

Inhaltsverzeichnis¹

I.	Kapitel Der Matrizenkalkül	1
1	Grundbegriffe und einfache Rechenregeln	1
• 1.1	Lineare Transformation, Matrix und Vektor	1
• 1.2	Zeilen- und Spaltenvektoren	5
• 1.3	Einfache Rechenregeln	7
• 1.4	Transponierte Matrix, symmetrische und schiefsymmetrische Matrix	9
• 1.5	Diagonalmatrix, Skalarmatrix und Einheitsmatrix	11
• 1.6	Lineare Abhängigkeit, Rang, singuläre Matrix, Determinante	12
2	Das Matrizenprodukt	15
• 2.1	Einführung des Matrizenproduktes	15
• 2.2	Sätze über Matrizenmultiplikation	20
• 2.3	Diagonal- und Dreiecksmatrix	24
• 2.4	Skalares Produkt, Betrag und Winkel reeller Vektoren	26
• 2.5	Dyadisches Produkt	28
• 2.6	Potenzen und Polynome	30
• 2.7	Die Gaußsche Transformation	31
• 2.8	Orthogonale Matrizen	33
3	Die Kehrmatrix (Inverse)	35
• 3.1	Begriff und Herleitung der Kehrmatrix	35
• 3.2	Adjungierte Matrix. Formelmäßiger Ausdruck der α_{ik}	39
• 3.3	Matrizendivision	42
4	Komplexe Matrizen	43
• 4.1	Komplexe Matrizen und Vektoren	43
• 4.2	Sonderformen komplexer Matrizen	45
4.3	Reelle Darstellung komplexer Matrizen	48
• 4.4	Inverse, Adjungierte und Determinante einer hermiteschen Matrix	49

¹ Die mit dem Zeichen • versehenen Abschnitte bilden in sich ein geschlossenes Ganzes und sollten als erstes studiert werden.

II.	Kapitel Transformationen und lineare Gleichungen	52
5	Freie Transformationen	52
• 5.1	Ein- und beidseitige Transformationen	52
• 5.2	Reguläre Transformationen	56
• 5.3	Die drei Grundoperationen	56
• 5.4	Das Generalschema einer Äquivalenztransformation	63
• 5.5	Das Pivotkreuz	65
• 5.6	Die Normalform einer Matrix	66
• 5.7	Das vollständige System von Elevatoren	66
• 5.8	Potenzen und Polynome	71
5.9	Der Vertauschungssatz	73
• 5.10	Lineare Abbildungen	74
6	Die Algorithmen von Gauß, Banachiewicz und Gauß-Jordan	75
• 6.1	Zielsetzung	75
• 6.2	Das Nullenkreuz	76
• 6.3	Der Gaußsche Algorithmus in expliziter Durchführung	76
• 6.4	Der Gaußsche Algorithmus in impliziter Durchführung	78
• 6.5	Der Algorithmus von Banachiewicz	79
• 6.6	Der Algorithmus von Gauß-Jordan	82
• 6.7	Hermitesche (reellsymmetrische) Matrix	84
• 6.8	Rechenaufwand	85
• 6.9	Pivotregulierung	86
• 6.10	Pivotregulierung bei hermitescher Matrix	87
• 6.11	Bewegliches Pivot	91
• 6.12	Reelle ganzzahlige Äquivalenztransformationen	93
• 6.13	Der verkürzte Euklidische Algorithmus	98
• 6.14	Reelle ganzzahlige Kongruenztransformationen	101
6.15	Komplexe ganzzahlige Transformationen	102
6.16	Die Normalform	104
6.17	Dreieckszerlegung einer quadratischen Matrix	105
• 6.18	Eigenzeilen und Eigenspalten einer singulären Matrix	107
6.19	Die normierte Eigendyade als Projektor	111
• 6.20	Schlußbemerkung	114
7	Auflösung linearer Gleichungssysteme	115
• 7.1	Aufgabenstellung	115
• 7.2	Drei Kardinalforderungen	116
• 7.3	Der Algorithmus von Gauß	118
• 7.4	Der Algorithmus von Banachiewicz	122
• 7.5	Der Algorithmus von Gauß-Jordan	123
• 7.6	Reguläre quadratische Matrix.	
	Determinante, Inverse und Adjungierte	124
7.7	Pivotregulierung. Wiederholung der Rechnung	126
• 7.8	Homogene Gleichungssysteme	128

• 7.9	Hermiteische (reellsymmetrische) Matrix	130
7.10	Allgemeine inhomogene Gleichungssysteme	132
7.11	Ganzzahlige Gleichungssysteme	140
• 7.12	Zusammenfassung	142
8	Orthogonalsysteme	144
8.1	Die Normalform eines Matrizenproduktes	144
8.2	Biorthonormalsysteme	146
8.3	Das vervollständigte Matrizenprodukt	148
8.4	Kongruenztransformation. Orthogonalsysteme	151
8.5	Eine Variante	155
8.6	Überbestimmte Gleichungssysteme. Kondensation. Die Pseudoinverse	156
9	Lineare Abhängigkeit und Rang	159
• 9.1	Die Pivotmatrix	159
• 9.2	Die Basis	160
9.3	Dyadische Zerlegung	161
9.4	Der dominierende Minor	162
9.5	Lineare Abhängigkeit von Vektoren und Matrizen	163
9.6	Der Rang eines Matrizenproduktes	164
10	Gebundene Transformationen	167
• 10.1	Die simultane Äquivalenztransformation	167
• 10.2	Die dyadische Zerlegung eines Matrizenpaares	170
• 10.3	Die Spektralzerlegung eines Matrizenpaares	173
• 10.4	Normale Matrizenpaare	175
• 10.5	Potenzen und Polynome	177
10.6	Die Produktzerlegung einer diagonalähnlichen Matrix	181
• 10.7	Normalformen von Matrizenpaaren	182
• 10.8	Die strikte Ähnlichkeitstransformation. Die drei Grundoperationen	184
• 10.9	Die gequantelte Ähnlichkeitstransformation	188
10.10	Die Ähnlichkeitstransformation auf die Begleitmatrix	192
• 10.11	Normiert-unitäre Transformationen. Unitäre Ergänzung	196
10.12	Nicht-normiert unitäre Transformationen	201
10.13	Unitäre Transformation auf obere Hessenberg-Matrix	204
10.14	Ganzzahlige Ähnlichkeitstransformation auf obere Hessenberg- Matrix	208
10.15	Lineare Abbildungen	212
• 10.16	Zusammenfassung. Ausblick	215

III. Kapitel Quadratische Formen nebst Anwendungen	218
11 Quadratische Formen	219
• 11.1 Darstellung quadratischer und bilinearer Formen	219
• 11.2 Definite quadratische Formen	222
11.3 Indefinite quadratische Formen	224
11.4 Transformation quadratischer Formen. Invarianten	227
• 11.5 Hermitesche Formen	230
• 11.6 Flächen zweiten Grades	231
12 Einige Anwendungen quadratischer Formen	234
12.1 Anwendung in der Ausgleichsrechnung	234
12.2 Vektorielltes Produkt und Abstandsquadrat	238
12.3 Massen- und Flächenmoment zweiten Grades	239
12.4 Die kinetische Energie eines starren Körpers	242
12.5 Die potentielle Energie einer elastischen Feder	243
IV. Kapitel Die Eigenwertaufgabe	245
13 Eigenwerte und Eigenvektoren	246
• 13.1 Das allgemeine einparametrische Eigenwertproblem	246
• 13.2 Reguläre Äquivalenztransformation. Invarianten	249
• 13.3 Polynommatrizen	250
• 13.4 Das lineare Eigenwertproblem (Matrizenpaare)	251
• 13.5 Orthogonalität der Links- und Rechtseigenvektoren	253
• 13.6 Das spezielle Eigenwertproblem	255
• 13.7 Die charakteristische Gleichung	257
• 13.8 Kondensation. Der Formenquotient	260
13.9 Die Eigenwerte eines Matrizenproduktes	261
13.10 Reelle Paare mit konjugiert-komplexen Eigenwerten	264
13.11 Der Satz von Cayleigh-Hamilton	267
14 Diagonalähnliche Matrizenpaare	269
• 14.1 Die Diagonalmatrix für $s = n$	269
• 14.2 Die Block-Diagonalmatrix für $s < n$	270
• 14.3 Die Spektralzerlegung eines diagonalähnlichen Paares. Eigenwerte und Eigensterme	273
• 14.4 Eine spezielle lineare Vektordifferentialgleichung zweiter Ordnung	276
14.5 Das Minimalpolynom	279
15 Diagonalkongruente (normale) Matrizenpaare	282
• 15.1 Die Normalitätseigenschaft	282
• 15.2 Hermitesche (reellsymmetrische) Paare	284
15.3 Schiefhermitesche (schiefsymmetrische) Matrix	286
15.4 B -unitäres Matrizenpaar	286
• 15.5 Reelle Flächenpaare zweiten Grades. Das Hauptachsenproblem	287

• 15.6	Lineare Schwingungssysteme	292
15.7	Die hermiteschen Komponenten eines normalen Paares	299
15.8	Fragen der Normierung	301
15.9	Die singulären Werte eines allgemeinen Matrizenpaares	303
• 15.10	Die Struktur eines Matrizenpaares	306
16	Die Block-Diagonalmatrix. Strukturfragen	307
• 16.1	Zielsetzung	307
• 16.2	Die Transformation auf obere Dreiecksmatrix	311
• 16.3	Die Transformation auf Block-Diagonalmatrix	318
16.4	Die Struktur der Eigenmatrix. Natürliche Charakteristik	324
16.5	Die Normierung der Kodiagonale	327
16.6	Die Transformation auf die Strukturmatrix	330
16.7	Die Jordan-Matrix	333
16.8	Die Jordan-Spektralzerlegung	335
16.9	Ein Rückblick von höherer Warte	339
16.10	Eigen- und Hauptvektoren	340
16.11	Zusammenfassung. Historisches	346
17	Eigenwerte spezieller Matrizen	347
17.1	Spaltensummenkonstante und stochastische Matrizen	347
17.2	Schachbrettmatrizen	350
17.3	Zyklische Matrizen	354
17.4	Spezielle dreireihige Bandmatrizen	356
17.5	Die Matrix von Boothroyd/Dekker	361
18	Parametermatrizen	362
18.1	Problemstellung	362
18.2	Spektralzerlegung einer diagonalähnlichen Parametermatrix	362
18.3	Diagonalähnliche Matrizen-tupel	368
18.4	Selbstnormierende Tupel	370
18.5	Über die Eigenwerte von Matrizenprodukten	371
18.6	Parameternormale Matrizen	372
18.7	Lineare Abhängigkeit von einem Leitpaar	376
V.	Kapitel Matrizenungleichungen und Matrizenfunktionen	379
19	Matrizengleichungen	379
• 19.1	Problemstellung	379
• 19.2	Die Matrizenungleichung $AXB = C$	380
• 19.3	Die mehrgliedrige lineare Matrizenungleichung	384
• 19.4	Die zweigliedrige lineare Matrizenungleichung	385
19.5	Elimination	390
19.6	Dekomposition (Entflechtung)	393
19.7	Rekursion	396
19.8	Entkopplung	397

19.9	Algebraisch nichtlineare Matrizengleichungen	398
19.10	Zusammenfassung. Ausblick	400
20	Matrizenfunktionen	401
• 20.1	Der Austausch von Eigenwerten. Deflation	401
• 20.2	Was ist eine Matrizenfunktion?	404
• 20.3	Die skalare Taylor-Entwicklung	405
• 20.4	Die Taylor-Entwicklung im Gesamtraum	407
• 20.5	Die Taylor-Entwicklung im Eigenraum (Hauptunterraum). Quasipolynome	409
20.6	Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten ..	414
20.7	Mehrdeutige Funktionen	419
VI.	Kapitel Ergänzungen	422
21	Kondensation. Der Rayleigh-Quotient und sein Wertebereich ...	423
• 21.1	Was ist ein Kondensat?	423
• 21.2	Der Rayleigh-Quotient eines normalen Paares. Der Wertebereich	423
21.3	Der Einfluß einer Störung	427
21.4	Der Wertebereich eines nichtnormalen Paares	429
21.5	Kondensation höherer Ordnung	434
22	Blockmatrizen	438
• 22.1	Die Matrizenmultiplikation in Blöcken	438
• 22.2	Die reduzierte Blockmatrix	439
• 22.3	Blockdreiecksmatrizen	444
• 22.4	Inverse und Adjungierte einer vierteiligen Hypermatrix	445
• 22.5	Die Identität von Frobenius/Schur/Woodbury	450
22.6	Abgeänderte (gestörte, benachbarte) Gleichungssysteme	454
22.7	Singuläre Matrizenpaare	457
23	Expansion von Polynomen und Polynommatrizen	462
• 23.1	Zielsetzung	462
• 23.2	Expansion von Günther	463
23.3	Diagonalexpansion	464
23.4	Wiederholte Diagonalexpansion	474
23.5	Diagonalexpansion mit konstanten Defekten	476
23.6	Diagonalexpansion mit variablen Defekten	481
• 23.7	Zusammenfassung	482
	Schlußbemerkung	483
	Weiterführende Literatur	485
	Lehr- und Fachbücher	485
	Einzelveröffentlichungen	487
	Namen- und Sachverzeichnis	489

Matrizen und ihre Anwendungen 1

Grundlagen Für Ingenieure, Physiker und Angewandte
Mathematiker

Zurmühl, R.; Falk, S.

1997, XIV, 496 S., Hardcover

ISBN: 978-3-642-17542-8