

# Inhaltsverzeichnis

|                                                                            |    |
|----------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>1. Einführung</b>                                                       | 1  |
| 1.1 Systemvoraussetzungen                                                  | 2  |
| 1.2 Installationshinweise                                                  | 2  |
| 1.3 Allgemeine Hinweise zu den Worksheets                                  | 3  |
| 1.4 Hinweise zu den Html-Dateien                                           | 4  |
| 1.5 Datei-Struktur auf der CD-ROM                                          | 4  |
| <b>2. Elementare Funktionen/Funktionenklassen</b>                          | 5  |
| 2.1 Schaubilder von Funktionen                                             | 5  |
| Schaubild einer gebrochen-rationalen Funktion                              | 5  |
| Darstellung einer Kurvenschar                                              | 6  |
| Auswirkung des Parameters auf eine Kurvenschar                             | 6  |
| Dreidimensionale Darstellung einer Kurvenschar                             | 6  |
| 2.2 Funktionenlupe                                                         | 7  |
| ganzrationale Funktion - differenzierbar                                   | 7  |
| Betragsfunktion - nicht differenzierbar                                    | 8  |
| trigonometrische Funktion - nicht differenzierbar                          | 9  |
| 2.3 Darstellung trigonometrischer Funktionen am Einheitskreis              | 11 |
| <i>Sinusfunktion und Zeigerdiagramm</i> <sup>1</sup>                       | CD |
| <i>Kosinusfunktion und Zeigerdiagramm</i>                                  | CD |
| Tangensfunktion und Zeigerdiagramm                                         | 11 |
| <i>Kotangensfunktion und Zeigerdiagramm</i>                                | CD |
| 2.4 Überlagerung sinusförmiger Funktionen mit Zeigerdiagramm               | 12 |
| Zwei Funktionen mit gleicher Periode                                       | 12 |
| <i>Drei Funktionen mit gleicher Periode</i>                                | CD |
| Zwei Funktionen mit unterschiedlicher Periode                              | 13 |
| 2.5 Superpositionsprinzip                                                  | 14 |
| Superposition von Sinus und Kosinus                                        | 14 |
| <i>Superposition von Variationen von Sinus bzw. Kosinus</i>                | CD |
| Superposition von nichttrigonometrischen Funktionen                        | 15 |
| 2.6 Darstellung von Funktionen mit Parametern                              | 16 |
| Die allgemeine Sinusfunktion $a \sin(bx + c) + d$                          | 16 |
| <i>Die allgemeine Exponentialfunktion <math>\exp(-a(x - x_0)^2)</math></i> | CD |
| 2.7 Parameterkurven                                                        | 17 |
| Animation für hervorgehobene Punkte einzelner Kurven                       | 17 |
| Darstellung aller Einzelpunkte in einem Koordinatensystem                  | 17 |
| Darstellung der Parameterkurve mit allen Einzelpunkten                     | 18 |

---

<sup>1</sup> Dieses Verzeichnis gibt auch den Inhalt der CD wieder. Themen, die aus Platzgründen nur auf der CD zu finden sind, sind kursiv gesetzt.

|                                                                                               |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>3. Gleichungen und Ungleichungen</b>                                                       | 19 |
| 3.1 Darstellung von Funktionsgleichungen der Form $f(x) = g(x)$                               | 19 |
| Polynomgleichung                                                                              | 19 |
| <i>Betragsgleichung</i>                                                                       | CD |
| <i>Exponentialgleichung</i>                                                                   | CD |
| <i>Wurzelgleichung</i>                                                                        | CD |
| <i>Nullstellenprobleme</i>                                                                    | CD |
| 3.2 Berechnung und graphische Darstellung von Ungleichungen                                   | 20 |
| Polynomungleichung                                                                            | 20 |
| <i>Ungleichungen mit Punktlösungen</i>                                                        | CD |
| <i>Ungleichungen ohne exakt darstellbare Lösung</i>                                           | CD |
| <b>4. Vektoren / Ebenen / Geraden</b>                                                         | 22 |
| 4.1 Graphische Darstellung von Vektoren und der Vektorrechnung                                | 22 |
| <i>Die Prozeduren arrow2d und arrow3d</i>                                                     | CD |
| Darstellung von Vektoren im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$                                 | 22 |
| <i>Darstellung zweier Vektoren im <math>\mathbb{R}^2</math> und <math>\mathbb{R}^3</math></i> | CD |
| Darstellung der Addition von Vektoren                                                         | 23 |
| Darstellung der Subtraktion von Vektoren                                                      | 23 |
| Darstellung der Projektion eines Vektors $b$ in Richtung $a$                                  | 24 |
| Darstellung des Vektorproduktes (Kreuzproduktes)                                              | 24 |
| 4.2 Graphische Darstellung von Geraden und Ebenen im Raum                                     | 25 |
| <i>Die Prozeduren arrow2d und arrow3d</i>                                                     | CD |
| Geraden im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$                                                  | 26 |
| Ebenen im $\mathbb{R}^3$                                                                      | 27 |
| <b>5. Analytische Geometrie</b>                                                               | 29 |
| 5.1 Punkte, Geraden und Ebenen                                                                | 29 |
| <i>Ortsvektor</i>                                                                             | CD |
| <i>Schwerpunkt eines Dreiecks</i>                                                             | CD |
| <i>Seitenmittenviereck</i>                                                                    | CD |
| Gegenseitige Lage zweier Geraden                                                              | 29 |
| Gegenseitige Lage von Gerade und Ebene                                                        | 30 |
| Gegenseitige Lage zweier Ebenen                                                               | 30 |
| 5.2 Kugeln und Ebenen                                                                         | 31 |
| <i>Tangentialebene in einem gegebenen Kugelpunkt</i>                                          | CD |
| Schnitt zweier Kugeln                                                                         | 31 |
| 5.3 Tangentialebenen mit Bedingungen                                                          | 32 |
| Tangentialebenen parallel zu einer gegebenen Ebene                                            | 32 |
| Tangentialebenen durch eine gegebene Gerade                                                   | 33 |
| 5.4 Kugeln und Geraden                                                                        | 34 |
| Schnittpunkte einer Geraden mit einer Kugel                                                   | 34 |
| Berührungskreis und Tangentialkegel                                                           | 35 |
| 5.5 Kegelschnitte                                                                             | 36 |
| Räumliche Darstellung einer Ellipse                                                           | 36 |

|           |                                                              |    |
|-----------|--------------------------------------------------------------|----|
|           | <i>Räumliche Darstellung einer Parabel</i> . . . . .         | CD |
|           | Brennpunkteigenschaft der Ellipse . . . . .                  | 37 |
|           | <i>Brennpunkteigenschaft der Parabel</i> . . . . .           | CD |
|           | Visualisierung der Gärtnerkonstruktion . . . . .             | 37 |
|           | Parabel als geometrischer Ort . . . . .                      | 38 |
|           | Visualisierung der Leitgeraden bei der Parabel . . . . .     | 38 |
|           | Visualisierung der Tangenteneigenschaft bei der Ellipse . .  | 39 |
| 5.6       | Animierte Kegelschnitte . . . . .                            | 40 |
|           | <i>Kegelschnitte paralleler Ebenen</i> . . . . .             | CD |
|           | Kegelschnitte mit veränderlichem Winkel . . . . .            | 40 |
| 5.7       | Mehrstufige Prozesse . . . . .                               | 41 |
|           | Iterierung eines Markovprozesses . . . . .                   | 41 |
|           | Stabiler Zustand des Systems . . . . .                       | 41 |
|           | Graphische Darstellung des Markovprozesses . . . . .         | 42 |
| <b>6.</b> | <b>Lineare Algebra</b> . . . . .                             | 43 |
| 6.1       | Darstellung linearer Abbildungen im $\mathbb{R}^2$ . . . . . | 43 |
|           | Demonstration mit vorgegebener Matrix . . . . .              | 43 |
|           | <i>Parallelstreckung</i> . . . . .                           | CD |
|           | <i>Zentrische Streckung</i> . . . . .                        | CD |
|           | <i>Euler-Affinität</i> . . . . .                             | CD |
|           | <i>Scherung</i> . . . . .                                    | CD |
|           | <i>Scherstreckung</i> . . . . .                              | CD |
|           | <i>Abbildung ohne Eigenwerte</i> . . . . .                   | CD |
| <b>7.</b> | <b>Komplexe Zahlen</b> . . . . .                             | 45 |
| 7.1       | Graphische Darstellung komplexer Zahlen . . . . .            | 45 |
|           | Darstellung einer Zahl in der komplexen Zahlenebene . . .    | 45 |
|           | <i>Darstellung der komplex konjugierten Zahl</i> . . . . .   | CD |
| 7.2       | Graphische Darstellung komplexer Rechenoperationen . . . .   | 46 |
|           | Addition zweier komplexer Zahlen . . . . .                   | 46 |
|           | Subtraktion zweier komplexer Zahlen . . . . .                | 46 |
|           | <i>Multiplikation zweier komplexer Zahlen</i> . . . . .      | CD |
|           | <i>Division zweier komplexer Zahlen</i> . . . . .            | CD |
|           | <i>Die n-te Potenz einer komplexen Zahl</i> . . . . .        | CD |
|           | Die n-ten Wurzeln einer komplexen Zahl . . . . .             | 47 |
| <b>8.</b> | <b>Differential- und Integralrechnung</b> . . . . .          | 49 |
| 8.1       | Folgen . . . . .                                             | 49 |
|           | Schneeflockenkurve . . . . .                                 | 49 |
|           | <i>Folgen in Maple</i> . . . . .                             | CD |
|           | Graphische Darstellungen und Wertetabellen . . . . .         | 50 |
|           | <i>Systembefehl rsolve</i> . . . . .                         | CD |
|           | Grenzwert einer Folge . . . . .                              | 51 |
|           | <i>Konvergenz</i> . . . . .                                  | CD |

|           |                                                                          |    |
|-----------|--------------------------------------------------------------------------|----|
|           | <i>Fibonacci-Folge</i> . . . . .                                         | CD |
| 8.2       | Graphisches Differenzieren . . . . .                                     | 52 |
|           | <i>Sekanten</i> . . . . .                                                | CD |
|           | <i>Tangenten</i> . . . . .                                               | CD |
|           | Graphisches Differenzieren . . . . .                                     | 52 |
| 8.3       | Kurvendiskussion . . . . .                                               | 53 |
|           | Definitionslücken . . . . .                                              | 53 |
|           | Ableitungen . . . . .                                                    | 54 |
|           | Nullstellen . . . . .                                                    | 54 |
|           | Horizontalstellen . . . . .                                              | 54 |
|           | Extremstellen . . . . .                                                  | 54 |
|           | Wendestellen . . . . .                                                   | 55 |
|           | Tangente an Schaubild . . . . .                                          | 55 |
|           | Normale in einem Kurvenpunkt . . . . .                                   | 55 |
|           | Wertetabelle . . . . .                                                   | 56 |
|           | Näherungslösung einer Gleichung . . . . .                                | 56 |
|           | Schaubild . . . . .                                                      | 56 |
|           | Polstellen . . . . .                                                     | 57 |
|           | Asymptoten . . . . .                                                     | 57 |
| 8.4       | Ortskurven . . . . .                                                     | 57 |
|           | Animation von Einzelbildern hervorgehobener Punkte . . . . .             | 58 |
|           | Gemeinsame Darstellung aller Einzelbilder . . . . .                      | 58 |
|           | Darstellung der Ortslinie . . . . .                                      | 59 |
| 8.5       | Fehlervisualisierung bei der Unter- und Obersumme . . . . .              | 59 |
|           | Visualisierung des Fehlers bei der Obersumme . . . . .                   | 59 |
|           | Visualisierung des Fehlers bei der Untersumme . . . . .                  | 60 |
| 8.6       | Grenzwert von Unter- und Obersumme . . . . .                             | 61 |
| 8.7       | Rechnerischer Ansatz zur Bestimmung der Fläche . . . . .                 | 61 |
|           | Darstellung der Funktion und Einteilung in Teilintervalle . . . . .      | 61 |
|           | Visualisierung eines Teilintervalls . . . . .                            | 62 |
|           | Rechnerische Abschätzung der Fläche . . . . .                            | 62 |
| 8.8       | Entdeckung des Hauptsatzes . . . . .                                     | 64 |
|           | Visualisierung der Approximation durch Mittenrechtecke . . . . .         | 64 |
|           | Flächenabschätzung bei festen Intervallgrenzen . . . . .                 | 64 |
|           | Flächenabschätzung bei variabler rechter Grenze . . . . .                | 65 |
| 8.9       | Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung . . . . .         | 66 |
|           | Visualisierung des Fundamentalsatzes . . . . .                           | 66 |
| 8.10      | Rotationskörper . . . . .                                                | 67 |
|           | Graphische Darstellung eines Drehkörpers um die x-Achse . . . . .        | 68 |
|           | <i>Graphische Darstellung eines Drehkörpers um die y-Achse</i> . . . . . | CD |
| 8.11      | Darstellung der Konvergenz der Taylorreihe . . . . .                     | 69 |
| <b>9.</b> | <b>Iterationsverfahren</b> . . . . .                                     | 70 |
| 9.1       | Einschließungsverfahren . . . . .                                        | 70 |
|           | Graphische Darstellung des Bisektionsverfahrens . . . . .                | 70 |

|            |                                                                      |    |
|------------|----------------------------------------------------------------------|----|
|            | Graphische Darstellung des Pegasusverfahrens . . . . .               | 71 |
| 9.2        | Iterationsverfahren . . . . .                                        | 72 |
|            | Graphische Darstellung des Newtonverfahrens . . . . .                | 72 |
|            | Graphische Darstellung der regula falsi . . . . .                    | 73 |
| 9.3        | Iterationsverfahren — Von Newton zu Feigenbaum . . . . .             | 74 |
|            | <i>Newtonverfahren</i> . . . . .                                     | CD |
|            | <i>Graphische Darstellung des Newtonverfahrens</i> . . . . .         | CD |
|            | <i>Allgemeines Iterationsverfahren</i> . . . . .                     | CD |
|            | Graphische Darstellung des allgemeinen Verfahrens . . . . .          | 74 |
|            | <i>Langzeitverhalten und Zeitreihe</i> . . . . .                     | CD |
|            | Feigenbaumdiagramm . . . . .                                         | 75 |
| 9.4        | Näherung von Pi über Vielecke . . . . .                              | 76 |
|            | Graphische Darstellung der einbeschriebenen Vielecke . . . . .       | 76 |
|            | <i>Graphische Darstellung der umbeschriebenen Vielecke</i> . . . . . | CD |
|            | <i>Berechnungen</i> . . . . .                                        | CD |
|            | <i>Herleitung</i> . . . . .                                          | CD |
| <b>10.</b> | <b>Funktionen mit mehreren Variablen</b> . . . . .                   | 77 |
| 10.1       | Differentialrechnung für Funktionen von mehreren Variablen . . . . . | 77 |
|            | Graphische Darstellung von Funktionen mit zwei Variablen . . . . .   | 77 |
|            | Partielle Ableitungen einer Funktion mit zwei Variablen . . . . .    | 78 |
|            | Graphische Darstellung der Tangentialebene . . . . .                 | 78 |
|            | Gradient . . . . .                                                   | 79 |
| 10.2       | Darstellung der Konvergenz zweidimensionaler Taylorreihen . . . . .  | 79 |
| 10.3       | Ausgleichsrechnung . . . . .                                         | 80 |
|            | Berechnung der Regressionsgeraden . . . . .                          | 80 |
|            | Bestimmung des Ausgleichspolynoms . . . . .                          | 81 |
|            | Interpolationspolynom . . . . .                                      | 82 |
| <b>11.</b> | <b>Vektoranalysis</b> . . . . .                                      | 83 |
| 11.1       | Gradient . . . . .                                                   | 83 |
|            | <i>Begriffserläuterung und Berechnung des Gradienten</i> . . . . .   | CD |
|            | <i>Darstellung einer Funktion mit zwei Variablen</i> . . . . .       | CD |
|            | Gradient einer Funktion von zwei Variablen . . . . .                 | 83 |
|            | Gradient einer Funktion von drei Variablen . . . . .                 | 84 |
|            | <i>Beispiele aus der Physik</i> . . . . .                            | CD |
| 11.2       | Divergenz . . . . .                                                  | 85 |
|            | <i>Begriffserläuterung und Berechnung der Divergenz</i> . . . . .    | CD |
|            | Allgemeine Rechenvorschrift für die Divergenz . . . . .              | 85 |
|            | <i>Beispiele aus der Physik</i> . . . . .                            | CD |
| 11.3       | Rotation . . . . .                                                   | 87 |
|            | <i>Begriffserläuterung und Berechnung der Rotation</i> . . . . .     | CD |
|            | Allgemeine Rechenvorschrift für die Rotation . . . . .               | 87 |
|            | Darstellung der Rotation einer Funktion mit zwei Variablen . . . . . | 87 |
|            | <i>Hagen-Poiseuillesches Gesetz</i> . . . . .                        | CD |

|                                                                             |     |
|-----------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>12. Wachstums- und Zerfallsprozesse</b> .....                            | 89  |
| 12.1 Simulation dynamischer Systeme .....                                   | 89  |
| Lineares Wachstum .....                                                     | 90  |
| <i>Exponentielles (natürliches) Wachstum</i> .....                          | CD  |
| <i>Exponentiell beschränktes Wachstum</i> .....                             | CD  |
| Logistisches Wachstum .....                                                 | 91  |
| <i>Bedeutung des Zeitintervalls</i> .....                                   | CD  |
| <i>Bedeutung des Wachstumsfaktors</i> .....                                 | CD  |
| <b>13. Differentialgleichungen</b> .....                                    | 92  |
| 13.1 Numerische Integrationsverfahren .....                                 | 92  |
| Euler-Verfahren .....                                                       | 92  |
| <i>Modifiziertes Euler-Verfahren</i> .....                                  | CD  |
| <i>Verfahren von Heun</i> .....                                             | CD  |
| <i>Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung</i> .....                               | CD  |
| Vergleich der vier Verfahren .....                                          | 93  |
| Grenzen numerischer Verfahren .....                                         | 94  |
| 13.2 Richtungsfeld einer Differentialgleichung .....                        | 95  |
| Lösung bei verschiedenen Anfangsbedingungen .....                           | 95  |
| Richtungsfelder .....                                                       | 96  |
| Richtungsfeld mit Lösungskurven .....                                       | 97  |
| <b>14. Sinusfunktionen in der Physik</b> .....                              | 98  |
| 14.1 Eindimensionale Überlagerung von Sinusschwingungen .....               | 98  |
| <i>Maximale Verstärkung</i> .....                                           | CD  |
| <i>Auslöschung</i> .....                                                    | CD  |
| <i>Schwebung</i> .....                                                      | CD  |
| Allgemeiner Fall .....                                                      | 98  |
| 14.2 Senkrechte Überlagerung von Schwingungen (Lissajous) .....             | 99  |
| <i>Überlagerung ohne Phasenverschiebung</i> .....                           | CD  |
| Phasenverschiebung $\frac{\pi}{2}$ .....                                    | 99  |
| <i>Gleiche Amplituden und Frequenzverhältnis 1:1 bzw. 1:2</i> ..            | CD  |
| Gleiche Amplituden und Frequenzverhältnis 1:3 .....                         | 100 |
| <i>Schwebung</i> .....                                                      | CD  |
| <i>Verschiedene Amplituden, beliebiges Frequenzverhältnis</i> ..            | CD  |
| <b>15. Stochastik</b> .....                                                 | 101 |
| 15.1 Binomialverteilung, Testen von Hypothesen .....                        | 101 |
| Berechnen und Erzeugen von $B(n,p)$ .....                                   | 101 |
| <i>Summenverteilung</i> .....                                               | CD  |
| Werte aus einem Intervall für $k$ .....                                     | 101 |
| Umkehrung der Summenverteilung .....                                        | 101 |
| Histogramme, Stabdiagramme, Polygonzüge .....                               | 102 |
| <i>Animation zur Bedeutung von <math>p</math> bzw. <math>n</math></i> ..... | CD  |
| Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung .....                           | 102 |
| Testen von Hypothesen .....                                                 | 103 |

|                                                                         |     |
|-------------------------------------------------------------------------|-----|
| 15.2 Normalverteilung . . . . .                                         | 104 |
| Binomialverteilung für große $n$ . . . . .                              | 104 |
| Gaußfunktion $\phi$ . . . . .                                           | 105 |
| Gaußsche Integralfunktion $\Phi$ . . . . .                              | 105 |
| Erwartungswert, Standardabweichung, Varianz . . . . .                   | CD  |
| Allgemeine Normalverteilung . . . . .                                   | 106 |
| <b>16. Fraktale</b> . . . . .                                           | 107 |
| 16.1 Begriffe und Definitionen . . . . .                                | 107 |
| Fraktal, fraktale Geometrie . . . . .                                   | 107 |
| Selbstähnlichkeit . . . . .                                             | CD  |
| Koch-Kurve . . . . .                                                    | CD  |
| Sierpinski-Dreieck . . . . .                                            | 107 |
| Alternative Konstruktion des Sierpinski-Dreiecks . . . . .              | CD  |
| Gebrochene Dimension . . . . .                                          | CD  |
| 16.2 Iterierte Abbildungen . . . . .                                    | 108 |
| Definition der Mandelbrot-Menge . . . . .                               | 110 |
| Definition der Julia-Menge . . . . .                                    | 110 |
| 16.3 Die Mandelbrot-Menge . . . . .                                     | 110 |
| Bildergalerie der Mandelbrot-Mengen . . . . .                           | CD  |
| 16.4 Die Julia-Menge . . . . .                                          | 112 |
| Zusammenhängende Julia-Mengen . . . . .                                 | 112 |
| Bildergalerie der Julia-Mengen . . . . .                                | CD  |
| Der Cantor-Staub . . . . .                                              | CD  |
| <b>17. Einführung in die Beschreibung chaotischer Systeme</b> . . . . . | 113 |
| 17.1 Vom Masse-Feder-Schwinger zum chaotischen Oszillator . . . . .     | 113 |
| Feder-Masse-Schwinger ohne Reibung . . . . .                            | 113 |
| Feder-Masse-Schwinger mit Dämpfung . . . . .                            | CD  |
| Feder-Masse-Schwinger mit Reibung und Fremderregung . . . . .           | 114 |
| Duffing-Gleichung . . . . .                                             | 115 |
| 17.2 Beschreibung von Chaos: . . . . .                                  | 116 |
| Logistische Gleichung . . . . .                                         | 116 |
| Sensitivität . . . . .                                                  | 117 |
| Mischungseigenschaft, ergodische Bahn . . . . .                         | 118 |
| Ergodische Bahn bei $r=4$ . . . . .                                     | 118 |
| Attraktor bei $r=2$ ; Verhalten bei $r=3$ . . . . .                     | CD  |
| 2-periodischer Zyklus bei $r=3.1$ . . . . .                             | 119 |
| 4er Zyklus bei $r=3.5$ . . . . .                                        | CD  |
| Feigenbaum-Diagramm . . . . .                                           | 120 |
| 17.3 Anwendung der Begriffe auf den Duffing-Oszillator . . . . .        | 121 |
| <b>Literaturverzeichnis</b> . . . . .                                   | 123 |
| <b>Sachverzeichnis</b> . . . . .                                        | 125 |

Mathematische Begriffe visualisiert mit Maple  
für Lehrer und Dozenten

Westermann, T.; Buhmann, W.; Diemer, L.; Endres, E.;  
Laule, M.; Wilke, G.

2001, XV, 129 S. 81 Abb. Mit CD-ROM., Softcover

ISBN: 978-3-540-42132-0