

## 13 Quantisierung

### *Vorbemerkungen*

Ziel der **Quellen-Encodierung** ist die Umsetzung des von einer Nachrichtenquelle erzeugten Quellensignals in eine Binärfolge mit möglichst kleiner Schrittgeschwindigkeit. Die Quellen-Encodierung besteht aus der Irrelevanz-Reduktion und der Redundanz-Reduktion (siehe Kapitel 1.1, Bild 1.2).

Die **Irrelevanz-Reduktion** wird bei Analogsignal-Quellen durch Quellensignal-Bandbegrenzung und Quellensignal-Quantisierung vorgenommen (siehe Bild 12.2). Sowohl die Bandbegrenzung als auch die Quantisierung sind nicht umkehrbar und deshalb jeweils mit einem Informationsverlust verbunden (in Bild 12.2 sind die zugehörigen Teilblöcke deshalb grau unterlegt). Bei zu starker Bandbegrenzung oder zu grober Quantisierung ergibt sich für die Nachrichtensenke eine wahrnehmbare Qualitäts-Minderung. Bei optimaler Irrelevanz-Reduktion ist die Qualitäts-Minderung für die Nachrichtensenke soeben noch nicht wahrnehmbar oder die resultierende Signal-Qualität entspricht soeben einem vereinbarten Qualitäts-Standard.

Die **Redundanz-Reduktion** kann beispielsweise durch Optimal-Codierung (Huffman-Algorithmus, Fano-Algorithmus, siehe Kapitel 7) oder Differenz-Codierung erfolgen. Im Gegensatz zur Irrelevanz-Reduktion ist die Redundanz-Reduktion umkehrbar. Es ergibt sich dabei kein Informationsverlust und somit keine Qualitäts-Minderung.

### 13.1 Quantisierungsvorgang

In diesem Kapitel wird der Quantisierungsvorgang untersucht. Die Quantisierung als Teilvorgang der Quellen-Encodierung (siehe Vorbemerkungen) ermöglicht eine Irrelevanz-Reduktion des Quellensignals. Eine zu grobe Quantisierung kann von der Nachrichten-Senke wahrgenommen werden. Zur Quantisierung wird auch auf [ELSN74, KADE95, LOCH95, GERD96, GOEB99, MEYE02] verwiesen.

Schaltungstechnisch erfolgt die Umsetzung eines bandbegrenzten, analogen Quellensignals in ein Binärsignal durch den Analog-Digital-Umsetzer (siehe Bild 12.2). Dieser kann als Kettenschaltung von Quantisierer und Encoder aufgefasst werden. Der Quantisierer erzeugt aus dem bandbegrenzten Analog-Eingangssignal eine digitale Codewortfolge mit Werteanzahl  $b = s$  und Stellenanzahl  $z = 1$ . Der Quantisierer realisiert damit die eigentliche Analog-Digital-Umsetzung. Der nachfolgende Encoder codiert diese digitale Codewortfolge eineindeutig (also umkehrbar eindeutig) in eine binäre Codewortfolge mit Werteanzahl  $b = 2$  und Stellenanzahl  $z = \text{ceil}[\text{ld}(s)]$ . Nachfolgend werden die durch den Quantisierungsvorgang verursachten Amplitudenfehler analysiert.

### *Definition*

**Durch Quantisierung wird ein amplitudenkontinuierliches Eingangssignal in ein amplitudendiskretes Ausgangssignal umgesetzt.**

Der Aussteuerbereich  $U_0$  des Quantisierers (Quantisierungsbereich genannt) wird hierzu in  $s$  Quantisierungs-Intervalle aufgeteilt. Jedem Amplitudenwert innerhalb eines Intervalls wird

bei der Quantisierung derselbe Ausgangswert (beispielsweise der Intervallmittelwert oder die Intervalluntergrenze) zugeordnet. Dieser Ausgangswert wird als rekonstruierter Amplitudenwert bezeichnet. Der Quantisierungsvorgang ist nicht umkehrbar und deshalb mit einem Informationsverlust verbunden.

### *Gleichmäßige Quantisierung*

**Bei gleichmäßiger Quantisierung sind alle Quantisierungsintervalle gleich groß.**

Sind nicht alle Quantisierungsintervalle gleich groß, liegt ungleichmäßige Quantisierung vor.

$$U_0 = s \cdot \Delta u; \quad \Delta u = \frac{U_0}{s}; \quad (\text{gleichmäßige Quantisierung});$$

Nachfolgend wird gleichmäßige Quantisierung vorausgesetzt. Es wird der Signal-Quantisierungsgeräusch-Abstand bei gleichmäßiger Quantisierung und Teilaussteuerung (mit einem gleichverteilten Eingangssignal oder einem Sinus-Eingangssignal) behandelt. Dabei wird auch die Wirkung einer Überabtastung (näherungsweise) berücksichtigt.

### *Quantisierungskennlinie*

Die Quantisierungskennlinie stellt den Zusammenhang zwischen Eingangsspannung und quantisierter Ausgangsspannung eines Quantisierers dar. Bild 13.1 zeigt die Quantisierungskennlinie bei gleichmäßiger Quantisierung mit  $s = 8$  Quantisierungs-Intervallen. Als quantisierte Werte werden hier die Intervallmittelwerte ausgegeben. Bei  $s$  Quantisierungs-Intervallen gibt es  $s-1$  Entscheidungswerte, 2 virtuelle Entscheidungswerte und  $s$  rekonstruierte Abtastwerte.

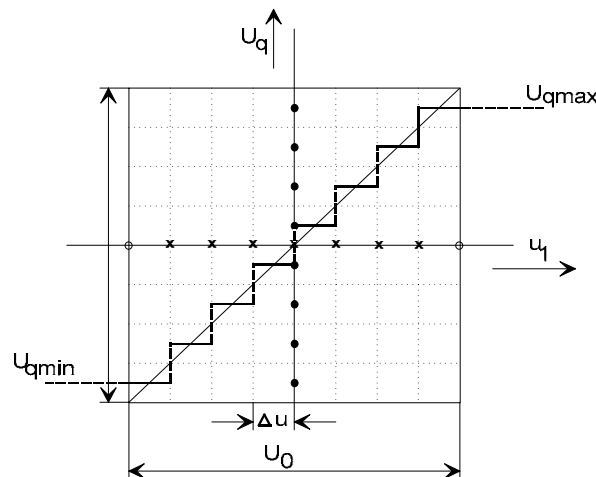


Bild 13.1: Quantisierungskennlinie bei gleichmässiger Quantisierung.

$s = 8$  Quantisierungsintervalle; rekonstruierter Amplitudenwert = Intervallmittelwert;

$U_0$  Quantisierungsbereich (Aussteuerbereich);  $\Delta U$  Quantisierungsintervallbreite;

$u_1$  Eingangsspannung;  $u_q$  Ausgangsspannung (quantisierte Spannung);

x Entscheidungswert; o virtueller Entscheidungswert; • rekonstruierter Ausgangswert.

### Quantisierungs-Fehler

Bild 13.2 zeigt den zur Quantisierungskennlinie aus Bild 13.1 zugehörigen absoluten Quantisierungsfehler  $\delta u$  (absoluter Fehler := falscher Wert – richtiger Wert) und relativen Quantisierungsfehler  $\delta u_{\text{rel}}$  (relativer Fehler := absoluter Fehler / richtiger Wert) in Abhängigkeit von der Eingangsspannung.

$$\delta u := u_q - u_1; \quad \delta u_{\text{rel}} = \delta u / u_1 ;$$

Die Ausgangsspannung  $u_q = u_1 + \delta u$  des Quantisierers entspricht der Eingangsspannung  $u_1$ , welcher das Störsignal  $\delta u$  (absoluter Quantisierungsfehler) additiv überlagert ist. Bei der Sprachsignalübertragung bewirkt der Quantisierungsfehler eine Störwirkung ähnlich einem additiven Rauschsignal. Man spricht deshalb von Quantisierungsgeräusch.

### Nachteil der gleichmäßigen Quantisierung

Der Verlauf des relativen Quantisierungsfehlers  $\delta u_{\text{rel}} := \delta u / u_1$  in Abhängigkeit von der Eingangsspannung  $u_1$  zeigt den großen Nachteil der gleichmäßigen Quantisierung: Bei kleinen Absolutwerten der Eingangsspannung ist der relative Fehler sehr groß.

Durch ungleichmäßige Quantisierung (kleinere Quantisierungsintervalle in der Umgebung des Nullpunkts, größere Quantisierungsintervalle bei großen Aussteueramplituden) können die Maximalwerte des Betrags des relativen Quantisierungsfehlers in weiten Grenzen unabhängig von der Eingangsspannung gehalten werden.

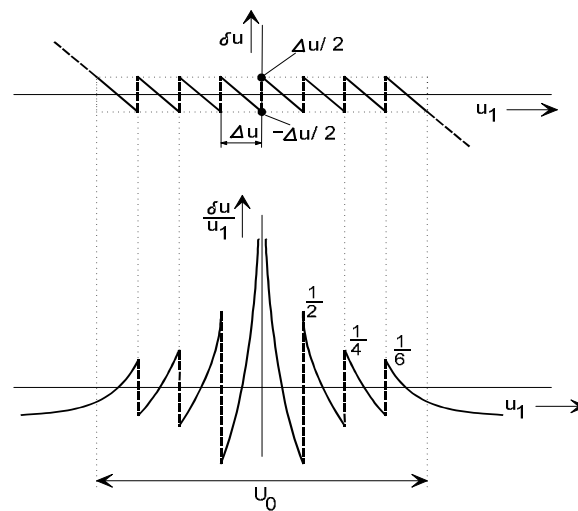


Bild 13.2: Absoluter und relativer Quantisierungsfehler.

$U_0$  Quantisierungsbereich (Aussteuerbereich);  $\Delta U$  Quantisierungsintervallbreite;

$\delta u$  Absoluter Quantisierungsfehler;  $\delta u / u_1$  Relativer Quantisierungsfehler;

*Lineare Quantisierung*

Eine Quantisierungskennlinie ist immer eine treppenförmige Übertragungskennlinie (im krassen Gegensatz zu einer linearen Übertragungskennlinie). Man spricht jedoch von „linearer Quantisierung“, wenn die „Stufenmitten“ aller Quantisierungsstufen auf einer Geraden liegen. Dies kann sowohl bei gleichmäßiger als auch bei ungleichmäßiger Quantisierung der Fall sein. Der Begriff „lineare Quantisierung“ ist also nicht deckungsgleich mit dem Begriff „gleichmäßige Quantisierung“.

**13.2 Berechnung des Signal-Quantisierungsgeräusch-Abstands****13.2.1 Eingangssignal gleichverteilt und Vollaussteuerung***Voraussetzungen*

- Gleichmäßige Quantisierung;
- $s$  Quantisierungsintervalle;
- Vollaussteuerung  $u_{1ss} = U_0$ ;
- Eingangssignal gleichverteilt;
- Quantisierter Amplitudenwert = Quantisierungsintervall-Mittelwert;

*Folgerungen*

- a) Wenn das wertkontinuierliche Eingangssignal  $u_1$  gleichverteilt in  $[-U_0/2, +U_0/2]$  ist, dann ist auch das wertdiskrete, quantisierte Ausgangssignal gleichverteilt. Die Wahrscheinlichkeit für jeden quantisierten Amplituden-Ausgangswert ist dann  $1/s$ .
- b) Wenn das wertkontinuierliche Eingangssignal gleichverteilt ist, dann liegt auch eine Gleichverteilung für jedes Quantisierungsintervall vor. Der absolute Quantisierungsfehler  $\delta u$  ist dann gleichverteilt in  $[-\Delta U/2, +\Delta U/2]$ ;

*Effektivwert einer gleichverteilten, diskreten, bipolaren Spannung*

Unter den obigen Voraussetzungen sind die möglichen quantisierten Amplitudenwerte mit positivem Vorzeichen (siehe Bild 13.1):

$$\begin{array}{llllll} \Delta u/2; & 3 \cdot \Delta u/2; & 5 \cdot \Delta u/2; & \dots (U_0/2 - \Delta u/2) = (s-1) \cdot \Delta u/2; & & := u_{qj}; \\ 1; & 2; & 3; & \dots s/2; & & := j; \end{array}$$

Es gilt also allgemein

$$\begin{array}{lll} u_{qj} = +(2 \cdot j - 1) \cdot \Delta u/2; & j = 1, 2, \dots, s/2; & \text{für die positiven Werte,} \\ u_{qj} = -(2 \cdot j - 1) \cdot \Delta u/2; & j = 1, 2, \dots, s/2; & \text{für die negativen Werte.} \end{array}$$

Da nach Folgerung a) alle quantisierten Amplitudenwerte mit gleicher Wahrscheinlichkeit ( $1/s$ ) auftreten, ist der Effektivwert des quantisierten Signals:

$$U_q^2 = \text{EW}[u_{qj}^2] = 2 \cdot \sum_{j=1}^{s/2} (p_j \cdot u_{qj}^2) = \frac{2}{s} \sum_{j=1}^{s/2} u_{qj}^2 = \frac{2}{s} \cdot \frac{\Delta u^2}{4} \cdot \sum_{j=1}^{s/2} (2j-1)^2;$$

Unter Verwendung von  $\sum_{j=1}^n (2 \cdot j - 1)^2 = \frac{n \cdot (4 \cdot n^2 - 1)}{3}$

folgt für den Effektivwert  $U_q$  des quantisierten Signals (bei geradem  $s$ , bipolarem Signal):

$$U_q^2 = \frac{\Delta u^2}{12} \cdot (s^2 - 1) = \frac{U_0^2}{12} \cdot \frac{s^2 - 1}{s^2};$$

#### *Berechnung der Effektivwerte $U_1$ und $U_n$*

Der Effektivwert  $U_1$  des im Aussteuerbereich  $[-U_0/2, +U_0/2]$  gleichverteilten Eingangssignals kann aus obigem Ergebnis als Grenzwert für  $s \rightarrow \infty$  berechnet werden:

$$U_1^2 = \frac{U_0^2}{12};$$

Der zum Quantisierungsfehler  $\delta u$  zugehörige Effektivwert  $U_n$  ergibt sich wegen Folgerung b) zu:

$$U_n^2 = \frac{\Delta u^2}{12};$$

Damit sind alle Größen zur Berechnung des  $(S_q/N_q)$ -Verhältnisses bekannt.

#### *Signal-Quantisierungsgeräusch-Abstand in dB*

Bei Vollaussteuerung, gleichverteiltem Eingangssignal, gleichmäßiger Quantisierung und  $s$  Quantisierungsintervallen ist das Signal-Quantisierungsgeräusch-Verhältnis:

$$\frac{S_q}{N_q} = \frac{U_q^2}{U_n^2} = s^2 - 1;$$

Aus dem Signal-Quantisierungsgeräusch-Verhältnis folgt der Signal-Quantisierungsgeräusch-Abstand in dB zu:

$$a_q/\text{dB} = 10 \cdot \log(S_q/N_q) = 10 \cdot \log(s^2 - 1);$$

Für  $s > 10$  gilt folgende Näherung:

$$S_q/N_q = s^2 - 1 \approx s^2; \quad \text{für } s > 10;$$

$$a_q/\text{dB} = 10 \cdot \log(s^2 - 1) \approx 10 \cdot \log(s^2) = 20 \cdot \log(s) = 20 \cdot \log(U_0/\Delta U);$$

Bei einer Quantisierung mit  $z$  Bit Genauigkeit (entsprechend  $s = 2^z$  Quantisierungsintervallen) ergibt sich für den Signal-Quantisierungsgeräusch-Abstand:

$$a_q/\text{dB} = 20 \cdot \log(2^z) = 20 \cdot z \cdot \log(2) = 20 \cdot z \cdot 0.30103 = z \cdot 6.02;$$

Bild 13.3 zeigt den Signal-Quantisierungsgeräusch-Abstand  $a_q$  in dB bei Vollaussteuerung mit gleichverteiltem Eingangssignal in Abhängigkeit von der Anzahl  $z$  der Bit pro Abtastwert. Es ist der exakte Verlauf (durchgezogene Linie) und der näherungsweise Verlauf (strichlierte Linie) angegeben.

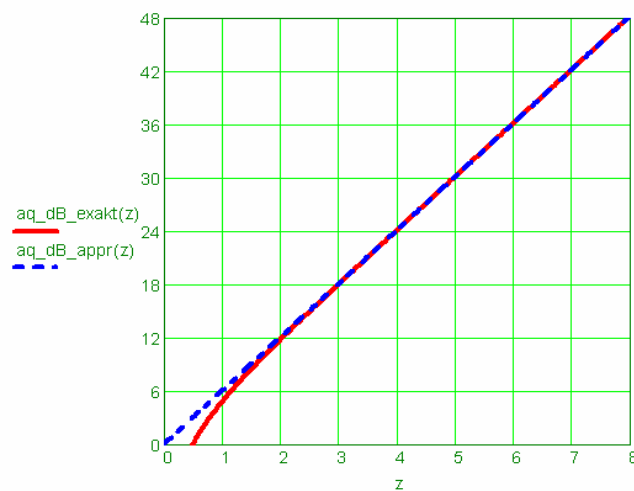


Bild 13.3: Signal-Quantisierungsgeräusch-Abstand  $a_q/\text{dB}$  in Abhängigkeit von der Anzahl  $z$  der Bit. (gleichmäßige Quantisierung, gleichverteiltes Eingangssignal, Vollaussteuerung).

### 13.2.2 Eingangssignal gleichverteilt und Teilaussteuerung

#### Teilaussteuerung

Teilaussteuerung liegt bei  $U_{1ss} < U_0$  vor. Der Aussteuergrad  $x$  und die Relativaussteuerung  $L_x$  in dB werden wie folgt definiert:

$$x := U_{1ss}/U_0; \quad (0 \leq x \leq 1); \quad L_x/\text{dB} := 20 \cdot \log(x) = 20 \cdot \log(U_{1ss}/U_0) = L_{urel}/\text{dB};$$

Die Relativaussteuerung  $L_x$  in dB gibt an, um wieviel dB der Eingangsspannungshub kleiner als der Aussteuerbereich des Quantisierers ist. Zu beachten ist, dass bei der Definition der Relativaussteuerung ausschließlich Spitze-Spitze-Werte verwendet werden, bei der normalen Pegelrechnung sind dagegen immer Effektivwerte einzusetzen.

#### $a_q$ -Berechnung

Beim Aussteuergrad  $x$  ist  $U_{1ss} = x \cdot U_0$  und somit  $U_{1ss}/\Delta U = x \cdot U_0/\Delta U = x \cdot s$ . Somit werden vom Eingangssignal nur  $(x \cdot s)$  Quantisierungsintervalle von insgesamt  $s$  vorhandenen Quantisierungsintervallen genutzt. Die "Stufung" des Ausgangssignals ist dabei ebenso, als ob ein Quantisierer mit  $(x \cdot s)$  Quantisierungsintervallen voll angesteuert wird. Der Signal-Quantisierungsgeräusch-Abstand bei Teilaussteuerung ergibt sich deshalb aus der Ableitung für Vollaussteuerung, wenn dort  $s$  durch  $(x \cdot s)$  ersetzt wird (mit  $x \cdot s$  als Anzahl der benutzten Quantisierungsintervalle). Für  $x \cdot s > 10$  können die schon eingeführten Näherungen verwendet werden.

$$\begin{aligned} a_q / \text{dB} &= 10 \cdot \log[(x \cdot s)^2 - 1] \\ &\approx 10 \cdot \log[(x \cdot s)^2] = 20 \cdot \log[x \cdot s] = 20 \cdot \log \frac{U_{1ss}}{\Delta u} = z \cdot 6.02 + 20 \cdot \log(x); \quad (x \cdot s) > 10; \end{aligned}$$

Wegen  $x < 1$  bei Teilaussteuerung ist der Term  $20 \cdot \log(x)$  stets negativ, der Signal-Quantisierungsgeräusch-Abstand ist also wie zu erwarten bei Teilaussteuerung stets kleiner als bei Vollaussteuerung.

#### Gültigkeitsbereich der Näherung

Die Voraussetzung  $x \cdot s = U_{1ss}/\Delta U > 10$  bedeutet, dass das aussteuernde Eingangssignal mindestens zehn Quantisierungsintervalle nutzen muss. Nur dann liefert die Näherungsformel ein ausreichend genaues Ergebnis ( $S_q/N_q$  um maximal 1% falsch). Die zugehörige Mindest-Relativ-Aussteuerung in dB kann folgendermaßen berechnet werden:

$$x \cdot s > 10; \quad 20 \cdot \log(x \cdot s) > 20 \cdot \log(10) = 20; \quad z \cdot 6 + 20 \cdot \log(x) > 20;$$

$$L_x/\text{dB} = 20 \cdot \log(x) > -z \cdot 6 + 20;$$

### 13.2.3 Sinus-Eingangssignal und Teilaussteuerung

Ein Sinussignal hat gegenüber einem gleichverteiltem Signal bei gleichem Signalhub  $u_{ss}$  eine um den Faktor 1.5 (dies entspricht +1.8 dB) höhere Signalleistung:

$$S_{\sin} = \frac{U_{\text{eff}}^2}{R} = \frac{(u_{ss}/2)^2}{2 \cdot R} = \frac{u_{ss}^2}{8 \cdot R}; \quad S_{\text{glv}} = \frac{u_{ss}^2}{12 \cdot R}; \quad \frac{S_{\sin}}{S_{\text{glv}}} = \frac{12}{8} = 1.5 \approx +1.8 \text{ dB};$$

Bei Sinus-Teilaussteuerung mit dem Aussteuergrad  $x$  folgt mit  $u_{ss} = x \cdot U_0$ :

$$S_{\sin} = (x \cdot U_0)^2 / (8 \cdot R) = (12/8) \cdot (x \cdot U_0)^2 / (12 \cdot R) = 1.5 \cdot S_{\text{glv}};$$

Da die Quantisierungsgeräusch-Leistung  $N_q$  konstant bleibt, folgt für das Signal-Geräusch-Verhältnis bei Sinus-Teilaussteuerung:

$$GS_q/N_q \approx S_{\sin}/N_q = 1.5 \cdot (x \cdot s)^2;$$

Der Signal-Quantisierungsgeräusch-Abstand bei Sinus-Teilaussteuerung folgt aus den Ergebnissen für Vollaussteuerung mit gleichverteiltem Signal, wenn dort  $s^2$  durch  $1.5 \cdot (x \cdot s)^2$  ersetzt wird.

$$a_q/\text{dB} = 10 \cdot \log(1.5 \cdot x^2 \cdot s^2) = 1.8 + z \cdot 6.02 + 20 \cdot \log(x); \quad \text{für } x \cdot s > 10;$$

Bei gleichem Aussteuergrad  $x$  ist  $a_q$  bei einem Sinus-Signal wegen der um den Faktor 1.5 höheren Signalleistung der Signal-Quantisierungsgeräusch-Abstand um 1.8 dB höher als bei einem gleichverteilten Eingangssignal.

### 13.2.4 Überabtastung

#### *Überabtastfaktor*

Bei einer maximalen Signalfrequenz  $f_{\max}$  muss nach dem Abtasttheorem (siehe hierzu die ergänzenden Hinweise in Kapitel 12.2) die Abtastfrequenz mindestens  $f_{a,\min} = 2 \cdot f_{\max}$  sein. Der Quotient aus tatsächlicher Abtastfrequenz  $f_a$  und Mindest-Abtastfrequenz  $f_{a,\min}$  wird als Überabtastfaktor  $\ddot{u}$  bezeichnet.

$$\ddot{u} := f_a / f_{a,\min} = f_a / (2 \cdot f_{\max});$$

Bisher wurde bei der Berechnung des Signal-Quantisierungsgeräusch-Abstandes stillschweigend unterstellt, dass keine Überabtastung (also Überabtastfaktor  $\bar{u} = 1$ ) vorliegt. Nachfolgend wird die Auswirkung einer Überabtastung berücksichtigt.

### *Sendeseitige Überabtastung*

Als reale Überabtastung wird nachfolgend eine sendeseitige Überabtastung mit Auswirkung auf die Übertragungsgeschwindigkeit im Übertragungskanal bezeichnet. Eine reale Überabtastung würde die Übertragungsgeschwindigkeit im Übertragungskanal um den Überabtastfaktor  $\bar{u}$  erhöhen (siehe Kapitel 12.3). Eine reale Überabtastung mit  $\bar{u} \gg 1$  wird deshalb nicht durchgeführt.

### *Realisierungsvarianten bei der Analogsignal-Digitalisierung*

Die Realisierung des Eingangs-Tiefpasses (Aliasing-Tiefpasses) bei der Analog-Digital-Umsetzung von Quellensignalen kann rein analog (klassische Realisierung) oder gemischt analog / digital (moderne Realisierung) erfolgen.

- Bei rein analogem Eingangs-Tiefpass ermöglicht eine geringe sendeseitige Überabtastung (bei der PCM-Codierung von Fernsprechsinalen ist  $\bar{u} = 8 \text{ kHz} / (2 \cdot 3.4 \text{ kHz}) = 1.18$ ) die Realisierung, da nur für  $\bar{u} > 1$  sich ein endlicher Übergangsbereich  $[f_{\max}, f_a/2]$  ergibt. Ohne diese geringe sendeseitige Überabtastung (bei  $\bar{u} = 1$  wäre  $f_a = 2 \cdot f_{\max}$ ) würde der Übergangsbereich entfallen und ein (nicht realisierbarer) „Idealer Eingangstiefpass“ wäre erforderlich. Resultierend ist ein aufwendiger Analog-Tiefpass und ein langsamer Analog-Digital-Umsetzer (mit Abtastfrequenz  $f_a$ ) erforderlich. Die wirksame Abtastfrequenz ist  $f_a$ .
- Bei der gemischt analogen / digitalen Realisierung erfolgt zunächst eine Überabtastung (mit  $\bar{u} \gg 1$ , beispielsweise  $\bar{u} = 16$ ) des (mit einem sehr einfachen Analog-Tiefpass bandbegrenzten) analogen Eingangssignals mit einem schnellen Analog-Digital-Umsetzer. Ein nachfolgendes Digitalfilter realisiert dann die eigentliche Tiefpass-Bandbegrenzung, ein nachfolgender Dezimations-Vorgang (Downsampling) reduziert anschließend die Abtastfrequenz  $\bar{u} \cdot f_a$  auf den erwünschten Zielwert  $f_a$ . Zum „Downsampling“ wird auf die Literatur zur digitalen Signalverarbeitung verwiesen. Resultierend ist dabei ein sehr einfacher Analog-Tiefpass, ein schneller Analog-Digital-Umsetzer (Abtastfrequenz  $\bar{u} \cdot f_a$ ) und ein DSP (Digital Signal Processor) erforderlich. Die wirksame Abtastfrequenz (nach dem Dezimations-Vorgang) ist  $f_a$ .

### *Empfangsseitige Abtastfrequenz-Erhöhung (Upsampling)*

Eine empfangsseitige Abtastfrequenz-Erhöhung wird dadurch realisiert, dass vor der Digital-Analog-Umsetzung (siehe Bild 12.2) zwischen die empfangenen „realen“ Abtastwerte zusätzliche „berechnete“ Abtastwerte eingefügt werden. Diese zusätzlichen Abtastwerte können aus den empfangenen Abtastwerten mittels Interpolations-Algorithmus per DSP (Digital Signal Processor) berechnet werden. Dieses „Upsampling“ wird auch als „empfangsseitige Überabtastung“ bezeichnet.

Die empfangsseitige Überabtastung (genauer: Das Einfügen zusätzlicher, berechneter Abtastwerte durch einen Interpolations-Algorithmus) ermöglicht es, die nachfolgend angegebenen Vorteile einer Überabtastung zu nutzen, ohne dass die Übertragungsgeschwindigkeit im Über-

tragungskanal ansteigt. Beispielsweise wird „Upsampling“ fast immer bei Compact-Disc-Wiedergabegeräten (CD-Playern) angewendet, der (empfangsseitig nachgebildete) Überabtast-Faktor liegt dort typisch bei 4 bis 16.

#### Auswirkung von Überabtastung oder Upsampling (Bild 13.4)

Das Quantisierungsgeräusch  $N_q$  ist **näherungsweise** im Frequenzband  $[0, f_a/2]$  konzentriert und hat hier **näherungsweise** konstante Leistungsdichte. Das Quantisierungsgeräusch kann somit näherungsweise als bandbegrenztes, weißes Rauschen im Frequenzband  $[0, f_a/2]$  betrachtet werden.

Bei  $f_a = f_{a,\min} = 2 \cdot f_{\max}$  (also  $\ddot{u} = 1$ , keine Überabtastung) sind Rauschbandbreite  $[0, f_a/2] = [0, f_{\max}]$  und Nutzbandbreite  $[0, f_{\max}]$  identisch. Damit wird das gesamte durch die Quantisierung entstehende Quantisierungsgeräusch  $N_q$  im Nutzband wirksam. In diesem Fall stimmen die bisher abgeleiteten Formeln für  $a_q$  exakt.

Bei  $f_a > f_{a,\min}$  (also  $\ddot{u} > 1$ , mit Überabtastung) fällt nur der Anteil  $f_{\max} / (f_a/2) = (2 \cdot f_{\max}) / f_a = 1/\ddot{u}$  der insgesamt auftretenden Quantisierungs-Geräuschleistung  $N_q$  in das Nutzband:

$$N_q' = N_q \cdot (1 / \ddot{u}) = N_q / \ddot{u};$$

Die außerhalb des Nutzbandes  $[0, f_{\max}]$  liegenden Spektralanteile des Quantisierungsgeräusches können im ausgangsseitigen Interpolationstiefpass (mehr oder weniger gut, abhängig von der Güte des Interpolationstiefpasses) unterdrückt werden.

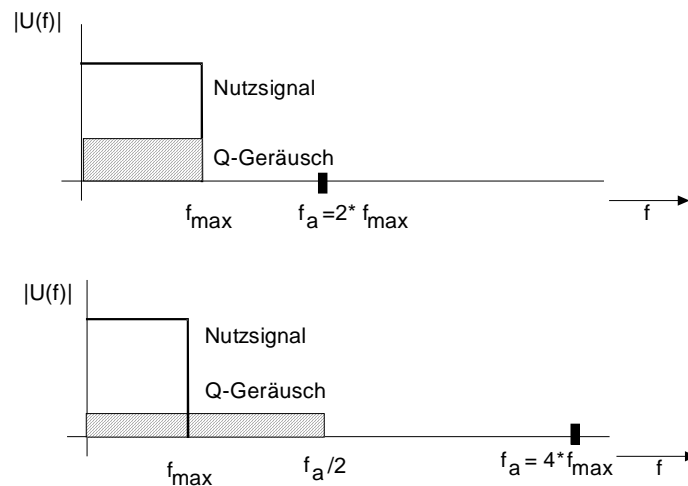


Bild 13.4: Auswirkung von Überabtastung oder Upsampling.

Teilbild oben: Ohne Überabtastung; Teilbild unten: Mit Überabtastung.

*Interpolationstiefpass mit Sperrbereich ab  $f_{\max}$* 

Werden durch einen ab der Nutzbandgrenze  $f_{\max}$  ideal sperrenden Interpolationstiefpass diese Spektralanteile vollständig unterdrückt, ergibt sich ein um den Faktor  $\ddot{u}$  verbessertes Signal-Quantisierungsgeräusch-Verhältnis:

$$S_q/N_q' = \ddot{u} \cdot (S_q/N_q);$$

Bei realem Interpolationstiefpass ist (wegen des endlich breiten Übergangsbereiches des Filters) nur ein Wert kleiner als  $\ddot{u}$  erreichbar. Bei Sinus-Teilaussteuerung und Überabtastung ergibt sich wegen  $S_q/N_q = 1.5 \cdot (x \cdot s)^2$

$$S_q/N_q' = \ddot{u} \cdot 1.5 \cdot (x \cdot s)^2;$$

*Resultierender Signal-Quantisierungsgeräusch-Abstand*

Bei gleichmäßiger Quantisierung ergibt sich bei Teilaussteuerung und Überabtastung für den Signal-Quantisierungsgeräusch-Abstand (bei Einsatz eines idealen Interpolations-Tiefpasses mit Sperrbereich ab  $f_{\max}$ ):

$$a_q/\text{dB} = 10 \cdot \log(S_q/N_q') = 10 \cdot \log [1.5 \cdot (x \cdot s)^2 \cdot \ddot{u}];$$

$$a_q/\text{dB} = a_0 + z \cdot 6.02 + 20 \cdot \log(x) + 10 \cdot \log(\ddot{u}) = a_0 + 20 \cdot \log(x \cdot s \cdot \sqrt{\ddot{u}});$$

mit	$a_0 = 0;$	bei gleichverteiltem Eingangssignal;
	$a_0 = +1.8;$	bei Sinus-Eingangssignal;
	$z =$	Anzahl der Bit (Auflösung des ADU);
	$x =$	Aussteuergrad $U_{ss} / U_0$ ;
	$\ddot{u} =$	Überabtastfaktor $f_a / f_{a,\min}$ ;

Die Konstante  $a_0$  gibt an, um wieviel dB die Leistung des Eingangssignals höher ist als die eines gleichverteilten Signals mit gleichem Aussteuerbereich.

Durch Überabtastung oder „Upsampling“ mit dem Überabtastfaktor  $\ddot{u}$  erhöht sich der Signal-Quantisierungsgeräusch-Abstand um  $10 \cdot \log(\ddot{u})$ .

### *Zusammenfassung*

Ein zusätzliches Bit bei der Codierung (also doppelte Anzahl von Quantisierungsintervallen) ergibt +6 dB, vierfache Überabtastung ergibt +6 dB, Halbierung der Aussteuerung ergibt -6 dB beim Signal-Quantisierungsgeräusch-Abstand.

## 13.3 SINAD und ENOB

Zur messtechnischen Beurteilung realer Systeme werden die Größen SINAD (Signal to Noise And Distortion Ratio) und ENOB (Effective Number Of Bits) verwendet.

$$\text{SINAD/dB} := 10 \cdot \log(S/N_{\text{ges}});$$

Durch Vergleich des gemessenen Signal-Gesamtgeräusch-Abstands SINAD in dB (das Quantisierungsgeräusch  $N_q$  und alle sonstigen Störsignale werden dabei berücksichtigt) mit dem berechenbaren Signal-Quantisierungsgeräusch-Abstand  $a_q$  (nur das Quantisierungsgeräusch  $N_q$  wird berücksichtigt) kann die Qualität eines realen Systems beurteilt werden. Beim theoretisch idealen Quantisierungssystem mit Sinus-Vollaussteuerung ohne Überabtastung kann  $z$  aus  $a_q$  wie folgt berechnet werden:

$$z = (a_q/\text{dB} - 1.8) / 6.02;$$

Wird für  $a_q/\text{dB}$  der Messwert SINAD/dB bei Sinus-Aussteuerung eingesetzt, erhält man die „effektive“ Bitanzahl  $z_{\text{eff}} := \text{ENOB}$  des quantisierenden Systems:

$$\text{ENOB} = z_{\text{eff}} = (\text{SINAD/dB} - 1.8) / 6.02;$$

Liegt bei einer Messung Teilaussteuerung vor, wird ENOB um  $20 \cdot \log(x)/6.02$  verkleinert; liegt Überabtastung vor, wird ENOB um  $10 \cdot \log(\ddot{u})/6.02$  erhöht. ENOB kann daher auch als effektive Bitanzahl eines beliebigen realen Systems bei beliebigen Betriebsbedingungen (Teilaussteuerung, Überabtastung) betrachtet werden.

Beispiel:

Teilaussteuerung 50% verändert ENOB um den Wert  $20 \cdot \log(0.5)/6.02 = -1$ , man verliert dadurch effektiv 1 Bit. Überabtastung (oder Upsampling) mit dem Faktor 4 verändert ENOB um den Wert  $10 \cdot \log(4)/6.02 = +1$ , man gewinnt dadurch effektiv 1 Bit;

## 13.4 Klirrfaktor

### Definition

Nichtlineare Verzerrungen eines Systems werden durch den Klirrfaktor  $k_{\text{ges}}$  quantifiziert. Der Klirrfaktor  $k_{\text{ges}}$  und der Signal-Geräusch-Abstand  $a$  in dB sind zwei verschiedene Beschreibungsformen für den Grad der Störung eines Nutzsymbols. Es besteht folgender Zusammenhang:

$$k_{\text{ges}} := U_{\text{eff},n} / U_{\text{eff,ges}}; \quad \text{mit} \quad \begin{array}{ll} U_{\text{eff},n} = & \text{Effektivwert aller Störsignale;} \\ U_{\text{eff,ges}} = & \text{Effektivwert des Gesamtsignals;} \end{array}$$

$$a/\text{dB} = 10 \cdot \log(S/N) = 20 \cdot \log(U_{\text{eff,ges}}/U_{\text{eff},n}) = 20 \cdot \log(1/k_{\text{ges}}) = -20 \cdot \log(k_{\text{ges}});$$

$$k_{\text{ges}} = (U_{\text{eff},n} / U_{\text{eff,ges}}) = 10^{-a/20\text{dB}};$$

Zu beachten ist:

Bei üblichen nichtlinearen Verzerrungen durch quadratische oder kubische Kennlinienanteile ist die Klirrleistung in den Oberschwingungen konzentriert. Bei Quantisierung ist das entstehende Quantisierungsgeräusch ähnlich wie ein Rauschsignal im Frequenzbereich verteilt.

### Klirrfaktor bei Sinus-Teilaussteuerung und Überabtastung

Unter Verwendung der Ergebnisse für das Signal-Geräusch-Verhältnis bei Sinus-Teilaussteuerung und Überabtastung folgt:

$$k_{\text{ges}} = U_{\text{eff},n} / U_{\text{eff,ges}} = \sqrt{(N_q/S_q)} = 1/\sqrt{(S_q/N_q)} = 1/\sqrt{(1.5 \cdot x^2 \cdot s^2 \cdot \ddot{u})};$$

$$k_{\text{ges}} = \frac{0.82}{(x \cdot s \cdot \sqrt{\ddot{u}})}; \quad \text{für} \quad x \cdot s > 10;$$

Das Ergebnis zeigt, dass sich bei Systemen mit gleichmäßiger Quantisierung der minimale Klirrfaktor bei Vollaussteuerung ergibt. Bei Teilaussteuerung steigt der Klirrfaktor umgekehrt proportional zum Aussteuergrad  $x$  an. Dies ist dadurch bedingt, dass die Quantisierungsgeräusch-Leistung (für  $x \cdot s > 10$ ) unabhängig von der Aussteuerung konstant bleibt.

### *Klirrfaktor-Faustformel*

Im einfachsten Fall (keine Überabtastung  $\ddot{u} = 1$ , Vollaussteuerung  $x = 1$ ) ergibt sich:

$$k_{\text{ges}} = 0.82 / s \approx 1 / s;$$

Der Wert  $(1 / s)$  ist ein grober Faustwert für den Klirrfaktor bei Vollaussteuerung ohne Überabtastung. Bei Teilaussteuerung wird der tatsächliche Klirrfaktor sehr viel größer als dieser Minimalwert.

## 13.5 Schlussbemerkungen

### *Optimale Quantisierung*

Bei gleichverteiltem Eingangssignal ist die gleichmäßige Quantisierung optimal im Sinne kleinster Störleistung.

Bei Sprachsignalen sind kleine Signalwerte sehr viel häufiger als große Signalwerte, Sprachsignale sind also nicht gleichverteilt. Die Sprachsignale verschiedener Sprecher sind verschieden laut (durch verschieden lautes Sprechen, Anschaltung an den AD-Umsetzer über unterschiedliche Dämpfungswerte). Deshalb ist eine gleichmäßige Quantisierung für Fernsprech-Übertragungssysteme nicht optimal.

Für Fernsprechsignale wird eine ungleichmäßige Quantisierung verwendet mit kleinen Quantisierungsintervallbreiten in der Umgebung des Nullpunkts und großen Quantisierungsintervallbreiten an der Aussteuergrenze. Dies entspricht einer eingangsseitigen Kompression des Nutzsymbols durch eine nichtlineare Kennlinie. Ausgangsseitig muss dies durch eine Expansion mit einer (zur eingangsseitigen Kennlinie inversen) nichtlineare Kennlinie wieder rückgängig gemacht werden. Den Gesamtvorgang bezeichnet man als Kompondierung (siehe auch Kapitel 12). Bei Kompondierung wird das Quantisierungsgeräusch bei geringer Aussteuerung verringert auf Kosten eines erhöhten Quantisierungsgeräusches bei hoher Aussteuerung. Das  $S_q/N_q$ -Verhältnis kann damit in weiten Grenzen unabhängig von der Aussteuerung gehalten werden. Subjektiv wird dies vom Ohr als starke Verbesserung empfunden.

### *Bezeichnungs-Unschärfen*

Quantisierung und Codierung sind begrifflich zwei völlig verschiedene Vorgänge. Durch die Quantisierung wird einem wertkontinuierlichen Eingangssignal ein wertdiskretes Ausgangssignal (also ein digitales Signal) zugeordnet. Die Quantisierung stellt also die eigentliche Analog-Digital-Umsetzung dar. Das quantisierte Signal kann als Codewortfolge mit Werteanzahl  $b = s$  und Stellenanzahl  $z = 1$  aufgefasst werden.

Die anschließende Codierung ordnet dem Ausgangssignal des Quantisierers mit den Parametern  $b = s$ ,  $z = 1$  ein Binärsignal mit den Parametern  $b = 2$ ,  $z = \text{ceil}[\text{ld}(s)]$  zu. Schaltungstechnisch sind beide Teilvorgänge im Analog-Digital-Umsetzer (ADU) zusammengefasst. Dieser wird oft als „Codierer“ bezeichnet, obwohl der Analog-Digital-Umsetzer quantisiert und codiert.

Der empfangsseitige Digital-Analog-Umsetzer (DAU) ordnet (invers zum sendeseitigen ADU) dem binären Eingangssignal mit den Parametern  $b = 2$ ,  $z = \lceil \log_2(s) \rceil$  ein Ausgangssignal mit den Parametern  $b = s$ ,  $z = 1$  zu. Die sendeseitige Quantisierung durch den ADU kann durch den empfangsseitigen DAU nicht rückgängig gemacht werden. Der Digital-Analog-Umsetzer ist ein reiner Decoder (siehe Bild 12.2).

### *Messung der Quantisierungskennlinie*

Die Ausgangsschnittstelle des Quantisierers ist schaltungstechnisch nicht existent, da im Analog-Digital-Umsetzer direkt die Umsetzung vom wertkontinuierlichen Eingangssignal zum binären Ausgangssignal durchgeführt wird. Die Quantisierungskennlinie kann jedoch bei fehlerfreier Übertragung zwischen den Eingangsklemmen des sendeseitigen ADU und den Ausgangsklemmen des empfangsseitigen DAU gemessen werden.

## 13.6 Übungen

### *Aufgabe 13.1*

#### **Gegeben:**

PCM-Multiplex-Übertragungssystem; 10 Kanäle (hiervon 8 Nutzkanäle);  
Digitalisierung mit 10 Bit/Abtastwert; gleichmäßige Quantisierung;  
Reale Überabtastung mit Überabtastfaktor 2;

Ideale Niederfrequenz-Tiefpässe mit 5 kHz Grenzfrequenz sendeseitig und empfangsseitig;  
Eingangs-Aussteuerbereich 4 V<sub>ss</sub>; Ausgangs-Aussteuerbereich 3 V<sub>ss</sub>;

Bipolares 4B5B-Leitungssignal (NRZ-REC-Impulsform) mit 1 V<sub>ss</sub>;  
Cos-Roll-Off-Tiefpass-Übertragungskanal mit Roll-Off-Faktor 1.

#### **Gesucht:**

- 1) Niederfrequenzsignal-Durchgangsverstärkung (in dB) des PCM-Übertragungssystems;
- 2) Signal-Quantisierungsgeräusch-Abstand des Ausgangssignals in dB für ein 1 kHz-Sinus-Eingangssignal mit dem absoluten Spannungspegel  $-10$  dBV;
- 3) Gesamt-Klirrfaktor des Ausgangssignals in Promille für ein 3 kHz-Sinus-Ausgangssignal mit 1 V Amplitude;
- 4) Übertragungsgeschwindigkeit des Binär-Multiplexsignals (vor der Leitungscodierung);
- 5) Realer Bandbreitendehnfaktor unter Berücksichtigung des verwendeten Leitungscodes;
- 6) Absoluter Spannungspegel (in dBV) des Leitungssignals am Übertragungskanaleingang;

**Lösung:**

$f_{\max} = 5 \text{ kHz}$  und  $\ddot{u} = 2$  ergibt  $f_a = 2 \cdot f_{a,\min} = 2 \cdot (2 \cdot 5 \text{ kHz}) = 20 \text{ kHz}$ ;

- 1)  $V/\text{dB} = 20 \cdot \log(3V_{\text{ss}} / 4V_{\text{ss}}) = -2.5$ ;  
Die NF-Durchgangsverstärkung des PCM-Übertragungssystems beträgt -2.5 dB.
- 2) Mit  $x = 0.316 \cdot 2 \cdot 1.414 V_{\text{ss}} / 4 V_{\text{ss}} = 0.223$  folgt:  
 $a_q/\text{dB} = 1.8 + 10 \cdot 6.02 + 20 \cdot \log(0.223) + 10 \cdot \log(2) = 52$ ;
- 3) Mit  $x = 2 V_{\text{ss}} / 3 V_{\text{ss}} = 0.667$  folgt:  
 $k_{\text{ges}} = 0.82 / (0.667 \cdot 1024 \cdot 1.414) = 0.85 \text{ Promille}$ ;
- 4)  $E_{\text{Fbin}} = 10 \cdot 10 \cdot (20 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}) = 2 \text{ Mbit/s}$ ;
- 5)  $\Theta_{\text{real}} = [2 \text{ MHz} \cdot (5/4)] / (8 \text{ kHz}) = 62.5$ ;
- 6) Bipolares NRZ-REC-Binärsignal ergibt  $U_{\text{L,eff}} = U_{\text{L,ss}} / 2 = 0.50 \text{ V}$ ;  
 $L_u/\text{dBV} = 20 \cdot \log(0.5) = -6$ ;