

Inhaltsverzeichnis

1. Wege in euklidischen Ebenen

1.0	Wege in Analysis, Geometrie und Physik	1
1.1	Grundbegriffe über C^r-Wege	2
1.1.1	Differenzierbare, immersive, C^r -Wege in $\mathbb{R}$ -Vektorräumen	2
1.1.2	Umparametrisierungen von Wegen	5
1.1.3	Kurven bzw. orientierte Kurven als Wege-Klassen	6
1.1.4	Analysis erster Ordnung von differenzierbaren Wegen	7
1.1.5	Geometrische Definition der Tangenten und der Glattheit	8
1.2	Weglänge (= Bogenlänge)	11
1.2.1	Die Länge kompakter Wege in normierten $\mathbb{R}$ -Vektorräumen	11
1.2.2	Kürzeste Verbindungswege in normierten $\mathbb{R}$ -Vektorräumen	13
1.2.3	Weglängenbegriff – Inhalt k -dim. Flächen („Schwarzscher Stiefel“)	14
1.2.4	Das „3. Problem“ von David HILBERT	16
1.2.5	Integraldarstellung der Länge differenzierbarer Wege	18
1.2.6	(Um-)Parametrisierung auf Weglänge	19
1.2.7	Die Ableitung nach der Weglänge immersiver C^1 -Wege	21
1.3	Winkelfunktionen, Schwenk, Umlaufzahlen ebener Wege	23
1.3.1	Orientierungen, komplexe Strukturen von $\mathbb{R}$ -Vektorräumen	23
1.3.2	Zweidimensionale orientierte, euklidische Vektorräume	25
1.3.3	Polarkoordinatendarstellung und der Schwenk ebener Wege	28
1.3.4	Polarwinkelform – Winkelgeschwindigkeit ebener Wege	31
1.3.5	Umlaufzahlen geschlossener ebener Wege um einen Punkt	32
	Homotopie-Invarianz der Umlaufzahl	35
	Schnittzahlsatz (nach Leopold KRONECKER)	36
	Strahlkriterium (nach Leopold KRONECKER)	37
1.3.6	Anwendungen des Umlaufzahl-Begriffs	40
	„Umlaufsatz“ (Tangentendrehzahlen immersiver C^1 -Jordan-Wege)	40
	Kronecker-Prinzip	45
	Poincaré-Bohl-Lemma	45
	Brouwer-Fixpunktsatz	46
	Borsuk-Ulam-Satz	46

	Dimensionsinvarianz-Satz	46
	„Sandwich-Satz“	47
	Holditch-Integralsatz	48
1.3.7	Lokaler Grad – Topologische Invarianz der Umlaufzahl	50
1.3.8	Gebietsinvarianz – Jordan-Kurvensatz	55
	Ames-Hadamard-Lemma	55
	Gebietsinvarianz-Satz	55
	Jordan-Ames-Kurvensatz (mit Beiträgen zu dessen Geschichte)	56
1.4	Krümmungstheorie ebener immersiver Wege	61
1.4.0	Zur Geschichte	61
1.4.1	Die orientierte Krümmung ebener immersiver Wege	62
	Frenet-Differentialgleichungen	66
1.4.2	Kongruenz und Gestaltgleichheit in euklidischen Vektorräumen	67
	Satz von der freien Beweglichkeit in euklidischen Vektorräumen	70
	Krümmungsgleichheit und Kongruenz ebener Wege	72
1.4.3	Orientierte Krümmung und Seitenlage zur Tangenten	73
	Positions-Lemma für immersive C^2 -Wege	74
	Wendepunkte und echte Wendepunkte	76
1.4.4	Konvexe (Jordan-)Wege – Ovale Wege („Eilinen“)	77
	Sehnenlängen-Vergleichssatz (für gleichlange ebene Wege)	82
1.4.5	Zu einem Vierscheitelsatz für ovale C^2 -Wege	84
	Kriterium für (eigentliche) Extremscheitel	84
	Ein Vierscheitelsatz	85
	Zur (Ideen-) Geschichte der Vierscheitelsätze	87
1.4.6	Intermezzo: Ein Mittel- und Grenzwertsatz n -ter Ordnung	90
1.4.7	Krümmungsradius – Krümmungskreis – Evolute	94
	Kennzeichnung des Krümmungsmittelpunktes und des	
	Krümmungskreises (nach Isaac NEWTON – Johann BERNOULLI)	96
	Evoluten monoton gekrümmter C^2 -Wege ohne Wendepunkte	98
1.4.8	Lagebeziehung von Bahnen und Krümmungskreisen ebener Wege	100
	Inklusionen der Krümmungskreisscheiben	
	monoton gekrümmter ebener Wege	100
	Lage eines Weges relativ zu seinem Krümmungskreis	
	in einem Extremscheitel	103
1.4.9	Konstruktion mit Zirkel und Lineal von Linienelementen	
	und Scheitelkrümmungskreisen bei Kegelschnitt-Wege	107
	Ellipsenweg	107
	Parabelweg	108
	Hyperbel(ast)weg	109

1.5	Zykloidenwege in der Mechanik	110
1.5.1	Kinematische Erzeugung der Zykloidenwege (als Rollwege)	110
	Zur Geometrie der Zykloidenwege	111
1.5.2	Das Zykloidenpendel von Christiaan HUYGENS	112
1.5.3	Brachistochrone (= zeit-kürzeste) ebene Fallwege von höher- zu tiefergelegenen Punkten nach Johann BERNOULLI	115
	Die zyklroidischen Fallwege sind brachistochrone Fallwege	117
	Verbindbarkeit durch zyklroidische Fallwege; deren Fallzeiten	120
1.5.4	Zur (Ideen-) Geschichte der Brachistochronen-Aufgabe	126
1.6	Einhüllende Wege für Wegescharen	135
1.6.1	C^1 -Einhüllende für C^r -Scharen ($r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) von C^1 -Wegen	135
1.6.2	Beispiele für C^r -Scharen von C^1 -Wegen mit C^1 -Einhüllenden	137
	C^1 -Einhüllende für gewisse ebene C^2 -Geradenscharen	141
1.6.3	Beispiele aus der Lichtstrahlen-Optik (Katakaustiken)	144
	Katakaustik eines parabolischen Hohlspiegels	145
	Katakaustik eines sphärischen Hohlspiegels	145
1.6.4	Quadratische Parabelwege als C^1 -Einhüllende affin-parametrisierter Scharen ihrer Tangenten	148
1.6.5	Schmiegeparabeln immersiver C^3 -Wege ohne Wendepunkte	151
	Anwendung auf Kurvenlineale	153
	Schmiegeparabel versus 2-te Taylor-Parabel	153
1.7	Anhang	154
1.7.1	Eine Funktion mit bemerkenswertem Extremwert-Verhalten	154
1.8	Literatur zu Kapitel 1	155
2.	Kinematik der Speziellen Relativitätstheorie	
2.0	Zur Geschichte	159
2.1	Lorentzsche Vektorräume – Analysis affiner Räume	164
2.1.1	Zeitorientierte lorentzsche Vektorräume	164
	Zeit-, Raum-, Lichtartigkeit in Inneren-Produkt-Vektorräumen	164
	Lorentzsche Vektorräume	165
	Zeitartigkeits-Lemma (Zeitartige Cauchy-Schwarz-Ungleichung)	165

	Zeitorientierung	167
	Lichtkegel	168
	Bestimmtheit lorentzscher innerer Produkte durch ihre Lichtkegel	169
2.1.2	m -dimensionale $\mathbb{R}$ -affine Räume ($m \in \mathbb{N}$)	171
	„Goldene Regel“ des affinen Kalküls	172
	Affine V -Karten eines m -dim. $\mathbb{R}$ -affinen Raumes $(M, +, V)$	172
	Affinkombinationen von Punkten $\mathbb{R}$ -affiner Räume	173
2.1.3	Kanonische Topologie und C^∞ -Abbildungen $\mathbb{R}$ -affiner Räume	174
2.1.4	C^∞ -Untermannigfaltigkeiten $\mathbb{R}$ -affiner Räume	175
2.1.5	Die zu einer C^∞ -Untermannigfaltigkeit K eines $\mathbb{R}$ -affinen Raumes $(M, +, V)$ in $p \in K$ tangentialen Vektoren von V	178
2.1.6	k -dim. affine Unterräume eines $\mathbb{R}$ -affinen Raumes als k -dim. C^∞ -Untermannigfaltigkeiten dieses Raumes	182
2.1.7	Intermezzo: Zum Begriff der m -dim. C^∞ -Mannigfaltigkeit	183
2.2	Minkowski-Welt – Beobachter – Normaluhren	184
2.2.1	Minkowski-Welt	184
2.2.2	Materielle Teilchen – Beobachter Inertialität (Kräftefreiheit) Evolutionsrichtung	185 186 186
2.2.3	(Beobachter begleitende) Normaluhren Physikalische und mathematische Deutung der Normaluhren Existenz und „Einzigkeit“ begleitender Normaluhren Inertiale Beobachter und die sie begleitenden Normaluhren	187 188 188 190
2.2.4	Lichtsignale – Photonen	190
2.2.5	Kausal-Relation	191
2.3	Zeitmessung bzgl. (inertialer) Beobachter	191
2.3.1	Die Eigenzeit eines Beobachters	191
2.3.2	LANGEVINS Zwillinge	192
2.3.3	Gleichzeitigkeit bzgl. eines inertialen Beobachters	194
2.3.4	Messung von Gleichzeitigkeit mittels Radarechos	194
2.3.5	Synchronisierung (Uhren-Vergleich) bzgl. inertialer Beobachter	196
2.3.6	Zeitmessung inertialer Beobachter an beliebigen Ereignissen Lebenszeiten Beschränkte Lebens-Eigenzeiten materieller Teilchen	197 197 198
2.3.7	EINSTEINS Zeit-Dilatation	199
2.4	Räumliche Distanzen bzgl. inertialer Beobachter	200

2.4	Räumliche Distanzen bzgl. inertialer Beobachter	200
2.4.1	Räumliche Distanz zu einem inertialen Beobachter	200
2.4.2	Ruhe bzgl. eines inertialen Beobachters	201
2.4.3	Distanz zweier Ereignisse bzgl. eines inertialen Beobachters	202
	Radardoppelecho-(Gedanken-)Experiment	202
2.4.4	Physikalische Einheiten für Zeiten und räumliche Distanzen	203
2.5	Raum und Zeit eines inertialen Beobachters B	203
2.5.1	Raum- und Zeitpunkte bzgl. B	203
2.5.2	Der Raum von B als 3-dim. affiner euklidischer Raum	204
2.5.3	Die Zeit von B als 1-dim. affiner euklidischer Raum	205
2.5.4	Die (Lorentz-orthogonale) Aufspaltung der Minkowski-Welt durch B in seinen Raum und seine Zeit	206
2.6	Eigenschaften der Lichtgeschwindigkeit c	206
2.6.1	Räumliche Bahnen, Geschwindigkeiten bzgl. inertialer Beobachter	206
2.6.2	Geschwindigkeiten von Photonen bzgl. inertialer Beobachter	207
2.6.3	Geschwindigkeiten materieller Teilchen sind kleiner als c	208
2.7	Korrelation der von zwei inertialen Beobachtern gemessenen Zeiten und Distanzen	209
2.7.1	Korrelation der gemessenen Zeiten und Distanzen bzgl. zweier inertialer Beobachter – Lorentz-Transformation	209
2.7.2	Minimalität der Distanz gleichzeitiger Ereignisse	211
2.7.3	Kräftefreie starre Körper und deren räumliche Vermessung	211
2.7.4	Fitzgerald-Lorentz-Kontraktion nach EINSTEIN	212
2.8	Additionstheorem der Geschwindigkeiten	214
2.9	Literatur zu Kapitel 2	216
	Lexikon der Abkürzungen und Symbole	218
	Index	219

Wege in euklidischen Ebenen Kinematik der Speziellen
Relativitätstheorie

Eine Auswahl geometrischer Themen mit Beiträgen zu
deren Ideen-Geschichte

Dombrowski, P.

1999, XVI, 230 S. 2 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-540-66055-2