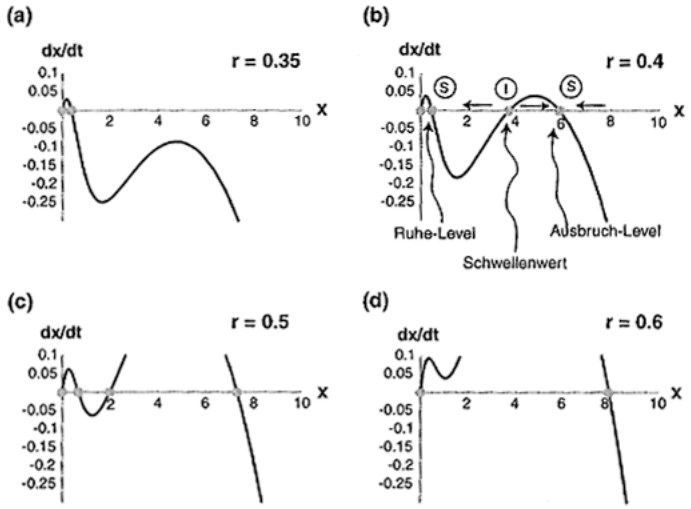


Abb. 2.31. Darstellung der Insektenplagendynamik im $(dx/dt, x)$-Hilfsdiagramm in Abhängigkeit des Parameters r für k=10. Die ökologische Bedeutung der Fixpunkte ist in Abb. (b) angegeben. Es zeigt sich, wie das System mit wachsendem r einen Übergang vom Ruhefixpunkt zum Ausbruchsfixpunkt vollzieht

deutlich und insbesondere erkennt man, daß maximal drei Fixpunkte vorliegen können.

Die nächste Frage betrifft die Stabilität der Fixpunkte. Bei $x = 0$ liegt ein instabiler Fixpunkt vor (sofern $r > 0$ und k nicht sehr klein ist), was sofort aus der Betrachtung der Ableitung df/dx an der Stelle $x = 0$ folgt:

$$\frac{df}{dx} = -\frac{r\,x}{k} + r\left(1 - \frac{x}{k}\right) + \frac{2\,x^3}{(1+x^2)^2} - \frac{2\,x}{1+x^2},$$

also

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=0} = r > 0\,.$$

Eine qualitative Analyse bei positivem festem k unter Variation von r (Abb. 2.31) zeigt den Wandel der Fixpunkte und gibt durch die x-Werte (also, bis auf eine Normierung, die Raupenzahlen) bereits einen Eindruck von den ökologischen Implikationen. Mit wachsendem r rückt der Schwellenwert (also der instabile Fixpunkt, der die Einzugsbereiche der stabilen Fixpunkte trennt) näher zum unteren stabilen Fixpunkt, der einen Ruhezustand (geringe Raupenzahl) kennzeichnet. Damit wird der Einzugsbereich des oberen (Ausbruchs-)Fixpunktes

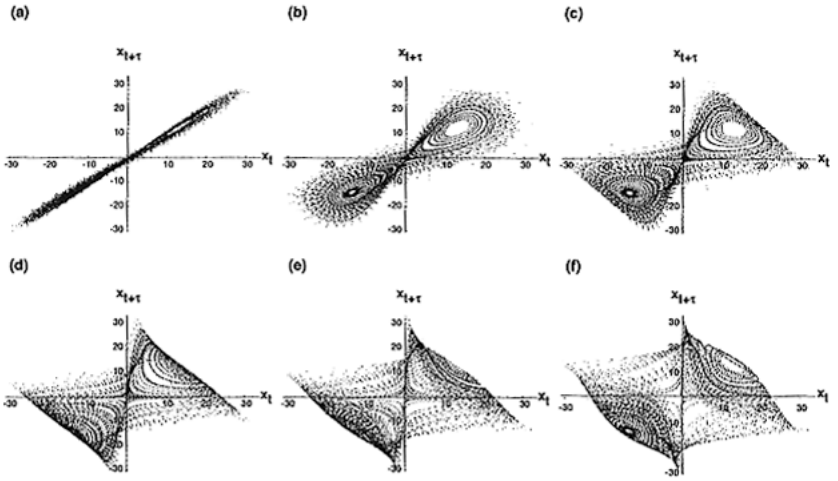


Abb. 4.19. Versuch einer Einbettung der Zeitreihe zum Lorenz-System in einem zweidimensionalen Raum für verschiedene Werte des Versatzes (dabei wurde τ von $\tau = 5$ für Abb. (a) bis $\tau = 55$ für Abb. (f) in gleichen Schritten variiert). Es zeigt sich, daß bei dieser Einbettungsdimension keine stabile geometrische Struktur entsteht

bezeichnet solche Attraktoren (zum Beispiel den Lorenz-Attraktor aus Abb. 4.20) als *seltsame Attraktoren* (engl. *strange attractors*) (Strogatz 1994, Kapitaniak u. Bishop 1999).

Es ist klar, daß die Übersetzung einer Zeitreihe in ein Objekt in einem E-dimensionalen Raum nicht das endgültige Resultat der Analyse darstellen kann. Der nächste Analyseschritt muß sein, das durch Einbettung entstandene Objekt erneut zu einer einfachen Funktion oder sogar einer Zahl zu kondensieren. Dabei sollte man zentrale Eigenschaften des Einbettungsraums ausbeuten. Erst dann ist der Umweg von der ursprünglichen Zeitreihe über einen E-dimensionalen Raum hin zu dem Analyseresultat (zum Beispiel zu einer einfachen Zahl) einsichtig und sinnvoll. Doch was ist nun eine solche zentrale Eigenschaft des Einbettungsraums? Eine einfache geometrische Überlegung gibt darüber Aufschluß: Der Vektor eines jeden Punktes besteht aus dem Punkt selbst und seiner Vorgeschichte (in der zweiten Art, Einbettung zu realisieren, vgl. Gleichung (4.17)). Ändert man einen Punkt in dieser Vorgeschichte (z.B. $x_{t-k} \to -x_{t-k}$), so wird der Punkt (Vektor) $\vec{x}_t$ an eine vollkommen andere Stelle im Einbettungsraum geworfen. Es ist damit klar: Die Nachbarschaft zweier Punkte im Einbettungsraum $\mathcal{E}$ bedeutet, daß die beiden Punkte einen ähnlichen Wert *und* eine ähn-

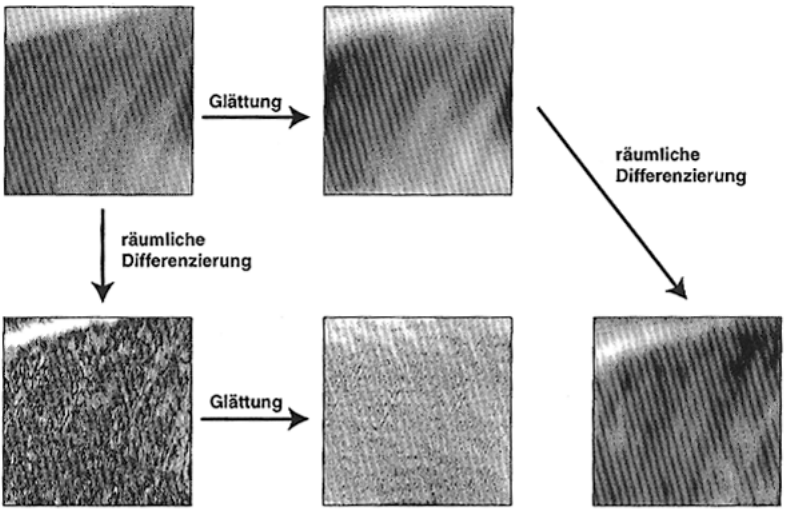


Abb. 5.7. Anwendung eines Glättungs- und Differenzierungsfilters auf eine räumliche Struktur. Das Ausgangsbild stammt aus demselben Datenpool wie Abb. 5.1, es zeigt allerdings einen kleineren Ausschnitt. Deutlich ist zu erkennen, wie die räumliche Differenzierung zu einer erheblichen Rauschverstärkung führt, so daß eine Glättung vor dem Anwenden des Kantenfilters zwingend erforderlich ist

5.3 Methoden auf der Grundlage zellulärer Automaten

Der Grundgedanke zellulärer Automaten, so wie wir sie in Kapitel 3 kennengelernt haben, ist die Simulation der globalen Dynamik, die aus einer bestimmten (lokalen) Wechselwirkung entsteht. Die Wechselwirkung wurde technisch als ein Regelwerk ausgedrückt, in das Nachbarschaftskonstellationen einfließen. Die Anwendung des Regelwerks auf den Zustand des Systems zum Zeitpunkt t führt auf den Zustand zum Zeitpunkt $t + 1$ (Update). In diesem Kapitel werden wir eine vollkommen andere Verwendung zellulärer Automaten diskutieren. Es soll nun nicht mehr um die Simulation einer zeitlichen Dynamik auf der Grundlage von Update-Regeln gehen, sondern um die Implementierung von *Analyseregeln*, die auf eine gegebene (experimentelle oder simulierte) raumzeitliche Dynamik angewendet werden können. In dieser Betrachtung führt das Anwenden der Regeln auf den Zustand zum Zeitpunkt t nicht zu dem späteren Zustand, sondern zu einem *Metazustand*, der die räumliche Verteilung einer Observablen (oder Meßgröße) zum selben Zeitpunkt t kennzeichnet. Dieser prinzipielle Unterschied ist in Abb. 5.8 dargestellt. Der Metazustand kann dann auf verschiede-

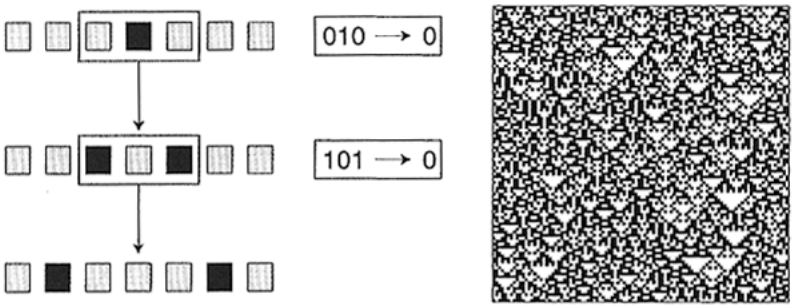


Abb. 6.18. Erklärungsskizze für das Auftreten fraktaler Strukturen in der Zeitentwicklung eindimensionaler zellulärer Automaten. Die charakteristische Dreiecksstruktur eines Automaten zur Regel 90 (rechte Seite) ist durch die Überführung der Strukturen (010) und (101) in 0 leicht zu verstehen

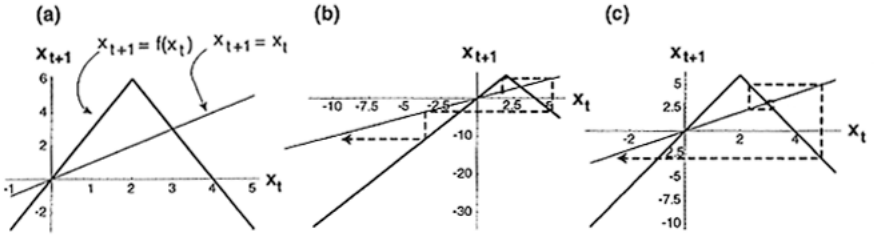


Abb. 6.19. Zeltabbildung als Beispiel für das Auftreten fraktaler Strukturen in der Dynamik von Differenzengleichungen. Abb. (a) zeigt das Hilfsdiagramm zu dieser speziellen Gleichung. Unterschiedliche Anfangsbedingungen (Abbildungen (b) und (c)) führen auf sehr verschiedene Verweildauern der Zeitreihe in dem Intervall $[0, 4]$

wachsendem N die zugehörigen x_0 eine (etwas deformierte) Cantor-Menge approximieren. Die Austrittszahl N aus dem Intervall $[0, 4]$ gibt sozusagen die Iterationsschritte auf dem Weg zu dem Fraktal an, so daß sich Abb. 6.20 direkt mit Abb. 6.6 vergleichen läßt.[6]

Seltsame Attraktoren

Chaotischen Systemen, die durch gekoppelte Differentialgleichungen gegeben sind, lassen sich in komplexer Weise gefaltete geometrische Objekte im Phasenraum zuordnen. In Kapitel 4.3 haben wir als ein Beispiel den Lorenz-Attraktor kennengelernt. Solche "seltsamen" Attraktoren ergeben sich unmittelbar daraus, daß in chaotischen Syste-

[6] Die genaue Form von Abb. 6.20 hängt von dem gewählten Intervall und von dem Wert des Parameters b in der Differenzengleichung ab. Eine ausführlichere Diskussion findet sich in (Kaplan u. Glass 1995).

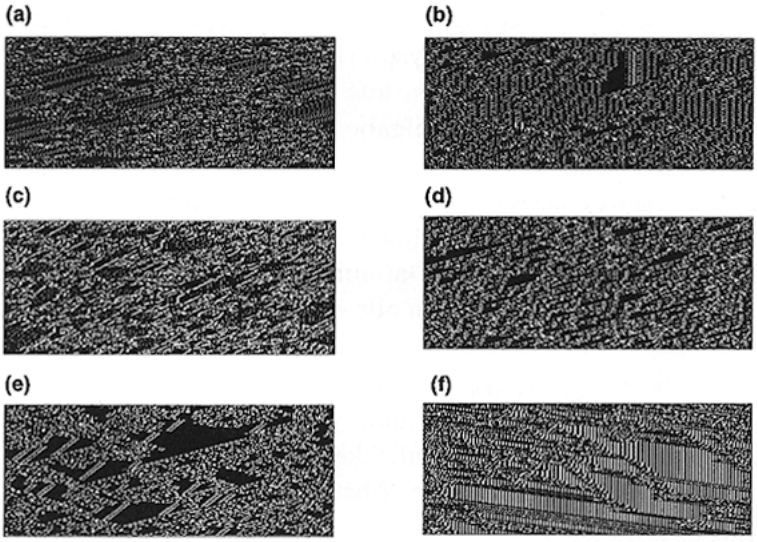


Abb. 7.5. Einige Beispiele für Zeitentwicklungen zellulärer Automaten mit $K = 4$ und $N = 5$ bei mittlerem Langton-Parameter λ ($0.2 < \lambda < 0.35$). Gezeigt ist eine Kette von 200 Elementen über 300 Zeitschritte. Wie in Kapitel 3 ist der Ort horizontal und die Zeit vertikal von oben nach unten dargestellt. Der Zustand $1 \equiv q$ wurde *schwarz*, die anderen Zustände *weiß* abgebildet

$\lambda > 0.8$ entspricht dem Verhalten aus Abb. 7.1 und 7.2 bei kleinem p und kennzeichnet im wesentlichen das Unterschreiten der Gleichverteilung. Abb. 7.5 zeigt einige Beispiele für Zeitentwicklungen solcher Automaten bei mittlerem λ. Die charakteristischen langreichweitigen Korrelationen sind deutlich zu erkennen. In Analogie zu anderen Systemen (z.B. zum Ising-Modell) folgerte Langton, daß bei einem kritischen Wert λ_C ein Phasenübergang in der Zeitentwicklung solcher zellulärer Automaten erfolgt, der von im wesentlichen periodischem Verhalten zu hauptsächlich chaotischen Dynamiken führt mit einem maximalen Informationstransport direkt beim Einsetzen des chaotischen Verhaltens (engl. *edge of chaos*). Diese funktionelle Auszeichnung des Übergangsbereichs steht in enger Beziehung zur Hypothese der selbstorganisierten Kritizität (vgl. Kapitel 6.4). Einige Aspekte von Langtons Untersuchung sind später erheblich kritisiert worden (siehe z.B. Mitchell et al. 1993), die Kernaussagen bleiben jedoch bestehen. Große Forschungsprogramme der modernen Bioinformatik beschäftigen sich mit der Suche nach statistischen Mustern in DNA-Sequenzen. Durch die Automatisierung der DNA-Sequenzierung wurde eine enor-

http://www.springer.com/978-3-540-42311-9

Datenanalyse in der Biologie
Eine Einführung in Methoden der nichtlinearen Dynamik, fraktalen Geometrie und Informationstheorie
Hütt, M.-T.
2001, XII, 312 S. 118 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-540-42311-9