

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1. Grundbegriffe	9
§ 1. Phasenräume	9
1. Beispiele für Evolutionsprozesse	9
2. Phasenflüsse	10
3. Intergralkurven im Richtungsfeld	12
4. Eine Differentialgleichung und ihre Lösungen	14
5. Die Evolutionsgleichung mit eindimensionalem Phasenraum	15
6. Beispiel: Die Gleichung der normalen Vermehrung	18
7. Beispiel: Die Explosionsgleichung	20
8. Beispiel: Die logistische Kurve	21
9. Beispiel: Fangquoten	22
10. Beispiel: Der Fang mit relativer Quote	23
11. Gleichungen mit mehrdimensionalem Phasenraum	24
12. Beispiel: Die Differentialgleichung eines Räuber-Beute Systems ..	25
13. Beispiel: Ein freies Teilchen auf der Geraden	28
14. Beispiel: Der freie Fall	29
15. Beispiel: Kleine Schwingungen	29
16. Beispiel: Das mathematische Pendel	31
17. Beispiel: Das umgedrehte Pendel	32
18. Beispiel: Kleine Schwingungen des sphärischen Pendels	32
§ 2. Vektorfelder auf der Geraden	33
1. Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen	33
2. Ein Gegenbeispiel	34
3. Beweis der Eindeutigkeit	35
4. Direkte Produkte	36
5. Beispiele direkter Produkte	37
6. Gleichungen mit trennbaren Veränderlichen	39
7. Beispiel: Das Volterra-Lotka Modell	41
§ 3. Lineare Gleichungen	46
1. Lineare homogene Gleichungen	46
2. Lineare homogene Gleichungen erster Ordnung mit periodischen Koeffizienten	48

3. Lineare inhomogene Gleichungen	50
4. Die Greensche Funktion und δ -förmige Inhomogenitäten	52
5. Lineare inhomogene Gleichungen mit periodischen Koeffizienten	55
§ 4. Phasenflüsse	56
1. Die Operation von Gruppen auf einer Menge	56
2. Einparametrische Transformationsgruppen	58
3. Einparametrische Gruppen von Diffeomorphismen	60
4. Das Vektorfeld der Phasengeschwindigkeit	62
§ 5. Die Operation von Diffeomorphismen auf Vektorfeldern und Richtungsfeldern	65
1. Die Operation glatter Abbildungen auf Vektoren	65
2. Die Operation von Diffeomorphismen auf Vektorfeldern	69
3. Variablensubstitution in einer Gleichung	71
4. Die Operation eines Diffeomorphismus auf einem Richtungsfeld	72
5. Die Operation eines Diffeomorphismus auf einem Phasenfluß	74
§ 6. Symmetrien	75
1. Symmetriegruppen	76
2. Anwendung einer einparametrischen Symmetriegruppe zur Integration einer Gleichung	77
3. Homogene Gleichungen	78
4. Quasihomogene Gleichungen	82
5. Ähnlichkeits- und Dimensionsbetrachtungen	83
6. Methoden der Integration von Differentialgleichungen	85
Kapitel 2. Grundlegende Sätze	89
§ 7. Rektifizierungssätze	89
1. Rektifizierbare Richtungsfelder	89
2. Existenz- und Eindeutigkeitssätze	93
3. Sätze über die stetige und differenzierbare Abhängigkeit einer Lösung von den Anfangswerten	93
4. Transformationen in der Zeit von t_0 bis t	96
5. Sätze über die stetige und differenzierbare Abhängigkeit von einem Parameter	98
6. Fortsetzungssätze	100
7. Rektifizierung eines Vektorfeldes	103
§ 8. Anwendungen auf Gleichungen höherer Ordnung	104
1. Die Äquivalenz einer Gleichung n -ter Ordnung zu einem System von n Gleichungen erster Ordnung	105
2. Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz	107
3. Differenzierbarkeits- und Fortsetzungssätze	109
4. Systeme von Gleichungen	109
5. Bemerkungen zur Terminologie	113

§ 9. Phasenkurven eines autonomen Systems	117
1. Autonome Systeme	117
2. Verschiebungen in der Zeit	118
3. Geschlossene Phasenkurven	119
§ 10. Die Ableitung in Richtung eines Vektorfeldes und erste Integrale	122
1. Die Ableitung in Richtung eines Vektors	122
2. Die Ableitung in Richtung eines Vektorfeldes	123
3. Eigenschaften der Richtungsableitung	124
4. Die Liealgebra der Vektorfelder	125
5. Erste Integrale	126
6. Lokale erste Integrale	128
7. Zeitabhängige erste Integrale	128
§ 11. Lineare und quasilineare partielle Differentialgleichungen erster Ordnung	130
1. Lineare homogene Gleichungen	130
2. Das Cauchyproblem	131
3. Lineare inhomogene Gleichungen	133
4. Die quasilineare Gleichung	134
5. Die Charakteristiken einer quasilinearen Gleichung	135
6. Integration einer quasilinearen Gleichung	136
7. Nichtlineare partielle Differentialgleichungen erster Ordnung	137
§ 12. Das konservative System mit einem Freiheitsgrad	140
1. Definitionen	140
2. Der Energieerhaltungssatz	141
3. Energieniveaulinien	142
4. Die Energieniveaulinien in der Nähe singulärer Punkte	144
5. Fortsetzung der Lösungen der Newtonschen Gleichung	146
6. Nichtkritische Energieniveaulinien	147
7. Beweis des Satzes aus Abschnitt 6	148
8. Kritische Niveaulinien	150
9. Ein Beispiel	150
10. Kleine Störungen eines konservativen Systems	152
Kapitel 3. Lineare Systeme	155
§ 13. Lineare Probleme	155
1. Beispiel: Linearisierung	155
2. Beispiel: Einparametrische Gruppen linearer Transformationen des \mathbb{R}^n	156
3. Die lineare Gleichung	157
§ 14. Die Exponentialfunktion	158
1. Die Norm eines Operators	158

2. Der metrische Raum der Operatoren	159
3. Beweis der Vollständigkeit	159
4. Reihen	160
5. Definition der Exponentialfunktion e^A	161
6. Ein Beispiel	161
7. Die Exponentialfunktion für einen diagonalen Operator	162
8. Die Exponentialfunktion für einen nilpotenten Operator	163
9. Quasipolynome	163
§ 15. Eigenschaften der Exponentialfunktion	165
1. Die Gruppeneigenschaft	165
2. Der Fundamentalsatz der Theorie linearer Gleichungen mit konstanten Koeffizienten	166
3. Die allgemeine Gestalt einparametriger Gruppen linearer Transformationen des \mathbb{R}^n	167
4. Eine zweite Definition der Exponentialfunktion	167
5. Beispiel: Die Eulersche Formel für e^z	168
6. Eulersche Polygonzüge	169
§ 16. Die Determinante des Operators e^A	171
1. Die Determinante eines Operators	171
2. Die Spur eines Operators	172
3. Der Zusammenhang zwischen der Determinanten und der Spur	173
4. Die Determinante des Operators e^A	174
§ 17. Praktische Berechnung der Matrixexponentialfunktion: Der Fall reeller paarweise verschiedener Eigenwerte	176
1. Diagonale Operatoren	176
2. Ein Beispiel	177
3. Der diskrete Fall	178
§ 18. Komplexifizierung und Reellifizierung	179
1. Reellifizierung	179
2. Komplexifizierung	180
3. Die komplexe Konjugation	180
4. Exponentialfunktion, Determinante und Spur eines komplexen Operators	182
5. Die Ableitung einer Kurve mit komplexen Werten	182
§ 19. Die lineare Gleichung mit komplexen Koeffizienten	183
1. Definitionen	184
2. Der Fundamentalsatz	184
3. Der diagonale Fall	184
4. Beispiel: Eine lineare Gleichung, deren Phasenraum die komplexe Gerade ist	185
5. Ein Korollar	187

§ 20. Die Komplexifizierung einer reellen Gleichung	188
1. Die komplexifizierte Gleichung	188
2. Invariante Unterräume eines reellen Operators	190
3. Lineare Gleichungen in der Ebene	192
4. Klassifikation singulärer Punkte in der Ebene	193
5. Beispiel: Das Pendel mit Reibung	194
6. Die allgemeine Lösung einer linearen Gleichung im Fall einfacher Wurzeln der charakteristischen Gleichung	196
§ 21. Klassifikation der singulären Punkte eines linearen Systems	198
1. Beispiel: Singuläre Punkte im dreidimensionalen Raum	198
2. Lineare, differenzierbare und topologische Äquivalenz	199
3. Die lineare Klassifikation	201
4. Die differenzierbare Klassifikation	202
§ 22. Die topologische Klassifizierung singulärer Punkte	202
1. Ein Satz	203
2. Reduktion auf den Fall $m_- = 0$	203
3. Die Ljapunovfunktion	205
4. Konstruktion der Ljapunovfunktion	205
5. Eine Abschätzung der Ableitung	207
6. Die Konstruktion des Homöomorphismus h	209
7. Beweis von Lemma 3	210
8. Der Beweis des topologischen Klassifizierungssatzes	212
§ 23. Stabilität von Gleichgewichtslagen	213
1. Stabilität nach Ljapunov	213
2. Asymptotische Stabilität	214
3. Ein Satz über die Stabilität in erster Näherung	215
4. Beweis des Satzes	216
§ 24. Der Fall rein imaginärer Eigenwerte	218
1. Topologische Klassifikation	219
2. Ein Beispiel	219
3. Die Phasenkurven von (4) auf dem Torus	221
4. Folgerungen	224
5. Der mehrdimensionale Fall	224
6. Die gleichmäßige Verteilung	224
§ 25. Der Fall mehrfacher Eigenwerte	225
1. Die Berechnung von e^{At} für einen Jordanblock A	225
2. Anwendungen	227
3. Anwendungen auf Systeme höherer Ordnung	228
4. Der Fall einer Gleichung n -ter Ordnung	229
5. Rekursive Folgen	230
6. Kleine Schwingungen	232

§ 26. Quasipolynome	234
1. Ein Funktionenvektorraum	234
2. Der Vektorraum der Lösungen einer linearen Gleichungen	235
3. Invarianz bezüglich Verschiebungen	236
4. Eine historische Bemerkung	237
5. Inhomogene Gleichungen	238
6. Die Methode der komplexen Amplituden	240
7. Anwendung zur Berechnung schwach nichtlinearer Schwingungen	245
§ 27. Lineare nichtautonome Gleichungen	247
1. Definition	247
2. Existenz von Lösungen	248
3. Der Vektorraum der Lösungen	249
4. Die Wronskische Determinante	250
5. Der Fall einer einzigen Gleichung	252
6. Der Satz von Liouville	254
7. Die Sturmschen Sätze über die Nullstellen der Lösungen einer Gleichung zweiter Ordnung	258
§ 28. Lineare Gleichungen mit periodischen Koeffizienten	262
1. Die Abbildung nach einer Periode	262
2. Stabilitätskriterien	264
3. Stark stabile Systeme	266
4. Rechnungen	268
§ 29. Variation der Konstanten	270
1. Der einfachste Fall	271
2. Der allgemeine Fall	271
3. Rechnungen	272
Kapitel 4. Beweise der grundlegenden Sätze	273
§ 30. Kontrahierende Abbildungen	273
1. Definition	273
2. Satz über kontrahierende Abbildungen	274
3. Bemerkung	275
§ 31. Beweis des Existenzsatzes und des Satzes über die stetige Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen	275
1. Sukzessive Approximationen nach Picard	275
2. Vorbereitende Abschätzungen	277
3. Die Lipschitzbedingung	278
4. Differenzierbarkeit und Lipschitzbedingung	279
5. Die Größen C , L , a' , b'	280
6. Der metrische Raum M	281
7. Die kontrahierende Abbildung $A : M \rightarrow M$	282
8. Der Existenz- und Eindeutigkeitsatz	283
9. Weitere Anwendungen kontrahierender Abbildungen	284

§ 32. Der Differenzierbarkeitsatz	285
1. Die Variationsgleichung	285
2. Der Satz von der Differenzierbarkeit	286
3. Höhere Ableitungen nach \mathbf{x}	287
4. Ableitungen nach \mathbf{x} und t	288
5. Der Rektifizierungssatz	289
6. Die höchste Ableitung	292
 Kapitel 5. Differentialgleichungen auf Mannigfaltigkeiten	295
 § 33. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten	295
1. Beispiele für Mannigfaltigkeiten	295
2. Definitionen	296
3. Beispiele für Atlanten	298
4. Kompaktheit	300
5. Zusammenhang und Dimension	301
6. Differenzierbare Abbildungen	302
7. Bemerkung	304
8. Untermannigfaltigkeiten	304
9. Beispiel	305
 § 34. Tangentialbündel. Vektorfelder auf Mannigfaltigkeiten . .	306
1. Der Tangentialraum	306
2. Tangentialbündel	307
3. Bemerkungen zur Parallelisierbarkeit	308
4. Tangentialabbildungen	310
5. Vektorfelder	311
 § 35. Der durch ein Vektorfeld definierte Phasenfluß	312
1. Ein Satz	313
2. Konstruktion der Diffeomorphismen g^t für kleine t	314
3. Konstruktion von g^t für beliebige t	314
4. Bemerkung	315
 § 36. Der Index singulärer Punkte eines Vektorfeldes	317
1. Der Index einer Kurve	317
2. Eigenschaften des Index	318
3. Beispiele	319
4. Der Index eines singulären Punktes des Vektorfeldes	320
5. Satz von der Indexsumme	321
6. Die Indexsumme singulärer Punkte auf der Sphäre	323
7. Exakte Grundlagen	326
8. Der mehrdimensionale Fall	327

Prüfungsprogramm	331
Beispiele für Prüfungsaufgaben	333
Literaturverzeichnis	339
Sachverzeichnis	341



<http://www.springer.com/978-3-540-66890-9>

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Arnold, V.I.

2001, XII, 344 S. 1 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-540-66890-9