

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1. Zahlen und Vektoren	1
§1. Mengen und Abbildungen	1
1.1 Mengen – 1.2 Mengenoperationen – 1.3 Abbildungen	
§2. Die reellen Zahlen	3
2.1 Bezeichnungen – 2.2 Ungleichungen – 2.3 Intervalle – 2.4 Schranken – 2.5 Der Betrag – 2.6 Die vollständige Induktion – 2.7 Binomialkoeffizienten und die binomische Formel – Aufgaben	
§3. Die Ebene	11
3.1 Kartesische Koordinatensysteme – 3.2 Winkel – 3.3 Sinus, Cosinus 3.4 Drehungen	
§4. Vektoren	17
4.1 Kartesische Koordinatensysteme im Raum – 4.2 Vektoren – 4.3 Die Addition von Vektoren – 4.4 Die skalaren Vielfachen eines Vektors – 4.5 Der Betrag – 4.6 Vektoren im Koordinatensystem	
§5. Produkte	22
5.1 Der Winkel zwischen zwei Vektoren – 5.2 Das Skalarprodukt – 5.3 Das Vektorprodukt – 5.4 Das Spatprodukt – Aufgaben	
§6. Geraden und Ebenen	34
6.1 Parameterdarstellungen einer Geraden – 6.2 Die Koordinatengleichungen einer Geraden – 6.3 Die Momentengleichung der Geraden – 6.4 Abstand Punkt-Gerade – 6.5 Abstand Gerade-Gerade – 6.6 Parameterdarstellungen einer Ebene – 6.7 Parameterfreie Darstellungen einer Ebene – 6.8 Die Gerade als Schnitt zweier Ebenen – 6.9 Die Winkel zwischen zwei Ebenen und zwischen einer Ebene und einer Geraden – Aufgaben	
§7. Gebundene Vektoren	47
7.1 Gebundene Vektoren – 7.2 Ein System gebundener Vektoren – 7.3 Die Reduktion eines Systems gebundener Vektoren – Aufgaben	
§8. Die komplexen Zahlen	53
8.1 Die Menge der komplexen Zahlen – 8.2 Die vier Grundrechenarten in \mathbb{C} – 8.3 Die Konjugation und der Betrag komplexer Zahlen – 8.4 Anwendungen	

Kapitel 2. Funktionen, Grenzwerte, Stetigkeit	58
§1. Funktionen (Grundbegriffe)	58
1.1 Funktionen – 1.2 Monotonie – 1.3 Das Rechnen mit Funktionen	
§2. Polynome und rationale Funktionen	61
2.1 Polynome – 2.2 Polynomnullstellen – Faktorisierung – 2.3 Polynominterpolation – 2.4 Der Graph – 2.5 Rationale Funktionen, Po- lynomdivision – 2.6 Der Definitionsbereich D – 2.7 Ergänzung: Poly- nome über \mathbb{C} – Aufgaben	
§3. Die Kreisfunktionen	75
3.1 Definition und einfache Eigenschaften – 3.2 Die Tangens- und Co- tangensfunktion – 3.3 Die Polardarstellung komplexer Zahlen – 3.4 An- wendungen der De Moivre-Formeln – 3.5 Harmonische Schwingungen – Aufgaben	
§4. Zahlenfolgen und Grenzwerte	88
4.1 Folgen – 4.2 Definition des Grenzwerts; konvergente Zahlenfolgen	
§5. Rechenregeln für Grenzwerte und Konvergenzkriterien	93
5.1 Rechenregeln – 5.2 Grenzwertbestimmung durch Abschätzung – 5.3 Monotone Folgen – 5.4 Die Exponentialfunktion – 5.5 Für Fortgeschrit- tene: Das Cauchy-Konvergenzkriterium – Aufgaben	
§6. Funktionengrenzwerte, Stetigkeit	103
6.1 Definitionen – 6.2 Die 6 elementaren Methoden der Grenzwertbe- stimmung – 6.3 Asymptoten – 6.4 Stetigkeit – Aufgaben	
Kapitel 3. Differentiation	112
§1. Die Ableitung einer differenzierbaren Funktion	112
1.1 Die Definition der Ableitung – 1.2 Die geometrische Deutung der Ableitung: Tangentenanstieg – 1.3 Die analytische Deutung der Ab- leitung: Lineare Approximation – 1.4 Die physikalische Deutung der Ableitung: Geschwindigkeit – 1.5 Stetigkeit ist notwendig für Diffe- renzierbarkeit – 1.6 Differentiationsregeln – 1.7 Die Differentiation der Polynome und der rationalen Funktionen – 1.8 Die Ableitung der Kreis- funktionen – 1.9 Die Kettenregel – 1.10 Höhere Ableitungen – Aufga- ben	
§2. Anwendungen der Differentiation	121
2.1 Maxima und Minima einer Funktion – 2.2 Der Mittelwertsatz – 2.3 Wendepunkte – 2.4 Die Regeln von De L'Hospital – 2.5 Kurven- diskussion – 2.6 Nullstellen und Fixpunkte – 2.7 Kubische Splines – Aufgaben	

§3. Umkehrfunktionen	139
3.1 Grundlagen – 3.2 n -te Wurzel, rationale Exponenten – 3.3 Arcussinus, Arcuscossinus, Arcustangens – Aufgaben	
§4. Die Exponential- und Logarithmusfunktion	147
4.1 Die e -Funktion – 4.2 Die Kurve $y = e^x$ – 4.3 Exponentiell wachsende bzw. fallende Prozesse – 4.4 Der natürliche Logarithmus 4.5 Allgemeine Exponentialfunktionen und Logarithmen – 4.6 Die Hyperbelfunktionen \sinh , \cosh , \tanh – Aufgaben	
Kapitel 4. Integration	161
§1. Das bestimmte Integral	161
1.1 Die Definition des bestimmten Integrals – 1.2 Die geometrische Deutung – 1.3 Elementare Integrationsregeln und der Mittelwertsatz – 1.4 Differentiation und Integration – Aufgaben	
§2. Integrationsregeln	169
2.1 Linearität – 2.2 Partielle Integration – 2.3 Die Substitutionsmethode – 2.4 Symmetrien beachten – 2.5 Ausblicke – Aufgaben	
§3. Die Integration der rationalen Funktionen	179
3.1 Die Partialbruchzerlegung – 3.2 Die Integration – 3.3 Die Integration von $R(e^x)$ – 3.4 Die Integration von $R\left(x, \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+e}}\right)$, $ae-bc \neq 0$ – 3.5 Die Integration von $R(\sin x, \cos x)$ – 3.6 Trigonometrische und hyperbolische Substitutionen – Aufgaben	
§4. Uneigentliche Integrale	185
4.1 Die Definition der uneigentlichen Integrale – 4.2 Ein Konvergenz-Test – 4.3 Ein an beiden Grenzen uneigentliches Integral – 4.4 Ausnahmestellen im Innern des Integrationsintervalls – Aufgaben	
§5. Kurven, Längen- und Flächenmessung	190
5.1 Die Parameterdarstellung – 5.2 Tangente und Normale – 5.3 Kurvenlänge – 5.4 Krümmung und Krümmungskreis – 5.5 Die Polardarstellung einer ebenen Kurve – 5.6 Flächeninhalte – Aufgaben	
§6. Weitere Anwendungen des Integrals	204
6.1 Abkürzende Redeweisen – 6.2 Das Volumen eines Rotationskörpers – 6.3 Die Mantelfläche – Aufgaben	
§7. Numerische Integration	206
Aufgaben	

Kapitel 5. Potenzreihen	212
§1. Unendliche Reihen	212
1.1 Grundbegriffe – 1.2 Absolute Konvergenz – Aufgaben	
§2. Reihen von Funktionen	221
2.1 Gleichmäßige Konvergenz – 2.2 Gleichmäßig konvergente Funktionenreihen – Aufgaben	
§3. Potenzreihen	226
3.1 Der Konvergenzradius – 3.2 Berechnung des Konvergenzradius – 3.3 Die Differentiation und Integration von Potenzreihen – 3.4 Die Potenzreihendarstellung einiger Funktionen – 3.5 Die Binomialreihe – 3.6 Potenzreihen mit dem Zentrum $a \neq 0$ 3.7 Koeffizientenvergleich – Aufgaben	
§4. Der Satz von Taylor; Taylor-Reihen	237
4.1 Die Taylor-Formel – 4.2 Die Taylor-Reihe – 4.3 Methoden der Reihenentwicklung – Aufgaben	
§5. Anwendungen (an Beispielen)	244
5.1 Grenzwertberechnungen – 5.2 Näherungsformeln (Approximation) – 5.3 Die Reihendarstellung und Berechnung einer Integralfunktion mit nicht elementar integrierbarem Integranden – 5.4 Potenzreihenansatz zur Lösung einfacher Differentialgleichungen – Aufgaben	
 Kapitel 6. Lineare Algebra	 250
§1. Lineare Gleichungssysteme und Matrizen	250
1.1 Was ist eine Matrix – 1.2 Addition, Subtraktion und Multiplikation mit einem Zahlenfaktor – 1.3 Lineare Gleichungssysteme und Matrizen 1.4 Das Gauß'sche Lösungsverfahren – Aufgaben	
§2. Die Matrizenmultiplikation	265
2.1 „Zeile mal Spalte“ – 2.2 Die Multiplikation zweier Matrizen – 2.3 Rechenregeln – 2.4 Die Transponierte einer Matrix – 2.5 Invertierbare Matrizen – 2.6 Diagonal- und Dreiecksmatrizen – Aufgaben	
§3. Vektorräume	274
3.1 Der „abstrakte“ Vektorraum – 3.2 Unterräume, Linearkombinationen, lineare Hülle – 3.3 Basis und Dimension – Aufgaben	
§4. Elementarmatrizen und elementare Umformungen	286
4.1 Zeilenraum und Spaltenraum – 4.2 Elementarmatrizen – 4.3 Der Rang und die P - Q -Normalform – 4.4 Rechenverfahren – Aufgaben	

§5. Determinanten	299
5.1 Einführung – 5.2 Definition der Determinante einer $n \times n$ -Matrix – 5.3 Rechenregeln für Determinanten – 5.4 Die Entwicklung von $\det A$ nach einer beliebigen Zeile oder Spalte – 5.5 Beispiele – 5.6 Anwen- dungen – Aufgaben	
§6. Lineare Abbildungen und Eigenwerte	311
6.1 Lineare Abbildungen – 6.2 $V = W = \mathbb{R}^n$ – 6.3 Längen und Winkel im \mathbb{R}^n ; Orthogonalität – 6.4 Speziell: Spiegelungen und Drehungen – 6.5 Das SCHMIDTSCHE Orthonormierungsverfahren – 6.6 Basiswechsel, Koordinatentransformation – 6.7 Eigenwerte, Eigenvektoren – 6.8 Die orthogonale Gruppe – Aufgaben	
§7. Symmetrische Matrizen und quadratische Formen	339
7.1 Quadratische Formen – 7.2 Die Hauptachsentransformation – 7.3 Quadriken – 7.4 Die nichtorthogonale Diagonalisierung einer sym- metrischen Matrix – 7.5 Positiv definite Matrizen – Aufgaben	
Kapitel 7. Funktionen in mehreren Variablen. Differentiation ..	359
§1. Kurven im \mathbb{R}^n	360
1.1 Parameterdarstellungen – 1.2 Das begleitende Dreibein, Krümmung, Torsion – 1.3 Ergänzung: Der natürliche Parameter und die Frenetschen Formeln – Aufgaben	
§2. Reellwertige Funktionen mehrerer reeller Veränderlicher	370
2.1 Grundlagen – 2.2 Grenzwerte und Stetigkeit – 2.3 Partielle Ablei- tungen, der Gradient – 2.4 Die totale Ableitung und lineare Approxi- mation – 2.5 Einfache Anwendungen – 2.6 Die Richtungsableitung, der Anstieg und die Kettenregel – Aufgaben	
§3. Anwendungen der Differentiation	391
3.1 Die Bedeutung des Gradienten – 3.2 Approximation höherer Ord- nung; die TAYLOR-Formel – 3.3 Implizite Funktionen – 3.4 Lokale Mi- nima und Maxima – 3.5 Ausgleichsrechnung – 3.6 Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen – Aufgaben	
§4. Vektorwertige Funktionen	418
4.1 Die Differentiation – 4.2 Die Kettenregel – 4.3 Räumliche Skalaren- und Vektorfelder – 4.4 Gradient, Divergenz, Rotation, Laplace-Operator – Aufgaben	

Kapitel 8. Funktionen in mehreren Variablen: Integration	430
§1. Parameterintegrale	430
1.1 Parameterintegrale – Aufgaben	
§2. Kurvenintegrale	435
2.1 Das Kurvenintegral einer skalaren Funktion – 2.2 Anwendungen	
– 2.3 Die Integration eines Vektorfeldes längs einer Kurve – 2.4 An-	
wendungen und Beispiele – 2.5 Das Potential eines Gradientenfeldes –	
2.6 Die praktische Bestimmung eines Potentials ($n = 3$) – Aufgaben	
§3. Die Integration über ebene Bereiche	454
3.1 Der Flächeninhalt – 3.2 Definition und einfache Eigenschaften des	
Doppelintegrals – 3.3 Die Berechnung des Doppelintegrals in kartesi-	
schen Koordinaten – 3.4 Weitere Anwendungen und Beispiele – 3.5 Der	
Satz von Green – Aufgaben	
§4. Die Integration über Flächen im Raum	467
4.1 Parameterdarstellungen – 4.2 Beispiele – 4.3 Der Flächeninhalt –	
4.4 Das Oberflächenintegral einer skalaren Funktion – 4.5 Die Transfor-	
mationsformel für Gebietsintegrale – 4.6 Das Oberflächenintegral eines	
Vektorfeldes – 4.7 Der Satz von Stokes – Aufgaben	
§5. Die Integration über dreidimensionale Bereiche	488
5.1 Definition und einfache Eigenschaften des Dreifachintegrals –	
5.2 Einfache Anwendungsbeispiele – 5.3 Die Transformationsformel für	
Volumenintegrale – 5.4 Der Divergenzsatz – 5.5 Einige Anwendungen	
der Integralsätze – 5.6 Orthogonale krummlinige Koordinaten – Aufga-	
ben	
Literaturverzeichnis	505
Anhang: Pascal-Programme	507
Namen- und Sachverzeichnis	517

Verzeichnis der Programme

1. Programm HORNER	63
Auswertung eines Polynoms mit dem Horner-Schema	
2. Programm HORNER vollstaendig	63
Entwicklung eines Polynoms nach Potenzen von $x - b$	

3.	Programm NEWTON Interpolation	68
	Berechnung und Auswertung des Newton Interpolationspolynoms	
4.	Programm BISECTION	109
	Nullstellenbestimmung ($f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$)	
5.	Programm NEWTON Verfahren	134
	Nullstellenbestimmung ($f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$)	
6.	Programm KUBISCHE SPLINE	136
	Interpolation mit kubischer Spline-Funktion	
7.	Programm ROMBERG Integration	209
	Berechnung von $\int_a^b f(x)dx$ mittels Romberg-Extrapolation	
8.	Programm Vollst. Ellipt. Integrale	211
	Berechnung der vollständigen elliptischen Integrale $E(k)$ und $K(k)$ mit arithmetisch-geometrischem Mittel	
9.	Programm GAUSS	296
	Lösung des linearen Gleichungssystems $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit verbesserter LR- Zerlegung, Berechnung der Determinante von A	
10.	Programm LEVERRIER	333
	Berechnung der Koeffizienten des Polynoms $p(\lambda) = \det(\lambda E - A)$	
11.	Programm JACOBI	354
	Berechnung aller Eigenwerte und Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix	
12.	Programm BAIRSTOW	384
	Berechnung aller komplexen Nullstellen eines reellen Polynoms	
13.	Procedure LINFIT	406
	Bestimmung der Ausgleichslösung eines überbestimmten linearen Gleichungssystems	
14.	Programm NLSQ	407
	Bestimmung der Ausgleichslösung eines überbestimmten nichtlinearen Gleichungssystems	

Höhere Mathematik 1

Differential- und Integralrechnung Vektor- und
Matrizenrechnung

Meyberg, K.; Vachenauer, P.

2001, XVI, 529 S., Softcover

ISBN: 978-3-540-41850-4