

# Inhaltsverzeichnis

Vorwort zur vierten Ausgabe . . . . .	VII
Vorwort zur Deutschen Ausgabe . . . . .	IX
Ratschläge für die Leser . . . . .	XI
Was ist Mathematik? . . . . .	XIX

## Erstes Kapitel

### Die natürlichen Zahlen

Einleitung . . . . .	1
§ 1. Das Rechnen mit ganzen Zahlen . . . . .	1
1. Gesetze der Arithmetik S. 1 – 2. Darstellung der positiven ganzen Zahlen S. 4	
3. Das Rechnen in nichtdezimalen Systemen S. 6	
§ 2. Die Unendlichkeit des Zahlensystems. Mathematische Induktion . . . . .	8
1. Das Prinzip der mathematischen Induktion S. 8 – 2. Die arithmetische Reihe	
S. 10 – 3. Die geometrische Reihe S. 11 – 4. Die Summe der ersten $n$ Quadrate	
S. 12 – 5. Eine wichtige Ungleichung S. 13 – 6. Der binomische Satz S. 13 – 7. Wei-	
tere Bemerkungen zur mathematischen Induktion S. 15	

Ergänzung zu Kapitel I. Zahlentheorie . . . . .	17
---	----

Einleitung . . . . .	17
§ 1. Die Primzahlen . . . . .	17
1. Grundtatsachen S. 17 – 2. Die Verteilung der Primzahlen S. 20 – a) Formeln	
zur Konstruktion von Primzahlen S. 21 – b) Primzahlen in arithmetischen Folgen	
S. 21 – c) Der Primzahlsatz S. 22 – d) Zwei ungelöste Probleme, die Primzahlen	
betreffen S. 24	
§ 2. Kongruenzen . . . . .	26
1. Grundbegriffe S. 26 – 2. Der kleine Fermatsche Satz S. 30 – 3. Quadratische	
Reste S. 31	
§ 3. Pythagoreische Zahlen und großer Fermatscher Satz . . . . .	32
§ 4. Der euklidische Algorithmus . . . . .	34
1. Die allgemeine Theorie S. 34 – 2. Anwendung auf den Fundamentalsatz der	
Arithmetik S. 38 – 3. EULERS $\varphi$ -Funktion. Nochmals kleiner Fermatscher Satz	
S. 39 – 4. Kettenbrüche. Diophantische Gleichungen S. 40	

## Zweites Kapitel

### Das Zahlensystem der Mathematik

Einleitung . . . . .	42
§ 1. Die rationalen Zahlen . . . . .	42
1. Messen und Zählen S. 42 – 2. Die innere Notwendigkeit der rationalen Zahlen.	
Prinzip der Verallgemeinerung S. 44 – 3. Geometrische Deutung der rationalen	
Zahlen S. 46	
§ 2. Inkommensurable Strecken, irrationale Zahlen und der Grenzwertbegriff . . .	47
1. Einleitung S. 47 – 2. Unendliche Dezimalbrüche S. 49 – 3. Grenzwerte. Unend-	
liche geometrische Reihen S. 51 – 4. Rationale Zahlen und periodische Dezimal-	
brüche S. 54 – 5. Allgemeine Definition der Irrationalzahlen durch Intervall-	
schachtelungen S. 55 – 6. Andere Methoden zur Definition der irrationalen Zahlen.	
Dedekindsche Schnitte S. 57	

§ 3. Bemerkungen über analytische Geometrie . . . . .	58
1. Das Grundprinzip S. 58 – 2. Gleichungen von Geraden und Kurven S. 59	
§ 4. Die mathematische Analyse des Unendlichen . . . . .	62
1. Grundbegriffe S. 62 – 2. Die Abzählbarkeit der rationalen Zahlen und die Nicht-abzählbarkeit des Kontinuums S. 63 – 3. CANTORs „Kardinalzahlen“ S. 67	
4. Die indirekte Beweismethode S. 68 – 5. Die Paradoxien des Unendlichen S. 69	
6. Die Grundlagen der Mathematik S. 70	
§ 5. Komplexe Zahlen . . . . .	71
1. Der Ursprung der komplexen Zahlen S. 71 – 2. Die geometrische Deutung der komplexen Zahlen S. 74 – 3. Die Moivresche Formel und die Einheitswurzeln S. 78	
4. Der Fundamentalsatz der Algebra S. 80	
§ 6. Algebraische und transzendente Zahlen . . . . .	82
1. Definition und Existenz S. 82 – Der Liouvillesche Satz und die Konstruktion transzendenter Zahlen S. 83	
Ergänzung zu Kapitel II. Mengenalgebra (Boolesche Algebra) . . . . .	86
1. Allgemeine Theorie S. 86 – 2. Anwendung auf die mathematische Logik S. 89	
3. Eine Anwendung auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung S. 91	

### Drittes Kapitel

#### Geometrische Konstruktionen. Die Algebra der Zahlkörper

Zahlkörper . . . . .	93
Einleitung . . . . .	93
I. Teil. Unmöglichkeitbeweise und Algebra . . . . .	95
§ 1. Grundlegende geometrische Konstruktionen . . . . .	95
1. Rationale Operationen und Quadratwurzeln S. 95 – 2. Regelmäßige Vielecke S. 97 – 3. Das Problem des Apollonius S. 99	
§ 2. Konstruierbare Zahlen und Zahlkörper . . . . .	101
1. Allgemeine Theorie S. 101 – 2. Alle konstruierbaren Zahlen sind algebraisch S. 106	
§ 3. Die Unlösbarkeit der drei griechischen Probleme . . . . .	107
1. Verdoppelung des Würfels S. 107 – 2. Ein Satz über kubische Gleichungen S. 108 – 3. Winkeldreiteilung S. 109 – 4. Das regelmäßige Siebeneck S. 111	
5. Bemerkungen zum Problem der Quadratur des Kreises S. 112	
II. Teil. Verschiedene Konstruktionsmethoden . . . . .	112
§ 4. Geometrische Abbildungen. Die Inversion . . . . .	112
1. Allgemeine Bemerkungen S. 112 – 2. Eigenschaften der Inversion S. 113	
3. Geometrische Konstruktion inverser Punkte S. 115 – 4. Halbierung einer Strecke und Bestimmung des Kreismittelpunktes mit dem Zirkel allein S. 116	
§ 5. Konstruktionen mit anderen Hilfsmitteln. Mascheroni-Konstruktionen mit dem Zirkel allein . . . . .	117
1. Eine klassische Konstruktion zur Verdoppelung des Würfels S. 117 – Beschränkung auf die Benutzung des Zirkels allein S. 117 – 3. Das Zeichnen mit mechanischen Geräten. Mechanische Kurven. Zykloiden. S. 121 – 4. Gelenkmechanismen. PEAUCELLIERs und HARTs Inversoren. S. 123	
§ 6. Weiteres über die Inversion und ihre Anwendungen . . . . .	125
1. Invarianz der Winkel. Kreisscharen S. 125 – 2. Anwendung auf das Problem des APOLLONIUS S. 127 – 3. Mehrfache Reflexionen S. 128	

### Viertes Kapitel

#### Projektive Geometrie. Axiomatik. Nichteuklidische Geometrien

§ 1. Einleitung . . . . .	130
1. Klassifizierung geometrischer Eigenschaften. Invarianz bei Transformationen S. 130 – 2. Projektive Transformationen S. 131	

§ 2. Grundlegende Begriffe . . . . .	132
1. Die Gruppe der projektiven Transformationen S. 132 – 2. Der Satz von DESARGUES S. 134	
§ 3. Das Doppelverhältnis . . . . .	135
1. Definition und Beweis der Invarianz S. 135 – 2. Anwendung auf das vollständige Vierseit S. 139	
§ 4. Parallelität und Unendlichkeit . . . . .	140
1. Unendlich ferne Punkte als „uneigentliche Punkte“ S. 140 – 2. Uneigentliche Elemente und Projektion S. 143 – 3. Doppelverhältnisse mit unendlich fernen Elementen S. 144	
§ 5. Anwendungen . . . . .	144
1. Vorbereitende Bemerkungen S. 144 – 2. Beweis des Desarguesschen Satzes in der Ebene S. 145 – 3. Der Pascalsche Satz S. 146 – 4. Der Satz von BRIANCHON S. 147	
5. Das Dualitätsprinzip S. 147	
§ 6. Analytische Darstellung . . . . .	148
1. Einleitende Bemerkungen S. 148 – 2. Homogene Koordinaten. Die algebraische Grundlage der Dualität S. 149	
§ 7. Aufgaben über Konstruktionen mit dem Lineal allein . . . . .	152
§ 8. Kegelschnitte und Flächen zweiter Ordnung . . . . .	153
1. Elementare metrische Geometrie der Kegelschnitte S. 153 – 2. Projektive Eigenschaften der Kegelschnitte S. 156 – 3. Kegelschnitte als Hüllkurven S. 158	
4. Pascals und Brianchons allgemeine Sätze für Kegelschnitte S. 161 – 5. Das Hyperboloid S. 162	
§ 9. Axiomatik und nichteuklidische Geometrie . . . . .	163
1. Die axiomatische Methode S. 163 – 2. Hyperbolische nichteuklidische Geometrie S. 166 – 3. Geometrie und Wirklichkeit S. 170 – 4. Poincarés Modell S. 171	
5. Elliptische oder Riemannsche Geometrie S. 172	
Anhang. Geometrie in mehr als drei Dimensionen . . . . .	174
1. Einleitung S. 174 – 2. Die analytische Definition S. 174 – 3. Die geometrische oder kombinatorische Definition S. 176	

### Fünftes Kapitel

#### Topologie

Einleitung . . . . .	180
§ 1. Die Eulersche Polyederformel . . . . .	181
§ 2. Topologische Eigenschaften von Figuren . . . . .	184
1. Topologische Eigenschaften S. 184 – 2. Zusammenhang S. 185	
§ 3. Andere Beispiele topologischer Sätze . . . . .	186
1. Der Jordansche Kurvensatz S. 186 – 2. Das Vierfarbenproblem S. 188 – 3. Der Begriff der Dimension S. 189 – 4. Ein Fixpunktsatz S. 192 – 5. Knoten S. 195	
§ 4. Topologische Klassifikation der Flächen . . . . .	195
1. Das Geschlecht einer Fläche S. 195 – 2. Die Eulersche Charakteristik einer Fläche S. 197 – 3. Einseitige Flächen S. 198	
Anhang . . . . .	200
1. Der Fünffarbensatz S. 200 – 2. Der Jordansche Kurvensatz für Polygone S. 202	
3. Der Fundamentalsatz der Algebra S. 204	

### Sechstes Kapitel

#### Funktionen und Grenzwerte

Einleitung . . . . .	207
§ 1. Variable und Funktion . . . . .	208
1. Definitionen und Beispiele S. 208 – 2. Das Bogenmaß eines Winkels S. 211	
3. Graphische Darstellung einer Funktion. Inverse Funktionen S. 212 – 4. Zusammengesetzte Funktionen S. 214 – 5. Stetigkeit S. 215 – 6. Funktionen von mehreren Veränderlichen S. 217 – 7. Funktionen und Transformationen S. 219	

§ 2. Grenzwerte . . . . .	220
1. Der Grenzwert einer Folge $a_n$ S. 220 – 2. Monotone Folgen S. 224 – 3. Die Eulersche Zahl $e$ S. 226 – 4. Die Zahl $\pi$ S. 227 – 5. Kettenbrüche S. 229	
§ 3. Grenzwerte bei stetiger Annäherung . . . . .	231
1. Einleitung. Allgemeine Definition S. 231 – 2. Bemerkungen zum Begriff des Grenzwertes S. 232 – 3. Der Grenzwert von $\frac{\sin x}{x}$ S. 234 – 4. Grenzwerte für $x \rightarrow \infty$ S. 235	
§ 4. Genaue Definition der Stetigkeit . . . . .	236
§ 5. Zwei grundlegende Sätze über stetige Funktionen . . . . .	237
1. Der Satz von BOLZANO S. 237 – 2. Beweis des Bolzanoschen Satzes S. 238 – 3. Der Satz von WEIERSTRASS über Extremwerte S. 239 – 4. Ein Satz über Zahlenfolgen. Kompakte Mengen S. 240	
§ 6. Einige Anwendungen des Satzes von BOLZANO . . . . .	241
1. Geometrische Anwendungen S. 241 – 2. Anwendung auf ein mechanisches Problem S. 243	
Ergänzung zu Kapitel VI. Weitere Beispiele für Grenzwerte und Stetigkeit . . . . .	245
§ 1. Beispiele von Grenzwerten . . . . .	245
1. Allgemeine Bemerkungen S. 245 – 2. Der Grenzwert von $q^n$ S. 245 – 3. Der Grenzwert von $\sqrt[n]{p}$ S. 246 – 4. Unstetige Funktionen als Limites stetiger Funktionen S. 247 – 5. Grenzwerte durch Iteration S. 248	
§ 2. Ein Beispiel für Stetigkeit . . . . .	249
Siebentes Kapitel	
<b>Maxima und Minima</b>	
Einleitung . . . . .	251
§ 1. Probleme aus der elementaren Geometrie . . . . .	252
1. Die maximale Fläche eines Dreiecks mit zwei gegebenen Seiten S. 252 – 2. Der Satz des Heron. Extremaleigenschaften von Lichtstrahlen S. 252 – 3. Anwendungen auf Probleme für Dreiecke S. 253 – 4. Tangentialeigenschaften der Ellipse und Hyperbel. Entsprechende Extremaleigenschaften S. 254 – 5. Extreme Abstände von einer gegebenen Kurve S. 256	
§ 2. Ein allgemeines Prinzip bei Extremalproblemen . . . . .	258
1. Das Prinzip S. 258 – 2. Beispiele S. 259	
§ 3. Stationäre Punkte und Differentialrechnung . . . . .	260
1. Extremwerte und stationäre Punkte S. 260 – 2. Maxima und Minima von Funktionen mehrerer Variablen. Sattelpunkte S. 261 – 3. Minimumpunkte und Topologie S. 262 – 4. Der Abstand eines Punktes von einer Fläche S. 263	
§ 4. Das Schwarzsche Dreiecksproblem . . . . .	264
1. Der Schwarzsche Spiegelungsbeweis S. 264 – 2. Ein zweiter Beweis S. 265	
3. Stumpfwinklige Dreiecke S. 267 – 4. Dreiecke aus Lichtstrahlen S. 267 – 5. Bemerkungen über Reflexionsprobleme und ergodische Bewegung S. 268	
§ 5. Das Steinersche Problem . . . . .	269
1. Das Problem und seine Lösung S. 269 – 2. Diskussion der beiden Alternativen S. 270 – 3. Ein komplementäres Problem S. 272 – 4. Bemerkungen und Übungen S. 272 – 5. Verallgemeinerung auf das Straßennetz-Problem S. 273	
§ 6. Extrema und Ungleichungen . . . . .	274
1. Das arithmetische und geometrische Mittel zweier positiver Größen S. 274	
2. Verallgemeinerung auf $n$ Variablen S. 275 – 3. Die Methode der kleinsten Quadrate S. 276	
§ 7. Die Existenz eines Extremums. Das Dirichletsche Prinzip . . . . .	277
1. Allgemeine Bemerkungen S. 277 – 2. Beispiele S. 279 – 3. Elementare Extremalprobleme S. 280 – 4. Schwierigkeiten bei komplizierteren Problemen S. 282	
§ 8. Das isoperimetrische Problem . . . . .	283

- § 9. Extremalprobleme mit Randbedingungen. Zusammenhang zwischen dem Steiner-  
schen Problem und dem isoperimetrischen Problem . . . . . 285
- § 10. Die Variationsrechnung . . . . . 288
1. Einleitung S. 288 – 2. Die Variationsrechnung. Das Fermatsche Prinzip in der  
Optik S. 289 – 3. BERNOULLIs Behandlung des Problems der Brachystochrone  
S. 290 – 4. Geodätische Linien auf einer Kugel. Geodätische Linien und Maxi-  
minima S. 291
- § 11. Experimentelle Lösungen von Minimumproblemen. Seifenhautexperimente . . . 292
1. Einführung S. 292 – 2. Seifenhautexperimente S. 293 – 3. Neue Experimente zum  
Plateauschen Problem S. 294 – 4. Experimentelle Lösungen anderer mathemati-  
scher Probleme S. 297

## Achstes Kapitel

### Die Infinitesimalrechnung

- Einleitung . . . . . 302
- § 1. Das Integral . . . . . 303
1. Der Flächeninhalt als Grenzwert S. 303 – 2. Das Integral S. 304 – 3. Allgemeine  
Bemerkungen zum Integralbegriff. Endgültige Definition S. 307 – 4. Beispiele. In-  
tegration von  $x^n$  S. 308 – 5. Regeln der Integralrechnung S. 312
- § 2. Die Ableitung. . . . . 315
1. Die Ableitung als Steigung S. 315 – 2. Die Ableitung als Grenzwert S. 316  
3. Beispiele S. 317 – 4. Die Ableitungen der trigonometrischen Funktionen S. 320  
5. Differentiation und Stetigkeit S. 320 – 6. Ableitung und Geschwindigkeit. Zweite  
Ableitung und Beschleunigung S. 321 – 7. Die geometrische Bedeutung der zweiten  
Ableitung S. 323 – 8. Maxima und Minima S. 324
- § 3. Die Technik des Differenzierens . . . . . 324
- § 4. Die Leibnizsche Schreibweise und das „Unendlich Kleine“ . . . . . 329
- § 5. Der Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung . . . . . 331
1. Der Fundamentalsatz S. 331 – 2. Erste Anwendungen. Integration von  $x^n$ ,  $\cos x$ ,  
 $\sin x$ ,  $\arctan x$  S. 334 – 3. Die Leibnizsche Formel für  $\pi$  S. 336
- § 6. Die Exponentialfunktion und der Logarithmus . . . . . 337
1. Definition und Eigenschaften des Logarithmus. Die Eulersche Zahl  $e$  S. 337 – 2.  
Die Exponentialfunktion S. 339 – 3. Differentiationsformeln für  $e^x$ ,  $a^x$ ,  $x^a$  S. 341  
4. Explizite Ausdrücke für  $e$ ,  $e^x$  und  $\ln x$  als Limites S. 342 – 5. Unendliche Reihen  
für den Logarithmus. Numerische Berechnung S. 344
- § 7. Differentialgleichungen . . . . . 346
1. Definition S. 346 – 2. Die Differentialgleichung der Exponentialfunktion. Radio-  
aktiver Zerfall. Wachstumsgesetz. Zinseszins S. 346 – 3. Weitere Beispiele. Ein-  
fachste Schwingungen S. 349 – 4. NEWTONs Grundgesetz der Dynamik S. 351
- Ergänzung zu Kapitel VIII . . . . . 353
- § 1. Grundsätzliche Fragen . . . . . 353
1. Differenzierbarkeit S. 353 – 2. Das Integral S. 355 – 3. Andere Anwendungen  
des Integralbegriffes. Arbeit. Länge S. 355
- § 2. Größenordnungen . . . . . 358
1. Die Exponentialfunktion und die Potenzen von  $x$  S. 358 – 2. Die Größenordnung  
von  $\ln(n!)$  S. 360
- § 3. Unendliche Reihen und Produkte . . . . . 361
1. Unendliche Reihen von Funktionen S. 361 – 2. Die Eulersche Formel  $\cos x +$   
 $i \sin x = e^{ix}$  S. 365 – 3. Die harmonische Reihe und die Zeta-Funktion. Das  
Eulersche Produkt für den Sinus S. 367
- § 4. Ableitung des Primzahlsatzes mit statistischen Methoden . . . . . 369

## Anhang

Ergänzungen, Probleme und Übungsaufgaben . . . . .	373
Arithmetik und Algebra . . . . .	373
Analytische Geometrie . . . . .	374
Geometrische Konstruktionen . . . . .	379
Projektive und nichteuklidische Geometrie . . . . .	380
Topologie . . . . .	381
Funktionen, Grenzwerte und Stetigkeit. . . . .	384
Maxima und Minima . . . . .	384
Infinitesimalrechnung . . . . .	386
Integrationstechnik . . . . .	388
Hinweise auf weiterführende Literatur . . . . .	392
Namen- und Sachverzeichnis . . . . .	394

Was ist Mathematik?

Courant, R.; Robbins, H.

2001, XXII, 399 S., Softcover

ISBN: 978-3-642-13700-6