

Horst Rollnik

---

# Quantentheorie 2

Quantisierung und Symmetrien  
physikalischer Systeme  
Relativistische Quantentheorie

Mit 77 Abbildungen



Springer

Professor Dr. Dr. h.c. Horst Rollnik

Universität Bonn

Physikalisches Institut

Nußallee 12

53115 Bonn, Deutschland

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme:

*Rollnik, Horst*: Quantentheorie / Horst Rollnik. –

Berlin ; Heidelberg ; New York ; Hongkong ; London ; Mailand ; Paris ; Tokio : Springer

(Springer-Lehrbuch)

2. Quantisierung und Symmetrien physikalischer Systeme – Relativistische Quantentheorie. – 2003

ISBN 3-540-43717-7

ISBN 3-540-43717-7 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

ein Unternehmen der BertelsmannSpringer Science+Business Media GmbH

<http://www.springer.de>

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2003

Printed in Germany

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Datenkonvertierung: Fa. Le-TeX, Leipzig

Einbandgestaltung: *design & production* GmbH, Heidelberg

Gedruckt auf säurefreiem Papier SPIN: 10879786 56/3141/ba - 5 4 3 2 1 0

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Zusammenfassung der Grundlagen</b>	<b>1</b>
1.1	Zustände, Observable und Meßwerte	1
1.2	Erwartungswerte, Wahrscheinlichkeitsamplituden und statistische Operatoren	3
1.3	Symmetrietransformationen und unitäre Operatoren	6
1.4	Zeitliche Translationsinvarianz und die Bewegungsgleichungen der Quantenmechanik	7
1.5	Räumliche Translationen, Galilei-Transformationen und die speziellen Axiome der nichtrelativistischen Quantenmechanik	9
1.6	Das Korrespondenzprinzip	12
<b>2</b>	<b>Quantisierung des harmonischen Oszillators</b>	<b>15</b>
2.1	Die Leiteroperatoren	16
2.1.1	Die einfachste Form der kanonischen Kommutatoren	16
2.1.2	Endgültige Form der Leiteroperatoren, der Besetzungszahloperator	17
2.1.3	Der innere Grund für die Existenz der Leiteroperatoren, die $U(1)$ Invarianz	19
2.2	Algebraische Lösung des Eigenwertproblems für den Oszillator	23
2.3	Mathematische Existenzfragen, Zusammenhang mit der wellenmechanische Formulierung	29
2.3.1	Formaler Standpunkt	29
2.3.2	Konstruktiver Standpunkt (Hermiteische Polynome)	30
2.3.3	Vergleich beider Standpunkte	32
2.4	Ort und Impuls in der Besetzungszahldarstellung	33
2.5	Zeitliches Verhalten des harmonischen Oszillators im Heisenbergbild	37
2.6	Exkurs: Die Entdeckung der kanonischen Vertauschungsrelationen	39
2.7	Geladener Oszillator im elektrischen Feld, Anwendung auf Molekülspektren	46
2.8	Verallgemeinerung auf mehrere Freiheitsgrade	51
2.9	Quantentheorie des elektromagnetischen Feldes	59

2.9.1	Das Strahlungsfeld als Überlagerung von Oszillatoren	59
2.9.2	Formale Quantisierung des elektromagnetischen Feldes	63
2.9.3	Die Photonen	67
2.10	Schwingende Saiten und Strings	70
2.10.1	Die verschiedenen Formen von Strings	71
2.10.2	Klassische Dynamik der Strings	75
2.10.3	Lösungen der Wellengleichung für Strings	79
2.10.4	Quantentheorie der freien Strings	83
<b>3</b>	<b>Quantentheorie des Drehimpulses I</b>	<b>87</b>
3.1	Elementare Definition des Drehimpulses und Berechnung seiner Kommutatoren	87
3.2	Eigenschaften der Drehungen	89
3.2.1	Orthogonale Transformationen	90
3.2.2	Eine unerwartete Eigenschaft der Drehung um $360^\circ$	93
3.2.3	Die Gruppe $SU(2)$	94
3.2.4	Die Generatoren der Drehgruppe	99
3.3	Allgemeine Definition des Drehimpulsoperators	107
3.3.1	Verhalten von Vektor-Observablen unter Drehungen	110
3.3.2	Verhalten von skalaren Observablen unter Drehungen	112
3.4	Allgemeine Lösung des Eigenwertproblems für den Drehimpuls	114
3.4.1	Formulierung des Eigenwertproblems	114
3.4.2	Leiteroperatoren und die Eigenwerte	115
3.4.3	Folgerungen und Beispiele	120
3.4.4	Die Unschärferelationen für den Drehimpuls	122
3.5	Eigenfunktionen des Bahndrehimpulses	126
3.5.1	Drehungen in der Ortsdarstellung	126
3.5.2	Definition und Eigenschaften der Kugelflächenfunktionen	130
3.5.3	Die Kugelflächenfunktionen als harmonische Funktionen	140
3.5.4	Orthogonalität und Vollständigkeit der Kugelflächenfunktionen	143
<b>4</b>	<b>Theorie der gebundenen Zustände</b>	<b>147</b>
4.1	Die Energieeigenzustände für zentralsymmetrische Einteilchensysteme	148
4.1.1	Erhaltung des Bahndrehimpulses, die Richtungs-Entartung	148
4.1.2	Allgemeine Struktur des Energiespektrums	155
4.1.3	Die verborgene Symmetrie des Coulombproblems	163
4.1.4	Zufällige Entartung des 3-d isotropen Oszillators	174
4.2	Schrödingersche Störungsrechnung	182
4.2.1	Die erste Näherung für nicht entartete Eigenwerte	183

4.2.2	Zweite und höhere Näherungen . . . . .	187
4.2.3	Einfache Beispiele und Vergleich mit exakten Rechnungen . . . . .	189
4.2.4	Aufspaltung eines entarteten Eigenwerts . . . . .	194
4.3	Die Wechselwirkung mit elektromagnetischen Feldern . . . . .	196
4.3.1	Die elektrischen und magnetischen Dipolmomente . . . . .	200
4.3.2	Anwendung auf die Theorie des Zeeman-Effekts . . . . .	203
4.3.3	Der Starkeffekt . . . . .	207
4.3.4	Grundlagen der Theorie des Magnetismus . . . . .	210
4.3.5	Klassische und quantentheoretische Deutung des Magnetismus . . . . .	214
<b>5</b>	<b>Quantentheorie des Drehimpulses II . . . . .</b>	<b>217</b>
5.1	Der Spin des Elektrons und die Gruppe $SU(2)$ . . . . .	217
5.1.1	Darstellung des Spins mit Hilfe von Pauli-Matrizen und -Spinoren . . . . .	220
5.1.2	Pauli-Algebra als Beispiel einer Clifford-Algebra . . . . .	224
5.1.3	Die Drehungen der Pauli-Spinoren . . . . .	228
5.1.4	Pauli-Gleichung und Spin-Bahn-Kopplung . . . . .	231
5.1.5	Der $g$ -Faktor und die minimale elektromagnetische Wechselwirkung . . . . .	234
5.2	Zusammensetzung von Drehimpulsen . . . . .	237
5.2.1	Zusammensetzung zweier quantenmechanischer Systeme, der Produktraum . . . . .	239
5.2.2	Der Produktraum $\mathcal{D}_{j_1} \otimes \mathcal{D}_{j_2}$ und seine Ausreduktion . . . . .	241
5.2.3	Zwei wichtige Beispiele . . . . .	246
5.2.4	Einige Eigenschaften der Clebsch-Gordan-Koeffizienten . . . . .	249
5.2.5	Anwendung: Die Dublettaufspaltung . . . . .	253
5.3	Tensoren und das Wigner-Eckart-Theorem . . . . .	258
5.3.1	Kartesische und sphärische Tensoren . . . . .	259
5.3.2	Tensoroperatoren in der Quantenmechanik . . . . .	265
5.3.3	Das Wigner-Eckart-Theorem . . . . .	267
5.3.4	Illustration und Folgerungen des Theorems . . . . .	270
5.4	Drehimpulsentartung im Kontinuum, die Partialwellenentwicklung . . . . .	275
5.4.1	Drehimpulsanalyse für ein freies Teilchen ohne Spin . . . . .	276
5.4.2	Die Partialwellenentwicklung der Streuamplitude . . . . .	283
5.4.3	Eigenschaften von Streuamplituden und Wirkungsquerschnitten . . . . .	288
5.4.4	Die Streuung von Teilchen mit Spin . . . . .	291

<b>6</b>	<b>Quantenmechanik ununterscheidbarer Teilchen</b> . . . . .	297
6.1	Die Regeln für die Beschreibung mehrerer Teilchen . . . . .	297
6.2	Die Ununterscheidbarkeit beim Zwei Teilchen System . . . . .	301
6.3	Die wichtigsten Ergebnisse der Darstellungstheorie der Permutationsgruppe . . . . .	304
6.4	Die realisierten Permutationssymmetrien, Fermi-, Bose- und Para-Teilchen und deren Statistiken . . . . .	314
<b>7</b>	<b>Einführung in die relativistische Quantentheorie</b> . . . . .	323
7.1	Erinnerung an die spezielle Relativitätstheorie, das Problem einer relativistischen Schrödingergleichung . . . . .	324
7.1.1	Natürliche Einheiten . . . . .	331
7.2	Die physikalischen Probleme der Klein-Gordon-Gleichung . . . . .	332
7.3	Der Weg zur Dirac-Gleichung . . . . .	336
7.4	Die Eigenschaften der $\gamma$ -Matrizen . . . . .	340
7.5	Die Dirac-Gleichung und die elektromagnetische Wechselwirkung . . . . .	346
7.6	Der Dirac-Strom . . . . .	349
7.7	Die freie Dirac-Gleichung, Interpretation der Spinoren . . . . .	354
7.7.1	Dirac-Spinoren für positive Energien, die Helizitäten . . . . .	357
7.7.2	Die Polarisationen eines relativistischen Teilchens . . . . .	361
7.8	Die physikalischen Erfolge der Dirac-Theorie . . . . .	366
7.8.1	$g$ -Faktor des Elektrons . . . . .	368
7.8.2	Die Spin-Bahn Kopplung . . . . .	369
7.8.3	Ursprung des Thomas-Faktors . . . . .	371
7.8.4	Dirac-Theorie des Wasserstoff-Atoms . . . . .	372
7.9	Spinserhaltung und Zitterbewegung . . . . .	377
7.10	Die negativen Energien und die Löchertheorie . . . . .	381
7.10.1	Die Dirac-Spinoren als Feldoperatoren . . . . .	388
7.10.2	Teilchen-Antiteilchen-Konjugation . . . . .	391
7.11	Die relativistische Kovarianz der Dirac-Gleichung . . . . .	395
7.11.1	Allgemeiner Beweis . . . . .	396
7.11.2	Explizite Form der eigentlichen Lorentz- Transformationen für Spinoren . . . . .	398
7.11.3	Die diskreten Symmetrie-Transformationen . . . . .	402
7.12	Die Observablen der Dirac-Theorie . . . . .	405
7.12.1	Die bilinearen Observablen . . . . .	405
7.12.2	Chiralität und die Darstellungen der eigentlichen Lorentz-Gruppe . . . . .	408
7.12.3	Die elektrischen und chiralen Ladungen . . . . .	411
	<b>Sachverzeichnis</b> . . . . .	417

Quantentheorie 2

Quantisierung und Symmetrien physikalischer Systeme

Relativistische Quantentheorie

Rollnik, H.

2003, XIV, 429 S. 16 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-540-43717-8