7 Mathematische Optimierung - Kurzübersicht

7.1 Einführung

Die *allgemeine Aufgabenstellung* der *mathematischen Optimierung* haben wir bereits im Kap.1 kennengelernt:

* Es ist eine *Funktion* (*Zielfunktion/Optimierungskriterium*) zu *minimieren* oder *maximieren*, d.h., es ist ein kleinster Wert (Minimum) oder größter Wert (Maximum) einer Funktion zu berechnen.
  Man spricht anstelle von *Minimierung* und *Maximierung* auch von *Optimierung* bzw. der Bestimmung eines *Extremums* oder *Optimums*, wenn man die Problematik allgemein betrachtet und nicht zwischen Minimum und Maximum unterscheidet.

* Zusätzlich können für die Variablen gewisse *Beschränkungen* vorliegen, die meistens in Form von Gleichungen und Ungleichungen gegeben sind. Treten keine auf, so spricht man von Aufgaben ohne Beschränkungen. In der mathematischen Optimierung bezeichnet man derartige Beschränkungen meistens als Nebenbedingungen und spricht von *Optimierungsaufgaben* mit oder ohne *Nebenbedingungen*. Weiterhin werden die Bezeichnungen *unrestringierte* bzw. *restringierte Optimierungsaufgaben* verwendet.

In den verwendeten mathematischen Modellen für Optimierungsaufgaben werden die Zielfunktion durch mathematische Funktionen bzw. Funktionale und die Nebenbedingungen durch Gleichungen und Ungleichungen beschrieben. Der durch die Nebenbedingungen bestimmte Bereich wird als *zulässiger Bereich* bezeichnet.
Je nach Art der verwendeten Funktionen/Funktionale ergeben sich verschiedene Lösungsmethoden und Lösungstheorien. Deshalb unterteilt sich die mathematische Optimierung in eine Reihe von Gebieten, die in Abhängigkeit vom betrachteten Modell spezielle Methoden entwickeln. In den folgenden Abschn.7.2–7.12 werden wichtige Gebiete der Optimierung vorgestellt.
Im Rahmen des vorliegenden Buches befassen wir uns hauptsächlich mit Aufgaben der *linearen*, *nichtlinearen* und *vektoriellen Optimierung*, die grundlegende Gebiete der mathematischen Optimierung bilden. Zusätzlich

werden Spezialfälle wie *quadratische*, *parametrische* und *diskrete Optimierung* betrachtet und die Problematik der *Spieltheorie* und *dynamischen Optimierung* skizziert.

♦

☞

In den einzelnen Gebieten der *mathematischen Optimierung* werden folgende *Fragestellungen* untersucht:

- *Existenz* einer *Lösung*, d.h. Existenz eines Minimums oder Maximums (siehe Abschn.7.1.2).
- *Eindeutigkeit* der *Lösung*, d.h., gibt es genau einen Punkt, in dem die Zielfunktion ein Minimum oder Maximum annimmt (siehe Abschn.7.1.2).
- Aufstellung von *Optimalitätsbedingungen*, d.h. notwendige bzw. hinreichende Bedingungen für die Optimalität eines Punktes (siehe Abschn. 7.1.3).
- Entwicklung von *Lösungsmethoden* (siehe Abschn.7.1.4).
- *Untersuchung* der *optimalen Lösung* einer Optimierungsaufgabe auf Reaktionen gegenüber *Änderungen* in *Zielfunktion* und/oder *Nebenbedingungen*. Dies bezeichnet man als *Stabilitätsbetrachtung* bzw. *Sensitivitätsanalyse* (siehe Abschn.7.1.5).

  ♦

7.1.1 Optimum (Minimum und Maximum)

Der Inhalt der mathematischen Optimierung besteht in der *Bestimmung* von *Minima* und *Maxima*. Wie bereits erwähnt, werden Minima und Maxima unter dem Oberbegriff *Extremum* (*extremale Lösung*) oder *Optimum* (*optimale Lösung*) zusammengefaßt, wenn man die Problematik allgemein betrachtet. Dabei verwendet man bei Extremalaufgaben und in der Variationsrechnung meistens die Bezeichnung Extremum, während man in der linearen und nichtlinearen Optimierung und optimalen Steuerung vom Optimum spricht. Im folgenden schließen wir uns dieser Bezeichnungsweise an.
Während bei Extremalaufgaben und in der Variationsrechnung i.allg. lokale Extrema/Optima bestimmt werden (siehe Kap.8, 9 und Abschn.7.11), ermittelt man bei Aufgaben der linearen und nichtlinearen Optimierung und optimalen Steuerung globale (siehe Kap.10, 11 und Abschn.7.12).
Die mathematische Definition von lokalen und globalen Extrema/Optima haben wir für Funktionen im Abschn.3.5 kennengelernt. Diese Definition ist bei allen Optimierungsaufgaben anwendbar, deren Optimierungskriterium (Zielfunktion) durch eine Funktion bzw. Funktional gegeben ist.
Bei Aufgaben der *Vektoroptimierung* muß der Begriff des Extremums/Optimums verallgemeinert werden (siehe Abschn.7.7 und Kap.16).

7.1.2 Existenz und Eindeutigkeit eines Optimums

Bei einer gegebenen mathematischen Optimierungsaufgabe ist es von Interesse, ob überhaupt ein Optimum (Minimum oder Maximum) existiert, da man bei Nichtexistenz eines Optimums die Aufgabe nicht weiter zu untersuchen braucht. Es gibt zwei wesentliche *Gründe* für die *Nichtexistenz* eines *Optimums:*

I. Bei der Aufstellung des mathematischen Modells für die Optimierungsaufgabe haben sich Fehler eingeschlichen:

   * Der durch die Nebenbedingungen bestimmte *zulässige Bereich* ist *leer*, d.h. es wurden sich widersprechende Nebenbedingungen formuliert.

   * Der durch die Nebenbedingungen bestimmte *zulässige Bereich* ist *unbeschränkt*. Hier hängt die Existenz eines Optimums von der Gestalt der Zielfunktion ab.

   * Die *Zielfunktion* ist auf dem *zulässigen Bereich* unbeschränkt.

II. Die praktische Aufgabenstellung, für die das mathematische Modell erstellt wurde, besitzt keine optimalen Lösungen. Diese Problematik muß der entsprechende Fachmann erkennen.

Um bei einem konkreten mathematischen Optimierungsmodell über die *Existenz* eines *Optimums* entscheiden zu können, ist der folgende Satz hilfreich.

Satz 7.1:

Für Optimierungsaufgaben in endlichdimensionalen Räumen wird die Existenz von Minima und Maxima durch den *Satz* von *Weierstrass* gegeben:
Wenn eine stetige Funktion auf einem nichtleeren, abgeschlossenen und beschränkten Bereich B des n-dimensionalen Raumes R^n definiert ist, dann existieren Punkte aus B, in denen die Funktion ihr Optimum (Minimum oder Maximum) annimmt.

♦

☞

Von den Voraussetzungen des Satzes 7.1 sind die Stetigkeit der Zielfunktion und die Abgeschlossenheit des zulässigen Bereichs i.allg. einfach nachzuprüfen. Dagegen ist es schwieriger zu erkennen, ob der zulässige Bereich nichtleer und beschränkt ist.

♦

☞

Bei Optimierungsaufgaben in unendlichdimensionalen Räumen (Variationsrechnung und optimale Steuerung) reichen die in Satz 7.1 gegebenen Voraussetzungen für die Existenz eines Optimums nicht aus. Hier sind zusätzliche Voraussetzungen erforderlich. Da wir derartige Aufgaben nicht betrachten, verweisen wir diesbezüglich auf die Literatur.

♦

☞

Die *Eindeutigkeit* einer optimalen Lösung ist bereits in endlichdimensionalen Räumen nur unter zusätzlichen Voraussetzungen gesichert, so z.B. bei strenger Konvexität der Zielfunktion über einem konvexen Gebiet.

♦

7.1.3 Optimalitätsbedingungen

Wie in anderen Gebieten der Mathematik unterscheidet man in der mathematischen Optimierung zwischen notwendigen und hinreichenden Bedingungen, die man hier als *notwendige* bzw. *hinreichende Optimalitätsbedingungen* bezeichnet. Im Laufe des Buches werden wir Optimalitätsbedingungen für grundlegende Aufgabenstellungen kennenlernen (siehe Abschn. 8.2, 9.2 und 11.3).

☞

Aus den Optimalitätsbedingungen lassen sich Optimalpunkte (Minimal- oder Maximalpunkte) bei einfachen Aufgaben exakt berechnen. Dies gelingt aber i.allg. nicht bei komplexeren praktischen Aufgabenstellungen. Hier ist man auf numerische Lösungsmethoden angewiesen (siehe Abschn.7.1.4).

♦

7.1.4 Lösungsmethoden

Methoden zur *Berechnung* von *Extrema/Optima* lassen sich in *drei Klassen* einteilen:

I. Man bestimmt *exakte Lösungen* der Gleichungen bzw. Ungleichungen der (notwendigen) *Optimalitätsbedingungen* (siehe Abschn.8.2, 9.2 und 11.3). Für praktische Aufgabenstellungen ist diese Vorgehensweise jedoch selten anwendbar, da sich hier i.allg. die Gleichungen bzw. Ungleichungen der Optimalitätsbedingungen aufgrund ihrer Nichtlinearität nicht exakt lösen lassen. Eine numerische Berechnung von Lösungen der Optimalitätsbedingungen ist nicht immer effektiv, kann aber bei Spezialfällen wie quadratischen Aufgaben (siehe Kap.12) erfolgreich eingesetzt werden. Diese Methoden werden als *indirekte Methoden* bezeichnet.

II. Man berechnet mittels *numerischer Methoden* unmittelbar *Näherungslösungen* einer *Optimierungsaufgabe*, ohne die Optimalitätsbedingungen zu lösen. Diese Methoden werden als *direkte Methoden* bezeichnet. Wir lernen sie im Laufe dieses Buches kennen (siehe Abschn.8.3, 9.3 und 11.6). Sie bilden die hauptsächlichen Lösungsmöglichkeiten für praktische Aufgaben.

III. *Grafische Lösungsmethoden* können bei einfachen Aufgaben (mit maximal drei unabhängigen Variablen) in endlichdimensionalen Räumen herangezogen werden. Wir werden im Rahmen des Buches einige Beispiele hierfür kennenlernen (siehe Abschn.10.3 und 11.2). Grafische Methoden haben meistens nur illustrativen Charakter und spielen bei praktischen Aufgaben keine Rolle.

7.1.5 Stabilitätsbetrachtungen

Stabilitätsbetrachtungen spielen in der mathematischen Optimierung eine wichtige Rolle. Hier wird für die optimale Lösung die Auswirkung von Störungen untersucht, die in Zielfunktion und/oder Nebenbedingungen auftreten können. Derartige Störungen können verschiedene Ursachen haben, wie z.B. Rundungsfehler, Meßfehler bei der Bestimmung von Koeffizienten, nicht exakt bekannte Koeffizienten.
Stabilitätsbetrachtungen geschehen im Rahmen der *Sensitivitätsanalyse* und *parametrischen Optimierung*, die wir im Abschn.7.6 und Kap.15 skizzieren.

7.2 Extremalaufgaben

Unter *Extremalaufgaben* (*Extremwertaufgaben*) versteht man Aufgaben zur Bestimmung *lokaler Minima* und *Maxima* einer *Funktion* (*Zielfunktion*)

$$z = f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

von n Variablen

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

die man als Komponenten eines *Spaltenvektors* $\mathbf{x}$ schreibt, d.h.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Bei Extremalaufgaben

* bezeichnet man *Minima* und *Maxima* meistens als *Extrema* anstelle von *Optima*,

* können zusätzlich *Nebenbedingungen* in Form von *Gleichungen* auftreten, die man als *Gleichungsnebenbedingungen* bezeichnet.

Extremalaufgaben werden auch als

* *unrestringierte* bzw. *gleichungsrestringierte Optimierungsaufgaben*

* *Optimierungsaufgaben* ohne *Nebenbedingungen* bzw. mit *Gleichungsnebenbedingungen*

bezeichnet.

☞

Extremalaufgaben werden schon seit langem betrachtet. Mit der Entwicklung der Differentialrechnung wurden bereits Optimalitätsbedingungen für diese Aufgaben aufgestellt. Deshalb bezeichnet man Extremalaufgaben als klassische Optimierungsaufgaben. Diese Bezeichnung wird auch gewählt, um auszudrücken, daß lokale Extrema bestimmt werden.
Extremalaufgaben spielen in praktischen Anwendungen nicht die dominierende Rolle, da hier meistens Nebenbedingungen mit Ungleichungen (Ungleichungsnebenbedingungen) auftreten. Man kann jedoch versuchen, eine gegebene Aufgabe zuerst ohne Ungleichungsnebenbedingungen als Extremalaufgabe zu lösen und überprüft anschließend, ob die erhaltenen Lösungen die gegebenen Ungleichungsnebenbedingungen erfüllen (siehe Beisp. 7.1).

♦

In den folgenden beiden Abschn.7.2.1 und 7.2.2 betrachten wir mathematische Modelle für Extremalaufgaben ohne Nebenbedingungen bzw. mit Gleichungsnebenbedingungen. Ausführlicher werden beide Aufgabenstellungen in den Kap.8 und 9 behandelt.

7.2.1 Aufgaben ohne Nebenbedingungen

Bei *Extremalaufgaben ohne Nebenbedingungen* sind *lokale Extrema* (*Minima* und *Maxima*) einer gegebenen Funktion

$$z = f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

von n Variablen

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

zu bestimmen, ohne daß die Variablen weitere Nebenbedingungen erfüllen müssen, d.h.

$$z = f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow \underset{x_1, x_2, \ldots, x_n}{\text{Minimum/Maximum}}$$

Im Kap.8 werden wir für diese Extremalaufgaben ohne Nebenbedingungen *notwendige* und *hinreichende Optimalitätsbedingungen* und *numerische Methoden* kennenlernen.
Im folgenden Beispiel illustrieren wir die Problematik von Extremalaufgaben ohne Nebenbedingungen an zwei einfachen Aufgaben.

Beispiel 7.1:

Um die Rechnungen zu vereinfachen, löst man in der Praxis häufig Optimierungsaufgaben, bei denen einfache Ungleichungsnebenbedingungen für einzelne Variable vorliegen, ohne diese Nebenbedingungen und überprüft anschließend ob die erhaltenen Lösungen diese Nebenbedingungen erfüllen. Die folgenden beiden Aufgaben a) und b) sind Beispiele hierfür:

a) Betrachten wir eine Maximierungsaufgabe:

Der Wirkungsgrad η eines technischen Geräts als Funktion der abgegebenen Leistung P sei durch die Funktion

$$\eta = \eta(P) = \frac{a - b \cdot P^2}{\left(a + P + b \cdot P^2\right)^2}$$

gegeben, wobei die Konstanten a>0 und b>0 vom Gerät abhängen. Es ist diejenige Leistung P gesucht, bei der der Wirkungsgrad η am größten ist, d.h., es ist die Maximierungsaufgabe

$$\eta(P) \rightarrow \underset{P}{\text{Maximum}}$$

zu lösen.
Damit liegt die Bestimmung eines Maximums der Funktion $\eta(P)$ einer Variablen P ohne weitere Nebenbedingungen vor, die wir im Kap.8 (Beisp. 8.1 und 8.2) durchführen werden.
Bei dieser Aufgabe wurde offensichtlich eine Vereinfachung vorgenommen, da man in der Praxis die Leistung P nicht beliebig verändern kann, weil diese nach oben durch eine Schranke S (>0) beschränkt ist. Deshalb ist hier eine Ungleichungsnebenbedingung der Form

$$0 \leq P \leq S$$

gegeben, so daß man bei den erhaltenen positiven Lösungen P nachsehen muß, ob die gegebenen Schranken eingehalten werden.

b) Die Wirkung, die x Einheiten eines Medikaments t Stunden nach der Einnahme auf einen Patienten haben, werde durch die Wirkungsfunktion

$$W(x,t) = x^2 \cdot (a - x) \cdot t^2 \cdot e^{-t} \qquad (\text{ a – gegebene Konstante})$$

beschrieben. Es sind nun diejenige Dosis x und die Zeit t gesucht, daß die Wirkungsfunktion W(x,t) ein Maximum annimmt.

Damit liegt die Bestimmung eines Maximums der Funktion W(x,t) zweier Variablen x und t vor, die wir im Kap.8 (Beisp. 8.1 und 8.2) durchführen werden.
Wir betrachten die Aufgabe ohne Nebenbedingungen. Bei den Lösungen ist aber zu beachten, daß die zwei Ungleichungsnebenbedingungen

$0 \leq x \leq a$ und $0 \leq t$

erfüllt sein müssen.
♦

7.2.2 Aufgaben mit Gleichungsnebenbedingungen

Extremalaufgaben mit Gleichungsnebenbedingungen haben folgende *Struktur:*

- Es sind *lokale Extrema* (*Minima* und *Maxima*) einer *Funktion* $f(\mathbf{x})$ von n Variablen zu bestimmen, d.h.

$$z = f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow \underset{x_1, x_2, \ldots, x_n}{\text{Minimum/Maximum}}$$

- Die *Variablen* müssen zusätzlich *Nebenbedingungen* in Form von m *Gleichungen* (*Gleichungsnebenbedingungen*) erfüllen, d.h.

$$g_i(\mathbf{x}) = g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

wobei die Funktionen

g_i

beliebig sein können.
Man setzt sinnvollerweise voraus, daß $m<n$ gilt. Dies wird durch die meisten praktischen Aufgabenstellungen erfüllt. Für $m \geq n$ liegt keine Optimierungsaufgabe mehr vor, da das Gleichungssystem schon bei n unabhängigen Gleichungen i.allg. nur endlich viele Lösungen besitzt.

Im Kap.9 werden wir für diese Aufgaben *Optimalitätsbedingungen* und *numerische Methoden* kennenlernen. Im folgenden Beisp.7.2 illustrieren wir die Problematik an einer einfachen praktischen Aufgabe.

Beispiel 7.2:

Betrachten wir eine Minimierungsaufgabe zur Materialeinsparung:
Aus Blech sollen zylindrische Konservendosen mit Deckel mit einem Inhalt von 1000 cm^3 produziert werden, für deren Herstellung ein minimaler Materialverbrauch gefordert wird.
Damit ist die zu minimierende Funktion durch die Oberfläche O der Konservendose gegeben, die sich aus zwei Kreisflächen (Boden + Deckel) mit dem Radius r und der Mantelfläche mit der Höhe h zusammensetzt, d.h., es ist bzgl. der Variablen $r>0$ und $h>0$ die Minimierungsaufgabe

$$O(r,h) = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h \rightarrow \underset{r,h}{\text{Minimum}}$$

zu lösen, wobei die Forderung besteht, daß die Dose ein vorgegebenes Volumen haben muß, d.h., es ist zusätzlich die Gleichungsnebenbedingung

$$V(r,h) = \pi \cdot r^2 \cdot h = 1000$$

zu berücksichtigen.
Damit liegt die Bestimmung des Minimums einer Funktion zweier Variablen mit einer Gleichungsnebenbedingung vor, wenn man von den Positivitätsforderungen für die Variablen r und h absieht. Im Kap.9 (Beisp.9.1a) werden wir diese Aufgabe lösen.
Da sich die Gleichungsnebenbedingung einfach nach einer Variablen (z.B. h) auflösen läßt, so z.B.

$$h = \frac{1000}{\pi \cdot r^2}$$

erhält man die folgende *Minimierungsaufgabe ohne Nebenbedingungen:*

$$O(r) = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \frac{1000}{r} \rightarrow \underset{r}{\text{Minimum}}$$

Offensichtlich hat man jetzt die Oberfläche nur noch als Funktion der Variablen r (Radius) zu minimieren.
♦

Im Beisp.7.2 haben wir gesehen, daß sich eine Extremalaufgabe mit Gleichungsnebenbedingungen in eine Aufgabe ohne Nebenbedingungen überführen läßt, falls die Gleichungen der Nebenbedingungen nach gewissen Variablen auflösbar sind. Die für diese Variablen erhaltenen Ausdrücke setzt man in die Zielfunktion ein und erhält damit eine Aufgabe ohne Nebenbedingungen. Dies wird als *Eliminationsmethode* oder *Reduktionsmethode* bezeichnet (siehe Kap.9).
Falls diese Vorgehensweise möglich ist, so ist sie vorzuziehen, da hier die Gleichungsnebenbedingungen wegfallen und die Anzahl der Variablen reduziert wird.
♦

7.3 Lineare Optimierung

Aufgaben der linearen Optimierung gehören zur Klasse von Optimierungsaufgaben für die Nebenbedingungen in Ungleichungsform (Ungleichungsnebenbedingungen) vorliegen und für die globale Optima (Minima und Maxima) gesucht sind.

Aufgaben der *linearen Optimierung* haben die einfachste Struktur dieser Klasse, da *Zielfunktion* und *Funktionen* der *Nebenbedingungen linear* sind, d.h.:

- Eine gegebene *lineare Zielfunktion*

  $$z = f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \ldots + c_n \cdot x_n$$

  ist bezüglich der n Variablen

  $$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

  zu *maximieren:*

  $$z = f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \ldots + c_n \cdot x_n \to \underset{x_1, x_2, \ldots, x_n}{\text{Maximum}}$$

- Die Variablen müssen zusätzlich *Nebenbedingungen* in Form von m *linearen Ungleichungen* (*Ungleichungsnebenbedingungen*) erfüllen, d.h.

  $$\begin{array}{ccccccc} a_{11} \cdot x_1 & + & a_{12} \cdot x_2 & + \ldots + & a_{1n} \cdot x_n & \leq & b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 & + & a_{22} \cdot x_2 & + \ldots + & a_{2n} \cdot x_n & \leq & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 & + & a_{m2} \cdot x_2 & + \ldots + & a_{mn} \cdot x_n & \leq & b_m \end{array}$$

  Des weiteren müssen die Variablen meistens *Nicht-Negativitätsbedingungen* (*Vorzeichenbedingungen*)

  $$x_j \geq 0 \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

  genügen, da sie in praktischen Aufgaben häufig nur positive Werte annehmen können.

In der Aufgabenstellung der linearen Optimierung sind die Konstanten

$$a_{ij}, \; b_i, \; c_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, n)$$

gegeben und die n Variablen (Unbekannten)

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

so zu bestimmen, daß die Zielfunktion ein Maximum über dem zulässigen Bereich annimmt, der durch die Ungleichungsnebenbedingungen bestimmt wird.

☞

In *Matrixschreibweise* hat die gegebene Aufgabe der *linearen Optimierung* folgende Form:

$$z = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x} \rightarrow \underset{\mathbf{x}}{\text{Maximum}}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b} \quad , \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

wobei sich die Vektoren **c**, **x** und **b** und die Matrix **A** folgendermaßen schreiben:

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

♦

☞

Im Gegensatz zur nichtlinearen Optimierung (siehe Abschn.7.4) verwenden wir in der gegebenen Aufgabenstellung der linearen Optimierung die Maximierung der Zielfunktion. Wir haben uns hier der Formulierung vieler Lehrbücher angeschlossen. Dies bedeutet jedoch keine Einschränkung der Allgemeinheit, da die betrachtete Aufgabenstellung alle auftretenden Fälle enthält:

* Falls ein *Zielfunktion* zu *minimieren* ist, so erhält man durch Multiplikation mit −1 eine zu maximierende Zielfunktion.

* Falls eine *Gleichungsnebenbedingung* vorkommt, so kann diese durch zwei Ungleichungen beschrieben werden.

* Falls *Ungleichungsnebenbedingungen* mit ≥ vorkommen, so können diese durch Multiplikation mit −1 in Ungleichungsnebenbedingungen mit ≤ transformiert werden.

  ♦

☞

Im Gegensatz zu den Extremalaufgaben aus Abschn.7.2 existieren bei Aufgaben der linearen Optimierung nur *globale* (*absolute*) *Optima*, d.h. für unsere Aufgabenstellung *globale* (*absolute*) *Maxima*. Da die Zielfunktion linear ist, fallen lokale und globale Optima zusammen, wie man sich leicht überlegt. Sämtliche Optima liegen auf dem Rand des durch die Nebenbedingungen bestimmten zulässigen Bereichs. Deshalb kann die Differentialrechnung

im Unterschied zu Extremalaufgaben nicht zur Bestimmung von Optima herangezogen werden.
Für die lineare Optimierung existieren *spezielle Lösungsmethoden*, die hauptsächlich auf der linearen Algebra beruhen. Die bekannteste Lösungsmethode ist die *Simplexmethode*, die von dem amerikanischen Mathematiker *Dantzig* in den vierziger Jahren des 20. Jahrhunderts entwickelt wurde. Sie liefert eine Lösung in endlich vielen Schritten (mit Ausnahme von Entartungsfällen). Treten nur zwei Variable auf, so kann man auch grafische Lösungsmethoden einsetzen. Im Kap.10 gehen wir näher auf Lösungsmöglichkeiten für die lineare Optimierung ein.

♦

☞

Aufgaben der linearen Optimierung entstanden aus praktischen Aufgabenstellungen erst in den dreißiger und vierziger Jahren des 20. Jahrhunderts. Man bezeichnet sie deshalb als nichtklassische Optimierungsaufgaben. Diese Bezeichnung wird auch gewählt, um auszudrücken, daß hier nur globale Optima bestimmt werden.
Die lineare Optimierung tritt häufig bei Fragestellungen auf, in denen Kosten und Verbrauch (von Rohstoffen, Materialien) minimiert bzw. Gewinn und Produktionsmenge maximiert werden sollen.
Hierzu zählen Aufgaben der *Transportoptimierung*, *Produktionsoptimierung*, *Mischungsoptimierung*, *Gewinnmaximierung*, *Kostenminimierung*.

♦

☞

In der *englischsprachigen Literatur* bezeichnet man die lineare Optimierung als *linear programming*, so daß man im Deutschen manchmal die Bezeichnung *lineare Programmierung* verwendet.

♦

Betrachten wir im folgenden je ein Beispiel aus der Gewinnmaximierung und Kostenminimierung als typische lineare Optimierungsaufgaben. Zahlreiche weitere praktische Aufgabenstellungen findet man in Lehrbüchern der linearen Optimierung.

Beispiel 7.3:

a) Eine Firma produziert in einem gegebenen Zeitraum zwei Produkte A und B. Für diese Produktion werden zwei Rohstoffe I und II benötigt, die in je 60 Mengeneinheiten zur Verfügung stehen. Zur Herstellung je einer Mengeneinheit der Produkte werden für A 6 Mengeneinheiten und für B 12 Mengeneinheiten des Rohstoffs I und für A 12 Mengeneinheiten und für B 6 Mengeneinheiten des Rohstoffs II benötigt.

   Der bei dieser Produktion erzielte Gewinn betrage 200 000 Euro für eine Mengeneinheit vom Produkt A bzw. 300 000 Euro für eine Mengeneinheit vom Produkt B.

Gesucht ist der maximale Gewinn für die Produktion in dem gegebenen Zeitraum, d.h., es liegt eine Aufgabe der *Gewinnmaximierung* vor: Bezeichnet man die produzierten Mengeneinheiten vom Produkt A und B mit den Variablen

x_1 bzw. x_2

so hat die zu maximierende Zielfunktion (Gewinnfunktion) folgende Form:

$$f(x_1, x_2) = 200\,000 \cdot x_1 + 300\,000 \cdot x_2 = 100\,000 \cdot (2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2)$$

Die Nebenbedingungen für die beiden Variablen ergeben sich aus den gegebenen 60 Mengeneinheiten für die beiden Rohstoffe I und II und den zur Produktion benötigten Mengen des Rohstoffs I, d.h.

$$6 \cdot x_1 + 12 \cdot x_2 \leq 60$$

und des Rohstoffs II, d.h.

$$12 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \leq 60$$

Da nur positive Mengeneinheiten produziert werden können, müssen noch folgende Nicht-Negativitätsbedingungen (Vorzeichenbedingungen) erfüllt sein:

$$x_1 \geq 0 \ , \ x_2 \geq 0$$

Daraus ergibt sich folgende Aufgabe der linearen Optimierung, wenn man Zielfunktion und Nebenbedingungen durch mögliche Ausklammerung bzw. Kürzungen vereinfacht:

$$f(x_1, x_2) = 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \rightarrow \underset{x_1, x_2}{\text{Maximum}}$$

$$x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 10$$

$$2 \cdot x_1 + x_2 \leq 10$$

$$x_1 \geq 0 \ , \ x_2 \geq 0$$

b) Lösen wir ein einfaches *Mischungsproblem:*
Eine Firma hat drei verschiedene Getreidesorten G1, G2 und G3 zur Verfügung, um hieraus ein Futtermittel zu mischen. Jede dieser Getreidesorten hat einen unterschiedlichen Gehalt an den erforderlichen Nährstoffen A und B, von denen das Futtermittel mindestens 42 bzw. 21 Mengeneinheiten enthalten muß. Die folgende Tabelle liefert die Anteile der

Nährstoffe in den einzelnen Getreidesorten und die Preise/Mengeneinheit (z.B. in Euro/kg):

	G1	G2	G3
Nährstoff A	6	7	1
Nährstoff B	1	4	5
Preis/Einheit	6	8	18

Die Kosten für das hergestellte Futtermittel sollen minimal werden, d.h., es liegt eine Aufgabe der *Kostenminimierung* vor:
Dies ergibt folgende lineare Optimierungsaufgabe, wenn für die verwendeten Mengen der Getreidesorten die Variablen

x_1, x_2, x_3

benutzt werden:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 6 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 + 18 \cdot x_3 \to \underset{x_1, x_2, x_3}{\text{Minimum}}$$

$$6 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 + x_3 \geq 42$$

$$x_1 + 4 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 \geq 21$$

$$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0, \; x_3 \geq 0$$

♦

Einen wichtigen *Spezialfall* linearer Optimierungsaufgaben bilden Aufgaben der *Transportoptimierung*, die folgende *spezielle Struktur* besitzen:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} =$$

$$c_{11} \cdot x_{11} + \ldots + c_{1n} \cdot x_{1n} + \ldots + c_{m1} \cdot x_{m1} + \ldots + c_{mn} \cdot x_{mn} \to \text{Minimum}$$

bzgl.

$$x_{ij} \geq 0$$

unter Berücksichtigung der Gleichungsnebenbedingungen

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} = a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{mj} = b_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

Bei diesen Aufgaben werden die Variablen

x_{ij}

zweckmäßigerweise doppelindiziert verwendet, da sie die Menge bezeichnen, die vom Lager i zum Verbraucher j geliefert wird. Der Sonderfall besteht hier darin, daß die Nebenbedingungen in Gleichungsform vorliegen und nur für die Variablen Nicht-Negativitätsbedingungen gegeben sind.

☞

Die *Problematik* der *Transportoptimierung* besteht im folgenden:
Für eine bestimmte Ware gibt es *m Lieferanten* mit den *Lieferkapazitäten*

$a_i \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$

und *n Verbraucher* dieser Ware mit einem *Bedarf*

$b_j \geq 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$

wobei der Transport einer Einheit dieser Ware vom Lieferanten i zum Verbraucher j

c_{ij}

Geldeinheiten kostet. Die Aufgabe besteht darin, die Gesamttransportkosten (Zielfunktion) zu minimieren. Aufgrund der speziellen Struktur existieren nur ganzzahlige Lösungen, wenn

a_i und b_j

ganzzahlig sind.
In Kap.10 illustrieren wir die Berechnung derartiger Transportaufgaben mittels der Computeralgebrasysteme und EXCEL.

♦

7.4 Nichtlineare Optimierung

Eine Reihe von Optimierungsaufgaben aus Technik, Natur- und Wirtschaftswissenschaften läßt sich nicht zufriedenstellend durch lineare Modelle beschreiben, d.h. mittels linearer Optimierung lösen. Deshalb ist es notwendig, sich neben der linearen Optimierung auch mit Aufgaben der *nichtlinearen Optimierung* zu beschäftigen (siehe [46] und Beisp.7.4).
Sobald eine Funktion der Nebenbedingungen oder die Zielfunktion nichtlinear sind, kann man Methoden der linearen Optimierung nicht mehr anwenden und spricht von nichtlinearer Optimierung, deren Theorie seit den fünfziger Jahren des 20. Jahrhunderts entwickelt wird. In der *englischspra-*

chigen Literatur verwendet man die Bezeichnung *nonlinear programming*, so daß man in deutschen Büchern auch gelegentlich die Bezeichnung *nichtlineare Programmierung* findet.

Aufgaben der *nichtlinearen Optimierung* haben folgende *Struktur:*

- Eine gegebene *Zielfunktion* $f(\mathbf{x})$ ist bezüglich der n Variablen

  $$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

  zu *minimieren*, d.h.

  $$z = f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \underset{x_1, x_2, \dots, x_n}{\text{Minimum}}$$

- Die Variablen müssen zusätzlich *Nebenbedingungen* in Form von m *Ungleichungen* (*Ungleichungsnebenbedingungen*) erfüllen, d.h.

  $$g_i(\mathbf{x}) = g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, m)$$

  wobei die Funktionen g_i beliebig sein können.

♦

☞

Die gegebene Aufgabenstellung der nichtlinearen Optimierung ist hinreichend allgemein, d.h., sie enthält alle auftretenden Fälle:

* Falls eine *Gleichungsnebenbedingung* vorkommt, so kann sie durch zwei Ungleichungen beschrieben werden.

* Falls *Ungleichungen* mit ≥ vorkommen, so können sie durch Multiplikation mit −1 in Ungleichungen mit ≤ transformiert werden.

* Falls ein *Zielfunktion* $f(\mathbf{x})$ zu *maximieren* ist, so erhält man durch Multiplikation mit −1 eine zu minimierende Zielfunktion.

Wenn die Zielfunktion $f(\mathbf{x})$ und die Funktionen $g_i(\mathbf{x})$ der Nebenbedingungen konvex sind, so spricht man von einer *konvexen Optimierungsaufgabe*. Für derartige Aufgaben liefert die Lösungstheorie weitreichendere Aussagen.

Ausführlicher betrachten wir die Problematik der nichtlinearen Optimierung im Kap.11.

♦

☞

Im Gegensatz zu Extremalaufgaben aus Abschn.7.2 sind bei Aufgaben der nichtlinearen Optimierung ebenso wie beim Spezialfall der linearen Opti-

mierung globale Optima gesucht, d.h. für unsere Aufgabenstellung globale Minima. Während bei der linearen Optimierung lokale und globale Optima zusammenfallen, können bei der nichtlinearen Optimierung neben globalen auch lokale Optima auftreten.
Man zählt die nichtlineare Optimierung zu den nichtklassischen Optimierungsaufgaben. Ein weiterer Grund für diese Bezeichnung ist darin begründet, daß Aufgaben der nichtlinearen Optimierung erst seit den fünfziger Jahren des 20. Jahrhunderts betrachtet werden. Diese Aufgaben entstanden ebenfalls aus praktischen Aufgabenstellungen, da Modelle der linearen Optimierung nicht immer zufriedenstellende Ergebnisse liefern. Zu den *Begründern* der Theorie der *nichtlinearen Optimierung* gehören die amerikanischen Mathematiker *Karush*, *Kuhn* und *Tucker*.
♦
Betrachten wir zwei typische Beispiele, bei denen Aufgaben der nichtlinearen Optimierung vorliegen. Weitere praktische Aufgabenstellungen findet man in den Büchern [5, 8, 37, 46, 47, 76].

Beispiel 7.4:

a) Bei einer Reihe von Modellen der linearen Optimierung läßt sich die Linearität der Zielfunktion nicht immer aufrechterhalten. Dies ist z.B. dadurch begründet, daß bei der Gewinnmaximierung und Kostenminimierung die Preise bzw. Kosten nicht konstant sind, sondern von den hergestellten Mengen abhängen. So kann es bei der Aufgabe b) aus Beisp. 7.3 vorkommen, daß die Kosten für die einzelnen Getreidesorten von der Menge des produzierten Futtermittels abhängen. Diese können z.B. fallen, wenn größere Mengen der Getreidesorten gekauft werden. Deshalb sind hier die Kosten nicht mehr konstant, sondern Funktionen der entsprechenden Mengenvariablen , d.h.

   $$c_i = c_i(x_i)$$

   Damit wird die zugehörige Optimierungsaufgabe nichtlinear, weil die Zielfunktion nichtlinear ist:

   $$z = f(x_1, x_2, x_3) = c_1(x_1)\cdot x_1 + c_2(x_2)\cdot x_2 + c_3(x_3)\cdot x_3 \to \underset{x_1, x_2, x_3}{\text{Minimum}}$$

   $$6\cdot x_1 + 7\cdot x_2 + x_3 \geq 42$$

   $$x_1 + 4\cdot x_2 + 5\cdot x_3 \geq 21$$

   $$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$$

b) Betrachten wir eine Minimierungsaufgabe, die in einem Architekturbüro anfallen kann:
   Es soll ein Gebäude mit einer Nutzfläche von mindestens 10 000 m^2 in rechteckiger Form konstruiert werden, für das die jährlichen Kosten für

die Heizung bzw. Kühlung auf 200 000 Euro beschränkt sind und das sich zu einem Teil t (in m) unterhalb der Erdoberfläche befinden soll. Die Höhe (in m) des Gebäudes oberhalb der Erdoberfläche bezeichnen wir mit h.
Weitere Beschränkungen sind:

* Länge l und Breite b des Gebäudes dürfen jeweils 60 m nicht überschreiten und sollen sich wie 2 zu 1 verhalten, d.h. $l = 2 \cdot b$.
* Das Gebäude soll aus n Etagen bestehen, die jeweils eine Höhe von 3m besitzen müssen.
* Die Kosten für Heizung und Kühlung werden im Jahr auf 150 Euro pro m^2 Außenfläche geschätzt, d.h., es muß gelten

  $$150 \cdot (2 \cdot h \cdot l + 2 \cdot h \cdot b + l \cdot b) \leq 200\,000$$

Minimiert werden sollen bei dem Bau dieses Gebäudes die Kosten für die Erdarbeiten, die proportional zum Volumen der Erde sind, die für den Bau unterhalb der Oberfläche ausgehoben werden muß.

Damit ergibt sich die Minimierungsaufgabe

$$t \cdot l \cdot b \;\rightarrow\; \underset{b,h,l,n,t}{\text{Minimum}}$$

mit den Nebenbedingungen in Gleichungs- und Ungleichungsform

$$(t + h)/n = 3 \;,\; l = 2 \cdot b \;,\; n \cdot l \cdot b \geq 10\,000 \;,\; l \leq 60 \;,\; b \leq 60 \;,$$

$$150 \cdot (2 \cdot h \cdot l + 2 \cdot h \cdot b + l \cdot b) \leq 200\,000 \;,\; n \geq 1 \;,\quad b, h, l, t \geq 0$$

Zusätzlich müßte man noch die Anzahl n der Etagen als ganzzahlig fordern

♦

☞

In der *nichtlinearen Optimierung* gibt es eine Reihe von *Spezialfällen*, für die effektive Lösungsmethoden existieren. Wir betrachten die wichtigsten

- Lineare Optimierung (Kap.10)
- Eindimensionale Optimierung (Abschn.11.4.1 und 11.6.1)
- Separierbare (separable) Optimierung (Abschn.11.4.2)
- Quotientenoptimierung (Abschn.11.4.3)
- Quadratische Optimierung (Abschn.11.4.4 und Kap.12)
- Konvexe Optimierung (Abschn.11.4.5)

in den angegebenen Kapiteln bzw. Abschnitten.

♦

Mathematische Optimierung mit
Computeralgebrasystemen
Einführung für Ingenieure, Naturwissenschaflter und
Wirtschaftswissenschaftler unter Anwendung von
MATHEMATICA, MAPLE, MATHCAD, MATLAB und EXCEL
Benker, H.
2003, XIII, 500 S., Hardcover
ISBN: 978-3-540-44118-2