

# Vorlesung 1. Allgemeine Theorie einer Gleichung erster Ordnung

Im Unterschied zu den gewöhnlichen Differentialgleichungen besitzen die partiellen Differentialgleichungen keine einheitliche Theorie. Einige Gleichungen haben ihre eigenen Theorien, für andere gibt es überhaupt keine Theorie. Das hat mit der komplizierteren Geometrie zu tun. Im Falle gewöhnlicher Differentialgleichungen ist auf einer Mannigfaltigkeit ein Vektorfeld gegeben, daß lokal integrierbar ist (also Integralkurven besitzt). Im Falle einer partiellen Differentialgleichung ist in jedem Punkt der Mannigfaltigkeit ein Teilraum des Tangentialraums gegeben, dessen Dimension größer als 1 ist. Bekanntlich ist schon ein Feld zweidimensionaler Ebenen im dreidimensionalen Raum im allgemeinen nicht integrierbar.

**Beispiel.** Im Raum mit den Koordinaten  $x, y, z$  betrachten wir das durch die Gleichung  $dz = y dx$  gegebene Ebenenfeld (in jedem Punkt ist das eine lineare Gleichung für die Koordinaten des Tangentialvektors, die eine Ebene beschreibt).

**Aufgabe 1.** Zeichnen Sie dieses Ebenenfeld und beweisen Sie, daß es keine Integralfäche besitzt, d.h. es gibt keine Fläche, deren Tangentialebene in jedem Punkt mit dem Ebenenfeld übereinstimmt.

Somit sind integrierbare Ebenenfelder eine Ausnahmeerscheinung.

Als *Integraluntermannigfaltigkeit* eines Feldes von Tangentialunterräumen an eine Mannigfaltigkeit bezeichnet man eine Untermannigfaltigkeit, deren Tangentialebene in jedem Punkt in dem entsprechenden Tangentialunterraum enthalten ist. Wenn es gelingt, eine Integraluntermannigfaltigkeit zu konstruieren, so stimmt ihre Dimension üblicherweise nicht mit der Dimension der Unterräume des Feldes überein.

In dieser Vorlesung betrachten wir einen Fall, für den es eine vollständige Theorie gibt, nämlich den Fall einer einzigen Gleichung erster Ordnung. Vom physikalischen Standpunkt stellt dieser Fall die Dualität der Beschreibung von Phänomenen einerseits mit Hilfe von Wellen und andererseits mit Hilfe von Teilchen dar. Ein Feld genügt einer gewissen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, während ein Teilchenfluss durch ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen beschrieben wird. So wie es einen Ansatz gibt, eine partielle Differentialgleichung auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückzuführen, so kann man an Stelle der Ausbreitung von Wellen auch Teilchenflüsse untersuchen.

Wir verwenden ein lokales Koordinatensystem. Die Koordinaten (also die unabhängigen Veränderlichen) bezeichnen wir mit  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ; mit  $y = u(x)$  bezeichnen wir die unbekannte Koordinatenfunktion, wobei der Buchstabe  $y$  selbst die Koordinate auf der Werteachse bezeichnet. Für die partiellen Ableitungen schreiben wir  $p_i = \partial u / \partial x_i = u_{x_i}$ .

Die *allgemeine partielle Differentialgleichung erster Ordnung* hat die Gestalt  $F(x_1, \dots, x_n, y, p_1, \dots, p_n) = 0$ .

**Beispiele.** Spezialfälle der allgemeinen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung sind die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \quad (1.1)$$

die Eikonalgleichung der geometrischen Optik

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 = 1, \quad (1.2)$$

die Eulersche Gleichung

$$u_t + uu_x = 0. \quad (1.3)$$

Wir betrachten eine konvexe geschlossene Kurve in der Ebene mit den Koordinaten  $x_1, x_2$ . Außerhalb des durch die Kurve berandeten Gebietes sei die Funktion  $u$  definiert als der Abstand zu dieser Kurve. Dann ist  $u$  eine glatte Funktion.

**Satz 1.** Die Funktion  $u$  genügt der Gleichung (1.2).

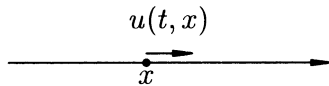
BEWEIS. Gleichung (1.2) besagt, daß der Gradient von  $u$  immer Länge 1 hat. Wir rufen uns die geometrische Bedeutung des Gradienten in Erinnerung. Der Gradient ist der Vektor, in dessen Richtung sich die Funktion am schnellsten ändert, und seine Länge ist der Absolutbetrag dieser Änderungsgeschwindigkeit. Damit ist die Aussage des Satzes aber offensichtlich.  $\square$

**Aufgabe 2.** (a) Zeigen Sie, daß sich jede Lösung von (1.2) lokal als Summe des Abstands zu einer Kurve und einer Konstanten darstellen läßt.

(b) Machen Sie sich klar, was dies mit der Dualität von Wellen und Teilchen zu tun hat (im Zweifelsfall siehe Abb. 2.2 und die zugehörigen Erläuterungen).

Es sei nun  $u(t, x)$  ein Geschwindigkeitsfeld von sich frei entlang einer Geraden bewegendem Teilchen (Abb. 1.1). Das Gesetz der freien Bewegung von Teilchen hat die Form  $x = \varphi(t) = x_0 + vt$ , wobei  $v$  die Geschwindigkeit der Teilchen bezeichnet. Die Funktion  $\varphi$  genügt der Newtonschen Gleichung  $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0$ . Wir beschreiben die Bewegung nun durch das Geschwindigkeitsfeld  $u$ . Definitionsgemäß gilt  $\frac{d\varphi}{dt} = u(t, \varphi(t))$ . Wir differenzieren nach  $t$  und erhalten die Eulersche Gleichung

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = u_t + u_x u = 0.$$



**Abb. 1.1.** Ein Teilchen auf einer Geraden

Umgekehrt kann man aus der Eulerschen Gleichung die Newtonsche Gleichung ableiten, d.h. diese Beschreibungen der Bewegung mit Hilfe der Eulerschen Gleichung für das Feld und mit Hilfe der Newtonschen Gleichung für die Teilchen sind äquivalent. Wir werden auch für den allgemeinen Fall eine Vorgehensweise entwickeln, wie man eine Wellengleichung auf eine Evolutionsgleichung für Teilchen zurückführen kann. Zunächst betrachten wir aber einige einfachere Beispiele für lineare Gleichungen.

1.) Es sei  $v = v(x)$  ein Vektorfeld auf einer Mannigfaltigkeit oder einem Gebiet des euklidischen Raums. Wir betrachten die Gleichung  $L_v(u) = 0$ , wobei der Operator  $L_v$  die Ableitung in Richtung des Vektorfeldes beschreibt (die Lie-Ableitung).

In Koordinatenschreibweise hat diese Gleichung die Gestalt

$$v_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + v_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0.$$

Sie heißt *homogene lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung*.

Eine Funktion  $u$  ist genau dann eine Lösung dieser Gleichung, wenn sie entlang der Phasenkurven des Feldes  $v$  konstant ist. Somit *sind die Lösungen unserer Gleichung die ersten Integrale des Feldes*.

Als Beispiel betrachten wir das Feld  $v = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  aus Abb. 1.2. Wir wollen die Gleichung  $L_v(u) = 0$  für dieses Feld lösen. Die Phasenkurven sind die Strahlen  $x = e^t x_0$ , die vom Ursprung des Koordinatensystems ausgehen. Die Lösung muß auf jedem dieser Strahlen konstant sein. Wenn wir im Ursprung Stetigkeit fordern, erhalten wir, daß die Lösungen genau die Konstanten sind. Diese Konstanten bilden einen eindimensionalen Vektorraum (die Lösungen einer linearen Gleichungen müssen einen Vektorraum bilden).

Im Unterschied zu diesem Beispiel bilden die Lösungen einer linearen partiellen Differentialgleichung im allgemeinen einen unendlichdimensionalen Vektorraum. So ist zum Beispiel der Lösungsraum der Gleichung  $\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0$  gleich dem Raum der Funktionen

$$u = \varphi(x_2, \dots, x_n)$$

in  $n - 1$  Variablen.

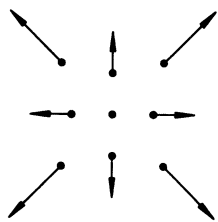


Abb. 1.2. Das Eulersche Feld

Es zeigt sich, daß dasselbe für generische Gleichungen in einer Umgebung eines regulären Punktes gilt.

**Das Cauchyproblem.** Wir betrachten eine glatte Hyperfläche  $\Gamma^{n-1}$  im  $x$ -Raum. Das *Cauchyproblem* besteht darin, eine Lösung der Gleichung  $L_v(u) = 0$  zu finden, die auf der Hyperfläche mit einer gegebenen Funktion übereinstimmt (Abb. 1.3).

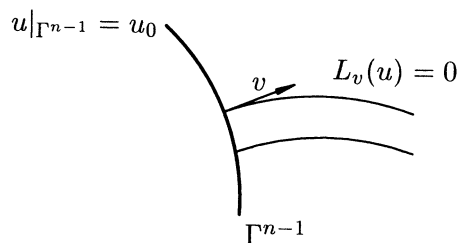


Abb. 1.3. Das Cauchyproblem

Ein Punkt der Hyperfläche heißt *nichtcharakteristisch*, wenn das Feld  $v$  dort transversal zur Hyperfläche verläuft.

**Satz 2.** *Jeder nichtcharakteristische Punkt besitzt eine Umgebung, auf der das Cauchyproblem eindeutig lösbar ist.*

BEWEIS. Durch eine glatte Variablentransformation begradigen wir das Feld und überführen  $\Gamma$  in die Hyperebene  $x_1 = 0$ . In einer kleinen Umgebung eines nichtcharakteristischen Punktes erhalten wir nun das Problem

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \quad u|_{0, x_2, \dots, x_n} = u_0(x_2, \dots, x_n),$$

welches eindeutig lösbar ist.  $\square$

2.) Nun betrachten wir das Cauchyproblem für den allgemeineren Fall einer *linearen inhomogenen* Gleichung

$$L_v(u) = f, \quad u|_{\Gamma^{n-1}} = u_0.$$

Die Lösungen einer solchen Gleichung bilden einen *affinen* Raum (die allgemeine Lösung einer inhomogenen Gleichung ist die Summe der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung und einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung).

Eine glatte Variablentransformation bringt das Problem auf die Gestalt

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad u|_{0, x_2, \dots, x_n} = u_0(x_2, \dots, x_n),$$

welche die eindeutige Lösung

$$u(x_1, \dots) = u_0(\dots) + \int_0^{x_1} f(\xi, \dots) d\xi$$

besitzt.

3.) *Quasilinear* heißt eine Gleichung, die linear in den abgeleiteten Größen ist. In Koordinaten hat eine quasilineare Gleichung erster Ordnung die Gestalt

$$a_1(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + a_n(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_n} = f(x, u). \quad (*)$$

Wir bemerken, daß das Feld  $v$  in den ersten beiden Fällen dem Differentialoperator invariant zugeordnet war (unabhängig von den Koordinaten). Welches geometrische Objekt können wir aber einer quasilinearen Gleichung invariant zuordnen?

Wir betrachten den Raum mit den Koordinaten  $(x_1, \dots, x_n, y)$  als Raum der *0-Jets der Funktionen* in  $(x_1, \dots, x_n)$ , den wir mit  $J^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  oder kürzer  $J^0$  bezeichnen.

Als *Raum der  $k$ -Jets von Funktionen* in  $(x_1, \dots, x_n)$  bezeichnet man bekanntlich den Raum der Taylorpolynome vom Grad  $k$ .

Wir stellen fest, daß das Argument  $(x_1, \dots, x_n, y, p_1, \dots, p_n)$  in einer Gleichung erster Ordnung ein 1-Jet der Funktion ist. Somit können wir eine Gleichung erster Ordnung auffassen als Hyperfläche im Raum  $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  der 1-Jets von Funktionen. Der Raum der 1-Jets reellwertiger Funktionen in  $n$  Veränderlichen läßt sich mit einem  $(2n+1)$ -dimensionalen Vektorraum identifizieren:  $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{2n+1}$ . Beispielsweise ergibt sich für Funktionen der Ebene ein fünfdimensionaler Raum von 1-Jets.

Die Lösung der Gleichung  $(*)$  läßt sich mit Hilfe ihrer Charakteristiken (das sind spezielle Kurven in  $J^0$ ) konstruieren. Das Wort „charakteristisch“ bedeutet in der Mathematik stets „invariant zugeordnet“. Zum Beispiel ist das charakteristische Polynom einer Matrix dem zugehörigen Operator invariant zugeordnet, unabhängig von der speziellen Basis bezüglich welcher die Matrix aufgestellt wurde. Die charakteristischen Untergruppen einer Gruppe sind diejenigen Untergruppen, die bei allen Automorphismen der Gruppe

invariant bleiben. Charakteristische Klassen in der Topologie sind invariant unter den entsprechenden Transformationen.

Das Vektorfeld  $v$  (im Raum unabhängiger Variablen) heißt *charakteristisches Feld* der linearen Gleichung  $L_v(u) = f$ .

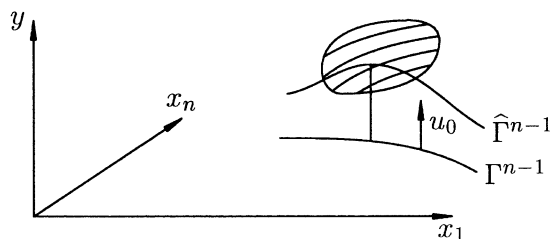
**Definition.** Als *charakteristisches Feld der quasilinearen Gleichung (\*)* wird das Feld  $A = (a_1, \dots, a_n, f)$  in  $J^0$  bezeichnet.

**Feststellung.** Die Richtung dieses Feldes ist charakteristisch.

Ist nämlich  $u$  eine Lösung, so ist ihr Graph irgendeine Hyperfläche in  $J^0$ , die entsprechend der Gleichung tangential zum Feld  $A$  liegt. Umgekehrt ist eine Funktion eine Lösung, falls ihr Graph überall tangential zum Feld  $A$  liegt.

Hieraus wird klar, wie man eine quasilineare Gleichung lösen kann. Wir betrachten in  $J^0$  die Phasenkurven des charakteristischen Feldes. Sie heißen *Charakteristiken*. Hat eine Charakteristik einen gemeinsamen Punkt mit dem Graphen der Lösung, so liegt sie ganz auf diesem. Also besteht der Graph aus Charakteristiken.

Das *Cauchyproblem für eine quasilineare Gleichung* wird nun analog formuliert wie in den vorherigen Fällen: Es sei im  $x$ -Raum eine glatte Hyperfläche  $\Gamma^{n-1}$  gegeben und auf dieser eine Anfangsfunktion  $u_0$ . Der Graph dieser Funktion ist eine Fläche  $\hat{\Gamma}^{n-1}$  in  $J^0$ , die wir als Anfangsmannigfaltigkeit ansehen, vgl. Abb. 1.4.



**Abb. 1.4.** Die Charakteristiken einer quasilinearen Gleichung, die durch die Anfangsmannigfaltigkeit  $\hat{\Gamma}^{n-1}$  verlaufen

Wenn die Charakteristiken nicht tangential zur Hyperfläche  $\hat{\Gamma}$  verlaufen, so setzt sich der Lösungsgraph lokal aus ihnen zusammen.

Im gegebenen Fall setzt sich die Eigenschaft eines Punktes, *nicht charakteristisch* zu sein, aus zwei Bedingungen zusammen. Das Feld  $A$  darf nicht tangential zu  $\hat{\Gamma}^{n-1}$  liegen und der Feldvektor darf nicht vertikal sein, d.h.  $a \neq 0$ , damit sich tatsächlich ein Graph ergibt.

Punkte, wo  $a = 0$ , sind singulär; dort verschwindet die Differentialgleichung und verwandelt sich in eine algebraische Gleichung.

**Beispiel.** Für die Eulergleichung  $u_t + uu_x = 0$  ist die Gleichung der Charakteristiken äquivalent zur Newtongleichung  $\dot{t} = 1, \dot{x} = u, \dot{u} = 0$ .

Jetzt gehen wir zur allgemeinen Gleichung erster Ordnung über.

Wir betrachten den Raum der 1-Jets  $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ; ersetzen wir den  $\mathbb{R}^n$  durch eine glatte  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit  $B^n$ , so erhalten wir den Raum  $J^1(B^n, \mathbb{R})$ ; dieser Raum besitze die lokalen Koordinaten  $(x, y, p)$ .

Als *partielle Differentialgleichung erster Ordnung* bezeichnen wir eine glatte Hyperfläche  $\Gamma^{2n} \subset J^1$ .

Beispielsweise im Fall  $n = 1$  erhalten wir eine implizite (d.h. nicht nach der abgeleiteten Größe aufgelöste) gewöhnliche Differentialgleichung.

Es erweist sich, daß unser Raum  $J^1$  eine bemerkenswerte Struktur trägt: Ein invariant definiertes Feld<sup>1</sup>  $2n$ -dimensionaler Hyperebenen. Im Fall  $n = 1$  etwa erhalten wir ein Feld von Ebenen im dreidimensionalen Raum. Die Struktur ergibt sich allein daraus, daß der Raum ein Raum von 1-Jets ist. Eine analoge Struktur entsteht auch in Räumen von Jets höherer Ordnung und wird dann als Cartansches Feld bezeichnet.

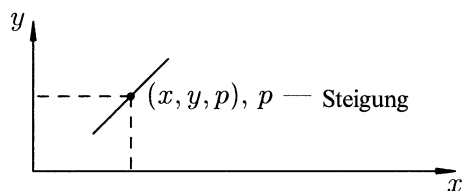
Jede Funktion im Raum der  $k$ -Jets besitzt einen  $k$ -Graphen. Im Fall der 0-Jets ist dies ein gewöhnlicher Graph, nämlich die Menge

$$\Gamma_u = \{j_x^0 u \mid x \in \mathbb{R}^n\} = \{(x, y) \mid y = u(x)\}$$

der 0-Jets der Funktion. Im Fall der 1-Jets besteht ein Punkt des 1-Graphen aus dem Argument, dem Wert der Funktion und den Werten der partiellen Ableitungen erster Ordnung, also

$$\{j_x^1 u \mid x \in \mathbb{R}^n\} = \{(x, y, p) \mid y = u(x), p = \frac{\partial u}{\partial x}\},$$

vgl. Abb. 1.5 für den Fall  $n = 1$ . Wir bemerken, daß der 1-Graph ein Schnitt durch die Fasern über dem Definitionsbereich ist.



**Abb. 1.5.** Ein Punkt im Raum der 1-Jets

**Bemerkung.** Die Fläche des 1-Graphen mit dem  $n$ -dimensionalen Koordinatenvektor  $x$  ist diffeomorph zum Definitionsbereich der Funktion. Die Differenzierbarkeitsordnung der Fläche ist um 1 kleiner als diejenige der Funktion. Im Falle unendlicher Differenzierbarkeit bleibt die Ordnung erhalten.

<sup>1</sup> auch *Verteilung* oder *Distribution*, (Anm. d. Übers.)

Wir betrachten die Tangentialebene an den 1-Graphen. Das ist eine  $n$ -dimensionale Ebene im  $(2n + 1)$ -dimensionalen Raum.

**Satz 3.** *Alle Tangentialebenen an alle 1-Graphen in einem gegebenen Punkt liegen in einer gemeinsamen Hyperebene.*

BEWEIS. Entlang jeder Tangentialebene gilt  $dy = \sum \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i = \sum p_i dx_i$ , oder kurz  $dy = p dx$ . Da  $p$  in einem gegebenen Punkt des Raums der 1-Jets festgelegt ist, erhalten wir eine lineare Gleichung für die Komponenten eines Tangentialvektors, durch welche eine Hyperebene definiert wird. Folglich liegt jede Tangentialebene an einen 1-Graphen in dieser Hyperebene.  $\square$

Zum Beispiel wird im Fall  $n = 1$  durch die Gleichung  $dy = p dx$  eine vertikale Ebene im  $(x, y, p)$ -Koordinatenraum gegeben. Tangenten an die 1-Graphen sind alle Geraden, die in dieser Ebene liegen, mit Ausnahme der Vertikalen (Abb. 1.6).

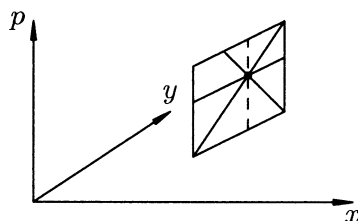


Abb. 1.6. Eine Kontaktebene im Raum der 1-Jets

In diesem Fall ist zu sehen, daß die Hyperebene selbst der Abschluß der Vereinigung aller Tangenten an beliebige 1-Graphen durch den gegebenen Punkt ist.

**Aufgabe 3.** Man zeige, daß dies für beliebige Dimensionen gilt.

**Folgerung.** *Das konstruierte Feld von Hyperebenen  $dy = p dx$  ist invariant definiert, d.h. auch in anderen Koordinaten wird es durch die Gleichung  $d\tilde{y} = \tilde{p} d\tilde{x}$  gegeben.*

**Definition.** Das angegebene Feld von Hyperebenen in  $J^1$  heißt *Cartan-sches Feld* oder *Standard-Kontaktstruktur*

**Aufgabe 4.** Welche Dimensionen können Integralmannigfaltigkeiten bezüglich eines Feldes von Kontaktebenen haben? (Eine Mannigfaltigkeit heißt *Integralmannigfaltigkeit*, wenn in jedem Punkt ihre Tangentialebene ein Unterraum der Kontaktebene ist.)

Jeder 1-Graph ist eine Integralmannigfaltigkeit, folglich gibt es  $n$ -dimensionale Integralmannigfaltigkeiten. Aber kann die Dimension auch größer sein?



ANTWORT. Ein Feld von Kontaktebenen besitzt keine Integralmannigfaltigkeiten, deren Dimension größer ist als die Hälfte der Dimension der Kontaktebenen.

**Definition.** Eine Integraluntermannigfaltigkeit von maximaler Dimension (die also genau die halbe Dimension der Kontaktebene besitzt) heißt *Legendresch*.

Zum Beispiel sind 1-Graphen Legendresch.

Nun kehren wir zur Differentialgleichung zurück.

Eine Gleichung ist eine  $2n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit  $\Gamma^{2n}$  in  $J^1$ . In jedem regulären Punkt dieser Fläche läßt sich eine charakteristische Richtung ausmachen, die durch die Fläche und die Kontaktstruktur festgelegt ist. Wir konstruieren die Charakteristiken (also die Integralkurven dieses Richtungsfeldes) und setzen aus ihnen dann die Integralmannigfaltigkeiten zusammen.

In einem Punkt der Fläche  $\Gamma^{2n}$  betrachten wir den Schnitt der Tangentialebene mit der Kontaktebene. Diese Ebenen fallen entweder zusammen, oder sie haben einen  $(2n - 1)$ -dimensionalen Durchschnitt. Im ersten Fall ist der Punkt *singulär*, im zweiten *regulär*.

Wir stellen fest, daß für eine Fläche  $\Gamma$  in allgemeiner Lage die singulären Punkte isoliert sind. Auf  $\Gamma$  gibt es nämlich  $2n$  Koordinaten. Wir betrachten jeweils die Normalen auf der Tangentialebene und der Kontaktebene. Ein Punkt ist singulär, wenn diese Normalen dieselbe Richtung haben. Das heißt, daß  $2n$  Funktionen in  $2n$  Punkten jeweils eine gemeinsame Nullstelle haben. In allgemeiner Lage geschieht das nur an isolierten Punkten.

Also haben wir in den regulären Punkten  $(2n - 1)$ -dimensionale Schnitte der Tangential- und der Kontaktebenen. Für  $n = 1$  sind das Geraden, für  $n > 1$  nicht. Wie kann man eine eindimensionale Richtung auswählen?

In lokalen Koordinaten ist das Kontaktfeld durch die Nullstellen einer 1-Form  $\alpha = dy - p dx$  gegeben, wobei wir diese Form noch mit einer nullstellenfreien Funktionen multiplizieren können, ohne das Feld (also die Kontaktstruktur) zu ändern.

Das äußere Differential der Form  $\alpha$ , die 2-Form  $\omega^2 = d\alpha$ , ist schon nicht mehr invariant durch die Kontaktstruktur gegeben; es gilt aber folgendes.

**Proposition 1.** Die Form  $\omega|_{\alpha=0}$  ist bis auf einen von Null verschiedenen Faktor in jedem Punkt invariant definiert.

BEWEIS. Es sei  $\tilde{\alpha} = f\alpha$ . Dann ist  $d\tilde{\alpha} = df \wedge \alpha + f d\alpha$  und

$$d\tilde{\alpha}|_{\alpha=0} = f d\alpha|_{\alpha=0} ,$$

d.h.  $\tilde{\omega}^2$  unterscheidet sich von  $\omega^2$  durch die Multiplikation mit einer Zahl in jedem Punkt (man sagt, der *konforme Typ* der Form  $\omega^2$  sei invariant definiert). Wir bemerken, daß  $\tilde{\alpha} = 0$ , falls  $\alpha = 0$ .  $\square$

**Proposition 2.** Die Form  $\omega|_{\alpha=0}$  ist eine symplektische Struktur.

Es sei daran erinnert, daß eine *symplektische Struktur* eine nicht entartete, schiefsymmetrische Bilinearform in einem Raum gerader Dimension ist.

Eine Form  $\omega$  ist nicht entartet, falls es für jedes  $\xi \neq 0$  ein  $\eta$  gibt, so daß  $\omega(\xi, \eta) \neq 0$ .

BEWEIS. In lokalen Koordinaten hat unsere Form die Gestalt  $d\alpha = -\sum dp_i \wedge dx_i$ , wobei die  $p_i$  und  $x_i$  die Koordinaten in der Ebene  $\alpha = 0$  sind.  $\square$

**Übung.** Stellen Sie die Matrix der Form  $\sum dp_i \wedge dx_i$  auf und überzeugen Sie sich, daß die Form nicht entartet ist.

Diese Form heißt *schiefsymmetrisches Skalarprodukt*. Wir klären ihre geometrische Bedeutung.

Es sei  $n = 1$ . Dann ist  $\omega = dx \wedge dp$ . Der Wert dieser Form für ein Vektorpaar ist die orientierte Fläche des durch diese Vektoren aufgespannten Parallelogramms, Abb. 1.7. In höheren Dimensionen ist  $\omega(\xi, \eta)$  die Summe der orientierten Flächeninhalte der Projektionen des durch  $\xi, \eta$  aufgespannten Parallelogramms auf die Ebenen mit den Koordinaten  $(x_i, p_i)$ .

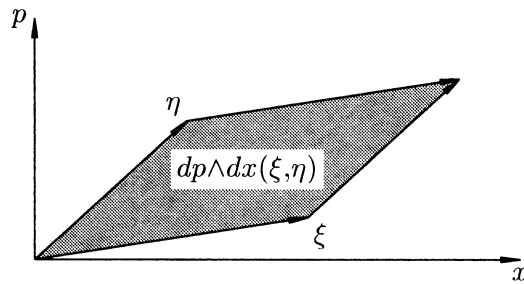


Abb. 1.7. Symplektische Struktur

Wir erinnern uns, daß es im euklidischen Raum den Begriff des orthogonalen Komplements gibt. Im  $n$ -dimensionalen Raum ist das orthogonale Komplement eines  $k$ -dimensionalen Unterraums ein  $(n - k)$ -dimensionaler Unterraum.

Zum Beweis dieser Tatsache benötigt man nur, daß das Skalarprodukt bilinear und nicht entartet ist, die Symmetrie wird nicht verwendet. Also gilt dasselbe auch für ein schiefsymmetrisches Skalarprodukt.

Somit ist das schieforthogonale Komplement einer  $(2n - 1)$ -dimensionalen Ebene im  $2n$ -dimensionalen symplektischen Raum eine Gerade. Aber im Unterschied zum euklidischen Fall liegt sie in dieser Ebene!

**Lemma.** Das schieforthogonale Komplement einer Hyperebene im symplektischen Raum ist eine Gerade, die in dieser Hyperebene liegt.

BEWEIS. Die Gerade habe den Richtungsvektor  $\xi$ . Ihr schieforthogonales Komplement ist die Hyperebene  $\{\eta : \omega(\xi, \eta) = 0\}$ . Der Vektor  $\xi$  liegt in dieser Hyperebene, da  $\omega(\xi, \xi) = -\omega(\xi, \xi) = 0$ .  $\square$

**Definition.** Als *charakteristische Richtung* in der Kontaktebene bezeichnet man das schieforthogonale Komplement des Durchschnittes der Kontaktebene und der Tangentialebene an  $\Gamma$  in einem regulären Punkt.

Dieses schieforthogonale Komplement ist eine Gerade. Somit gibt es eine invariante Kontaktstruktur und eine invariante Schieforthogonalitätsbeziehung in jeder Kontaktebene. Dadurch läßt sich in jedem regulären Punkt invariant eine charakteristische Richtung identifizieren (Abb. 1.8).

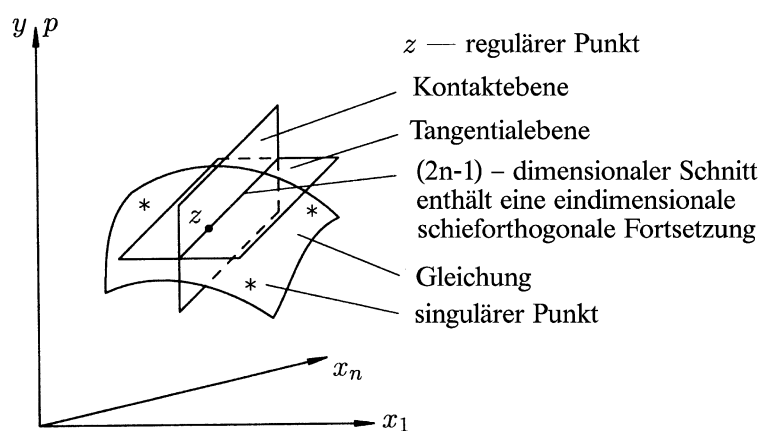


Abb. 1.8. Charakteristische Richtung für eine allgemeine Gleichung erster Ordnung

Als *Charakteristiken* bezeichnet man die Integralkurven dieses Richtungsfeldes.

**Aufgabe 5.** Bestimmen Sie das Feld der charakteristischen Richtungen in den Koordinaten  $x, y, p$ , d.h. geben Sie es als System von Differentialgleichungen  $\dot{x}=?$ ,  $\dot{y}=?$ ,  $\dot{p}=?$  an.

## Literatur

1. V. I. Arnold. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, 3. Auflage, S. 130–140. Springer-Verlag 2001.
2. V. I. Arnold. *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*, 2nd edition, Chap. 2. Band 250 der Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, 1988.

Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen

Arnold, V.I.

2004, IX, 174 S., Softcover

ISBN: 978-3-540-43578-5