch, so geht diese über in die normiert-unitäre Matrix U . Mit dieser müssen die folgenden Kontrollen erfüllt sein:

$$U^* U = I_4 , \quad U U^* = I_4 \quad \text{und} \quad U A = \tilde{A} . \quad (e)$$

Zur Anregung: Der Leser erfinde noch einige weitere normiert-unitäre Matrizen L_{jk} und führe damit die Transformation der Matrix \tilde{A} (c) fort. Wiederum müssen alle oben angegebenen Kontrollen erfüllt sein.

10.12 Nicht-normiert unitäre Transformationen

Nicht-normiert unitäre Transformationen arbeiten mit dem halben Rechenaufwand, vermeiden das Radizieren, das aus dem Bereich der rationalen Zahlen herausführt und sind überdies anwendbar nicht nur auf $B = I_n$, sondern auch auf die reelle und positive Diagonalmatrix

$$B = D = \text{Diag} \langle d_{jj} \rangle , \quad (171)$$

womit also bei einem normalen Paar $A; B$ die Normierung (151), (152) entfallen kann.

Es sei nun aus dem Paar $A; D$ das zweireihige Paar

$$A_{jk} = \begin{pmatrix} a_{jj} & a_{jk} \\ a_{kj} & a_{kk} \end{pmatrix}; \quad D_{jk} = \begin{pmatrix} d_{jj} & 0 \\ 0 & d_{kk} \end{pmatrix} \quad (172)$$

herausgegriffen, dann ist die nicht-normiert unitäre Ergänzung bei Reduktion nach unten

$$L_{kj} = \begin{pmatrix} 1 & -\bar{q}_{kj}d_{jj}/d_{kk} \\ q_{kj} & 1 \end{pmatrix}, \quad R_{kj} = \begin{pmatrix} 1 & \bar{q}_{kj} \\ -q_{kj}d_{jj}/d_{kk} & 1 \end{pmatrix} = L_{kj}^* \quad (173)$$

mit

$$\omega_{kj}^2 = 1 + q_{kj}\bar{q}_{kj}d_{jj}/d_{kk} > 1, \quad (174)$$

und es wird die transformierte Matrix

$$\tilde{D}_{jk} = L_{kj}D_{jk}R_{kj} = \begin{pmatrix} \omega_{kj}^2d_{jj} & 0 \\ 0 & d_{kk}\omega_{kj}^2 \end{pmatrix} \quad (175)$$

diagonal und positiv wie verlangt. Mit anderen Worten: Die Matrizen L_{kj} und R_{kj} sind zueinander D -unitär, siehe dazu Abb. 10.2 und vergleiche Abb. 10.1.

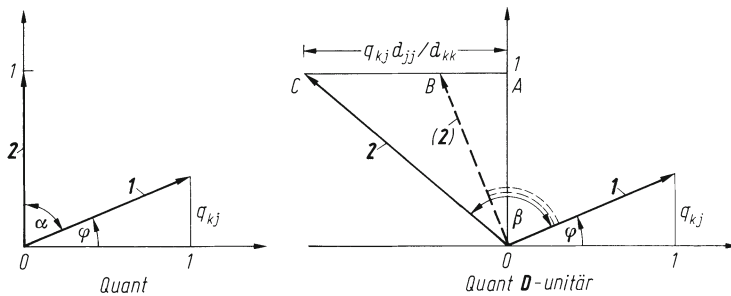


Abb. 10.2. Zur Transformation Quant D -unitär

Nun zur Gesamttransformation. Anstelle der beiden Ersetzungsvorschriften (163) und (164) haben wir nun sehr viel einfacher:

Erster Schritt. Zeilenkombination. Ersetze die Zeilen a^j und a^k der Matrix A durch

$$\check{a}^j = a^j - a^k q_{kj} d_{jj} / d_{kk}, \quad \check{a}^k = a^k + q_{kj} a^j. \quad (176)$$

Zweiter Schritt. Spaltenkombination. Ersetze die Spalten \check{a}_j und \check{a}_k der Matrix \check{A} durch

$$\hat{a}_j = \check{a}_j - \check{a}_k \underbrace{q_{kj} d_{jj}/d_{kk}}_{\text{Skalar}}, \quad \hat{a}_k = \check{a}_k + \underbrace{q_{kj} \check{a}_j}_{\text{Skalar}}. \quad (177)$$

Damit ist A über \check{A} in \hat{A} übergegangen, und in D ist die Ersetzung (175) vorzunehmen.

Ein **Beispiel.** Gegeben ist das hermitesche Paar

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & -i & 1+i \\ i & 3 & 1 \\ 1-i & 1 & 1 \end{pmatrix} = A^* ; \quad D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \quad (a)$$

Mittels einer D -unitären Transformation soll das Element a_{31} in $\hat{a}_{31} = 1$ überführt werden. Reduktion nach unten ergibt nach (130) mit $\mu = 1, j = 2, k = 3$ den Quotienten

$$q_{32} = \frac{\check{a}_{31} - a_{31}}{a_{21}} = \frac{1 - (1-i)}{i} = 1. \quad (b)$$

Damit werden die beiden Transformationsmatrizen der Ordnung $n = 3$ mit den zweireihigen eingerahmten Teilmatrizen (173)

$${}^n L_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -q_{32} d_{22}/d_{33} \\ 0 & q_{32} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad {}^n R_{32} = {}^n L_{32}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2/3 & 1 \end{pmatrix}, \quad (c)$$

und eine einfache Rechnung liefert das transformierte Paar $\hat{A}; \hat{D}$, das seinerseits hermitesch ist:

$${}^n L_{32} A {}^n R_{32} = \hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & -(2+5i)/3 & 1 \\ -(2-5i)/3 & 5/3 & 8/3 \\ 1 & 8/3 & 6 \end{pmatrix}; \quad {}^n L_{32} D {}^n R_{32} = \hat{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 10/3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}. \quad (d)$$

Dazu eine Probe. Nach (174) ist

$$\omega_{32}^2 = 1 + q_{32} \bar{q}_{32} d_{22}/d_{33} = 1 + 1 \cdot 1 \cdot 2/3 = 5/3, \quad (e)$$

und in der Tat wird

$$\hat{d}_{22} = d_{22} \omega_{32}^2 = 2 \cdot 5/3 = 10/3, \quad \hat{d}_{33} = d_{33} \omega_{32}^2 = 3 \cdot 5/3 = 5, \quad (f)$$

wie es nach (175) sein muß.

Bei Reduktion nach oben haben wir anstelle von (173) das Paar

$$L_{jk} = \begin{pmatrix} 1 & q_{jk} \\ -\bar{q}_{jk} d_{kk}/d_{jj} & 1 \end{pmatrix}, \quad R_{jk} = \begin{pmatrix} 1 & -q_{jk} d_{kk}/d_{jj} \\ \bar{q}_{jk} & 1 \end{pmatrix} = L_{jk}^* \quad (178)$$

mit

$$\omega_{jk}^2 = 1 + q_{jk} \bar{q}_{jk} d_{kk}/d_{jj} > 1, \quad (179)$$

womit alles weitere analog zum Vorhergehenden verläuft.

Der Verzicht auf die Normierung verringert wie eingangs erwähnt den Rechenaufwand fast auf die Hälfte, doch kann bei großen Ordnungszahlen die numerische Stabilität darunter leiden, weshalb man von Zeit zu Zeit eine sogenannte *Regeneration* oder *Postnormierung* vornimmt. Es resultiere nach ϱ Transformationen das Paar $A_\varrho; D_\varrho$, dann führt man mit diesem die Normierung (151), (152)

durch und fährt mit dem so regenerierten Paar $A_\varrho; I_n$ fort. Auch nach der letzten Transformation wird man so vorgehen, um mit einem speziellen Paar $A; I_n$ den Algorithmus zu beenden; dies besonders dann, wenn bereits beim Start $D = I_n$ war.

Ist die Diagonalmatrix D (171) regulär, aber sonst beliebig, so geht man vom Paar $A; D$ auf das Paar $D^{-1}A; I_n$ über.

10.13 Unitäre Transformation auf obere Hessenberg-Matrix

Vorgelegt sei das Paar $A; D$ der Ordnung n , wo A beliebig und D eine reelle Diagonalmatrix mit positiven (negativen) Elementen $d_{\mu\mu}$ ist, und geplant wird eine *unitäre Ähnlichkeitstransformation* auf das Paar $H; \tilde{D}$ mit der reellen Diagonalmatrix \tilde{D} mit positiven (negativen) Elementen $\tilde{d}_{\mu\mu}$, während H eine obere *Hessenberg-Matrix* ist, die spaltenweise in $n - 2$ Schritten hergestellt wird, für $n = 5$ beispielsweise nach folgender Strategie:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix} & \Rightarrow & \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \end{pmatrix} \\
 A & & A_1 \\
 & & \Rightarrow \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix} \quad (179a) \\
 & & A_2 & & A_3 = H
 \end{array}$$

Wir beschreiben die Reduktion der ersten Spalte. Beim Start ist $L = I_n$ zu setzen.

Ausnahme. Es ist $a_{31} = a_{41} = \dots = a_{n1} = 0$. Dann gehe über zur nächsten Spalte.

Regelfall. Mindestens eines der Elemente a_{31} bis a_{n1} ist von Null verschieden.

1. Vertauschung

1 a) Suche aus den Elementen a_{21} bis a_{n1} das betragsgrößte; es sei das Element a_{j1} .

1 b) Es ist $j = 2$. Dann weiter mit Programmpunkt 2.

1c) Es ist $j > 2$.

1cI) Vertausche die Zeilen 2 und j in L und A .

1cII) Vertausche die Spalten 2 und j in A .

1cIII) Vertausche die Elemente d_{22} und d_{jj} in D .

2. Reduktion

Als Pivot dient das Element am Platz 21 in der aktuellen Matrix A . Die Nullen werden an den Plätzen 31, 41, ..., $n1$ (nicht unbedingt in dieser Reihenfolge) erzeugt mit Hilfe der Matrix L_{kj} (173) für $j = 2$.

2a) Berechne die signifikanten Elemente der Matrix L_{k2} :

$$q_{k2} = -\frac{a_{k1}}{a_{21}}, \quad p_{2k} = \bar{q}_{k2} \frac{d_{22}}{d_{kk}}, \quad \text{somit} \quad L_{k2} = \begin{pmatrix} 1 & -p_{2k} \\ q_{k2} & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A})$$

2b) Zeilenkombination der aktuellen Matrix L

$$\left. \begin{aligned} \tilde{l}^k &= l^k + q_{k2} l^2 \\ \tilde{l}^2 &= l^2 - p_{2k} l^k \end{aligned} \right\}, \quad \text{d.h.} \quad q_{k2} \left(\begin{pmatrix} \text{Zeile } 2 \\ \text{Zeile } k \end{pmatrix} \right) - p_{2k}. \quad (\text{B})$$

2cI) Zeilenkombination der aktuellen Matrix A

$$\left. \begin{aligned} \tilde{a}^k &= a^k + q_{k2} a^2 \\ \tilde{a}^2 &= a^2 - p_{2k} a^k \end{aligned} \right\}, \quad \text{d.h.} \quad q_{k2} \left(\begin{pmatrix} \text{Zeile } 2 \\ \text{Zeile } k \end{pmatrix} \right) - p_{2k}. \quad (\text{C})$$

2cII) Spaltenkombination der Matrix \tilde{A}

$$\left. \begin{aligned} \hat{a}_k &= \tilde{a}_k + \bar{q}_{k2} \tilde{a}_2 \\ \hat{a}_2 &= \tilde{a}_2 - \bar{p}_{2k} \tilde{a}_k \end{aligned} \right\}, \quad \text{d.h.} \quad \left(\begin{array}{c} \text{Spalte } 2 \\ \text{Spalte } k \end{array} \right) \begin{pmatrix} \bar{q}_{k2} \\ -\bar{p}_{2k} \end{pmatrix}. \quad (\text{D})$$

2d) Transformation der aktuellen Matrix D . Berechne den Skalar ω_{k2}^2 und daraus weiter die Elemente \tilde{d}_{22} und \tilde{d}_{kk} :

$$\omega_{k2}^2 = 1 + q_{k2} p_{2k}; \quad \tilde{d}_{22} = d_{22} \omega_{k2}^2, \quad \tilde{d}_{kk} = d_{kk} \omega_{k2}^2. \quad (\text{E})$$

Die zweiten Zeilen der Matrizen L , A und D und ebenso die zweite Spalte von A werden demnach $n-2$ mal ersetzt, die übrigen Zeilen und Spalten nur einmal. Der Schritt der Nummer k fällt aus, wenn $a_{k1} = 0$ ist.

Damit ist die erste Spalte reduziert. Die Reduktion der weiteren Spalten verläuft analog, siehe dazu das erste Beispiel.

Zum Schluß der Transformation sind die drei Matrizen I_n , A und D in L , H und \tilde{D} übergegangen, und es gilt

$$LAL^* = H; \quad LDL^* = \tilde{D}. \quad (\text{F})$$

Außerdem besteht die Beziehung

$$\text{sp } \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} = \sum_{\mu=1}^n a_{\mu\mu} / d_{\mu\mu} = \sum_{\mu=1}^n h_{\mu\mu} / \tilde{d}_{\mu\mu} = \text{sp } \tilde{\mathbf{D}}^{-1} \mathbf{H} . \quad (\text{G})$$

Ist insonderheit \mathbf{A} hermitesch, so ist auch \mathbf{H} hermitesch und somit tridiagonal, siehe dazu das zweite Beispiel.

Erstes Beispiel. $n = 4$, \mathbf{A} reell, \mathbf{D} positiv. Gegeben ist

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -6 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \quad (\text{a})$$

Reduktion der ersten Spalte.

Es liegt der Regelfall vor, da nicht alle Elemente a_{31} , a_{41} unterhalb der Kodiagonale gleich Null sind.

1. Vertauschung

1a) Das betragsgrößte der Elemente a_{21}, a_{31}, a_{41} ist $a_{41} = 2$, mithin ist $j = 4$. Nach 1 b) bis 1 cIII) wird dann

$$\mathbf{L}_V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_V = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -6 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{b})$$

wo der Index V auf Vertauschung hinweist.

2. Reduktion

1. Schritt, $k = 3$. Annullierung des Elementes $a_{31} = 0$ entfällt.

2. Schritt, $k = 4$. Annullierung des Elementes $a_{42} = -1$.

$$(\text{A}): \quad q_{42} = -a_{41}/a_{21} = -(-1)/2 = 0,5; \quad p_{24} = q_{42} \cdot d_{22}/d_{44} = 0,5 \cdot 4/1 = 2. \quad (\text{c})$$

$$(\text{B}): \quad \mathbf{L}_V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{0,5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0,5 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2} \tilde{\mathbf{L}}. \quad (\text{d})$$

$$(\text{C}): \quad \mathbf{A}_V = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -6 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{0,5} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & -16 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -0,5 \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{A}}. \quad (\text{e})$$

$$(\text{D}): \quad \tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & -16 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -0,5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \nearrow 0,5 \\ \searrow -2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & -16 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{A}}. \quad (\text{f})$$

$$(\text{E}): \quad \omega_{42}^2 = 1 + q_{42} p_{24} = 1 + 0,5 \cdot 2 = 2;$$

$$\tilde{d}_{22} = d_{22} \omega_{42}^2 = 4 \cdot 2 = 8, \quad \tilde{d}_{44} = d_{44} \omega_{42}^2 = 1 \cdot 2 = 2. \quad (\text{g})$$

Damit ist auch \tilde{D} berechnet, und wir stellen nochmals alle drei Matrizen zusammen:

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0,5 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & -16 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (h)$$

Reduktion der zweiten Spalte.

Es liegt der Regelfall vor.

1. Vertauschung

Entfällt, da die Elemente $a_{42} = -4$ und $a_{43} = 4$ betragsgleich sind.

2. Reduktion

$$(A): \quad q_{43} = -a_{42}/a_{32} = -(-4)/4 = 1, \quad p_{34} = q_{43}d_{33}/d_{44} = 1 \cdot 2/2 = 1. \quad (i)$$

$$(B): \quad L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0,5 \end{pmatrix} \xrightarrow{1 \curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -0,5 \\ 0 & 1 & 1 & 0,5 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1 \curvearrowright} \tilde{L}_1. \quad (j)$$

$$(C): \quad A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & -16 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{1 \curvearrowright} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & -16 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1 \curvearrowright} \tilde{A}_1. \quad (k)$$

$$(D): \quad \tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & -16 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} -1 \curvearrowright \\ 1 \curvearrowright \end{matrix}} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 5 \\ 4 & 4 & -16 & -16 \\ 0 & -8 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \hat{A}_1 = A_2 = H. \quad (l)$$

$$(E): \quad \omega_{43}^2 = 1 + q_{43}p_{34} = 1 + 1 \cdot 1 = 2. \quad (m)$$

$$(h) \rightarrow \tilde{d}_{33} = d_{33}\omega_{43}^2 = 2 \cdot 2 = 4, \quad \tilde{d}_{44} = d_{44}\omega_{43}^2 = 2 \cdot 2 = 4. \quad (n)$$

Damit wird endgültig

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -0,5 \\ 0 & 1 & 1 & 0,5 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 5 \\ 4 & 4 & -16 & -16 \\ 0 & -8 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \tilde{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \quad (o)$$

$$(G): \quad \sum_{\mu=1}^4 \frac{a_{\mu\mu}}{d_{\mu\mu}} = \frac{3}{1} + \frac{0}{1} + \frac{2}{2} + \frac{4}{4} = 5; \quad \sum_{\mu=1}^4 \frac{h_{\mu\mu}}{\tilde{d}_{\mu\mu}} = \frac{3}{1} + \frac{4}{8} + \frac{1}{4} + \frac{5}{4} = 5. \quad (p)$$

Der Leser führe auch die Probe (F) durch!

Zweites Beispiel. A reellsymmetrisch, $D = I_n$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-4 & n-3 & n-2 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-3 & n-2 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{ll} n \text{ ungerade:} & \det A = (-1)^\alpha, \quad \text{sp } A = \alpha^2 \\ & \text{mit } \alpha = \frac{n+1}{2}, \\ n \text{ gerade:} & \det A = (-1)^\beta, \quad \text{sp } A = \beta(\beta+1) \\ & \text{mit } \beta = \frac{n}{2}. \end{array} \quad (a)$$

Da A reellsymmetrisch ist, trifft dies auch für H zu, somit ist H tridiagonal. Auch die Transformationsmatrix L ist reell.

Es wurden einige Ergebnisse mit 16-stelliger Mantisse berechnet, siehe Tabelle (b). Die erste Spalte enthält die Spurkontrolle (G), die zweite die Abweichungen von der Symmetrie. Dabei ist $\gamma_{kj} = h_{kj} - h_{jk}$ für $j \neq k$. Die auftretenden Fehler sind einigermaßen akzeptabel, gemessen an der Größenordnung der Elemente a_{jk} von A und der Spur von A

n	$\sum a_{\mu\mu} - \sum h_{\mu\mu}/\bar{a}_{\mu\mu}$	$ \gamma_{kj} _{\max}$	sp A
100	$-2,1 \cdot 10^{-12}$	$1,6 \cdot 10^{-12}$	2550
200	$4,8 \cdot 10^{-11}$	$2,9 \cdot 10^{-11}$	10100
300	$6,8 \cdot 10^{-11}$	$4,3 \cdot 10^{-11}$	22650
400	$-2,4 \cdot 10^{-11}$	$2,9 \cdot 10^{-10}$	40200
500	$-1,7 \cdot 10^{-10}$	$4,1 \cdot 10^{-10}$	62750

(b)

Bei großen Ordnungszahlen ist es zweckmäßig, die Kontrollgleichungen (F) in ihre n Spalten aufzulösen und nur einige von ihnen heranzuziehen:

$$s_\mu = LA(l^\mu)^T - h_\mu \stackrel{?}{=} o, \quad t_\mu = LI_n(l^\mu)^T - d_\mu \stackrel{?}{=} o; \quad \mu = 1, 2, \dots, n. \quad (c)$$

Von jeder der ausgewählten Spalten s_μ und t_μ wird allein das betragsgrößte Element ausgedruckt. Zum Beispiel hat für $n = 500$ und $\mu = n = 500$ das betragsgrößte Element von s_{500} bzw. t_{500} den Wert $6,1 \cdot 10^{-9}$ bzw. $3,6 \cdot 10^{-10}$.

Für das spezielle Beispiel $n = 500$ sind auf Seite 210 die letzten 60 Elemente der Haupt- und Kodiagonale von H sowie der Hauptdiagonale von \bar{D} angegeben.

10.14 Ganzzahlige Ähnlichkeitstransformation auf obere Hessenberg-Matrix

Ist die quadratische Matrix A reell und ganzzahlig, so gelingt die Ähnlichkeitstransformation $LAL^{-1} = H$ auf die *Hessenberg-Matrix* H mit $\det L = 1$, wo L und H ganzzahlig sind, mit Hilfe des in den Abschnitten 6.12 bis 6.15 beschriebenen Euklidischen Algorithmus, wobei nach jedem Reduktionsschritt der Partner I_n via Quant (Abschnitt 10.9) sogleich wiederhergestellt wird. Bezeichnen wir als aktuelle Restspalte \hat{a}_μ die Spalte der Länge $n - \mu$ unterhalb des Hauptdiagonalelements, so ist der Algorithmus in wenigen Worten beschrieben.

Algorithmus Quant/Euklid (QE)

Gegeben: A quadratisch, reell, ganzzahlig. Ordnung $n \geq 3$.

- 1) Die Restspalte \hat{a}_μ ist die Nullspalte. Keine Aktion. Sonst aber:
 - 2) Reduktion der Restspalte \hat{a}_μ nach Euklid Standard bzw. Euklid-Gauß. Das verbleibende Element T_μ steht
 - 2a) am Platz $\mu + 1, \mu$. Keine Aktion.
 - 2b) am Platz $k\mu$, wo $k \neq \mu + 1$ ist. Die Zeile k wird mit -1 multipliziert, so dann werden die Zeilen k und $\mu + 1$ miteinander vertauscht.
- Dies wird durchgeführt von $\mu = 1$ bis $\mu = n - 2$. ENDE.

Eine ganzzahlige Transformation empfiehlt sich besonders dann, wenn das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \det(H - \lambda I_n)$ zu ermitteln ist, was durch sukzessives Berechnen der Hauptabschnittsdeterminanten der Matrix $F(\lambda) = H - \lambda I_n$ geschieht.

Erstes Beispiel. Gegeben ist die ganzzahlige reelle Matrix der Ordnung $n = 4$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & -6 \end{pmatrix}; \quad \text{sp } A = -9. \quad (\text{a})$$

Wir transformieren zunächst ohne Mitführung der Matrizen L und $R = L^{-1}$.
 $\mu = 1$, Reduktion der ersten Restspalte. Es sind vier Schritte erforderlich:

$\begin{array}{ccccc} 0 & -2 & 3 & 4 & 0 \\ I & 5 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 7 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & -6 \end{array}$	$\begin{array}{ccccc} 0 & -2 & 7 & 4 & 0 \\ -2 & 5 & 1 & 1 & 1 \\ I & 2 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 8 & 5 & -6 \end{array}$	$\begin{array}{ccccc} 0 & -2 & 7 & 18 & 0 \\ I & 1 & 5 & 15 & -5 \\ -2 & 2 & -2 & -6 & 3 \\ 0 & 2 & 8 & 21 & -6 \end{array}$	Nicht eindeutig. Auch $\tilde{a}_{41} = 2$ wäre möglich.
$\begin{array}{ccccc} & & 0 & 1 & I & 0 \end{array}$	$\begin{array}{ccccc} & & 0 & I & 2 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{ccccc} & & 0 & 2 & I & 0 \end{array}$	

$\begin{array}{ccccc} 0 & -2 & 43 & 18 & 0 \\ I & 1 & 35 & 15 & -5 \\ 0 & 0 & -84 & -36 & 13 \\ -2 & 2 & 50 & 21 & -6 \end{array}$	$\begin{array}{ccccc} -2 & 43 & 18 & 0 \\ 1 & 25 & 15 & -5 \\ 0 & -58 & -36 & 13 \\ 0 & -12 & -9 & 4 \end{array}$	(b)
$\begin{array}{ccccc} & & 0 & 2 & 0 & I \end{array}$		

$\mu = 2$. Reduktion der zweiten Restspalte. Es sind zwei Schritte erforderlich:

$\begin{array}{ccccc} 0 & -2 & 43 & 18 & 0 \\ 0 & 1 & 25 & 15 & -5 \\ -5 & 0 & -58 & -36 & 13 \\ I & 0 & -12 & -9 & 4 \end{array}$	$\begin{array}{ccccc} 0 & -2 & 43 & 18 & 90 \\ 0 & 1 & 25 & 15 & 70 \\ I & 0 & 2 & 9 & 38 \\ 6 & 0 & -12 & -9 & -41 \end{array}$	$\begin{pmatrix} -2 & 43 & -522 & 90 \\ 1 & 25 & -405 & 70 \\ 0 & 2 & -219 & 38 \\ 0 & 0 & -1077 & 187 \end{pmatrix} = H.$
$\begin{array}{ccccc} & & 0 & 0 & I & 5 \end{array}$	$\begin{array}{ccccc} 0 & & 0 & 0 & -6 & I \end{array}$	(c)

Probe: $\text{sp } A = \text{sp } H = -9$.

Hauptdiagonale von H			Kodiagonale von H			Hauptdiagonale von \tilde{D}		
441	1.777367905619613	3	-1.534012737931708	3	7.109442010748098	3		
442	-1.089620074212563	4	2.038961738100968	3	4.358478860172638	4		
443	3.208459068578428	3	2.207201077062838	2	1.283398021032938	4		
444	-1.307175277957128	2	1.969482723661118	2	5.228683926568188	2		
445	2.611685151009058	3	-8.081454818364088	2	1.044671889506998	4		
446	-2.254364490455028	3	-8.230240359576438	2	9.017431448116088	3		
447	2.770815491629498	3	9.448392381401288	2	1.108327380665618	4		
448	-3.045397812888458	3	-2.375560301766008	3	1.218158651782318	4		
449	1.792820203987008	4	-5.940284404075148	2	7.171288519164438	4		
450	-1.953242795586768	2	-3.009654196583498	2	7.812596279846408	2		
451	4.714103885574398	3	-1.290658887394178	3	1.885640400065948	4		
452	-3.687199735167298	3	6.923699338382838	2	1.474875396452978	4		
453	1.390801192485758	3	1.929967973405158	3	5.563182880688408	3		
454	-2.943223502942908	4	6.633320286451048	3	1.177283850187958	5		
455	1.685512160571778	4	-2.381783347589058	3	6.742022836023388	4		
456	-3.902608204014838	3	9.536879367678188	2	1.561042348915398	4		
457	2.774352132518398	3	-2.458486634539318	2	1.109741270887578	4		
458	-2.670222634051968	2	2.144990628777778	2	1.068088072852368	3		
459	2.170397970984158	3	-1.385852367483968	3	8.681635089668668	3		
460	-1.148715132630548	4	4.429807746197748	3	4.594876440488808	4		
461	2.281865511860468	4	-9.191722189910598	2	9.127485378182988	4		
462	-5.102563982889488	2	-3.692299617998888	2	2.041030269128878	3		
463	3.793983848046348	3	-1.271092224468848	3	1.517595600768178	4		
464	-6.246857245828668	3	-8.300476366083818	2	2.498737227323528	4		
465	1.669379695859248	3	5.222925124718058	2	6.677505228745258	3		
466	-2.558735589384068	3	1.258263729341068	2	1.023496262665508	4		
467	1.001210314268078	2	5.301153982260458	1	4.004833068443968	2		
468	-4.707383806305008	2	3.623353026463248	2	1.882950212571518	3		
469	4.841138562079778	3	1.268469004217318	3	1.936459294719798	4		
470	-5.991336914932088	3	9.352416796487918	2	2.396533921074978	4		
471	2.728923078352948	3	-8.374712331311048	2	1.091567381432638	4		
472	-5.000101580494558	3	-3.566191203073608	2	2.000041357911948	4		
473	5.142531916800048	2	-8.114345521247948	1	2.057011022931438	3		
474	-2.700653025714968	2	1.503240433888708	2	1.080261125595988	3		
475	1.839309456309658	3	-9.093844623010308	2	7.357233883274898	3		
476	-1.033766668081558	4	-7.500335940418668	2	4.135066967681468	4		
477	1.308146209951078	3	4.138917530233518	2	5.232591150421298	3		
478	-3.303556899730528	3	9.353652653931828	2	1.321419683890428	4		
479	7.011359836043438	3	-9.595932770713178	2	2.804551523366258	4		
480	-3.662217069842208	3	-9.654843322352078	2	1.464887439701468	4		
481	7.481794174060868	3	-1.941741233874068	3	2.992716061233978	4		
482	-1.567716551879058	4	1.21353553525988	3	6.270872236789008	4		
483	3.095869075396068	3	1.328314554617158	3	1.238341521934458	4		
484	-2.000050837710968	4	-1.401774922189268	3	8.000229692899468	4		
485	3.675109568482518	3	2.231388564806628	2	1.470052101687398	4		
486	-5.437334157452788	2	1.565958904244718	2	2.174928133625058	3		
487	1.946460146897028	3	7.173678564073398	2	7.785864808880668	3		
488	-1.235248263271018	4	-3.488232425039028	2	4.940985138298588	4		
489	5.005901365815998	2	-1.902366966654218	2	2.002347449101048	3		
490	-4.028593932736978	3	7.572278310313568	2	1.611441381837778	4		
491	8.753524136627368	3	4.927132223527118	2	3.501402867144158	4		
492	-1.906472289185838	3	1.806865494774698	2	7.625840295263218	3		
493	1.328740118216838	3	-2.651800999715838	2	5.314983010639068	3		
494	-4.715543341991468	3	2.787306868858858	2	1.886229048822258	4		
495	1.718666427410268	3	-7.292894215581668	1	6.874638892324748	3		
496	-3.900428452506648	2	3.959987045123408	1	1.560163372960088	3		
497	6.348994431715668	2	2.014281571745068	2	2.539595851459248	3		
498	-1.352306789474718	4	1.236057230419408	2	5.409238386594538	3		
499	3.602077952126108	2	-4.293640326558218	1	1.440831140535728	3		
500	-3.274842161225908	3			1.309935027656798	4		

AUSGANGSMATRIX A

6	15	20	15	6	1
21	70	105	84	35	6
56	210	336	280	120	21
126	504	840	720	315	56
252	1050	1800	1575	700	126
462	1980	3465	3080	1386	252

HESSENBERGMATRIX

6	757	-272837	-2348503950	-55579181669	10971490681
7	-6642	2420348	20833716611	493046188136	-97328738855
0	-24	68984	593877879	14054584197	-2774415436
0	0	-7	-51176	-1211112	239077
0	0	0	-384	-9164	1809
0	0	0	0	-385	76

LINKSMATRIX

1	0	0	0	0	0
0	1	0	2	-1	-1
0	-8	-13	40	-24	-15
0	-172	-40	-49	210	20
0	32088	95688	-48638	-87561	9588
0	162514	484726	-246400	-443520	48575

RECHTSMATRIX

1	0	0	0	0	0
0	3	-1006	-8659168	-204925979	40452979
0	18	-6491	-55872808	-1322273674	261020635
0	36	-13272	-114242085	-2703628238	533704008
0	8	-2800	-24101498	-570380789	112594812
0	66	-24750	-213041840	-5041801666	995266183

$$L * A * R = H$$

6	757	-272837	-2348503950	-55579181669	10971490681
7	-6642	2420348	20833716611	493046188136	-97328738855
0	-24	68984	593877879	14054584197	-2774415436
0	0	-7	-51176	-1211112	239077
0	0	0	-384	-9164	1809
0	0	0	0	-385	76

$$L * I * R = I$$

1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	1

Führen wir die insgesamt sechs Reduktionsschritte an der Übermatrix der Ordnung $2n = 8$ durch, so ergeben sich nach dem Schema

$$\begin{pmatrix} I_4 & A \\ 0 & I_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & H \\ 0 & R \end{pmatrix} \quad (d)$$

die beiden Transformationsmatrizen

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 23 & -15 & -5 \\ 0 & 132 & -86 & -29 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -58 & 10 \\ 0 & 7 & -87 & 15 \\ 0 & 2 & -6 & 1 \end{pmatrix}. \quad (e)$$

Proben: $LAR = H$, $LI_4R = I_4$; $\det L = \det R = 1$.

Schließlich berechnen wir noch das charakteristische Polynom $p(\lambda)$ als letztes Glied der Folge von Hauptabschnittsdeterminanten der Matrix

$$F(\lambda) = H - \lambda I_4 = \begin{pmatrix} -2-\lambda & 43 & -522 & 90 \\ 1 & 25-\lambda & -405 & 70 \\ 0 & 2 & -219-\lambda & 38 \\ 0 & 0 & -1077 & 187-\lambda \end{pmatrix}. \quad (f)$$

Man erhält

$$\begin{aligned} H_1 &= -2-\lambda, \quad H_2 = \lambda^2 - 23\lambda - 93, \quad H_3 = -\lambda^3 - 196\lambda^2 + 4320\lambda + 17703, \\ H_4 &= p(\lambda) = \lambda^4 + 9\lambda^3 - 46\lambda^2 - 381\lambda - 237. \end{aligned} \quad (g)$$

Zweites Beispiel. Die Transformation der Dekker-Matrix (6.37 a) der Ordnung $\dot{n} = 6$ zeigt der Computerausdruck auf Seite 211. Mit den beiden Transformationsmatrizen L und R wurden die beiden Proben $LAR = H$ und $LI_6R = I_6$, ferner die Probe $\text{sp } A = \text{sp } H = 2084$ gemacht. Da $\det A = 1$ ist (dies gilt für jede Dekker-Matrix beliebiger Ordnung), gilt zufolge $\det L = \det R = 1$ auch $\det H = 1$, insgesamt also

$$\det A = \det H = \det L = \det R = 1. \quad (h)$$

Die drei Matrizen H , L und R sind aber derart schlecht konditioniert (ill conditioned) oder wie man auch sagt „böartig“, daß es ohne Zuhilfenahme besonderer Maßnahmen nicht gelingt, ihre Determinanten mit Sicherheit auszurechnen.

10.15 Lineare Abbildungen

Wir kommen zum Schluß unseres Studiums der gebundenen Transformationen noch einmal auf die lineare Abbildung (1.4)

$$y = Ax \quad (180)$$

zurück und fragen, wie diese durch die Äquivalenztransformation

$$LAR = \tilde{A} \quad (181)$$

betroffen wird. Um dies zu erkennen, multiplizieren wir die Gleichung (180) von links mit L und nehmen eine geeignete Erweiterung mit $I_n = RR^{-1}$ vor, das gibt

$$\text{oder } \underbrace{Ly}_{\tilde{y}} = \underbrace{LAR}_{\tilde{A}} \underbrace{R^{-1}x}_{\tilde{x}} \quad (182)$$

mit

$$\boxed{\tilde{y} = Ly, \quad \tilde{x} = R^{-1}x} \quad (184)$$

Demnach transformieren sich die beiden Vektoren y und x „*kontragredient*“, weil vor y die Matrix L , dagegen vor x die Inverse R^{-1} steht.

Unsere nächste Frage ist, wie sich der Differenzvektor

$$\delta = y - x = Ax - x \quad (185)$$

gegenüber der Transformation (181) verhält. Betrachten wir dazu die vier Anteile der beiden Betragsquadrate

$$\delta^* \delta = (y - x)^*(y - x) = y^*y - y^*x - x^*y + x^*x \quad (186)$$

und

$$\tilde{\delta}^* \tilde{\delta} = (\tilde{y} - \tilde{x})^*(\tilde{y} - \tilde{x}) = \tilde{y}^* \tilde{y} - \tilde{y}^* \tilde{x} - \tilde{x}^* \tilde{y} + \tilde{x}^* \tilde{x}, \quad (187)$$

das sind die Längenquadrate und Skalarprodukte einmal im Original (186) und ein andermal transformiert, (187). Ihren Zusammenhang beschreiben wir durch Matrizen T_{jk} auf folgende Weise

$$\tilde{y}^* \tilde{y} = y^* T_{11} y, \quad \tilde{y}^* \tilde{x} = y^* T_{12} x, \quad \tilde{x}^* \tilde{y} = x^* T_{21} y, \quad \tilde{x}^* \tilde{x} = x^* T_{22} x. \quad (188)$$

Zum Beispiel ist nach (184) $\tilde{y}^* \tilde{x} = (Ly)^*(R^{-1}x) = y^* L^* R^{-1} x = y^* T_{12} x$ mit $T_{12} = L^* R^{-1}$ usw., wie im Fall a) der Äquivalenztransformation in der Tabelle 10.2 angegeben.

Die Transformation wird nun kongruent durchgeführt, Fall b), dann zieht dies zufolge $T_{12} = I_n$, $T_{21} = I_n$ die Gleichheit der Skalarprodukte nach sich

$$\tilde{y}^* \tilde{x} = y^* x, \quad \tilde{x}^* \tilde{y} = x^* y, \quad (189)$$

doch ist dies nur eine einzige Gleichung, da beide durch konjugiert-komplexe Transposition auseinander hervorgehen.

Kommt man aber von der Äquivalenz zur Ähnlichkeit, Fall c), so bedeutet dies die *Kogredienz*, das heißt die Gleichheit der Transformation für den Originalvektor x und den Bildvektor y . Schließlich gehen wir in der Tabelle 10.2 von b) nach d) oder von c) nach d) und kommen damit zur Unitarität, und nun sind die Längenquadrate *und* die Skalarprodukte einander gleich

$$\tilde{y}^* \tilde{y} = y^* y, \quad \tilde{y}^* \tilde{x} = y^* x, \quad \tilde{x}^* \tilde{y} = x^* y, \quad \tilde{x}^* \tilde{x} = x^* x. \quad (190)$$

Tabelle 10.2

a) äquivalent, L und R beliebig L^*L L^*R^{-1} $(R^*)^{-1}L$ $(RR^*)^{-1}$	T_{11} T_{11} T_{21} T_{22}	b) kongruent, $L^* = R \Leftrightarrow R^* = L$ L^*L I_n I_n $(RR^*)^{-1}$
c) ähnlich, $L = R^{-1} \Leftrightarrow R = L^{-1}$ $RL = LR$ $L^*L = (RR^*)^{-1}$ $L^*L = (RR^*)^{-1}$ $L^*L = (RR^*)^{-1}$ $L^*L = (RR^*)^{-1}$		d) unitär (ähnlich und kongruent) $L^*L = I_n = RR^*$ I_n I_n I_n I_n

Zum Schluß noch eine geometrische Deutung. Ist alles reell, so geht die komplexe Unitarität in die Orthonormalität über; in der reellen $x_1 - x_2$ -Ebene besagen die Gleichungen (190), daß die Längen von y und x und der Winkel zwischen den Vektoren y und x erhalten bleiben, somit das schraffierte Dreieck \overline{OAB} der Abb. 10.4 als starre Figur um einen gewissen Winkel φ gedreht wird, was auch in der Transformationsmatrix

$$L = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad L^T = L^{-1} = L \quad (191)$$

explizit zum Ausdruck kommt.

Beispiel. Die lineare Abbildung $y = Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y = Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$y^T y = 10, \quad y^T x = x^T y = 6, \quad x^T x = 10. \quad (a)$$

1. Kongruenztransformation nach Abb. 10.3 mit

$$L = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad LAR = LAL^T = \tilde{A} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}, \quad (b)$$

$$\tilde{y} = Ly = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \tilde{x} = R^{-1}x = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5 \\ 2,5 \end{pmatrix}, \quad (c)$$

und damit wird

$$\tilde{y}^T \tilde{x} = \tilde{x}^T \tilde{y} = 6 \quad (d)$$

vergleiche (a), wie es nach (189) sein muß. Probe: $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{y}$!

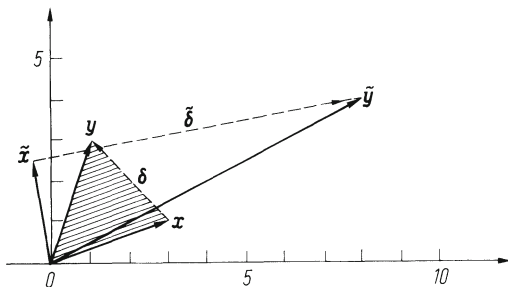


Abb. 10.3. Kongruente Transformation

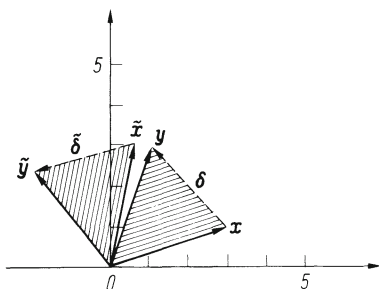


Abb. 10.4. Orthonormale Transformation

2. Unitäre (das heißt hier im Reellen orthonormale) Transformation nach Abb. 10.4 mit der Matrix (191), $\varphi = 60^\circ$:

$$L = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}, \quad LAL^T = \tilde{A} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & -5+\sqrt{3} \\ 7+\sqrt{3} & 3-\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad (e)$$

$$\tilde{y} = Ly = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -3\sqrt{3} \\ 3 & +\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2,098076211 \\ 2,366025404 \end{pmatrix}, \quad \tilde{x} = Lx = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3-\sqrt{3} \\ 1+3\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,633974596 \\ 3,098076211 \end{pmatrix}, \quad (f)$$

$$\tilde{y}^T \tilde{y} = 10, \quad \tilde{y}^T \tilde{x} = \tilde{x}^T \tilde{y} = 6, \quad \tilde{x}^T \tilde{x} = 10, \quad (g)$$

und das stimmt überein mit (a). Daß beide Längenquadrate einander gleich sind, ist Zufall. Probe: $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{y}$!

• 10.16 Zusammenfassung. Ausblick

Halten wir, am Ende angekommen, noch einmal Rückschau. Was war das Problem? Bereit stehen zwei reguläre quadratische Transformationsmatrizen L und R mit insgesamt $2n^2$ Elementen, über die wir bis auf die Bedingung der Regularität, die in L und R nur jeweils ein Element einschränkt, nach Belieben verfügen können. Wir unterschieden:

a) Freie Transformation

Die Elemente a_{jk} der Matrix A werden transformiert auf die n^2 Bilinearformen

$$LAR = \tilde{A} = (\tilde{a}_{jk}) = (l^j A r_k), \quad (192)$$

die sich in weiten Grenzen vorschreiben lassen, zum Beispiel so, daß A in die Pivotmatrix Π oder auch in Normalform N_d (6.41 c) übergeht, wobei sogar noch $R = I_n$ oder $L = I_n$ gewählt werden kann (Gauß-Jordan).

b) Gebundene Transformation

b 1) Äquivalenztransformation

Die jeweils n^2 Elemente a_{jk} von A und b_{jk} von B werden überführt in die $2n^2$ Bilinearformen

$$LAR = \tilde{A} = (\tilde{a}_{jk}) = (l^j A r_k) ; \quad LBR = \tilde{B} = (\tilde{b}_{jk}) = (l^j B r_k) , \quad (193)$$

die nun nicht mehr ausnahmslos vorgebar sind. Zwar kann $B = I_n$ verlangt werden, falls B regulär ist, doch zeigt die Normalform (100) für A , daß bestenfalls die $n^2 - n$ Elemente außerhalb der Hauptdiagonale zu Null gemacht werden können, sofern die Struktur des Paares $A; B$ dies zuläßt; andernfalls resultiert als Optimum die Jordan-Form, deren (aufwendige) Konstruktion wir im Abschnitt 18.7 beschreiben werden.

b 2) Kongruenztransformation

Zufolge der Bindung $R = L^*$ bzw. $L = R^*$ ist nur noch L oder R verfügbar. Ist nun B hermitesch und positiv definit, und verlangt man $LBL^* (= R^*BR) = I_n$, so sind dies nur $n(n-1)/2$ Bedingungen, so daß noch weitere $n(n-1)/2$ Elemente von L (bzw. R) geeignet wählbar sind. Diese genügen aber im allgemeinen nicht, um auch A auf Diagonalform zu transformieren, außer wenn A normal bezüglich B ist; dann nämlich bestehen auf Grund der erfüllten Vertauschbarkeitsbedingung (54) gerade so viele Bindungen der Elemente a_{jk} untereinander, daß die simultane Transformation

$$LAL^* = \hat{A} = \text{Diag} \langle \hat{a}_{jj} \rangle ; \quad LBL^* = \hat{B} = \text{Diag} \langle 1 \rangle = I_n \quad (194)$$

möglich wird.

c) Matrizentupel

Sind nun $p > 2$ Matrizen, sogenannte *Matrizentupel*, vorgelegt, so haben wir als Verallgemeinerung von (194) die simultane Transformation

$$LA_\varrho R = \tilde{A}_\varrho = (\tilde{a}_{\varrho,jk}) = (l^j A_\varrho r_k) ; \quad \varrho = 1, 2, \dots, p > 2 . \quad (195)$$

Hier gelingt es selbst bei bescheidenen Ansprüchen an die Normalform – etwa $N_\varrho = \nabla_\varrho$ oder $N_\varrho = H_\varrho$, Hessenberg-Form (138), – im allgemeinen nicht, das Tupel simultan auf N zu transformieren. Dies wird nur möglich, wenn gewisse Bindungen zwischen den $p \cdot n^2$ Elementen des Tupels bestehen, was zumeist durch bestimmte Vertauschbarkeitsrelationen zum Ausdruck kommt, so zum Beispiel beim *Matrizentripel* durch das Erfülltsein der Gleichung (21.76) (*Bequemlichkeitshypothese*).

Fassen wir zusammen: Während die freie Transformation (also die Transformation einer einzelnen Matrix A ohne Bindung an einen Partner) auf die Pivotmatrix I und von da auf die Normalform N_d (6.41 c) ohne nennenswerten Aufwand – und das auf unendlich vielfache Weise – gelingt, ist die gebundene, d. h. simultane Transformation eines Paares $A; B$ auf $N; I_n$ ohne Kenntnis der *Eigenwerte* λ_j nicht durchführbar. Deren praktische Ermittlung bildet daher eines der zentralen Probleme des Matrizenkalküls und wird uns im IV. Kapitel noch ausführlich beschäftigen.

Matrizen und ihre Anwendungen 1

Grundlagen Für Ingenieure, Physiker und Angewandte
Mathematiker

Zurmühl, R.; Falk, S.

1997, XIV, 496 S., Hardcover

ISBN: 978-3-642-17542-8