

Inhaltsverzeichnis

1	Das Problemfeld	1
1.1	Was ist eine Differentialgleichung?	1
1.1.1	Konzepte	2
1.2	Die Lösung und ihre Eigenschaften	4
1.2.1	Eine gewöhnliche Differentialgleichung	4
1.3	Eine numerische Methode	7
1.4	Cauchy Problem	10
1.4.1	Homogene Gleichungen erster Ordnung	10
1.4.2	Inhomogene Gleichungen erster Ordnung	13
1.4.3	Die Wellengleichung	15
1.4.4	Die Wärmeleitungsgleichung	17
1.5	Übungsaufgaben	20
1.6	Projekte	28
2	Zweipunkt–Randwertaufgaben	39
2.1	Die Poisson Gleichung in einer Raumdimension	40
2.1.1	Die Greensche Funktion	42
2.1.2	Glattheitseigenschaften der Lösung	43
2.1.3	Ein Maximumprinzip	44
2.2	Eine Finite Differenzenapproximation	46
2.2.1	Taylor Reihen	46
2.2.2	Ein System algebraischer Gleichungen	47
2.2.3	Das Gaußsche Eliminationsverfahren für tridiagonale lineare Systeme	50
2.2.4	Diagonal dominante Matrizen	53
2.2.5	Positiv definite Matrizen	55
2.3	Kontinuierliche und diskrete Lösungen	56
2.3.1	Differenzen– und Differentialgleichungen	57
2.3.2	Symmetrie	58
2.3.3	Eindeutigkeit	61
2.3.4	Ein Maximumprinzip für das diskrete Problem	61
2.3.5	Konvergenz der diskreten Lösungen	63
2.4	Eigenwertprobleme	65
2.4.1	Das kontinuierliche Eigenwertproblem	65

2.4.2	Das diskrete Eigenwertproblem	68
2.5	Übungsaufgaben	71
2.6	Projekte	82
3	Die Wärmeleitungsgleichung	87
3.1	Ein kurzer Überblick	87
3.2	Trennung der Veränderlichen	90
3.3	Das Superpositionsprinzip	92
3.4	Fourierkoeffizienten	95
3.5	Andere Randbedingungen	97
3.6	Das Neumann Problem	98
3.6.1	Das Eigenwert-Problem	99
3.6.2	Partikuläre Lösungen	100
3.6.3	Eine formale Lösung	100
3.7	Energieargumente	102
3.8	Differentiation von Integralen	106
3.9	Übungsaufgaben	107
3.10	Projekte	113
4	Finite Differenzen für die Wärmeleitungsgleichung	117
4.1	Ein explizites Schema	119
4.2	Fourieranalyse der numerischen Näherung	122
4.2.1	Partikuläre Lösungen	123
4.2.2	Vergleich der analytischen und diskreten Lösung	127
4.2.3	Stabilitätsbetrachtungen	129
4.2.4	Die Genauigkeit der Approximation	130
4.2.5	Zusammenfassung des Vergleiches	131
4.3	Von Neumannsche Stabilitätsanalyse	132
4.3.1	Kontinuierliche und diskrete spezielle Lösungen	132
4.3.2	Beispiele	134
4.3.3	Ein nichtlineares Problem	136
4.4	Ein implizites Schema	139
4.4.1	Stabilitätsanalyse	143
4.5	Energieargumente und numerische Stabilität	145
4.6	Übungsaufgaben	147
5	Die Wellengleichung	159
5.1	Trennung der Veränderlichen	160
5.2	Eindeutigkeit und Energieargumente	162
5.3	Eine finite Differenzenapproximation	165
5.3.1	Stabilitätsanalyse	167
5.4	Übungsaufgaben	170

6	Maximumprinzipien	175
6.1	Eine Zweipunkt-Randwertaufgabe	175
6.2	Die lineare Wärmeleitungsgleichung	178
6.2.1	Der kontinuierliche Fall	180
6.2.2	Eindeutigkeit und Stabilität	183
6.2.3	Das explizite finite Differenzenschema	183
6.2.4	Das implizite finite Differenzenschema	186
6.3	Die nichtlineare Wärmeleitungsgleichung	187
6.3.1	Der kontinuierliche Fall	188
6.3.2	Ein explizites finites Differenzenschema	189
6.4	Harmonische Funktionen	191
6.4.1	Maximumprinzipien für harmonische Funktionen	193
6.5	Diskrete harmonische Funktionen	195
6.6	Übungsaufgaben	200
7	Die Poisson-Gleichung im Zweidimensionalen Raum	207
7.1	Rechteckige Gebiete	207
7.2	Polarkoordinaten	210
7.2.1	Die Kreisscheibe	211
7.2.2	Ein Kreissektor	214
7.2.3	Eine Singularität	215
7.3	Anwendungen des Gaußschen Integralsatzes	215
7.4	Die Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen	220
7.5	Eine finite Differenzenapproximation	223
7.5.1	Der Fünf-Punkte-Differenzenstern	223
7.5.2	Eine Fehlerschranke	226
7.6	Gaußsche Elimination für allgemeine Systeme	228
7.6.1	Obere Dreiecksmatrizen	228
7.6.2	Allgemeine Systeme	229
7.6.3	Bandsysteme	231
7.6.4	Positiv definite Systeme	233
7.7	Übungsaufgaben	235
8	Orthogonalität und allgemeine Fourierreihen	243
8.1	Die volle Fourierreihe	244
8.1.1	Gerade und ungerade Funktionen	247
8.1.2	Differentiation von Fourierreihen	251
8.1.3	Die komplexe Darstellung	253
8.1.4	Skalierung	254
8.2	Randwertaufgaben und orthogonale Funktionen	255
8.2.1	Andere Randbedingungstypen	255
8.2.2	Sturm-Liouville Probleme	259
8.3	Der Abstand im quadratischen Mittel	262
8.4	Allgemeine Fourierreihen	265
8.5	Eine Poincaré Ungleichung	271
8.6	Übungsaufgaben	274

9	Konvergenz von Fourierreihen	285
9.1	Verschiedene Definitionen der Konvergenz	285
9.2	Punktweise Konvergenz	290
9.3	Gleichmäßige Konvergenz	296
9.4	Konvergenz im quadratischen Mittel	300
9.5	Glattheit und Abklingverhalten der Fourierkoeffizienten	302
9.6	Übungsaufgaben	307
10	Noch einmal die Wärmeleitungsgleichung	315
10.1	Kompatibilitätsbedingungen	315
10.2	Eine mathematische Rechtfertigung der Fourier-Methode	321
10.2.1	Die Glättungseigenschaft der Gleichung	321
10.2.2	Die Differentialgleichung	323
10.2.3	Die Anfangsdaten	325
10.2.4	Glatte und Kompatible Anfangsdaten	327
10.3	Konvergenz von finiten Differenzenapproximationen	329
10.4	Übungsaufgaben	333
11	Reaktions-Diffusionsgleichungen	339
11.1	Das logistische Modell des Bevölkerungswachstums	339
11.1.1	Ein numerisches Verfahren für die logistische Gleichung .	341
11.2	Die Gleichung von Fisher	343
11.3	Ein finites Differenzenschema für die Gleichung von Fisher	344
11.4	Ein invarianter Bereich	345
11.5	Die asymptotische Lösung	348
11.6	Energieargumente	351
11.6.1	Ein invarianter Bereich	352
11.6.2	Konvergenz gegen den Gleichgewichtszustand	353
11.6.3	Abklingen der Ableitungen	354
11.7	Explosion der Lösung	356
11.8	Übungsaufgaben	359
11.9	Projekte	362
12	Anwendungen der Fouriertransformation	367
12.1	Die Fouriertransformation	368
12.2	Eigenschaften der Fouriertransformation	370
12.3	Die inverse Fouriertransformation	374
12.4	Die Faltung	377
12.5	Partielle Differentialgleichungen	379
12.5.1	Die Wärmeleitungsgleichung	379
12.5.2	Die Laplace-Gleichung in der Halbebene	382
12.6	Übungsaufgaben	384
	Literaturverzeichnis	387
	Index	389



<http://www.springer.com/978-3-540-42404-8>

Einführung in partielle Differentialgleichungen

Ein numerischer Zugang

Tveito, A.; Winther, R.

2002, XIV, 392 S. 4 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-540-42404-8