

# Vorwort

Auch dieser 2. Band der Quantentheorie beruht auf Vorlesungen, die ich für Generationen von jungen Physikern an der Universität Bonn gehalten habe. Dementsprechend ist er ebenso wenig wie der erste Band ein Kompendium der Quantenmechanik. Sein Anliegen ist es nicht, in irgendeinem Sinne „vollständig“ zu sein, was bei einem Gebiet wie der Quantenmechanik ohnehin unmöglich ist. Vielmehr geht es mir darum, die innere Struktur und Folgerichtigkeit der Quantenmechanik so deutlich wie möglich herauszuarbeiten.

Daher beginnt das Buch im ersten Kapitel mit einer straffen Zusammenfassung der im ersten Band gelegten Grundlagen. Neben Begriffen wie Zustand, Observable, Meßwert und Erwartungswert spielt der Begriff der Symmetrie-Transformation eine fundamentale Rolle. Mit Hilfe von Symmetrieüberlegungen kann man die Existenz der wichtigsten Observablen Ort, Impuls und Energie und ihre Kommutatoreigenschaften begründen; sowohl für die nichtrelativistische wie die relativistische Quantentheorie.

Wie man Schlüsse aus der so allgemein begründeten Quantenmechanik ziehen kann, stellen die beiden folgenden Kapitel dar. Kapitel 2 beginnt mit dem scheinbar so einfachen Beispiel des harmonischen Oszillator. Jedoch wird man mit seiner Hilfe zu einem Verfahren für die Quantisierung geführt, das man in der gesamten Quantentheorie verwenden kann. Wir illustrieren dies an den Molekülschwingungen, der Quantentheorie der Photonen und an der Theorie der schwingenden Saite, die neuerdings in der Stringtheorie wieder große Aufmerksamkeit gefunden hat.

Das dritte Kapitel behandelt ein zweites Paradigma der Quantisierung, nämlich die Quantentheorie des Drehimpulses. Diese Theorie beruht auf den Eigenschaften der Drehgruppe, die zunächst genauer dargestellt wird. Dabei spielt die Nichtvertauschbarkeit der Drehungen eine wichtige Rolle, die zu den in vielen Zusammenhängen wichtigen Drehimpuls-Kommutatoren führt. Man muß außerdem das nichttriviale Verhalten bei Drehungen um  $360^\circ$  beachten, das der eigentliche Grund für die Existenz des Spins ist.

Das vierte Kapitel verwendet die gewonnenen Einsichten für die Theorie der gebundenen Zustände eines Teilchens. Dabei werden insbesondere verborgene Symmetrien erläutert, die in verschiedener Weise zu „höheren“ Symmetriegruppen führen. Das für konkrete Rechnungen wichtige Verfahren

der Schrödingerschen Störungstheorie und deren Anwendungen auf Wechselwirkungen mit äußeren elektromagnetischen Feldern schließt dieses Kapitel ab.

Wegen der großen Bedeutung des Spins ist ihm ein eigenes Kapitel 5 gewidmet. Zunächst werden die besonderen Eigenschaften des Spins  $\frac{1}{2}$  erläutert, insbesondere wird die Clifford-Algebra eingeführt. Wie man den Wert des  $g$ -Faktors  $-g_s = 2$  – auch in der nichtrelativistischen Theorie begründen und dabei die Idee der „minimalen elektromagnetischen Wechselwirkung“ einführen kann, ist eine nichttriviale Anwendung dieser Algebra. Die Kopplung von Spin und Bahndrehimpuls gibt den Anlaß, die Addition von Drehimpulsen allgemein zu behandeln. Dabei werden die wichtigen Begriffe „Produktraum“ und „Ausreduktion“ eingeübt. Ein technisch aufwendiges, aber oft notwendiges Hilfsmittel sind die sphärischen Tensoren, denen ein eigenes Unterkapitel gewidmet ist.

Schließlich wird in diesem Kapitel gezeigt, in welcher völlig anderen Weise sich der Drehimpuls bei den Zuständen im Kontinuum, bei den Streuzuständen zeigt. Die Partialwellen-Entwicklung mit und ohne Spin ist das Resultat, das für die Analyse von Experimenten eine hervorragende Rolle spielt.

Physikalisch nicht unterscheidbare Teilchen bringen in der Quantentheorie neue Gesetze zur Wirksamkeit. Das Verhalten beim Vertauschen von zwei oder mehreren ununterscheidbaren Teilchen läßt zunächst viele Möglichkeiten zu, die erst durch die Forderungen der speziellen Relativitätstheorie auf zwei Teilchenarten eingeschränkt wird. Das knapp gefaßte 6.Kapitel begründet die Argumente dafür und gibt die Gründe für die statistischen Verteilungen von Fermionen und Bosonen. Für detaillierte Anwendungen muß auf die weiterführende Literatur verwiesen werden.

Das letzte ausführliche Kapitel ist der relativistischen Quantentheorie gewidmet. Diese Theorie hatte in den 30-er Jahren des vorigen Jahrhunderts eine sehr abwechslungsreiche Geschichte. Obwohl wir heute das endgültige Ergebnis kennen, ist es aus pädagogischen und wissenschaftshistorischen Gründen geboten, ihre Entwicklung im Einzelnen darzustellen. Dabei lernt der Leser die Motivation für die Grundbegriffe der relativistischen Quantentheorie Schritt für Schritt kennen.

Auf die vielfältige Unterstützung, die dieses Buch möglich machte, habe ich schon im ersten Band hingewiesen. Den damals ausgesprochenen Dank kann ich nur wiederholen. Vor allem möchte ich den Herren Dr. Manfred Kremer, John von Neumann Institut für Computing in Jülich, und Dr. Walter Pfeil, Physikalisches Institut der Universität Bonn, für ihre kritische Durchsicht des Manuskripts und für vielfältige Anregungen sehr herzlich danken.

Das Lektorat des Springer-Verlages hat mich in sympathischer und effektiver Weise unterstützt, und der Firma LaTeX, Leipzig, bin ich für die technische Bearbeitung, insbesondere von schwierigen Abbildungen verpflichtet.

Vor allem möchte ich meiner Frau danken. Sie hat es lange Zeit wieder einmal ertragen, mich nur „von hinten“ zu sehen, während ich mit dem Buchprojekt verheiratet zu sein schien. Daher widme ich ihr dieses Buch.

Bonn im Herbst 2002

Horst Rollnik

## 2 Quantisierung des harmonischen Oszillators

In diesem Kapitel behandeln wir die Quanteneigenschaften des eindimensionalen harmonischen Oszillators, also eines sehr einfachen physikalischen Systems: Ein Teilchen bewegt sich auf einer Geraden unter dem Einfluß einer elastischen Kraft. Das damit verbundene Problem hat auch mathematisch in mehrfacher Hinsicht sehr einfache Eigenschaften. Gerade daher ist die Quantentheorie des harmonischen Oszillators zu einem Paradigma für die Quantisierung vieler, sehr verschiedenartiger physikalischer Systeme geworden.

Darunter fallen zunächst alle Systeme, die **Gleichgewichtslagen** besitzen und um diese Lagen „schwingen“, z.B. zweiatomige Moleküle. Wir werden die Struktur der dabei entstehenden Schwingungsspektren behandeln. Eine naheliegende Verallgemeinerung ist die Erweiterung auf Systeme mit mehreren Freiheitsgraden, die durch harmonische Kräfte gekoppelt sind. Etwas überraschend mag es sein, daß auch die Quantentheorie des elektromagnetischen Feldes letzten Endes auf die Quantisierung des harmonischen Oszillators zurückgeführt werden kann und daß mit seiner Hilfe die theoretische Beschreibung von **Lichtquanten oder Photonen** möglich wird. Die Gründe dafür werden wir im Abschnitt 2.9 erläutern.

Daß man mit den Methoden dieses Kapitels die Quanteneigenschaften einer **schwingenden Saite** behandeln kann, mag dem Leser sofort einleuchten. Nachdem die Saite lange Zeit in der Physik nur eine Nebenrolle gespielt hat, erhielt sie in den letzten Jahren im Rahmen der **Stringtheorie der Elementarteilchen** eine besondere Bedeutung. Danach sind die elementarsten Bausteine der Materie keine Punktteilchen sondern „Fäden“ von sehr kleiner Länge, die im internationalen Sprachgebrauch „Strings“ heißen. Die verschiedenen Quantenanregungen dieser Strings führen zu den bis in letzter Zeit als fundamental angesehenen Teilchen, wie den Photonen, den Gravitonen, den Gluonen, den Quarks etc. Sämtliche Teilchen werden so als Anregungen eines Strings oder eines Superstrings gedeutet, und es mag eine wirklich **vereinheitlichte Theorie der Physik** erreichbar sein.

Für die Quantentheorie selbst liegt die Bedeutung der in den nächsten drei Abschnitten entwickelten Methoden darin, daß sie die fundamentale Rolle der kanonischen Vertauschungsrelationen illustrieren. Allein unter Benutzung dieser Vertauschungsrelationen kann die Quantisierung des harmonischen Os-

zillators durchgeführt werden. Daher steht eine Analyse dieser Kommutatoren am Anfang..

## 2.1 Die Leiteroperatoren

Wir beginnen mit einer Umformung der kanonischen Vertauschungsrelationen in die wohl einfachst mögliche Form. Diese einfache Rechnung kann allgemein durchgeführt werden. Sie ist nicht auf den harmonischen Oszillator beschränkt und hat eine grundsätzliche Bedeutung. Anschließend wenden wir sie auf den Oszillator an.

### 2.1.1 Die einfachste Form der kanonischen Kommutatoren

Wir gehen von der kanonischen Vertauschungsrelation für den Ortsoperator  $Q$  und den Impulsoperator  $P$  aus, also von

$$[P, Q] = \frac{\hbar}{i} \mathbf{1} \quad (2.1.1)$$

Wir beschränken uns zunächst auf einen festen Zeitpunkt  $t$ , so daß wir  $t$  als Parameter nicht explizit aufschreiben müssen. Die Relation (2.1.1) gilt für jede Zeit  $t$ . Die Kommutatoren für  $Q$  und  $P$  selbst verschwinden trivialerweise

$$[Q, Q] = 0; \quad [P, P] = 0 \quad (2.1.2)$$

Durch Einführung des nicht-hermiteschen Operators

$$A := \alpha Q + i\beta P \quad \text{mit } \alpha, \beta \in \mathbf{R} \quad (2.1.3)$$

und des dazu hermitesch konjugierten Operators

$$A^\dagger = \alpha Q - i\beta P \quad (2.1.4)$$

kann man die angekündigte einfache Form des Kommutators von  $A$  und  $A^\dagger$  finden, die der Vertauschungsrelation (2.1.1) äquivalent ist. Aus

$$\begin{aligned} AA^\dagger &= \alpha^2 Q^2 + \beta^2 P^2 + i\alpha\beta(PQ - QP) \\ A^\dagger A &= \alpha^2 Q^2 + \beta^2 P^2 - i\alpha\beta(PQ - QP) \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

folgt nämlich

$$[A, A^\dagger] = AA^\dagger - A^\dagger A = i2\alpha\beta[P, Q] = 2\alpha\beta\hbar\mathbf{1} \quad (2.1.6)$$

Diese Formel erhält die einfachst mögliche Gestalt, wenn man

$$2\alpha\beta = \hbar^{-1} \quad (2.1.7)$$

setzt, so daß (2.1.1) zu

$$\boxed{[A, A^\dagger] = \mathbf{1}} \quad (2.1.8)$$

führt. Wiederum verschwinden die anderen Kommutatoren

$$\boxed{[A, A] = 0; \quad [A^\dagger, A^\dagger] = 0} \quad (2.1.9)$$

### 2.1.2 Endgültige Form der Leiteroperatoren, der Besetzungszahloperator

Wenden wir uns nun speziell dem harmonischen Oszillator zu. Ein Teilchen mit der Masse  $m$  bewege sich unter dem Einfluß der Kraft  $-kx$ , wie es das Hookesche Gesetz fordert, nach dem die rücktreibende Kraft proportional zur Auslenkung  $x$  aus der Gleichgewichtslage ist. Der Proportionalitätsfaktor  $k$  wird durch die Steifigkeit der „Feder“ bestimmt und wird auch als Kraftkonstante oder Federkonstante bezeichnet. Das Teilchen erfährt dabei eine potentielle Energie, die in der klassischen Mechanik durch

$$V(x) = \frac{k}{2} x^2 \quad (2.1.10)$$

gegeben ist. Der Faktor  $k$  und die Masse  $m$  des Teilchens bestimmen die **Schwingungsfrequenz**  $\omega$  des Oszillators gemäß

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{oder} \quad k = m\omega^2 \quad (2.1.11)$$

Übersetzt man diesen Ausdruck in die Quantenmechanik, so erhält man den Hamiltonoperator des harmonischen Oszillators<sup>1</sup>

$$H = \frac{1}{2m} P^2 + \frac{m\omega^2}{2} Q^2 \quad (2.1.12)$$

Diesen Operator formen wir mit Hilfe von  $A$  und  $A^\dagger$  um. Dazu addieren wir die beiden Gleichungen in (2.1.5), und erkennen die Möglichkeit,  $H$  durch  $AA^\dagger$  und  $A^\dagger A$  auszudrücken

$$AA^\dagger + A^\dagger A = 2\beta^2 P^2 + 2\alpha^2 Q^2 \quad (2.1.13)$$

Wegen (2.1.7) ist nur noch einer der Parameter  $\alpha$  und  $\beta$  frei wählbar; damit können wir die Summe nur bis auf einen Faktor  $\gamma$  mit  $H$  identifizieren

$$H = \gamma(AA^\dagger + A^\dagger A) \quad (2.1.14)$$

Mit

$$2\alpha^2\gamma = \frac{m\omega^2}{2} \quad 2\beta^2\gamma = \frac{1}{2m}$$

ergibt sich

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 = (m\omega)^2$$

---

<sup>1</sup>Es sei daran erinnert, daß man nach dem Korrespondenzprinzip in der Form der Regel (1.6.4) die quantenmechanische Ausdrücke für Observable aus den klassischen Formeln durch Ersetzen der klassischen Variablen  $(q, p)$  durch die Operatoren  $(Q, P)$  erhält. In unserem Falle muß man von der klassischen Energie  $\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2$  ausgehen.

Wählt man die positive Wurzel

$$\frac{\alpha}{\beta} = m\omega$$

so folgt wegen (2.1.7)

$$\alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \quad \beta = \sqrt{\frac{1}{2\hbar m\omega}}$$

und

$$\gamma = \frac{\hbar\omega}{2}$$

Man nennt  $A$  und  $A^\dagger$  **Leiteroperatoren**; die Gründe dafür werden wir im Abschnitt 2.2 erkennen. Insgesamt haben wir erhalten

Die Leiteroperatoren lauten

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} Q + i \sqrt{\frac{1}{2\hbar m\omega}} P \\ A^\dagger &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} Q - i \sqrt{\frac{1}{2\hbar m\omega}} P \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

und der Hamiltonoperator hat die Form

$$H = \frac{\hbar\omega}{2} (AA^\dagger + A^\dagger A) \quad (2.1.16)$$

$A$  läßt sich auch in der Form

$$A = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( Q + i \frac{1}{m\omega} P \right) \quad (2.1.17)$$

schreiben.

Um die Faktoren in dieser Gleichung zu verstehen, sind Dimensionsbetrachtungen nützlich: Der Vorfaktor  $\sqrt{m\omega/(2\hbar)}$  hat die Dimension  $1/\text{Länge}$ . Dies folgt aus

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\text{Masse} \times \text{Frequenz}}{\text{Energie} \times \text{Sekunde}}} &= \sqrt{\frac{\text{Masse}}{\text{Masse} \times \text{Geschwindigkeit}^2 \times \text{Sekunde}^2}} \\ &= \frac{1}{\text{Länge}} \end{aligned}$$

Daher ist der erste Term in (2.1.17) dimensionslos. Der Faktor  $1/m\omega$  im zweiten Summanden macht aus dem Impuls eine Größe der Dimension  $\text{cm}$ , so daß auch der zweite Term die Dimension 1 hat. Insgesamt ergibt sich also ein dimensionsloser Ausdruck für  $A$ . Diese Tatsache kann man auch direkt aus der Vertauschungsrelation (2.1.8) ablesen:  $A$  und  $A^\dagger$  haben die gleiche Dimension und müssen wegen (2.1.8) dimensionslos sein.

Unter Benutzung von (2.1.8) in der Form

$$AA^\dagger = A^\dagger A + \mathbf{1}$$

folgt aus (2.1.16)

$$H = \hbar\omega \left( A^\dagger A + \frac{1}{2} \mathbf{1} \right) \quad (2.1.18)$$

Führt man an dieser Stelle den dimensionslosen Operator

$$N := A^\dagger A \quad (2.1.19)$$

ein, so ergibt sich

$$\boxed{H = \hbar\omega \left( N + \frac{1}{2} \mathbf{1} \right)} \quad (2.1.20)$$

Für die weitere Entwicklung kommt dem Operator  $N$  eine entscheidende Bedeutung zu. Er ist wichtiger als der Hamiltonoperator  $H$ , mit dem er ja in einfacher Weise zusammen hängt. Aus Gründen, die später deutlich werden, wird er **Besetzungszahloperator** genannt. Im übernächsten Abschnitt werden wir mit Hilfe von (2.1.8) und (2.1.20) die Eigenwerte und Eigenzustände von  $N$  und damit von  $H$  rein algebraisch bestimmen.

### 2.1.3 Der innere Grund für die Existenz der Leiteroperatoren, die U(1) Invarianz

Es ist nützlich sich den inneren Grund für die Eigenschaften der Leiteroperatoren klar zu machen. Er ist schon in der klassischen Mechanik zu erkennen und beruht darauf, daß die Hamiltonfunktion des harmonischen Oszillators ein quadratischer Ausdruck in den Orts- **und** Impulskoordinaten  $x$  und  $p$  ist. Im einfachsten Falle – wenn wir die Masse und die Frequenz gleich Eins setzen – lautet die Hamiltonfunktion

$$H_{\text{Klass}} = \frac{1}{2}(p^2 + x^2), \quad (2.1.21)$$

was in der Tat der einfachste quadratische Ausdruck in  $x$  **und**  $p$  ist. Er läßt sich in Faktoren zerlegen

$$H_{\text{Klass}} = \frac{1}{2}(p - ix)(p + ix) = a^* a \quad (2.1.22)$$

wobei wir  $a$  durch

$$a := \frac{1}{\sqrt{2}}(p + ix)$$

definiert haben. Damit haben wir den Ursprung der Definition von  $A$  erkannt. Wegen des Operatorcharakters von  $A$  ist die Faktorzerlegung in der Quantenmechanik etwas komplizierter. Man erhält zusätzlich ein additives  $\frac{1}{2}$

$$H = \frac{1}{2}(P^2 + Q^2) = A^\dagger A + \frac{1}{2} \mathbf{1}$$



Diese Faktorzerlegung läßt sich auch in der Differentialgleichung für den Oszillator direkt anwenden<sup>2</sup> und wird bei der Diskussion der Schwingungen eines Oszillators oft verwendet:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0 \quad (2.1.23)$$

Analog zu (2.1.22) läßt sich der auftretende Differentialoperator zerlegen

$$\boxed{\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 = \left(\frac{d}{dt} - i\omega\right) \left(\frac{d}{dt} + i\omega\right)} \quad (2.1.24)$$

Daher erhält man Lösungen von (2.1.23), wenn man eine der folgenden Differentialgleichungen 1. Ordnung löst

$$\left(\frac{d}{dt} - i\omega\right) x(t) = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{d}{dt} + i\omega\right) x(t) = 0 \quad (2.1.25)$$

Die Lösungen dieser Gleichungen erkennt man sofort

$$x(t) = x_0 \exp(i\omega t) \quad \text{bzw.} \quad x(t) = x_0 \exp(-i\omega t) \quad (2.1.26)$$

Wir werden im Abschnitt 2.5 sehen, daß auch in der Quantenmechanik analoge Formeln für die Zeitabhängigkeit gelten.

Abschließend sei auf eine Symmetrieeigenschaft von (2.1.21) hingewiesen, die darauf beruht, daß im  $(x, p)$  Phasenraum  $H_{\text{Klass}}$  das Quadrat einer „Länge“ darstellt. Daher ändert  $H_{\text{Klass}}$  sich nicht, wenn man im  $(x, p)$ -Raum eine orthogonale Transformation vornimmt.

$$\begin{aligned} x' &= \cos(\alpha) x + \sin(\alpha) p \\ p' &= -\sin(\alpha) x + \cos(\alpha) p \end{aligned} \quad (2.1.27)$$

Es gilt also

$$H_{\text{Klass}}(p', x') = H_{\text{Klass}}(x, p)$$

Für die Größen  $a$  und  $a^*$  lauten die entsprechenden Symmetrietransformationen

$$a' = e^{i\alpha} a \quad \text{und} \quad a'^* = e^{-i\alpha} a^* \quad (2.1.28)$$

Die analoge Symmetrie gilt auch in der Quantenmechanik, da

$$N = A^\dagger A$$

sich offensichtlich unter

$$A' = e^{i\alpha} A \quad \text{und} \quad A'^\dagger = e^{-i\alpha} A^\dagger \quad (2.1.29)$$

nicht ändert.

---

<sup>2</sup>Um mit vertrauten Formeln zu arbeiten, haben wir im folgenden die Frequenz  $\omega$  wieder explizit eingeführt

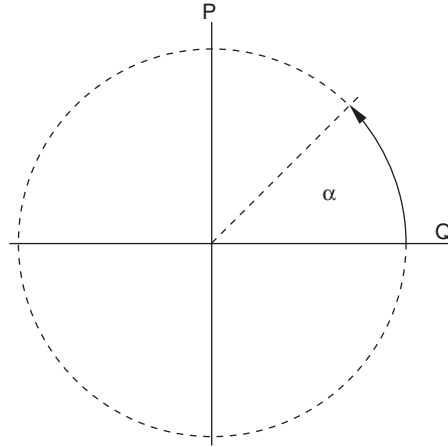


Abb. 2.1. Rotation im Phasenraum

Nach dem allgemeinen Symmetrie-Theorem der Quantenmechanik, vgl. Abschnitt 1.3 auf Seite 6, muß diese Symmetrieoperation durch einen unitären Operator erzeugt werden können. Es muß also einen unitären Operator  $U(\alpha)$  geben, der  $A$  in  $A'$  überführt:<sup>3</sup>

$$A' = U(\alpha)^\dagger A U(\alpha) \quad (2.1.30)$$

$U(\alpha)$  läßt sich als Exponentialfunktion eines hermiteschen Operators ausdrücken

$$U(\alpha) = e^{iX(\alpha)} \quad (2.1.31)$$

Nach (2.1.29) wird  $U$  für  $\alpha = 0$  trivial

$$U(0) = \mathbf{1}, \quad X(0) = 0 \quad (2.1.32)$$

Wichtig ist, daß die Transformationen (2.1.30) eine **Gruppe** bilden: Führt man zwei Transformationen hintereinander aus, so erhält man wieder eine Transformation dieser Art. Man kann dies aus (2.1.29) ablesen und durch die Formel

$$U(\alpha)U(\beta) = U(\alpha + \beta) \quad (2.1.33)$$

explizit ausdrücken. Insbesondere folgt die Existenz eines inversen Elements

$$U(-\alpha) = U^{-1}(\alpha) \quad (2.1.34)$$

Geometrisch versteht man den Gruppencharakter sofort, wenn man auf die  $(x, p)$ -Form der Transformationen zurück geht. Offenbar beschreibt (2.1.27) eine Drehung um den Winkel  $\alpha$ , siehe Abbildung 2.1. Wir sind damit der **Drehgruppe in der  $(q, p)$  Ebene** begegnet, die in der mathematischen und physikalischen Literatur als

<sup>3</sup>Da  $A'$  stetig von  $\alpha$  abhängt, kommen antiunitäre Operatoren nicht in Frage.

$O(2)$  = Orthogonale Gruppe in 2 Dimensionen

bezeichnet wird.

Wenn man andererseits die komplexe Form (2.1.29) zugrunde legt, so muß man die Gruppe als **unitäre Gruppe in der Dimension  $d = 1$**  bezeichnen, wofür die Abkürzung

$U(1)$  = Unitäre Gruppe in 1 Dimension

üblich ist.

Eine wichtige Einsicht in die Quantentheorie des harmonischen Oszillators erhält man, wenn man den Operator  $U(\alpha)$  explizit konstruiert. Dazu gibt es ein allgemeines Verfahren: Man betrachtet zunächst kleine Werte des Parameters  $\alpha$ , sog. **infinitesimale Transformation**. Wegen (2.1.32) kann man wie folgt entwickeln

$$X(\alpha) = \alpha Y + \cdots \quad \text{und} \quad U(\alpha) = 1 + i\alpha Y + \cdots \quad (2.1.35)$$

Wendet man diese Näherungen auf (2.1.30) an, so erhält man

$$A' \approx (1 - i\alpha Y) A (1 + i\alpha Y) \approx A + i\alpha (A Y - Y A) \quad (2.1.36)$$

Es gilt also

$$A' = A + i\alpha [A, Y] + \cdots \quad (2.1.37)$$

Die infinitesimale Transformationen wird also durch den Kommutator von  $Y$  mit  $A$  bestimmt. Daher nennt man  $Y$  die **infinitesimale Erzeugende** oder den **infinitesimalen Generator** der Gruppe. Bisher haben wir noch keine Eigenschaft der Gruppe  $U(1)$  verwendet. Dies geschieht jetzt, wenn wir auch Gleichung (2.1.29) nach  $\alpha$  entwickeln

$$A' = A + i\alpha A + \cdots \quad (2.1.38)$$

Vergleicht man die beiden letzten Formeln, so folgt

$$[A, Y] = A \quad (2.1.39)$$

Dies ist eine Bedingungsgleichung für  $Y$ , die wir mit Hilfe von

$$[N, A] = -A$$

lösen können, einer Beziehung, welche im nächsten Abschnitt in Gleichung (2.2.4) bewiesen wird. Daher folgt bis auf eine additive c-Zahl<sup>4</sup>

$$Y = N$$

---

<sup>4</sup>Zunächst kann man nur schließen, daß  $Y = N$  eine Lösung von (2.1.39) ist. Wenn es aber eine andere Lösung, z.B.  $Y = Z$ , gäbe, müßte die Differenz  $N - Z$  mit dem Operator  $A$  und auch mit  $A^\dagger$  vertauschen. Im nächsten Abschnitt auf Seite 27 werden wir zeigen, daß  $A^\dagger$  sämtliche Zustände des Hilbertraumes des harmonischen Oszillators erzeugen kann. Daher kann  $Y - N$  nur ein Vielfaches des Einsoperators sein.

Damit hat sich der **Besetzungszahloperator**  $N$  als der **infinitesimale Generator der Gruppe**  $U(1)$  erwiesen. Für  $X(\alpha)$  gilt demnach in linearer Näherung  $X(\alpha) \approx \alpha N$ . Tatsächlich ist dieses Ergebnis exakt gültig. Denn wegen (2.1.33) hängt  $X(\alpha)$  linear von  $\alpha$  ab, so daß  $X(\alpha) = -\alpha N$  gilt und damit der unitäre Operator  $U(\alpha)$  ohne Näherung die Form

$$U(\alpha) = e^{-i\alpha N} \quad (2.1.40)$$

hat.

Die gewonnenen Ergebnisse haben in der heutigen Physik verschiedenartige und außerordentlich wichtige Anwendungen gefunden. Dies beruht darauf, daß Transformationen der Form (2.1.29) und Operatoren mit den Eigenschaften von  $N$  in vielen Bereichen der theoretischen Physik auftreten. Wir nennen einige Beispiele

- Teilchenzahl
- Elektrische Ladung
- Baryonenzahl
- Leptonenzahl
- Strangeness
- $\vdots$

In allen diesen Fällen sind die Größen „quantisiert“: Sie nehmen diskrete Werte an, die in der Regel ganzzahlig sind.<sup>5</sup> Für den Besetzungszahloperator  $N$  werden wir dies im nächsten Abschnitt beweisen, vgl. (2.2.14). Damit haben wir ein Paradigma für das **Verständnis von Quantenzahlen**.

## 2.2 Algebraische Lösung des Eigenwertproblems für den Oszillator

Wir nehmen jetzt die Existenz eines Eigenvektors  $|E_0\rangle$  von  $H$  zum Energiewert  $E_0$  an<sup>6</sup>

$$H|E_0\rangle = E_0|E_0\rangle. \quad (2.2.1)$$

Für den Eigenwert  $E_0$  wissen wir zunächst nur, daß er wegen der Hermitizität von  $H$  eine reelle Zahl sein muß. Aus (2.1.20) folgt eine Eigenwertgleichung für den Besetzungszahloperator  $N$

$$N|E_0\rangle = n_0|E_0\rangle \quad \text{mit} \quad n_0 = \frac{E_0}{\hbar\omega} - \frac{1}{2} \quad (2.2.2)$$

---

<sup>5</sup>Es können – nach Multiplikation mit einer rationalen Zahl – auch gebrochene Quantenzahlen auftreten, wie bei den Ladungen der Quarks

<sup>6</sup>Diese mathematische Existenz-Annahme ist notwendig, weil  $H$  ein rein kontinuierliches Spektrum haben könnte, für das Eigenvektoren im streng mathematischen Sinne nicht existieren. Wir werden die Existenzfrage im Abschnitt 2.3 im Einzelnen diskutieren.

Quantentheorie 2

Quantisierung und Symmetrien physikalischer Systeme

Relativistische Quantentheorie

Rollnik, H.

2003, XIV, 429 S. 16 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-540-43717-8