

## 2 Mathematische und naturwissenschaftliche Grundlagen

Mathematik, Physik und Chemie sind klassische Fächer, die den Studienanfängern schon von der Schule her mehr oder weniger geläufig sind. Heute oft eher weniger als mehr, was ich aus vielen Gründen für beklagenswert halte. Denn diese drei Fächer bilden die Basis für *alle* natur- und ingenieurwissenschaftlichen Studiengänge. Sie sind unverzichtbar für angehende Mediziner ebenso wie für Ökonomen, bei letzteren zumindest die Mathematik betreffend. Die Wirtschaftswissenschaften haben unter den gesellschaftswissenschaftlichen Fächern den höchsten Mathematisierungsgrad. Statistische Auswertungen, Optimierungsverfahren und Spieltheorie sind zu unverzichtbaren Bestandteilen geworden.

Die zunehmende Mathematisierung und Formalisierung vieler Bereiche (etwa auch vergleichende Politikwissenschaften) ist zweifellos durch den Siegeszug des Computers enorm vorangetrieben worden. Denn damit ist etwa die numerische Lösung großer linearer Gleichungssysteme wie in der Baustatik oder bei Optimierungsproblemen in der Ökonomie zum Standard geworden.

Der Computer war von Beginn an nicht nur Werkzeug, sondern gleichfalls Forschungsgegenstand. Es gab und gibt Forschung *mit* dem Computer und Forschung *über* den Computer. Daraus hat sich eine neue wissenschaftliche Disziplin entwickelt, für die zunächst englische Begriffe wie Computer Science oder Scientific Computing verwendet wurden. Bei uns hat sich dafür der Begriff Informatik eingebürgert. Er geht auf eine französische Wortschöpfung, vorgeschlagen von der Académie Française, zurück.

Die Informatik ist ein neues Fach, das sich vergleichsweise rasch an den Hochschulen und auch teilweise an den Schulen etabliert hat. Es ist verständlicherweise stark im Fluss. Fragen nach dem Selbstverständnis des Faches, was und was nicht zur Informatik gehört, ob die Zukunft den Bindestrich-Informatiken gehören wird wie etwa Medizin-, Bio-, Wirtschafts-Informatik oder Informationstechnik, werden in Fachkreisen intensiv und teilweise recht kontrovers diskutiert. Die Informatik ist noch nicht kanonisiert, während die Klassiker Mathematik, Physik und Chemie über einen nahezu festen Kanon verfügen.

Ich werde diese vier Fächer in unterschiedlicher Weise beschreiben. Warum ich keinen einheitlichen Zugang gewählt habe, wird den jeweiligen Darstellungen zu entnehmen sein.

Es ist fast unnötig zu betonen, dass die Ausführungen in diesem Kapitel ausgesprochen exemplarisch sein werden. Aber eines möchte ich erreichen: Die getroffene Auswahl soll anschaulich und repräsentativ sein. Auf Herleitungen wird weitgehend verzichtet. Dazu wird auf gängige Lehr- und Übungsbücher

verwiesen. Herleitungen erfolgen nur dann, wenn sie mir aus didaktischen Gründen sinnvoll erscheinen. Meist werden es eher Plausibilitätsbetrachtungen sein.

## 2.1 Mathematik

An dieser Stelle folgt keine Kurzfassung von üblichen Lehrbüchern, die in die Mathematik einführen. Erfahrungsgemäß fällt es gerade Studienanfängern schwer, die Sinnhaftigkeit vieler Herleitungen und Beweise einzusehen. Meist wird erst im Laufe des weiteren Studiums anhand von praktischen Aufgabenstellungen einsichtig, wofür die Mathematik benötigt wird.

Mein vorrangiges Ziel wird in diesem Abschnitt darin liegen, Begeisterung für die angeblich so trockene Mathematik zu wecken. Es soll motivierend wirken. Ich versuche dies, indem ich von scheinbar einfachen Alltagsmeldungen und -problemen ausgehe, um daran anknüpfend mathematische Sachverhalte zu entwickeln. Stets wird ein Problem im Vordergrund stehen, an dem die jeweils erforderliche mathematische Herangehensweise erläutert wird. Nachteilig wird sicherlich die unmethodische Vorgehensweise sein. Vorteilhaft wird, so hoffe ich, der stets erkennbare Problembezug sein. Der Ausgangspunkt soll jeweils eine fiktive jedoch realistische Meldung in den Nachrichten sein.

*Erste Meldung:* „Der Anstieg der Arbeitslosigkeit in Deutschland hat sich im letzten Halbjahr verringert.“

Diese Meldung bedeutet keineswegs, dass die Arbeitslosigkeit sich verringert hat, sie nimmt lediglich nicht mehr so rasch zu. Wir wollen uns dies anhand von Abb. 2.1 verdeutlichen. Wir bezeichnen die Arbeitslosigkeit abkürzend mit  $x$  und nennen sie *abhängige* Variable. Abhängig deshalb, weil sie sich offenkundig mit der Zeit  $t$ , der *unabhängigen* Variablen, ändern kann und somit von dieser abhängt. Wir können uns unter der Variablen  $x$  auch viele andere Größen vorstellen: den Benzinpreis, die Inflationsrate, die Zahl der Schulanfänger, die gesamte Bevölkerung, das Brutto sozialprodukt, den Energieverbrauch usw., jeweils für eine definierte Region, sagen wir Deutschland.

Tragen wir eine fiktive Arbeitslosigkeit (in Prozent) über der Zeitachse (unterteilt in Jahrzehnte, Jahre, Monate oder gar noch feiner) auf, so mögen wir das skizzierte Bild erhalten. Hier ist der (unerfreuliche) Fall einer zunehmenden Arbeitslosigkeit dargestellt. Die drei Verläufe unterscheiden sich jedoch dadurch, wie rasch die Variable  $x$  zunimmt. Der Anstieg der Arbeitslosigkeit kann wachsen, gleich bleiben oder abnehmen. Hinter der oben angeführten Nachrichtenmeldung, die sich doch recht positiv anhört, verbirgt sich also folgende Aussage: Der Anstieg der Arbeitslosigkeit hat sich verringert, aber die Arbeitslosigkeit selbst wächst weiter.

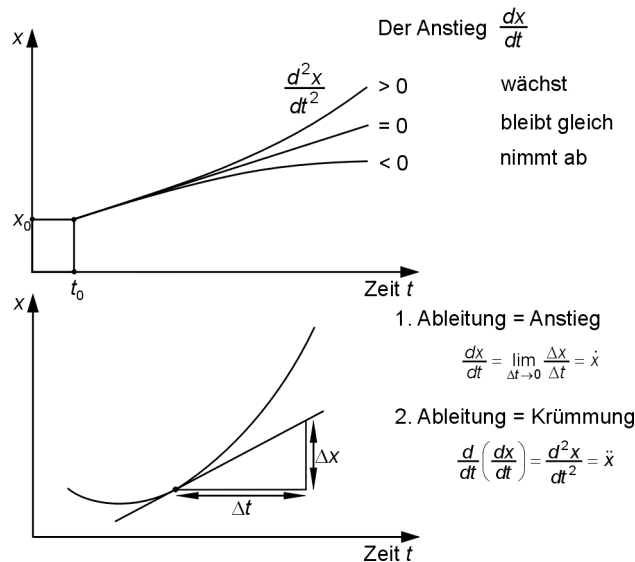


Abb. 2.1. Erläuterung der ersten und zweiten Ableitung

Halten wir fest: Von einer Funktion  $x = f(t)$ , wobei wir auch  $x = x(t)$  schreiben können, ist

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} \quad \text{die erste Ableitung}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right) = \ddot{x} \quad \text{die zweite Ableitung}$$

Letztere entspricht der Krümmung. Verläuft eine Kurve mit konstanter Steigung, dann sind  $\dot{x} = \text{konstant}$  und  $\ddot{x} = 0$ . Für  $\ddot{x} > 0$  nimmt die Steigung mit wachsender Zeit  $t$  zu, für  $\ddot{x} < 0$  nimmt sie ab. Dieser letzte Fall ist mit der Eingangsmeldung gemeint.

Auch höhere Ableitungen lassen sich bilden, sie treten jedoch selten auf. Es sei schon hier vermerkt, dass der Schöpfer (oder wer immer dafür verantwortlich ist) die Welt „als eine solche von zweiter Ordnung“ geschaffen hat. Dabei steht Ordnung für Anzahl der Ableitungen.

Bei Ableitungen nach der Zeit  $t$  wird üblicherweise abkürzend ein Punkt verwendet, bei Ableitungen nach dem Ort üblicherweise ein Strich:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = y'$$

Wir wollen jetzt charakteristische Wachstumsgesetze kennen lernen, die in der Technik und in der Natur vorkommen. Abnahme bedeutet negatives Wachstum, auch hierzu wird ein Beispiel folgen.

Wenn man Entwicklungen beeinflussen will, muss man wissen, wie sich Größen zeitlich verhalten. Manche sind gutmütig, andere nicht. Es ist wichtig sich

klarzumachen, dass das dynamische Verhalten von Wachstumsgrößen qualitativ verschieden sein kann, und dass sich daraus drastische Konsequenzen ergeben können. Die zeitliche Veränderung dynamischer Größen setzt sich aus einem Wachstums- und einem Abnahmeanteil zusammen. So wird etwa die Entwicklung der Weltbevölkerung von der Geburten- und der Sterberate bestimmt.

Wir beschränken uns zunächst auf Wachstum und wollen uns unter der Menge  $x$  ein verzinsliches Kapital, die Erdbevölkerung, das Bruttosozialprodukt eines Landes, dessen Energieverbrauch, die Zahl der Verkehrsunfälle pro Jahr oder die Verschuldung eines Entwicklungslandes vorstellen. Bei abnehmenden Mengen  $x$  können wir an nicht nachwachsende Rohstoffe, an Primärenergieträger wie Kohle, Erdöl und Erdgas, an Siedlungsraum oder an landwirtschaftlich nutzbare Flächen denken. Mit dieser Aufzählung wird der Bezug zu den Umweltwissenschaften deutlich. Das Verständnis für *Wachstum* (und *Abnahme*) ist von zentraler Bedeutung. Man kann Wachstum auf zweierlei Arten beschreiben und darstellen:

- Durch die Änderung der Menge  $x$  in Abhängigkeit von der Zeit  $t$ . Wir sagen, die Menge  $x$  ist eine Funktion der Zeit  $t$ , schreiben kurz  $x = f(t)$  und bezeichnen dies als *Wachstumsgesetz*.
- Durch die Änderung der Wachstumsgeschwindigkeit  $dx/dt$  (= Rate) in Abhängigkeit von der Menge  $x$ . Wir schreiben kurz  $dx/dt = F(x)$  und bezeichnen dies als *Ratenansatz*.

Der mathematisch Kundige erkennt sofort, dass beide Beschreibungen über die Operationen Integration bzw. Differenziation miteinander verknüpft sind. Aus dem Ratenansatz folgt durch Integration das Wachstumsgesetz (die integrale Zunahme der Menge). Aus dem Wachstumsgesetz folgt durch Differenziation der Ratenansatz (die differenzielle zeitliche Änderung der Menge). Anhand der folgenden Darstellungen werde ich versuchen, diese Verknüpfungen zu veranschaulichen. In den Bildern ist jeweils links der Ratenansatz und rechts das Wachstumsgesetz dargestellt. Dabei wollen wir typische Fälle unterscheiden.

1. Fall: Lineares Wachstum, Abb. 2.2

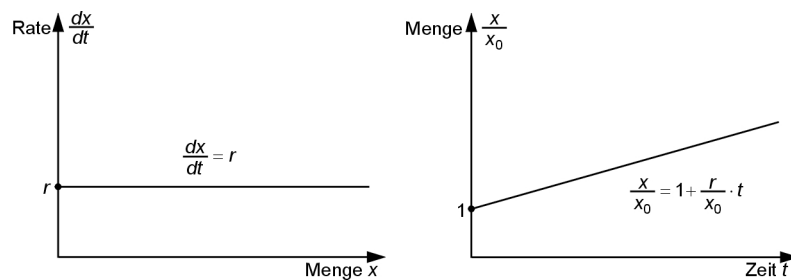


Abb. 2.2. Lineares Wachstum

Die Wachstumsrate  $dx/dt$  ist konstant. Aus  $dx/dt = r$  folgt nach Integration  $\int dx = r \int dt + C$ , und es wird  $x = r \cdot t + C$ . Die Integrationskonstante  $C$  wird mit  $x(t=0) = x_0$  zu  $C = x_0$ , dabei ist  $x_0$  die Anfangsmenge zur Zeit  $t = 0$ . Es folgt das lineare Wachstumsgesetz

$$\frac{x}{x_0} = 1 + \frac{r}{x_0} t \quad (2.1)$$

In gleichen Zeitabständen  $\Delta t$  wächst die Menge  $x$  um gleiche Beträge  $\Delta x$  an. Bei Vergrößerung der Wachstumsrate  $r$  würde die Gerade  $x(t)$  steiler verlaufen, bei Verkleinerung flacher.

In der Natur kommt lineares Wachstum selten vor. Beispiele sind näherungsweise das Anwachsen einer Oxidschicht oder Eisschicht.

2. Fall: *Exponentielles Wachstum*, Abb. 2.3

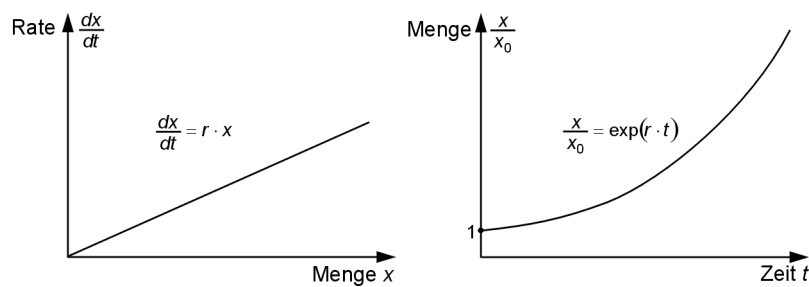


Abb. 2.3. Exponentielles Wachstum

Wachstumsgesetze dieser Art treten sehr häufig auf: die Zunahme der Bevölkerung ist der Bevölkerungsmenge direkt proportional, der Zuwachs des Kapitals infolge Verzinsung ist dem eingesetzten Kapital proportional. Letztere Aussage würde nur bei kontinuierlicher Verzinsung zutreffen, tatsächlich verzinsen die Geldinstitute jedoch diskontinuierlich.

Exponentielles Wachstum bedeutet, dass die Rate linear mit der Menge  $x$  anwächst. Je mehr Menschen  $x$  vorhanden sind, umso mehr werden geboren und umso mehr sterben in einer Zeiteinheit. In der Regel werden die Geburtenrate  $b$  (von birth) und die Sterberate  $d$  (von death) auf ein Jahr bezogen, ebenso wie die Wachstumsrate  $r = b - d$ .

Zur Anschauung seien typische Werte angegeben. Die meisten Industrieländer haben Wachstumsraten unter 1% (pro Jahr), Deutschland hat derzeit ein negatives Wachstum, also eine Abnahme der Bevölkerung. Etliche Entwicklungsländer haben Wachstumsraten von etwa 2 bis teilweise 4%.

Aus dem Ansatz  $dx/dt = r \cdot x$  folgt nach Integration  $\int dx/x = r \cdot \int dt + C$  oder  $\ln x = r \cdot t + C$ . Die Integrationskonstante  $C$  wird wegen  $x(t=0) = x_0$  zu  $C = \ln x_0$  und wir erhalten

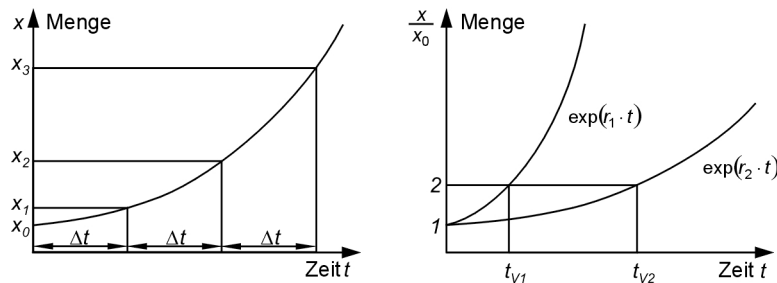
$$\ln x - \ln x_0 = \ln \frac{x}{x_0} = r \cdot t$$

Nach Endlogarithmierung folgt das exponentielle Wachstumsgesetz

$$\frac{x}{x_0} = \exp(r \cdot t) \quad (2.2)$$

Der Vergleich beider Fälle verdeutlicht anschaulich den mathematischen Zusammenhang zwischen den Darstellungen Ratenansatz und Wachstumsgesetz. Der Ratenansatz stellt die Geschwindigkeit dar, mit der sich die Menge  $x$  zeitlich ändert.

Ist die Änderung konstant, so muss der Anstieg (mathematisch die erste Ableitung) der Kurve  $x = f(t)$  konstant sein, Fall 1. Im zweiten Fall nimmt die Geschwindigkeit, mit der sich die Menge  $x$  zeitlich ändert, mit der Menge selbst zu. Damit muss der Anstieg der Kurve  $x = f(t)$  mit wachsender Menge und mit zunehmender Zeit selbst anwachsen. Die Wachstumskurve  $x = f(t)$  wird immer steiler.



**Abb. 2.4.** Erläuterung des exponentiellen Wachstums

Da das exponentielle Wachstum eine herausragende Rolle spielt, wollen wir die Diskussion darüber mit Abb. 2.4 noch ein wenig vertiefen. Es ist  $x_1/x_0 = x_2/x_1 = x_3/x_2$  usw., somit wächst die Menge  $x$  in gleichen Zeitabständen  $\Delta t$  um den gleichen Faktor an (beim linearen Wachstum dagegen um den gleichen Betrag  $\Delta x$ ).

Von besonderer Bedeutung ist die Verdopplungszeit  $t_v$ : Nach welcher Zeit hat sich ein Anfangswert  $x_0$  verdoppelt, ist also aus  $x_0$  der Wert  $2x_0$  geworden?

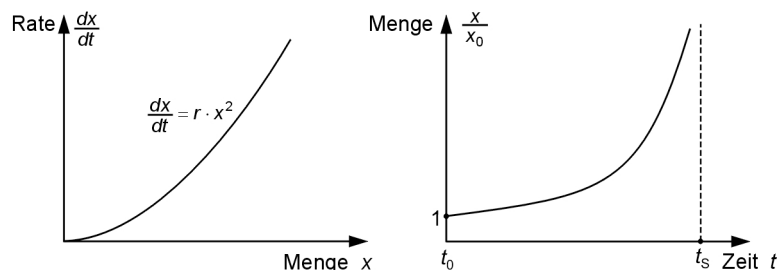
Wegen  $\ln 2 = 0,693 = r \cdot t_v$  gilt  $t_v \approx 70$  geteilt durch den Wachstumsparameter  $r$  in Prozent:

$$t_v \approx \frac{70}{r}, \quad \text{dabei } r \text{ in \% einsetzen.} \quad (2.3)$$

Eine konstante Zunahme der Bevölkerung von 2 % pro Jahr (dieser Wert ist für einige Länder realistisch) würde zu einer Verdopplungszeit von 35 Jahren führen.

### 3. Fall: Hyperbolisches Wachstum, Abb. 2.5

Bei exponentiellem Wachstum strebt die Menge  $x$  erst nach unendlich langer Zeit gegen unendlich. Bei dem hyperbolischen Wachstum tritt die Katastrophe schon nach endlicher Zeit ein. So nennt man ein Wachstumsgesetz, bei dem die Rate stärker als bei dem linearen Ratenansatz im zweiten Fall anwächst. Wir nehmen hier eine quadratische Zunahme der Zuwachsrates mit der Menge an. Man bezeichnet dieses Anwachsen als hyperbolisch, teilweise auch als überexponentiell oder superexponentiell. Die Zeitspannen, in denen sich die Menge verdoppelt, werden immer kürzer. Hyperbolisches Wachstum führt in biologischen Systemen beim Überschreiten einer Grenze zwangsläufig zu einer Katastrophe.



**Abb. 2.5.** Hyperbolisches Wachstum

Die im Bild dargestellte hyperbolische Funktion strebt schon für endliche Zeiten gegen unendlich große Werte. Man nennt die Stelle, an der die Funktion im Unendlichen verschwindet, eine Singularität. Der Index  $S$  soll auf die Singularität hindeuten.

Der hier angenommene Ratenansatz

$$\frac{dx}{dt} = r \cdot x^2$$

spielt in der Ökosystemforschung eine Rolle. So haben Sardinen und ähnliche Fischarten es schwer, sich bei kleiner Populationsdichte  $x$  zu vermehren. Ihre Fortpflanzungschancen werden mit steigender Dichte immer besser bis zu einem Niveau, auf dem die Überbevölkerung ihre Fortpflanzung wieder hemmt. Aus diesem Grund werden bei niedrigen Populationsdichten Wachstumsgesetze dieser Art beobachtet.

Die Integration ergibt  $\int \frac{dx}{x^2} = r \int dt + C$ , damit  $-\frac{1}{x} = rt + C$

Die Integrationskonstante  $C$  wird wegen  $x(t = t_0) = x_0$  zu  $C = -(rt_0 + 1/x_0)$  und es folgt

$$\frac{x}{x_0} = \frac{1}{1 - rx_0(t - t_0)} \quad (2.4)$$

Dieser Ausdruck geht für  $rx_0(t - t_0) = 1$  gegen unendlich, die dazugehörige Zeit nennen wir  $t_S$  (S = Singularität):

$$t_S = t_0 + \frac{1}{rx_0} \quad (2.5)$$

Je größer der Wachstumsparameter  $r$  ist, desto früher wird die Singularität erreicht. Bei hyperbolischem Wachstum wird die Verdopplungszeit ständig kleiner. Ein derartiges Wachstum kann die Natur bestenfalls über einen bestimmten Zeitraum aufrechterhalten. Irgendwann müssen andere Wachstumsgesetze greifen, siehe später Gl. 2.6.

Beispielhaft zeigt Tabelle 2.1 die Entwicklung der Weltbevölkerung. Wir sehen, dass die Verdopplungszeit durch entsprechende Wachstumsschübe zunächst drastisch abgenommen hat und erst in jüngerer Zeit wieder langsam ansteigt. Aus der Verdopplungszeit lässt sich mit Gl. 2.3 jeweils eine mittlere Wachstumsrate ermitteln, wenn man exponentielles Wachstum unterstellen würde.

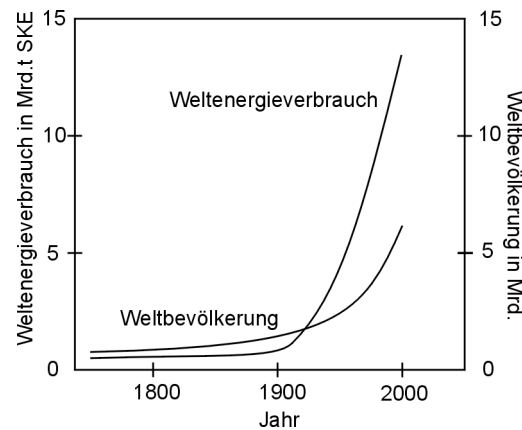
**Tabelle 2.1.** Entwicklung der Weltbevölkerung

	Weltbevölkerung	Verdopplungszeit	Wachstumsrate	+ 1 Mrd. nach
8000 v.Chr.	5 Mio.			
Chr. Geburt	250 Mio.			
1600	500 Mio.	1600 J.	0,04 %	
1830	1 Mrd.	230 J.	0,3 %	≈ 1 Mio.
1890	1,5 Mrd.			
1930	2 Mrd.	100 J.	0,7 %	100
1950	2,5 Mrd.			
1960	3 Mrd.	70 J.	1,0 %	30
1974	4 Mrd.	44 J.	1,6 %	14
1987	5 Mrd.	37 J.	1,9 %	13
1999	6 Mrd.	39 J.	1,8 %	12 Jahren



Die Aussagen der Tabelle 2.1 sollen mit der Abb. 2.6 verdeutlicht werden. Diese zeigt die Entwicklung der Weltbevölkerung und des Weltenergieverbrauchs seit der industriellen Revolution. Während die Weltbevölkerung von 1900 bis 2000 „nur“ um das gut 3,5fache (von 1.65 auf gut 6 Mrd.) angewachsen ist, so ist der Primärenergieverbrauch in dem gleichen Zeitraum um das 13fache gewachsen! Er betrug 1900 etwa 1 Mrd. t SKE, im Jahr 2000 lag er bei 13 Mrd. t SKE. SKE heißt Steinkohleneinheiten, auf die die anderen Primärenergieträger wie Braunkohle, Erdöl, Erdgas u.a. zu Vergleichszwecken umgerechnet werden. Dabei handelt es sich um ein Maß für den Energieverbrauch pro Jahr; hier sind auch andere Einheiten gebräuchlich.

Der Energiegehalt von 1 kg Steinkohle, also 1 kg SKE, entspricht 8,14 kWh (Kilowattstunden) oder 29,309 MJ (Megajoule =  $10^6$  J) oder 0,7 kg RÖE (Rohöleinheiten).



**Abb. 2.6.** Weltbevölkerung und Weltenergieverbrauch seit der industriellen Revolution

Die drei geschilderten Wachstumsgesetze sind Spezialfälle einer allgemeinen Wachstumsbeziehung  $dx/dt = r \cdot x^n$ , wobei der Exponent  $n$  der Menge  $x$  verschiedene Werte annehmen kann. Es sei erwähnt, dass chemische Reaktionen nach ähnlichen Gesetzmäßigkeiten ablaufen; mit dem Exponenten  $n$  bezeichnet man dann die Ordnung einer Reaktion. Die Größe  $r$  in dem verallgemeinerten Ratenansatz wird Reaktionsgeschwindigkeitskonstante genannt; in ihr ist die Reaktionskinetik (wie rasch läuft eine Reaktion ab?) verborgen. Der Exponent  $n$  muss nicht notwendigerweise ganzzahlig sein. Je größer der Exponent  $n$  ist, umso rascher wächst die Menge  $x$  mit der Zeit  $t$  an. Für alle Exponenten  $n$  größer Eins liegt überexponentielles Wachstum vor; die Menge  $x$  wächst dann schon für endliche Zeiten über alle Grenzen.

Bisher war immer nur das Anwachsen der Menge  $x$  dargestellt, das Wachstum. Im Gegensatz dazu ist Abnahme „negatives“ Wachstum. Der einzige Unterschied liegt darin, dass die Konstante  $r$  in dem Ratenansatz nunmehr negativ ist. In der Realität gibt es immer ein Nebeneinander von Wachstum und Abnahme. Ein Wachstum der Bevölkerung besagt, dass die Geburtenrate größer ist als die

Sterberate. Liegt wie derzeit in Deutschland (auch in Italien und Spanien) die Sterberate über der Geburtenrate, so schrumpft die Bevölkerung.

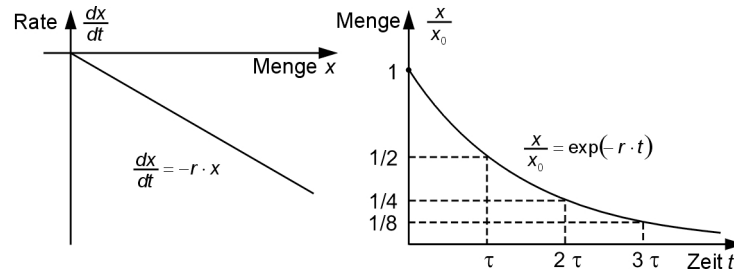


Abb. 2.7. Exponentielle Abnahme

Abb. 2.7 zeigt die exponentielle Abnahme. In dem exponentiellen Wachstumsgesetz nach Abb. 2.3 muss lediglich die Konstante  $r$  durch  $-r$  ersetzt werden. Zur Charakterisierung der Abnahme wird, analog zur Verdopplungszeit beim Wachstum, die Halbwertszeit  $\tau$  eingeführt. Das ist diejenige Zeit, nach der von der Ausgangsmenge gerade noch die Hälfte übrig ist. Ein Beispiel ist der radioaktive Zerfall.

Wir kehren nun zu den Wachstumsgesetzen zurück, um die Frage zu behandeln, wie Wachstum mit Begrenzung beschrieben werden kann. Denn in der Natur ist Wachstum stets begrenzt. Die Kapazität  $K$  eines Systems, etwa das Nahrungsangebot, begrenzt das Wachstum einer Spezies. Dies führt uns zu dem logistischen Wachstum, Abb. 2.8.

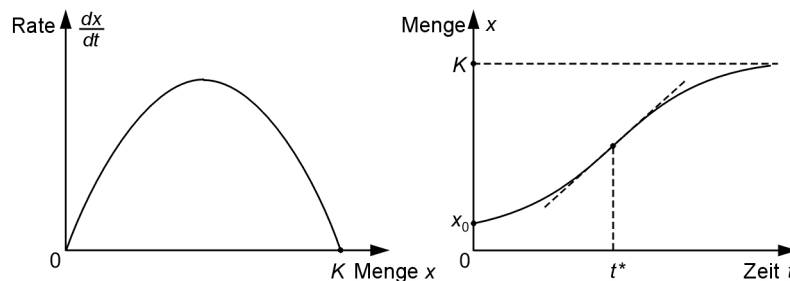


Abb. 2.8. Logistisches Wachstum

Der Ansatz

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = rx \left( 1 - \frac{x}{K} \right) \quad (2.6)$$

besagt, dass für Werte  $x \ll K$  die Größe  $x$  zunächst exponentiell wächst und das Wachstum mit steigenden  $x$ -Werten ständig abnimmt. Zu der Zeit  $t = t^*$  liegt maximales Wachstum vor, die Kurve  $x(t)$  hat dort den steilsten Anstieg. Dieser

nimmt anschließend wieder ab. Auch dieser Ansatz lässt sich geschlossen integrieren. Mit  $x = x_0$  für  $t_0 = 0$  folgt:

$$\frac{x}{x_0} = \frac{K/x_0}{1 + \left(\frac{K}{x_0} - 1\right) \exp(-rt)} \quad (2.7)$$

Für  $t = 0$  wird  $x = x_0$ , für  $t \rightarrow \infty$  wird  $x = K$ . Diese Beziehung geht auf Verhulst (1838) zurück, sie spielt in der Ökosystemforschung eine wichtige Rolle. Wir werden ihr später (im Abschnitt 5.2) wieder begegnen. Sie ist jedoch auch in vielen anderen Bereichen von Bedeutung.

Stellen wir uns eine Insel vor, auf der Kaninchen ausgesetzt werden. Diese werden sich anfangs exponentiell vermehren. Das endliche Nahrungsangebot der Insel wird das Wachstum jedoch begrenzen, und die Wachstumskurve wird in einen Endwert einmünden. Wir sprechen auch von einem organischen oder biologischen Wachstum, das Wort logistisch weist auf die Logistik hin. Die Wachstumskurve steigt immer steiler an, um dann nach einem Wendepunkt immer langsamer ansteigend in den Endwert einzumünden. Maximaler Anstieg der Wachstumskurve bedeutet größtes Wachstum.

Ein ähnliches Beispiel hierzu ist die Erhöhung der Arbeitsleistung und damit der Produktivität eines Arbeitnehmers durch immaterielle (Lob, Zuspruch) und materielle (Lohnerhöhung) Zuwendungen. Es ist einleuchtend, dass auch durch große Geldzuwendungen die Arbeitsleistung nur begrenzt gesteigert werden kann. Weiterhin gibt es Sättigungsgrenzen bei dem Absatz von Waren, Produkten und Dienstleistungen, wobei die Aufgabe der Werbung primär darin besteht, die Sättigungsgrenzen nach oben zu verschieben und weiteren „Bedarf“ zu wecken.

Daneben gibt es eine zweite Art von Begrenzung, ein Wachstum mit Grenz- oder Schwellenwert. Ein Gummiband wird sich bei Belastung zunächst ausdehnen und bei weiter steigender Belastung reißen. Ein Fahrzeug wird bei zu hoher Kurvengeschwindigkeit von der Straße abkommen, ein Schiff mit zu großer Beladung wird sinken. Ein Ökosystem, etwa ein See, kann bei Überdüngung kippen oder Überfischung kann den Bestand ruinieren.

Wir haben soeben mit Gl. 2.6 eine gewöhnliche Differenzialgleichung (Dgl.) erster Ordnung diskutiert. Diese konnten wir nach Trennung der Variablen geschlossen integrieren, um den zeitlichen Verlauf  $x(t)$  zu erhalten.

Wir wollen nun zu unserer Eingangsmeldung zurückkehren und fragen, ob sich diese Meldung zumindest prinzipiell durch eine Dgl. darstellen lässt. Für die zeitliche Entwicklung der Arbeitslosigkeit gibt es zahlreiche Ursachen, z.B. die Konjunktur der Weltwirtschaft, die Zinspolitik der Europäischen Zentralbank, die Investitionsneigung der Wirtschaft, die Nachfrage nach Konsumgütern und vieles andere mehr. Wollte man die zeitliche Entwicklung der Arbeitslosigkeit beschreiben, so müsste man die Ursachen in einem geeigneten *Modell* erfassen. Es gibt zweifellos Ursachen, die von der Zahl der Arbeitslosen völlig unabhängig sind, wie etwa der Preis des Rohöls auf dem Weltmarkt. Die Konsumneigung der

Bevölkerung wird dagegen bei hoher Arbeitslosigkeit deutlich geringer sein als bei niedriger. Wir erkennen an diesem Beispiel, dass es zwei Arten von Ursachen gibt: von der Variablen  $x$  unabhängige und von ihr abhängige.

Wenn man nun die Ursachen in geeigneter Weise modelliert (das ist die eigentliche Kunst), dann erhält man für den dynamischen Vorgang der zeitlichen Entwicklung der Variablen  $x$  eine Differenzialgleichung. Diese verknüpft die Ableitung der Variablen  $x$  (je nach Art des Modells die erste und/oder die zweite Ableitung) mit der Variablen  $x$  selbst in mehr oder weniger komplizierter Weise.

Die Aufstellung eines mathematischen Modells, dessen Lösung und anschließende Diskussion, steht nicht nur in den Ingenieurwissenschaften im Zentrum des (Forschungs-) Interesses. Dies gilt für Ökosysteme ebenso wie für Wirtschaftssysteme. Durch die rasante Entwicklung der Computer lassen sich auch komplexe Systeme auf handelsüblichen PCs mit numerischen Verfahren lösen.

Wir wollen an dieser Stelle eine Dgl. zweiter Ordnung behandeln, die freie ungedämpfte Schwingungen beschreibt. Hier verweisen wir auf Abschnitt 3.1 Mechanik, wo wir die Schwingungsgleichung

$$\ddot{x} + \nu^2 x = 0 \quad (2.8)$$

für ein mathematisches Pendel sowie ein Feder-Masse-Pendel herleiten werden, Gl. 3.25. In  $\nu^2$  sind jeweils zwei charakteristische Eigenschaften des Pendels enthalten. Wir wollen an dieser Stelle deren Lösung angeben, um exemplarisch zu zeigen, wie konkrete gewöhnliche Dgln. gelöst werden.

Gl. 2.8 bedeutet, dass wir eine Funktion  $x(t)$  suchen, die nach zweimaliger Ableitung sich selbst reproduziert und gleichzeitig das Vorzeichen umkehrt. Dies können nur die Funktionen sinus und cosinus, wobei die cosinus-Funktion eine um  $\pi/2=90^\circ$  verschobene sinus-Funktion ist.

Also besitzt die Schwingungsgleichung 2.8 die allgemeine Lösung

$$x(t) = A \cos \nu t + B \sin \nu t \quad (2.9)$$

Davon kann man sich überzeugen, indem man diesen Ansatz in die Dgl. 2.8 einsetzt. Sie ist dann identisch erfüllt. Weiter sieht man, dass aufgrund der zweimaligen Ableitung die Konstante in Gl. 2.8 zweckmäßigerweise quadratisch angesetzt wird.

Die Konstanten A, B folgen aus den Anfangsbedingungen. Zur Zeit  $t=0$  habe das Pendel die Anfangsauslenkung  $x = x_0$  und die Anfangsgeschwindigkeit  $\dot{x} = \dot{x}_0$ . Daraus folgen  $A = x_0$  und  $B = \dot{x}_0/\nu$  (Übung!) und somit

$$x(t) = x_0 \cos \nu t + \frac{\dot{x}_0}{\nu} \sin \nu t \quad (2.10)$$

Die Lösung besteht aus der Überlagerung einer cos- und einer sin-Schwingung mit gleicher Frequenz, was wir benutzen können, um die Lösung 2.10 geschickter zu schreiben. Dazu führen wir eine neue Konstante  $C$  mit

$$x_0 = C \cos \varphi \quad \text{und} \quad \frac{\dot{x}_0}{\nu} = C \sin \varphi \quad \text{ein und erhalten}$$

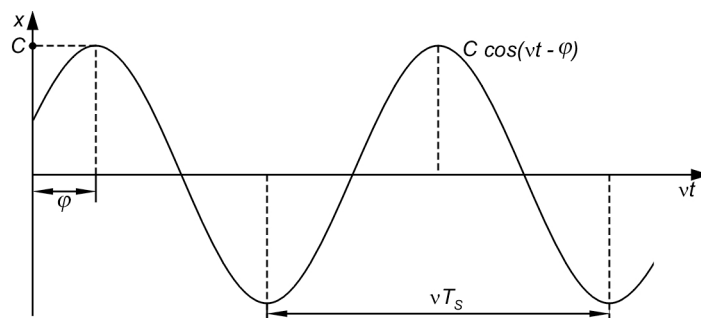
$$x(t) = C(\cos \varphi \cos \nu t + \sin \varphi \sin \nu t).$$

Unter Verwendung eines Additionstheorems folgt

$$x(t) = C \cos(\nu t - \varphi) \quad (2.11)$$

wobei  $C = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\nu}\right)^2}$  und  $\tan \varphi = \frac{\dot{x}_0}{\nu x_0}$  (Übung!)

Gl. 2.11 beschreibt einen harmonisch periodischen Schwingungsvorgang mit der Amplitude  $C$ , der Phasenverschiebung  $\varphi$  und der Eigenfrequenz  $\nu$ , siehe Abb. 2.9.



**Abb. 2.9.** Ungedämpfte Schwingung

Dabei ist die Schwingungszeit  $T_S$  die Dauer einer vollen Periode. Diese folgt aus  $x(t + T_S) = C \cos[\nu(t + T_S) - \varphi] = C \cos[\nu t + 2\pi - \varphi]$  zu  $T_S = 2\pi/\nu$

In Abschnitt 3.1 werden wir weiterhin die Schwingungsgleichung eines gedämpften Schwingers kennen lernen, Gl. 3.27. Diese lautet

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \nu_0^2 x = 0 \quad (2.12)$$

Darin beschreibt der zweite Term die zur Geschwindigkeit  $\dot{x}$  proportionale Dämpfung, die Abklingkonstante  $\delta$  charakterisiert den Dämpfer.

Hier wird ein anderer Lösungsansatz zielführend sein als bei dem ungedämpften Schwinger. Darin liegt ja gerade die Kunst zu erkennen, *welcher* Lösungsansatz die jeweilige Dgl. sowie die Anfangsbedingungen erfüllt. Und genau diese Kunst wird in dem Ingenieurstudium in begleitenden Übungen zur Mathematik, Mechanik usw. entsprechend erlernt. Hier machen wir den Lösungsansatz

$x(t) = C \exp(\lambda t)$ , denn die  $\exp$ -Funktion reproduziert sich selbst bei jeder Ableitung. Eingesetzt in Gl. 2.12 folgt nach Division durch  $C \exp(\lambda t)$  die charakteristische Gleichung  $\lambda^2 + 2\delta\lambda + \nu_0^2 = 0$  mit den beiden Lösungen

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \nu_0^2} \quad (2.13)$$

Damit lautet die allgemeine Lösung der Dgl. 2.12 als Linearkombination zweier partikulärer Lösungen

$$x(t) = A \exp(\lambda_1 t) + B \exp(\lambda_2 t) \quad (2.14)$$

Zur Erläuterung: Da die quadratische Gleichung zwei Lösungen besitzt, liegen zwei sog. partikuläre Lösungen vor. Da die Dgl. 2.12 linear ist, erhalten wir die allgemeine Lösung als Summe beider Partikulärlösungen. Dabei werden die Konstanten  $A, B$  aus den Anfangsbedingungen ermittelt.

Das Verhalten des gedämpften Schwingers hängt entscheidend von dem Vorzeichen des Radikanden  $(\delta^2 - \nu_0^2)$  in Gl. 2.13 ab. Man unterscheidet vier Fälle:

a) *Keine Dämpfung*, d.h.  $\delta = 0$

Damit folgt  $\lambda_1 = -\lambda_2 = i\nu_0$ , wobei  $i = \sqrt{-1}$ . Daraus folgt die schon diskutierte Lösung 2.11 des ungedämpften Schwingers. Man kann dies nicht unmittelbar sehen. Wir verzichten an dieser Stelle darauf, diesen (allein rechentechnischen) Übergang zu zeigen und verweisen auf entsprechende Lehrbücher. Denn uns werden hier besonders die Fälle b) und d) interessieren.

b) *Schwache Dämpfung*, d.h.  $\delta^2 < \nu_0^2$

Damit werden  $\lambda_1, \lambda_2$  konjugiert komplex. Mit der Abkürzung  $\nu^2 = \nu_0^2 - \delta^2 > 0$  lauten die konjugiert komplexen Lösungen nach Gl. 2.13

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm i\nu$$

Dies eingesetzt in die allgemeine Lösung 2.14 ergibt, wobei die Konstanten zweckmäßigerweise umbenannt werden,

$$\begin{aligned} x(t) &= E \exp[(-\delta + i\nu)t] + F \exp[(-\delta - i\nu)t] \\ &= \exp(-\delta t) [E \exp(i\nu t) + F \exp(-i\nu t)] \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Eulerschen Formel (diese folgt aus einem Potenzreihenvergleich der Exponentialfunktion- und Trennung in Real- und Imaginärteil mit den Potenzreihen für die  $\cos$ - und  $\sin$ -Funktion)

$$\begin{aligned} \exp(i\nu t) &= \cos(\nu t) + i \sin(\nu t) \\ \exp(-i\nu t) &= \cos(\nu t) - i \sin(\nu t) \quad \text{folgt} \\ x(t) &= \exp(-\delta t) [E(\cos \nu t + i \sin \nu t) + F(\cos \nu t - i \sin \nu t)] \\ &= \exp(-\delta t) [(E + F) \cos \nu t + i(E - F) \sin \nu t] \end{aligned}$$

Auch hier kann wie bei dem ungedämpften Schwinger durch Einführen neuer Konstanten  $C$  und  $\varphi$  an Stelle von  $E$  und  $F$  bzw.  $A$  und  $B$

$$A = E + F = C \cos \varphi$$

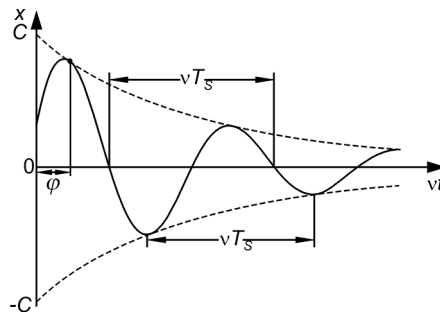
$$B = i(E - F) = C \sin \varphi \quad \text{und somit}$$

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \quad \text{und} \quad \tan \varphi = \frac{B}{A}$$

und unter Verwendung eines Additionstheorems die Lösung  $x(t)$  vereinfacht werden zu

$$x(t) = C \exp(-\delta t) \cos(\nu t - \varphi) \quad (2.15)$$

Für  $\delta=0$ , d.h. keine Dämpfung, folgt die schon bekannte Lösung 2.11. Gl. 2.15 beschreibt eine Schwingung, deren Amplitude exponentiell mit wachsender Zeit abklingt, Abb. 2.10.



**Abb. 2.10.** Schwach gedämpfte Schwingung

Man kann weiter zeigen, worauf wir hier verzichten, dass die Schwingungsdauer  $T_s$  mit zunehmender Dämpfung ansteigt.

$$c) \quad \text{Grenzfall } \delta^2 = \nu_0^2$$

Mit  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\delta$  erhalten wir eine reelle Doppelwurzel. Dieser Fall wird nicht weiter behandelt.

$$d) \quad \text{Starke Dämpfung, d.h. } \delta^2 > \nu_0^2$$

Damit werden die Wurzeln  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  zu

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \nu_0^2}$$

und somit reell und negativ. Die Auslenkung

$$x(t) = A \exp(\lambda_1 t) + B \exp(\lambda_2 t)$$

nimmt mit wachsender Zeit exponentiell ab. Das ist kein Schwingungsvorgang mehr im eigentlichen Sinne, sondern eine aperiodische Dämpfung. Aus den Anfangsbedingungen folgen mit

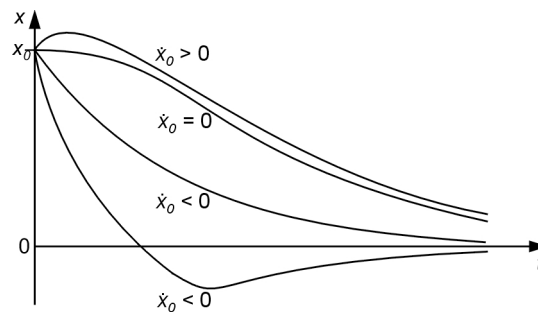
$x(t=0) = x_0 = A + B$  und  $\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0 = A\lambda_1 + B\lambda_2$   
 die Konstanten  $A, B$  zu

$$A = \frac{x_0\lambda_2 - \dot{x}_0}{\lambda_2 - \lambda_1}; \quad B = \frac{x_0\lambda_1 - \dot{x}_0}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

und die Lösung der Schwingungsgleichung wird damit

$$x(t) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} [(x_0\lambda_2 - \dot{x}_0)\exp(-\lambda_1 t) - (x_0\lambda_1 - \dot{x}_0)\exp(\lambda_2 t)] \quad (2.16)$$

Abb. 2.11 zeigt die Lösung für eine gegebene Anfangsauslenkung  $x_0$  und verschiedene Anfangsgeschwindigkeiten  $\dot{x}_0$ .



**Abb. 2.11.** Stark gedämpfte Schwingung

Mit der Behandlung des gedämpften und des ungedämpften Schwingers sollte verdeutlicht werden, dass gewöhnliche Dgl. in der Technik eine sehr wichtige Rolle spielen. Wir werden in Abschnitt 3.1 mit der Dgl. der Biegelinie 3.17 eines Balkens ein weiteres Beispiel kennen lernen und dort entsprechend lösen.

Mit dem letzten Beispiel, der ungedämpften und der gedämpften Schwingung, habe ich die Geduld der Leser arg strapaziert. Dies geschah nicht ohne Grund, wollte ich doch zeigen, dass ohne Mathematik in der Technik „nichts geht“. Schwingungslehre ist ein Paradebeispiel in der Mechanik (Abschnitt 3.1), ebenso wie in der Elektrotechnik (Abschnitt 3.4). Die technische Bedeutung der Schwingungen liegt auf der Hand, exemplarisch seien hier aufgelistet: Unwuchten, Eigenfrequenzen, Anregung, Regelung an Fahrzeugen, Schwappen von Treibstoff in Tanks. Sie glauben kaum, wie sich in dem großen Tank eines Motorrades Typ Enduro bei halber Füllung diese aufschaukeln kann!

Alle in Kapitel 3 zu behandelnden technischen Grundlagen sind von Mathematik durchdrungen, was an der Stelle deutlich werden wird. Für die technischen Vertiefungen, Kapitel 4, gilt diese Aussage in ähnlicher Weise. Wir werden jedoch im vierten Kapitel auf Mathematik verzichten und uns auf anschauliche Erläuterungen beschränken. Angst vor Mathematik? Warum eigentlich? Die Mathematik ist wunderschön, sie ist spannend und intellektuell sehr anregend! Nur guter



„Schrauber“ zu sein (am Motorrad, Auto, Radio, Segelflugzeug, Segelboot) reicht nicht aus, ein guter Ingenieur zu werden. Zurück zum Thema.

In Abschnitt 5.2 werden wir anhand einer Einführung in Ökosysteme die Behandlung von gekoppelten gewöhnlichen Dgln. kennen lernen, deren Lösung zumeist nur mit numerischen Verfahren möglich ist. Hier gibt es Standard-Methoden wie etwa das Runge-Kutta-Verfahren, das ich nur andeutungsweise schildern möchte.

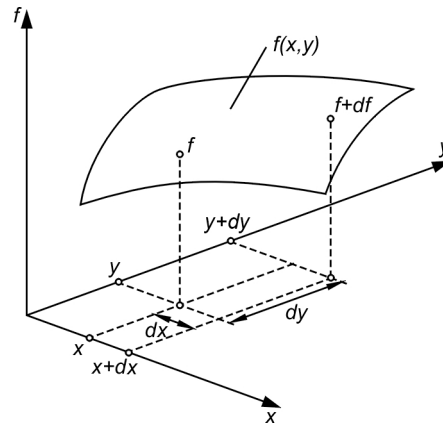
Die numerische Rechnung läuft hier wie folgt ab. Mit gegebenen Anfangswerten zu der Zeit  $t_0$  wird das Gleichungssystem für den Zeitpunkt  $t_1 = t_0 + \Delta t$  gelöst, wobei das Zeitintervall  $\Delta t$  „hinreichend klein“ gewählt werden muss. Wie klein, das lernen die Studenten in den Vorlesungen über Numerische Mathematik. Dort lernen sie auch, wie man geschickte iterative Verbesserungen verwendet, um die Rechnungen zu beschleunigen. Die für den neuen Zeitpunkt  $t_1$  gewonnenen Lösungen sind nun ihrerseits die Startwerte für den nächsten Zeitschritt  $\Delta t$ ; die Rechnung läuft in analoger Weise ab. Dies hört sich mühsam und langwierig an und ist es auch, wenn man versucht, es „von Hand“ zu lösen; der Computer erledigt dies jedoch unglaublich rasch.

Bislang haben wir nur Probleme behandelt, bei denen die abhängige Variable (hier  $x$ ) nur von *einer* unabhängigen Variablen (hier  $t$ ) abhängt. Derartige Fälle werden durch gewöhnliche Dgln. beschrieben.

Stellen wir uns als gesuchte Größen beispielsweise Temperatur, Druck, Dichte, Feuchte und Geschwindigkeit der Luft vor, so hängen diese von der Zeit  $t$  und vom Ort ab. Im Falle der Meteorologie wäre der Ort durch die drei Koordinaten geographische Länge und Breite sowie Höhe beschrieben. Somit sind die abhängigen Variablen wie Temperatur usw. als Funktion von vier unabhängigen Variablen gesucht.

In Vorlesungen über „höhere“ Strömungsmechanik wird behandelt, wie die Bilanzgleichungen für Masse, Impuls und Energie für diese Fragestellung aussehen. Sie führen auf ein System von nichtlinearen partiellen Dgln. zweiter Ordnung. Hier interessiert uns der Begriff partiell. Er bedeutet, dass eine gesuchte Funktion  $f$  von mindestens zwei Variablen  $x$  und  $y$  abhängt. Diesen Fall stellen wir uns nun vor und erkennen anhand der Abb. 2.12, dass  $f(x, y)$  eine Fläche über der  $x, y$ -Ebene darstellt.

Um von der Stelle  $f$  auf der Fläche  $f(x, y)$  zu einer Stelle  $f + df$  zu gelangen, können wir etwa zunächst parallel zur  $x$ -Achse und somit  $y = \text{konstant}$  eine (kleine) Wegstrecke  $dx$  voranschreiten, anschließend parallel zur  $y$ -Achse und somit  $x = \text{konstant}$  eine (kleine) Strecke  $dy$  weitergehen. Reihenfolge und Anzahl der Schrittstufen sind beliebig. In jedem Fall müssen wir partielle Steigungen in zwei Richtungen  $x$  und  $y$  überwinden, um vom Ort  $f$  zu  $f + df$  zu gelangen.



**Abb. 2.12.** Zur Erläuterung des totalen Differenzials

Die Änderung von  $f$  beim Fortschreiten

- nur in  $x$ -Richtung ist  $\frac{\partial f}{\partial x} dx$
- nur in  $y$ -Richtung ist  $\frac{\partial f}{\partial y} dy$

Diese addieren sich zur Gesamtänderung  $df$ , die wir das totale Differenzial von  $f$  nennen:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad (2.17)$$

Dabei ist  $\partial$  das Symbol für eine partielle Ableitung nur in einer Richtung, während die jeweils andere Richtung konstant bleibt.

Auf eine mathematische Präzisierung muss hier verzichtet werden. Hinter dieser „Plausibilitätsbetrachtung“ steckt ein Grenzübergang: Für endliche Werte von  $dx$  und  $dy$  sind sie nur näherungsweise richtig, sie werden asymptotisch für  $dx$  und  $dy \rightarrow 0$  exakt. Die Existenz eines totalen Differenzials  $df$  besagt, dass der Schritt von  $f$  zu  $f + df$  wegunabhängig erfolgt.

Hängt die Funktion  $f$  nicht nur von zwei, sondern von mehreren Variablen ab, so müssen die Überlegungen entsprechend erweitert werden. Es sei die Temperatur  $T$  eine Funktion von Zeit  $t$  und Ort  $x, y, z$ . Somit ist

$$dT = \frac{\partial T}{\partial t} dt + \frac{\partial T}{\partial x} dx + \frac{\partial T}{\partial y} dy + \frac{\partial T}{\partial z} dz \quad (2.18)$$

das totale Differenzial von  $T(x, y, z, t)$ .

Wir wollen jetzt am Beispiel der Meteorologie eine weitere Komplikation behandeln. Die Zustandsgrößen Temperatur  $T$  und Druck  $p$  sind skalare Größen, sie sind durch die Angabe einer Maßzahl und ihrer Dimension hinreichend bestimmt, etwa  $T = 20^\circ\text{C}$  und  $p = 1015\text{hPa}$ .

Anders verhält es sich mit der Luftgeschwindigkeit. Diese ist durch Betrag, Dimension *und* Richtung gekennzeichnet, etwa 8 Bf aus Nordost. Derartige Größen nennen wir Vektoren, gekennzeichnet durch Fettdruck. Beispiele für Vektoren sind Wegstrecke  $\mathbf{x}$ , Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$ , Beschleunigung  $\mathbf{a}$ , Kraft  $\mathbf{F}$ , Moment  $\mathbf{M}$  und Drall  $\mathbf{L}$ , diese werden wir in Mechanik, Abschnitt 3.1, kennen lernen.

Mit Skalaren kann man wie mit gewöhnlichen Zahlen rechnen; man kann sie addieren, multiplizieren usw. Will man etwa zwei Vektoren addieren oder subtrahieren, so muss dies komponentenweise geschehen. So ist etwa die Geschwindigkeit einer Segelyacht über Grund die vektorielle Summe aus der Geschwindigkeit durch das Wasser und der Strömungsgeschwindigkeit des Wassers über Grund. Analoges gilt für Kräfteparallelogramme. Das ist unmittelbar einleuchtend.

Acht geben muss man bei der Frage, wie man zwei Vektoren multipliziert. Dabei unterscheiden wir das Innen- und das Außenprodukt, was wir uns anschaulich verdeutlichen wollen, Abb.2.13.

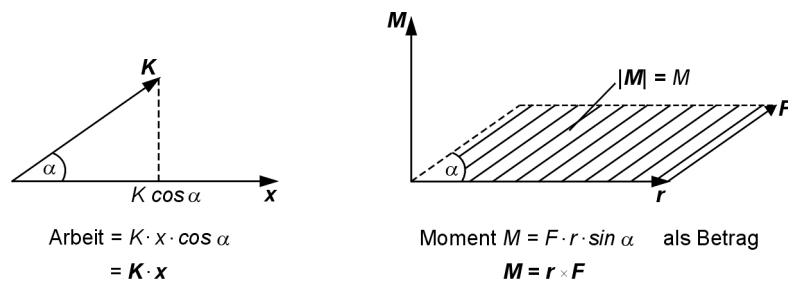


Abb. 2.13. Innen- und Außenprodukt zweier Vektoren

Die Definition der Arbeit führt uns zu dem Innenprodukt oder Skalarprodukt, denn die Aussage Arbeit = Kraft mal Weg ist unzureichend. Sie muss präzise lauten: Arbeit = Kraft mal Weg in Kraftrichtung. Für  $\alpha = 0^\circ$  wird die Arbeit maximal, für  $\alpha = 90^\circ$  wird sie Null.

Man schreibt das Innenprodukt zweier Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  als

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (ab) = ab \cos \alpha \quad (2.19)$$

Das Ergebnis ist ein Skalar.

Die Definition des Momentes führt uns zu dem Außenprodukt oder Vektorprodukt. Die Aussage Moment = Kraft mal Hebelarm gilt nur, wenn die Kraft senkrecht an dem Hebelarm angreift. Das weiß jedes Kind, das Radfahren lernt, intuitiv. Man schreibt das Außenprodukt zweier Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  als

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = [\mathbf{ab}] = \mathbf{c} \quad ; \quad c = ab \sin \alpha \quad (2.20)$$

Das Ergebnis ist ein Vektor  $\mathbf{c}$  mit dem Betrag  $c = ab \sin \alpha$ . Dabei steht  $\mathbf{c}$  senkrecht auf der von  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  aufgespannten Ebene, d.h.  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  bilden ein Rechtssystem. Das Außenprodukt wird für  $\alpha = 90^\circ$  maximal, für  $\alpha = 0^\circ$  wird es Null. Das Moment  $\mathbf{M}$  einer Kraft  $\mathbf{F}$  mit dem Hebelarm  $\mathbf{r}$  ist ein Vektor.

Innen- und Außenprodukt sind Beispiele aus der Vektoralgebra. Wollen wir jedoch Methoden der Differenzial- und Integralrechnung auf Vektorfelder anwenden, so führen uns diese Fragen zu den Operatoren Divergenz, Gradient und Rotation. Diese sind in der Strömungsmechanik und der Elektrodynamik von Bedeutung. Wir sprechen dann von Vektoranalysis, worauf wir in Abschnitt 3.4 kurz eingehen werden.

Ebenso wollen wir ebenfalls nur kurz erwähnen, dass es oberhalb von Skalaren und Vektoren weitere physikalische Größen gibt, die Tensoren. In Mechanik, Abschnitt 3.1, werden wir den Spannungstensor und den Trägheitstensor kennen lernen. Auch hierfür existieren spezielle Rechenregeln, auf die wir nicht eingehen.

Wir haben damit die *erste Meldung* „Der Anstieg der Arbeitslosigkeit in Deutschland hat sich im letzten Halbjahr verringert“ hinreichend ausgewalzt, wobei wir die Bereiche

- Differenziale sowie gewöhnliche Dgln.
- partielle und totale Differenziale sowie partielle Dgln.
- Vektoralgebra und Vektoranalysis sowie
- komplexe Zahlen

exemplarisch kennen gelernt haben. Vertiefungen hierzu werden in den technischen Grundlagen, Kapitel 3, sowie in Abschnitt 5.2 folgen.

*Zweite Meldung:* „In dem Land X hat sich im vergangenen Jahr die Einkommensverteilung zugunsten der Reichen verschoben, wodurch die soziale Ungerechtigkeit zugenommen hat.“

Diese Aussage führt uns zu Verteilungsfunktionen und damit zur Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung. Einkommensverteilungen sind in den Wirtschafts- und Sozialwissenschaften interessierende Indikatoren. Wir wollen hier eine technische Fragestellung mit einem Umweltbezug zum Ausgangspunkt unserer Überlegungen machen: Den Partikelfilter für Dieselmotoren.

Dabei soll es hier um die Frage gehen, welche Eigenschaften von festen Partikeln (es gibt auch flüssige Partikeln wie Nebel und Tropfen) von Bedeutung sind, wenn wir mit technischen Anlagen wie Filtern, Sieben, Windsichtern, Zyklonen und Staubabscheidern die Luft, Abgase oder Abwässer reinigen wollen. Es leuchtet unmittelbar ein, dass hier ein direkter Bezug zur Umweltschutztechnik gegeben ist.

Zur Charakterisierung von Partikelgrößenverteilungen unterscheidet man zwei Mengenmaße, das Summenmaß  $Q_r$  und das Dichtemaß  $q_r$ . Dabei stehen  $q$ ,  $Q$  für

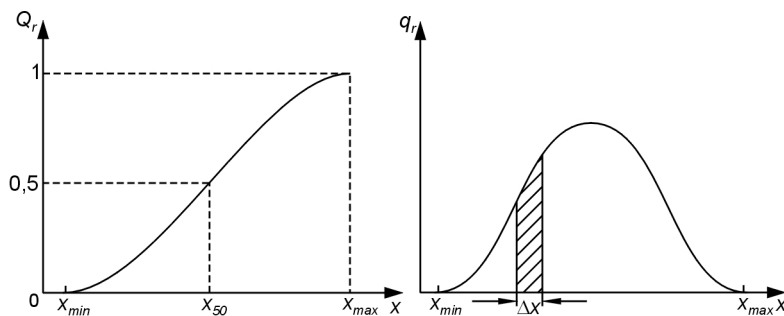
den englischen Begriff quantity, der Index  $r$  bezeichnet die jeweils betrachtete Partikelart.

Tragen wir die Mengenmaße  $Q$  und  $q$  über dem Partikeldurchmesser  $x$  auf, so erhalten wir zwei Verteilungskurven, die wir im Folgenden diskutieren wollen. Zuvor müssen wir jedoch noch sagen, was wir mit Partikeldurchmesser meinen. Wären die Partikeln ideale Kugeln, dann wäre der Fall klar. Aber realiter sind sie mehr oder weniger unregelmäßig geformt.

Aus diesem Grund werden sogenannte Äquivalentdurchmesser definiert. Darunter versteht man den Durchmesser einer Kugel, die bei der Ermittlung eines bestimmten Partikelmerkmals dieselben physikalischen Eigenschaften (z.B. Sehnenlänge, Umfang, Oberfläche, Volumen, Masse, Sinkgeschwindigkeit, usw.) aufweist wie die unregelmäßig geformte Partikel. Geometrische Äquivalentdurchmesser lassen sich je nach Messgröße unterschiedlich definieren, doch darauf gehen wir hier nicht ein.

Die Verteilungsfunktionen müssen experimentell ermittelt werden, Abb. 2.14 zeigt typische Verläufe. Wir werden Fragen der physikalischen und chemischen Analytik, der Messtechnik und deren Auswertung in einem eigenen Abschnitt 6.6 behandeln. An dieser Stelle wollen wir die Darstellung diskutieren.

Die Summen-Verteilungskurve  $Q_r(x)$  ist dimensionslos. Sie gibt die auf die Gesamtmenge bezogene Menge aller Partikeln mit Durchmessern an, die kleiner oder gleich  $x$  sind. So bedeutet  $x_{50}$ , dass 50% aller Partikeln einen Durchmesser kleiner oder gleich  $x_{50}$  haben.



**Abb. 2.14.** Summen- und Dichte-Verteilungsfunktion

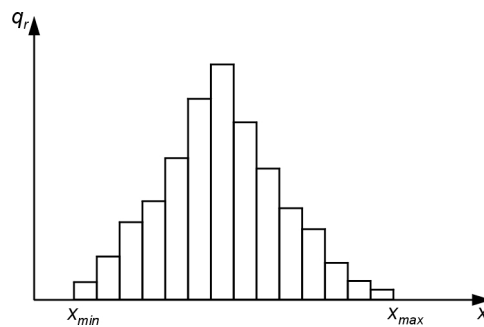
Die Summen-Verteilungskurve  $Q_r(x)$  liegt zwischen dem minimalen und dem maximalen Durchmesser der Partikeln. Es gilt die Normierungsbedingung  $Q_r(x = x_{\max}) = 1$ . Die Ableitung der Summenkurve  $Q_r(x)$  wird Dichte-Verteilungsfunktion genannt:

$$q_r(x) = \frac{dQ_r(x)}{dx} \quad (2.21)$$

Sie besitzt in vielen Fällen die dargestellte Glockenform, wobei eine Verteilung nicht unbedingt immer symmetrisch ist. Die schraffierte Fläche stellt den im Intervall  $\Delta x$  enthaltenen Mengenanteil  $\Delta Q_r$  der Partikeln mit Durchmessern zwischen  $x$  und  $x + \Delta x$  dar. Die Fläche unterhalb der Dichte-Verteilungsfunktion ist aufgrund der Normierungsbedingung gleich eins, denn alle Partikeln liegen zwischen  $x_{\min}$  und  $x_{\max}$  :

$$Q_r(x_{\max}) = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} q_r(x) dx = 1 \quad (2.22)$$

Verteilungskurven verlaufen nicht notwendigerweise stetig, wie hier dargestellt wurde. Mitunter werden Intervalle  $\Delta x_i$  von Merkmalen gebildet. Wenn wir etwa die Frage stellen, wie viele Studenten nach einer Mathematiklausur die Noten 1, 2, 3, 4 oder 5 (oder mit + und – noch feiner unterteilt) erhalten haben, so folgt die Verteilungsfunktion als Säulendiagramm, auch Histogramm genannt, Abb. 2.15.



**Abb. 2.15.** Histogramm einer Dichte-Verteilungsfunktion

In diesem Fall würde die Summen-Verteilungsfunktion treppenförmig verlaufen. Merkmalsintervalle finden sich häufig bei sozialwissenschaftlichen Fragestellungen, als Beispiel sei die Bevölkerungspyramide genannt.

Beide Arten der Darstellung, entweder als Summen-Verteilungsfunktion  $Q_r(x)$  oder als Dichte-Verteilungsfunktion  $q_r(x)$ , geben die Ergebnisse einer Partikelanalyse wieder. Sie enthalten alle für die weitere Auswertung benötigten Informationen.

In guter Näherung lässt sich bei Sanden und vielen Mahlgütern die Dichte-Verteilungsfunktion analytisch durch die Glockenkurve nach Gauß (1777–1855) beschreiben, Abb. 2.16. Diese nennt man auch (Fehler-) Normalverteilung, die nicht nur in Naturwissenschaft und Technik, sondern auch bei vielen anderen statistischen Untersuchungen vorkommt.

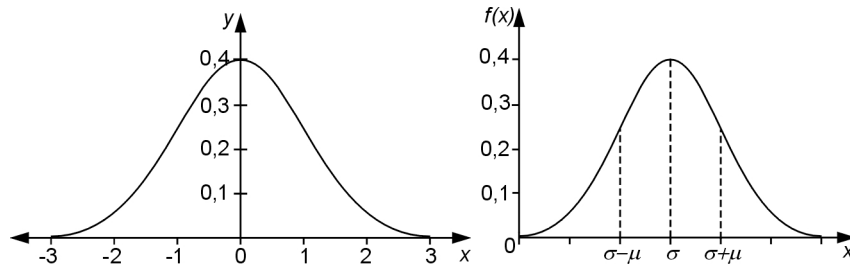


Abb. 2.16. Normalverteilung, Glockenkurve nach Gauß

Wir fanden diese Funktion auf unserem alten Zehnmarkschein, der vor dem Erscheinen dieses Buches gültig war, in der Form:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (2.23)$$

Darin bedeuten  $\mu$  den Erwartungswert und  $\sigma^2$  die Varianz der Verteilung. Die normierte Form der Normalverteilung lautet

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad (2.24)$$

Bezüglich weiterer Erläuterungen sei auf entsprechende Lehrbücher insbesondere über Statistik verwiesen. Verteilungsfunktionen sind in den Naturwissenschaften häufig anzutreffen. Hierzu seien zwei Beispiele aus der Physik gezeigt.

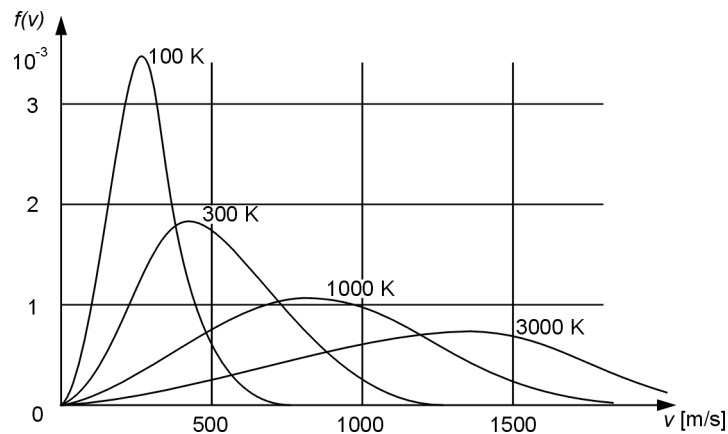
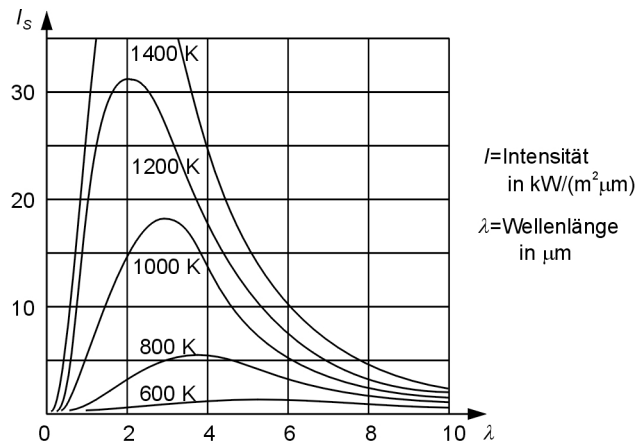


Abb. 2.17. Maxwell-Verteilung der Molekülgeschwindigkeiten für Luft

Die mittlere Molekülgeschwindigkeit in Gasen wächst in etwa proportional mit der Wurzel aus der absoluten Temperatur. Das hat energetische Gründe, wie wir später in Abschnitt 3.3 Strömungsmechanik erkennen können. Für Luft bei Normalbedingungen liegt der Wert bei etwa 500 m/s. Die Abb. 2.17 zeigt die von der absoluten Temperatur  $T$  abhängige Verteilungsfunktion, die sog. Maxwell-Verteilung. Das Maximum der Verteilung wird mit zunehmender Temperatur zu höheren Molekülgeschwindigkeiten verschoben.



**Abb. 2.18.** Energieverteilung eines schwarzen Strahlers nach dem Planck'schen Gesetz

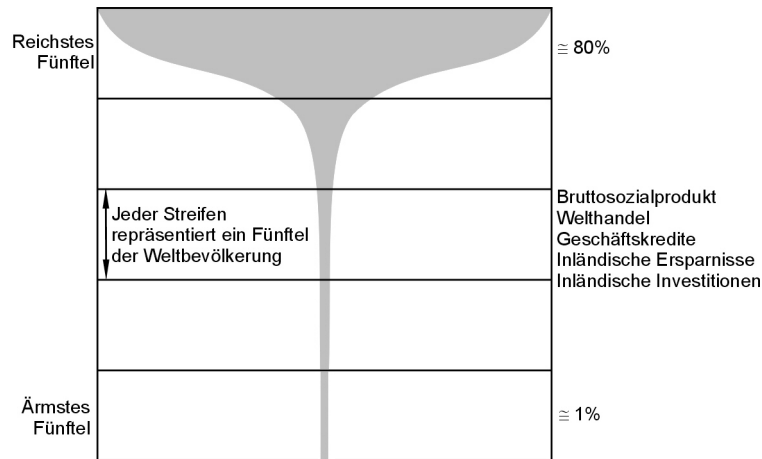
Der sogenannte schwarze Strahler hat die höchste Emission und Intensität, die von keinem anderen Wärmestrahler übertroffen wird. Es spielt daher eine ausgezeichnete Rolle. Die abgestrahlte Energie hängt stark von der Wellenlänge ab, Abb. 2.18.

Die Sonnenoberfläche hat eine Temperatur von knapp 6000 K. Sie hat ihr Maximum im Wellenlängenbereich des sichtbaren Lichts zwischen  $0,36$  und  $0,78 \mu\text{m}$ . Deswegen sind unsere Augen ja so gebaut. Der Draht einer Glühbirne kann nicht annähernd so heiß werden, weil er sonst verdampfen würde. Daher wird über 90% der elektrischen Energie einer Glühlampe zum Heizen vergeudet, nur 10% tragen zum Beleuchten bei.

Die Fläche unter der Kurve des Intensitätsspektrums entspricht der abgestrahlten Energie  $E(T)$ , wobei  $E(T) = \sigma T^4$  ist. Darin ist die Stefan-Boltzmann-Konstante  $\sigma$  eine der Grundkonstanten der Physik.

Nach diesem kleinen Ausflug in die Physik kehren wir zu dem Text der „zweiten Meldung“ zurück, um mit Abb. 2.19 die Kluft zwischen der Ersten und der Dritten Welt, zwischen Reich und Arm, durch eine Verteilung ökonomischer und sozialer Indikatoren darzustellen.



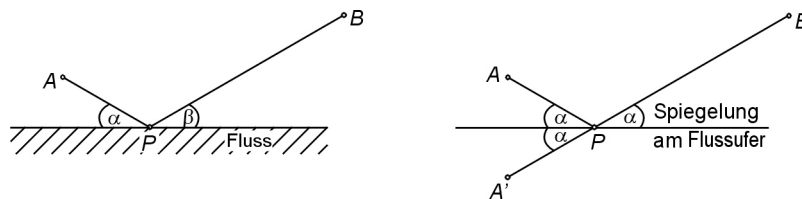


**Abb. 2.19.** Kluft zwischen Arm und Reich in Prozentanteilen verschiedener Indikatoren, in Anlehnung an Nuscheler F (1996) Lern- und Arbeitsbuch Entwicklungspolitik. Dietz, Bonn

Das ärmste Fünftel der Welt ist an den relevanten ökonomischen Indikatoren mit etwa 1% beteiligt, das reichste Fünftel mit mehr als 80%. Entsprechende Daten hierzu sind in dem Human Development Report der UNDP zu finden, der jährlich erscheint.

*Dritte Meldung:* „Die drei Ortschaften  $A$ ,  $B$  und  $C$  haben den Bau einer gemeinsamen Kläranlage beschlossen. Dabei soll der Standort so gewählt werden, dass die Länge der drei Rohrleitungen minimal wird.“

Hier handelt es sich um ein typisches Problem der Variationsrechnung. Es geht dabei immer um die Suche nach einer optimalen Strategie. Vorbereitend wollen wir ein einfaches schon auf Heron von Alexandria zurückgehendes Problem behandeln, das geometrisch gelöst werden kann, Abb. 2.20.



**Abb. 2.20.** Suche nach dem kürzesten Weg

Ein Cowboy möchte bei Anbruch der Dämmerung vom Weidegrund  $A$  zur Ranch  $B$  reiten, muss zuvor jedoch sein Pferd am Fluss tränken. Nach welcher Strategie wird sein Heimweg  $\overline{AP} + \overline{PB}$  minimal? Gesucht ist also die optimale Lage des Punktes  $P$  am Flusssufer.

Die Hilfsskizze zeigt die Lösung.  $A'$  wird durch Spiegelung von  $A$  am Flusssufer gewonnen. Die kürzeste Verbindung ist die Gerade  $\overline{A'B}$ . Somit muss  $\alpha = \beta$

werden, d.h. Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel. Auch die Beugung eines Lichtstrahls kann durch ein Extremalprinzip beschrieben werden, es führt uns zu dem Snelliusschen Brechungsgesetz, Abb. 2.21.

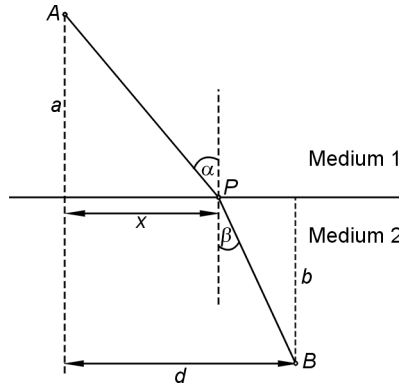


Abb. 2.21. Brechungsgesetz nach Snellius

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes hat im Vakuum mit  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$  ihren größten Wert. Das Verhältnis der Lichtgeschwindigkeit  $c$  im Vakuum zur Lichtgeschwindigkeit  $v$  im Medium ist der Brechungsindex  $n = c/v$ , er ist stets  $> 1$ .

Das Licht legt den Weg zwischen den Punkten  $A$  und  $B$  in möglichst kurzer Zeit zurück. Es sei  $v_1$  die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes im Medium 1, entsprechend  $v_2$  im Medium 2. Mit ein wenig Geometrie wird aus

$$t_1 = \frac{\overline{AP}}{v_1} \quad \text{und} \quad t_2 = \frac{\overline{PB}}{v_2} \quad \text{mit}$$

$$\overline{AP}^2 = a^2 + x^2 \quad \text{und} \quad \overline{PB}^2 = b^2 + (d-x)^2$$

$$t_1 + t_2 = \frac{1}{v_1} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{1}{v_2} \sqrt{b^2 + (d-x)^2} = f(x)$$

Die Gesamtzeit  $t_1 + t_2$  soll minimiert werden, dabei hängt die Lage des Punktes  $P$  nur von  $x$  ab. Also müssen wir  $df/dx$  bilden und gleich Null setzen. Es folgt

$$0 = \frac{x}{v_1 \sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{d-x}{v_2 \sqrt{b^2 + (d-x)^2}} = \frac{x}{v_1 \overline{AP}} - \frac{d-x}{v_2 \overline{PB}} \quad \text{und somit}$$

$$0 = \frac{\sin \alpha}{v_1} - \frac{\sin \beta}{v_2} \quad \text{oder} \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

Das ist das Brechungsgesetz nach Snellius (1618). Ist  $n_2 > n_1$ , so nennen wir das Medium 2 optisch dichter als Medium 1. Dringt ein Lichtstrahl aus der Luft

(Medium 1) in Wasser (Medium 2) ein, so wird er zur Oberflächennormalen hin gebrochen, es wird  $\beta < \alpha$  wie in Abb. 2.21 dargestellt.

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir auf unsere „dritte Meldung“ zurück. Es sei  $P$  der gesuchte Ort der Kläranlage. Dabei soll die Summe der drei Strecken  $\overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP}$  minimal werden, Abb. 2.22.

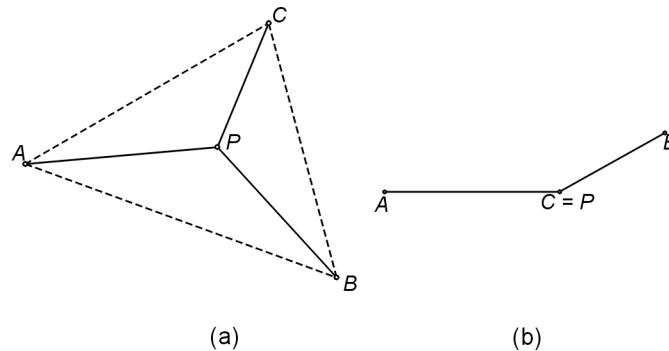


Abb. 2.22. Suche nach dem optimalen Standort

Dieses Problem kann ebenfalls noch geometrisch gelöst werden. Wir wollen hier nur die Lösung angeben. Diese hängt davon ab, wie die Punkte  $A, B, C$  zueinander liegen. Mit den Punkten  $A, B, C$  können wir ein Dreieck aufspannen. Sind alle Winkel in dem Dreieck kleiner als  $120^\circ$ , dann liegt  $P$  innerhalb des Dreiecks und zwar so, dass die Winkel  $APC$ ,  $APB$  und  $BPC$  alle gleich sind und damit  $120^\circ$  betragen (Fall a). Ist jedoch in dem Dreieck ein Winkel  $120^\circ$  oder größer, etwa der bei  $C$ , dann stimmt  $P$  mit diesem Punkt, hier  $C$ , überein.

Mit ein wenig Fantasie lassen sich weitere Beispiele finden. Wie soll ein Straßennetz mit möglichst geringer Straßenlänge gebaut werden, das drei oder mehr Orte miteinander verbindet? Deutlich komplizierter wird das Problem, wenn sog. Nebenbedingungen zu erfüllen sind. Etwa wenn Hindernisse umgangen werden müssen, oder wenn etwa Naturschutzgebiete mit einer hohen ökologischen Sensibilität betroffen sind, Abb. 2.23.

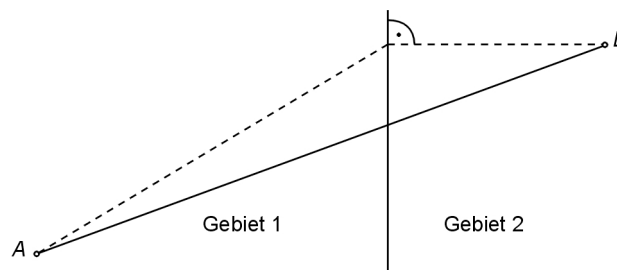


Abb. 2.23. Optimale Streckenführung bei unterschiedlicher ökologischer Befindlichkeit

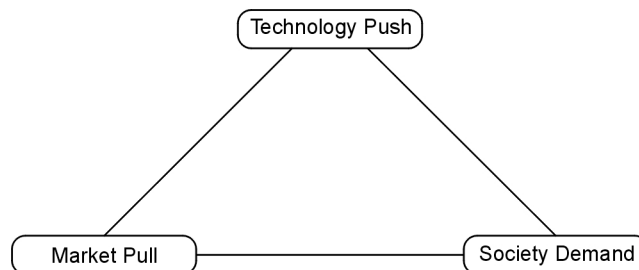
Haben beide Gebiete die gleiche Befindlichkeit, dann ist die direkte Verbindung von  $A$  und  $B$  optimal. Ist die Sensibilität des Gebietes 2 sehr viel größer als die des Gebietes 1, dann wird die gestrichelte Variante optimal sein. Sie weist den kürzesten Weg in der Region 2 aus, hat aber den längsten Gesamtweg.

Im Realfall wird eine optimale Lösung zwischen den skizzierten Varianten liegen. Die Behandlung eines derartigen Variationsproblems kann etwa so erfolgen, dass die Bereiche 1 und 2 durch unterschiedliche ökologische Widerstände, analog zu Ohmschen Widerständen in der Elektrotechnik, beschrieben werden.

Realiter treten stets Nebenbedingungen auf. Wir haben an dieser Stelle technische Fragestellungen behandelt. Es ist aber unmittelbar einleuchtend, dass etwa Fragen wie optimaler Einsatz von Menschen, Maschinen und Material bei Produktionsprozessen im Mittelpunkt des unternehmerischen Interesses stehen. In der Ökonomie wird dieser Bereich als Unternehmensforschung, meist englisch Operations Research, bezeichnet. Es ist die Wissenschaft, die sich mit der (optimalen) Lösung von ökonomischen und technischen Fragestellungen befasst und dabei mathematische Methoden anwendet.

## 2.2 Informatik

Keine andere wissenschaftliche Disziplin ist so stark gleichzeitig Subjekt und Objekt des technischen Wandels, der offenbar mit ständig zunehmender Beschleunigung abläuft, wie die Informatik. Die Informatik ist geradezu ein Lehrbuchbeispiel für die Interaktion zwischen den Treibern dieser Dynamik. Denn wer treibt hier eigentlich wen?



**Abb. 2.24.** Die Treiber technischer Innovationen

Die Technik drückt, der Markt zieht und die Gesellschaft fordert, so kann man dies übersetzen, Abb. 2.24. Wir sollten uns hier sogleich an die Dominanz englischer Begriffe gewöhnen, ebenso an international geläufige Abkürzungen wie IT (Information Technologies), wobei hier der deutsche Begriff die gleiche Abkürzung liefert. Der deutsche Terminus IuK = Informations- und Kommunikationstechnologien wird wohl verschwinden.

Dies ist nicht der Ort, über die zunehmende Dominanz der englischen Sprache zu lamentieren. Vielleicht wäre die Entwicklung anders verlaufen, wenn Bill Gates, Steve Jobs und all die anderen aus dem Silicon Valley Chinesen oder Franzosen gewesen wären.

Die Informatik ist weiter ein exzellentes Anschauungsbeispiel für das Zusammenwirken von Naturwissenschaft und Technik. Die Auffassung, Technik sei angewandte Naturwissenschaft, ist ebenso weit verbreitet wie falsch. Natürlich ist sie das auch. Aber weit häufiger ist bislang der umgekehrte Fall: Die Technik treibt die Naturwissenschaft. Experimentelle Naturwissenschaft ist angewandte Technik, darauf werden wir in Abschnitt 6.6 Analytik, Messtechnik und Auswertung gesondert eingehen.

Jahrhunderte lang gab es nur zwei Wege zum Erkenntnisgewinn, die Theorie und das Experiment. Aus naturwissenschaftlichen Grundgesetzen wie dem Satz von der Energieerhaltung oder dem Impulssatz lassen sich konkrete Probleme lösen, wir sprechen von Deduktion. Andererseits sind gerade die Naturgesetze die konzentrierteste Form aller Erfahrungen. Sie sind aus unzähligen Experimenten gewonnen. Wir sprechen von Induktion. Aus vielen Beobachtungen wird auf allgemeingültige Zusammenhänge geschlossen. Für Studienanfänger mag das überraschend klingen. Aber der Satz von der Energieerhaltung kann ebenso wenig bewiesen werden wie der Impulssatz. Deswegen gibt es immer noch Bastler und Tüftler, die (natürlich vergebens) ein perpetuum mobile realisieren wollen.

Der Siegeszug des Computers hat einen dritten Weg möglich gemacht, die Simulation, Abb. 2.25. Dabei machen wir uns ein Modell von der Realität, um aus diesem Modell entsprechende Folgerungen zu ziehen. Diese Vorgehensweise ist prinzipiell nicht neu, der Computer erlaubt jedoch die numerische Behandlung außerordentlich komplexer Modelle. Beispiele hierfür sind Modelle in der Klimaforschung, der Wirtschaft (die Ökonometrie), der Technik und vielen anderen Bereichen der Naturwissenschaften.

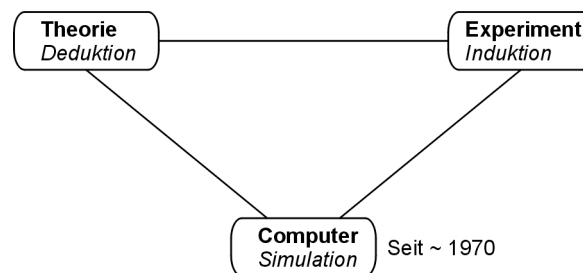


Abb. 2.25. Wege zum Erkenntnisgewinn

Die Modellbildung ist ein ganz wesentliches Element in der Tätigkeit von Ingenieuren. Und deshalb muss diese Modellierung im Studium so früh wie möglich anhand technischer Probleme gelehrt und geübt werden. Das ist der Grund dafür, dass neben der Mathematik (hier als Werkzeug) die Mechanik (hier als Anwendung) den breitesten Raum in diesem Band einnimmt.

Aus der Beschäftigung mit dem und über den Computer ist die Computerwissenschaft entstanden, die wir seit den späten sechziger Jahren Informatik (nach dem französischen Begriff *informatique*) nennen. Zu meiner Studienzeit Anfang der sechziger Jahre an der TH (heute Universität) Karlsruhe gab es diesen Begriff noch nicht, aber es begann die Beschäftigung mit dem Computer.

Erfahrungsgemäß interessieren sich Studenten stark für persönliche Erfahrungen und Erlebnisse, weil ihnen daran die Entwicklungsdynamik deutlich wird. Aus diesem Grund gebe ich hier eine Kurzfassung von teils längeren Geschichten, die ich in Vorlesungen gerne erzählt habe (denn wozu brauchten wir sonst überhaupt noch Vorlesungen?).

Anfang der sechziger Jahre wurden Programmierkurse angeboten. Ich lernte die an der TH Darmstadt entwickelte maschinenunabhängige Programmierung ALGOL, daneben gab es die von IBM eingeführte Programmiersprache FORTRAN. Als „Groß“-Rechner stand an der TH Karlsruhe dafür ein Zuse-Rechner zur Verfügung, dessen Grundkonzept auf Entwicklungen des Bauingenieurs Konrad Zuse während des Zweiten Weltkriegs zurückging. Dieser Computer war mit Röhren bestückt, ebenso wie frühe IBM-Computer. Das Aus- und Eingabemedium waren Lochstreifen.

Es war für mich als Studienanfänger verblüffend, wie die Experten (meist junge Assistenten) nicht nur die Lochstreifen gegen das Licht gehalten wie ein Buch lesen konnten, sondern auch hörten, was der Computer bestehend aus Röhren und Mechanik gerade tat. Lange Iterationsschleifen konnten akustisch nachvollzogen werden.

Der nächste Fortschrittsschub war wie so oft technischer Art. Die Elektronenröhren wurden durch Transistoren ersetzt, die weitere Entwicklung lief über integrierte Schaltungen und Halbleiterspeicher. Heute ist der Chip (englisch für Splitter) zentrales Element integrierter Schaltungen, der sämtliche Komponenten wie Transistoren und Widerstände auf winzigen Halbleiterplättchen zusammenfasst.

Ende der sechziger Jahre erlebte ich an der TU Berlin als Großrechner einen der IBM 360er Serie. Das Aus- und Eingabemedium waren nunmehr Lochkarten, die in gewaltigen Stapeln von Doktoranden zwischen den Instituten und dem Rechenzentrum hin- und hergetragen wurden. Diese Rechenzentren waren die organisatorische Antwort der Universitäten zum Verwalten, Warten und Betreuen der Großrechner. Insbesondere galt es, die enorm rasch wachsende Inanspruchnahme zu verwalten. Deshalb erwarben findige Doktoranden sogenannte Operatorscheine, um vorzugsweise nachts selbst am Rechner arbeiten zu können.

An der Ruhr-Universität Bochum machte ich Anfang der siebziger Jahre Bekanntschaft mit dem Großrechner TR 440, einem mit staatlichen Mitteln geförderten deutschen Konkurrenzprodukt zu IBM, gebaut von Telefunken. Schließlich erlebte ich Mitte der siebziger Jahre an der Universität GH Essen die ersten noch nicht programmierbaren, aber mit vielen Funktionen versehenen Taschenrechner von Hewlett Packard. Nach meiner Erinnerung kosteten die legendären HPs fast ein halbes Professorengelb.

Zu der Zeit kamen zahlreiche dezentrale mittelgroße Rechner auf, meist als integraler Bestandteil von Messwerterfassungsanlagen wie z.B. die PTB 11. Über

diesen Trick konnte man sich Institutsrechner anschaffen, was offiziell nicht gestattet war, denn es gab ja den teuren Großrechner.

Die Welt der PCs (Personal Computer), eingeführt von IBM, habe ich in den späten achtziger Jahren und insbesondere in jüngerer Zeit an der TU Clausthal miterleben können. Aber darüber wissen die jungen Studenten in der Regel deutlich besser Bescheid als ich.

Mit dieser persönlichen historischen Reminiszenz habe ich die außerordentliche Dynamik der Computerentwicklung nachzeichnen wollen, die ich in meiner beruflichen und wissenschaftlichen Tätigkeit beginnend mit dem Rechenschieber (ich verwende auch ihn noch gerne) bis heute erlebt habe.

Heute wachsen junge Leute vor einem anderen Erfahrungshintergrund auf. Mikroprozessoren sind derzeit integrale Bestandteile nicht nur von Computern. Sie sind geradezu allgegenwärtig: In digitalen Fotokameras und Camcordern, in Mobiltelefonen, in GPS- und Navigationsgeräten. Sie nehmen einen ständig wachsenden Anteil in der Wertschöpfungskette klassischer technischer Produkte wie Maschinen, Fahrzeugen und Antrieben bis hin zu zahlreichen Aggregaten in den Haushalten ein.

Mit dieser vergleichsweise langen Einführung möchte ich verdeutlichen, dass das Fach Informatik in Schulen und Hochschulen im Vergleich zu den Klassikern Mathematik, Physik und Chemie extrem jung ist. Es ist demzufolge noch in keiner Weise kanonisiert, es ist absolut im Fluss. Was in Mathematik, Physik und Chemie gelehrt werden sollte, ist in zahlreichen Curricula und Lehrbüchern erprobt und bewährt. Leichte Variationen betreffen veränderte didaktische Zugänge (wie Einsatz der Computer) und unterschiedliche Anwendungen und Schwerpunktsetzungen. Das betrifft aber nicht die geradezu klassische Struktur dieser Fächer.

Im Gegensatz dazu veralten einführende Lehrbücher zur Informatik fast so schnell wie PCs, wie Hardware und Software. Die Verfallsdaten sind extrem kurz. Aus diesem Grund ist die nun folgende Schilderung einerseits die subjektive Sicht eines Ingenieurs und andererseits eine kurze Zusammenfassung der zentralen Frage: Wozu und was ist Informatik? Mit Gewinn habe ich für die Behandlung dieser Frage das Buch „Informatik und Gesellschaft“ (Friedrich u. a. 1995) verwendet.

Die Informatik ist ebenso wie die Mathematik primär eine Strukturwissenschaft. Strukturen, Formen, Algorithmen und Organisationsfragen prägen diese Disziplin. Sekundär wird die Frage angesehen, welche Problemstellungen mit der Informatik sinnvoll behandelt werden können. Zweifellos gibt es auch theoretische Informatiker, die jeder Anwendung ablehnend gegenüberstehen. Diese Einstellung erinnert mich an die Bemerkung eines reinen Mathematikers zur Frage, warum Ingenieure und Mathematiker mitunter Verständigungsprobleme hätten. Er meinte, diese Frage sei völlig irrelevant, denn Ingenieure und Mathematiker hätten nichts miteinander zu tun.

Es ist nun in der Tat so, dass innerhalb der Wissenschaftsgemeinde der Mathematiker die reinen Mathematiker (noch) deutlich überwiegen. Es ist jedoch erfreulich aus der Sicht der Ingenieure (und ebenso von Ökonomen, die gleichfalls problemlösungsorientiert arbeiten), dass sich Mathematiker zunehmend auch für

die Anwendungen interessieren. Stellvertretend hierfür sei der Studiengang Technomathematik, in dem Mathematiker mit Informatikern und Ingenieuren gemeinsam arbeiten, erwähnt. Das ist auch notwendig, denn wir erleben gerade durch den Computer eine zunehmende Mathematisierung und Informatisierung vieler Wissenschaftsbereiche.

Die Informatik ist nicht nur Strukturwissenschaft, sie ist auch partiell eine Ingenieurwissenschaft. Denn es geht ganz wesentlich auch um hard- und softwaretechnische Realisierungen. So waren die Informatiker der ersten Stunde überwiegend Mathematiker, Physiker und Elektroingenieure. Die Wurzeln prägen bis heute Selbstwahrnehmung und Curriculum der Informatik. Danach gibt es in der Informatik fünf Schwerpunkte (nach Friedrich u. a. 1995, S.6):

1. Theoretische Informatik

Sie ist die mathematische Basis der Informatik mit Teilgebieten wie Komplexitätstheorie, Automatentheorie, Algorithmentheorie, Theorie formaler Sprachen, Theorie der Berechenbarkeit, formale Semantik und formale Spezifikation.

2. Praktische Informatik

Sie entwickelt u.a. Methoden und Modelle für Programmier- und Dialogsprachen, Softwaretechnik und für Datenbanken und Informationssysteme.

3. Technische Informatik

Sie befasst sich u.a. mit der Rechnerorganisation, dem Entwurf und der Architektur hochintegrierter Schaltungen und der Modellierung von Rechensystemen.

4. Angewandte Informatik

Sie umfasst die Entwicklung und Analyse von Methoden, die bei der Anwendung der Informatik in anderen Wissenschaften eingesetzt werden, und beschäftigt sich mit Problemen, die mehreren Anwendungsgebieten gemeinsam sind.

5. Informatik und Gesellschaft

Dieses Fachgebiet analysiert die Wirkungen des Einsatzes der Informatik in unterschiedlichen Bereichen und entwickelt Kriterien und Methoden zur Gestaltung sozialverträglicher Informatiksysteme.

Es scheint unter Informatikern unstrittig, dass die Theoretische, Praktische und Technische Informatik zu deren Kerngebieten gehört. Bei der Angewandten Informatik, etwa Wirtschafts-, Medizin- oder Bio-Informatik, gibt es zwei Lager, nennen wir diese Fundis und Realos. Erstere befürchten sicher nicht ganz zu unrecht, dass dadurch die Informatik Gefahr laufen könne, zu einer High-Tech-Hilfswissenschaft degradiert zu werden. Letztere befürchten (sehr zu Recht aus meiner Sicht), dass eine Praktische Informatik ohne Anwendungsbezug in die Gefahr gerät, an den Anforderungen der Praxis zu scheitern.

Diese Diskussionen sind absolut nicht neu. Mathematiker, Physiker und Chemiker bekämpfen ständig und glücklicherweise erfolgreich gerade an den Technischen Universitäten Versuche von einigen wenigen Ingenieuren, sie mögen doch bitte ihre Aktivitäten auf diejenigen Fragen lenken, mit denen die Ingenieure sich beschäftigen.

Eine derartige Instrumentalisierung gemessen an momentanen Erfordernissen wäre in unverantwortlicher Weise kurzsichtig und kontraproduktiv. Leider wird dieser Tendenz durch die allzu einseitige Fokussierung auf die Einwerbung von Drittmitteln von administrativer Seite (Ministerium und Hochschulleitung) Vorschub geleistet. Praxisbezug ist gut und richtig, wo er Sinn macht. Er kann



aber nicht zum allgemeingültigen Maßstab gemacht werden. Ein Blick in die Geschichte der Mathematik und Naturwissenschaften fördert zahlreiche Beispiele dafür zutage, dass frühe scheinbare praxisferne Erkenntnisse urplötzlich hochaktuell wurden.

Wir wissen heute, dass die Arbeitsweise der Computer auf dem Dualsystem, den binären Zahlen, beruht (ja/nein bzw. ein/aus). Die Grundlagen hierfür haben Leibniz (1646–1716) mit seiner Arbeit über die Dualrechnung sowie Boole (1815–64) und de Morgan (1806–71) mit der Erarbeitung der formalen Aussagenlogik gelegt. Damit waren erste brauchbare mechanische Schaltungen zur Darstellung und Berechnung logischer Aussagen möglich. Ihnen folgten elektromechanische Relais, später die Elektronenröhren, die schnellere Schaltkreise und Datenspeicher erlaubten. Diese wurden wiederum durch Transistoren ersetzt, verdrängt ab etwa 1960 durch die jüngste Technologie der integrierten Halbleiterschaltungen, der Chips. Stellen wir uns vor, die genannten Forscher hätten damals etwas zur Frage der Praxisrelevanz ihrer Forschungsarbeiten sagen sollen!

Die zunehmende Ausstrahlung der Informatik in viele Bereiche hat zu diversen Bindestrich-Informatiken geführt, bei denen der jeweilige Anwendungsbezug im Vordergrund steht. Genannt seien hier Tätigkeitsfelder und Studiengänge wie Medizin-, Bio-, Geo-, Rechts- und Wirtschafts-Informatik sowie die Informationstechnik.

Der fünfte Punkt in der Auflistung der fünf Schwerpunkte der Informatik lautet „Informatik und Gesellschaft“, er bildet die Schnittstelle zu den Sozialwissenschaften. Niemand bestreitet, dass die Informationstechnologien mit beschleunigter Dynamik nicht nur die Arbeitswelt, sondern zunehmend auch die Lebenswelt irreversibel und tiefgreifend verändert haben und weiter verändern werden. Die Beschäftigung mit dieser Frage findet innerhalb der Informatik derzeit praktisch nicht statt, auch nicht in den Natur- und Ingenieurwissenschaften. Weil ich darin eine Schwäche unserer derzeitigen Ausbildungsstrukturen und Inhalte sehe, werde ich in dem Kapitel 7 darauf zurückkommen.

## 2.3 Physik

Neben der Mathematik ist die Physik die älteste naturwissenschaftliche Disziplin. Ihr Name geht auf das Werk „physika“ (Naturlehre) des Aristoteles (384–322 v.Chr.) zurück, wobei die heutige Physik mit der damaligen Naturlehre, die eher eine Naturphilosophie war, nur noch wenig gemein hat.

Unter Physik verstehen wir die Lehre von den Eigenschaften, den Strukturen und Vorgängen der unbelebten Materie. Sie bildet eine untrennbare Einheit aus experimenteller Beobachtung und theoretischer, d.h. mathematischer Beschreibung. Demzufolge gibt es eine Unterteilung in experimentelle und theoretische (auch mathematische) Physik. Daneben gibt es die angewandte (auch technische) Physik als Brücke zu den Ingenieurwissenschaften.

Eine Einteilung der Physik nach Fachgebieten umfasst die Bereiche Mechanik, Thermodynamik, Elektrizität, Magnetismus, Festkörperphysik, Akustik und Optik.

Es gibt kaum eine naturwissenschaftliche Disziplin, die ähnlich viele Verzahnungen mit anderen Disziplinen aufweist. Angewandte Physik ist die Brücke zur Technik, mathematische Physik zur Mathematik, Astrophysik zur Astronomie, medizinische Physik zur Medizin, Biophysik zur Biologie, Geophysik zur Geologie und Physikalische Chemie zur Chemie.

In welcher Art kann eine Einführung in die Physik für Studienanfänger der Ingenieurwissenschaften ausgeführt werden? Erschwerend kommt hinzu, dass der Wissensstand der Schulabgänger in Physik, gleichfalls in Mathematik und Chemie, in extremer Weise unterschiedlich ist. Angesichts dieser Situation gibt es zwei Lösungsvorschläge.

Die erste Lösung nenne ich Lückenvariante. Sie wird von einigen Ingenieurskollegen damit begründet, dass die Studenten wesentliche Bereiche der Physik wie Mechanik und Strömungsmechanik, Thermodynamik, Elektro- und Werkstofftechnik, also Elektrizität, Magnetismus und Festkörperphysik in den technischen Grundlagen vermittelt bekommen. Somit würden „nur“ die Akustik und die Optik fehlen, die dann gelehrt werden sollten. Entsprechende Versuche hat es gegeben, sie waren alles andere als erfolgreich.

Die zweite und bessere Lösung besteht in einer ganzheitlichen, jedoch didaktisch geschickt verkürzten Variante, unter Einbezug von praktischem Alltagswissen. Ich will nicht behaupten, dass dieser Idealfall in allen Studiengängen, in denen Physik ein einführendes Fach im Grundstudium ist, erreicht wird. Denn es gilt unter Physikern verständlicherweise nicht unbedingt als erstrebenswert, Ingenieure, Chemiker, Biologen, Mediziner usw. in die Denkweise der Physiker einzuführen.

Im Folgenden möchte ich aus einem mir sehr gelungen erscheinendem „Skriptum Physik – Eine Einführung für Studierende mit dem Nebenfach Physik“ (Vogel 1987) berichten. Darin schreibt der Autor in seiner Einführung: Ganz ohne Mathematik geht es nicht. Scheinbar sind derartige Warnungen immer angebracht, da viele Studienanfänger einen offenkundigen Horror vor der Mathematik haben.

Der Autor zerlegt die Menschheit in drei Gruppen. Entweder betreiben sie überwiegend theoretische oder experimentelle Physik (wie die Physiker), oder sie betreiben angewandte Physik. Zu dieser letzten und größten Gruppe gehören wir alle: wir fahren mit dem Rad oder Auto, fällen Bäume und hacken Holz, mähen den Rasen oder gießen die Blumen, wir segeln und surfen, fliegen mit dem Drachen oder dem Gleitschirm, fahren Schlitten oder Ski, telefonieren und fotografieren. Der einzige, aber wesentliche Unterschied zu den Physikern besteht darin, dass die Physiker das Beobachten zum Messen verfeinern und das Nachdenken zum Rechnen. Die Physiker arbeiten qualitativ und quantitativ. Sie fragen nicht nur „wie“ und „warum“, sondern auch „wie viel“.

In der mathematischen Einführung des erwähnten Buches geht es um Funktionen (exponentielle und trigonometrische) und deren Ableitungen, um Integrale, Vektoren, Flächen und Volumina. Im Abschnitt Messen geht es um Messgrößen und deren Genauigkeit, um Fehlerfortpflanzung und die Fehlerreduktion durch Vielfachmessung. Dabei taucht die Normalverteilung nach Gauß auf, die wir in Abschnitt 2.1 Mathematik behandelt haben, Gl. 2.23.

Der Abschnitt Teilchen behandelt Bewegungen, sowohl die Translation als auch Rotation. Dazu werden die Begriffe Energie, Leistung und Impuls eingeführt. Schwingungen, Stöße und Reibung werden behandelt. In dem Abschnitt Teilchensysteme geht es um die Begriffe Druck, Oberflächen, Viskosität und damit Widerstände sowie Festigkeit.

Der Abschnitt Wärme führt in die Thermodynamik ein. Die Grundlagen der Wärmekraftmaschinen werden besprochen, ebenso das Schmelzen und Sieden. Der Abschnitt Felder entwickelt die Gemeinsamkeit der Felder. Erklärt werden Strömungs-, Temperatur-, Strahlungs- und Schwerfelder sowie elektrische und magnetische Felder. Letztere leiten über zur Induktion und den Wechselströmen, den Grundlagen der elektrischen Maschinen.

Der Abschnitt Wellen behandelt Schwingungen und deren Überlagerung, führt die Begriffe Frequenz, Amplitude und Phase ein, behandelt die Ausbreitung und Überlagerung von Wellen (Interferenz) sowie deren Reflexion und Brechung. Optische Geräte, Spektren, elektromagnetische Wellen und Schallwellen runden dies ab. Der letzte Abschnitt ist den Teilchenwellen gewidmet. Es geht um die Lichtgeschwindigkeit, um Photonen und das Strahlungsgesetz, das wir in Abschnitt 2.1 Mathematik kennen gelernt haben. Elektronen, Atome und Spektren, Kerne und Elementarteilchen werden behandelt.

Der Text ist von anschaulichen Aufgaben durchsetzt, deren Lösungen im Anhang diskutiert und angegeben werden. So stelle ich mir ein einführendes Lehrbuch vor, das physikalische Allgemeinbildung vermittelt.

Warum gibt es so wenige Lehrbücher der soeben geschilderten Art? Weil sie einer wissenschaftlichen Karriere kaum förderlich sind. Weil etliche Fachkollegen naserümpfend von Trivialisierung der Wissenschaft sprechen. Ich bin jedoch der Auffassung, dass wir Professoren eine Verpflichtung der Gesellschaft gegenüber haben, unsere Forschungs- und Lehraktivitäten anschaulich zu erläutern. Neben unserer Bringschuld gibt es jedoch auch eine Holeschuld der interessierten Laien.

Die vorliegende fünfbändige Reihe, die mit diesem Band abgeschlossen sein wird, ist ja gerade wegen der genannten Defizite entstanden. In dem Band Naturwissenschaften (Härdtle 2002) gibt es eine für mich sehr überzeugende und anschauliche Darstellung von B. Kallenrode „Wind, Wasser, Wellen: Umweltphysik exemplarisch“. Ich empfehle diesen Beitrag nachdrücklich.

Diesen Abschnitt Physik habe ich recht kurz gehalten. Denn in dem dritten Kapitel, den technischen Grundlagen, werden wesentliche Bereiche der Physik wie Mechanik, Thermodynamik, Strömungsmechanik und Elektrotechnik behandelt. Dort werden zwar die technischen Anwendungen im Vordergrund stehen, aber der Bezug zu den physikalischen Grundlagen wird stets deutlich werden.

## 2.4 Chemie

Neben der Physik ist die Chemie die zweite grundlegende Naturwissenschaft, die für Ingenieure von Bedeutung ist. Wodurch unterscheiden sich die Physik und die Chemie voneinander? Machen wir uns dies am Beispiel des Wassers deutlich.

Wenn Eis zu Wasser schmilzt, und wenn Wasser zu Wasserdampf wird, so bleibt der Stoff dabei erhalten. Hier handelt sich um einen physikalischen Vorgang.

Unterwirft man jedoch das Wasser einer Elektrolyse, so verändert sich hierbei der Stoff. Aus der homogenen Flüssigkeit Wasser entstehen zwei unterschiedliche Gase, nämlich Wasserstoff und Sauerstoff. Dies ist ein chemischer Vorgang. Diese beiden Gase können ihrerseits in der Knallgasreaktion wieder zu Wasser zusammentreten:



Die Physik untersucht die Zustände und die Zustandsänderungen der Stoffe. Die Chemie hingegen befasst sich mit der Charakterisierung, der Zusammensetzung und der Umwandlung von Stoffen. Eine klare Trennungslinie zwischen Physik und Chemie zu ziehen ist mitunter schwierig oder gar sinnlos. Insbesondere in der Kernphysik wird dies besonders deutlich. Einerseits ist die Spaltung des Urans U durch Neutronen n ein physikalischer Vorgang:



Makroskopisch betrachtet wird jedoch das Schwermetall Uran in das Edelgas Xenon Xe und das Leichtmetall Strontium Sr umgewandelt, anscheinend ein Prozess aus der Chemie. Es gibt viele weitere Beispiele, bei denen der Übergang zwischen Physik und Chemie fließend ist.

Die Chemie als die Lehre von den Stoffen und deren Umwandlung können wir allein durch alltagspraktische Überlegungen unterteilen. Die materielle Welt, die wir beobachten, ist offensichtlich aus verschiedenen Stoffen zusammengesetzt. Diese unterscheiden sich durch ihre Eigenschaften wie etwa Dichte, Härte, Struktur der Oberfläche, die elektrische Leitfähigkeit und Löslichkeit. Offenbar können Stoffe einheitlich oder uneinheitlich aufgebaut sein, also unterscheiden wir homogene von heterogenen Systemen.

Auch hier ist keine eindeutige Unterscheidung möglich, wie wir uns am Beispiel der Luft klarmachen wollen. Die Luft besteht im Wesentlichen aus Stickstoff- und Sauerstoff-Molekülen. Beide Komponenten haben ähnliche Moleküleigenschaften wie etwa die Molmassen und sie reagieren nicht miteinander. So erscheint uns die Luft wie ein homogenes Gas. Es gibt aber extreme Situationen, in denen der heterogene Charakter der Luft spürbar wird. Ein Beispiel dafür ist die Entmischung von Stickstoff und Sauerstoff infolge Druckdiffusion durch die enormen Druckgradienten im Bereich eines Verdichtungsstoßes. Ein anderer Fall liegt bei Verbrennungsprozessen vor, denn bei hohen Temperaturen beginnen die Sauerstoff- und bei noch höheren Temperaturen die Stickstoff-Moleküle zu dissoziieren. Die Luft ist dann zu einem heterogenen System aus Molekülen und Atomen geworden.

Hinzu kommt eine weitere Unterscheidung: Man nennt eine Substanz einphasig, wenn sie aus nur einer Phase besteht. Diese kann fest, flüssig oder gasförmig sein. Bei extrem hohen Temperaturen wird Luft, nach dem die Dissoziation

abgeschlossen ist, durch Ionisation elektrisch leitend, wir sprechen dann von einem Plasma. In der Praxis treten häufig Systeme auf, die aus zwei oder drei Phasen bestehen. Beispiele hierfür sind der Transport von Kohleschlamm (fest-flüssig), die Staubabscheidung in einem Zyklon (fest-gasförmig) oder die Förderung von Erdöl. Hier handelt es sich gar um dreiphasiges System, denn neben dem Öl werden gleichzeitig Sand und Gestein sowie Gas (und auch Wasser) gefördert.

Das, was wir heute als moderne Chemie bezeichnen, geht auf das Ende des 18. Jahrhunderts zurück. Die Chemie als Wissenschaft in unserem heutigen Sinne ist somit jünger als die Physik, deren Beginn als Wissenschaft mit Galilei und Newton im 17. Jahrhundert lag.

Chemie als Kunst im Sinne einer Handwerkskunst finden wir bereits im Altertum vor. Die Gewinnung von Metallen wie Kupfer aus Erzen, Töpferei, Brauerei, Backkünste sowie die Herstellung von Farbstoffen und Heilmitteln waren bereits in Mesopotamien und im alten Ägypten bekannt. Bei den genannten Prozessen laufen chemische Reaktionen ab, die jedoch allein auf Grund praktischer Erfahrungen rein empirisch weiterentwickelt wurden. Theoretische Konzepte, warum Metalle schmelzen, wie aus Nahrungsmitteln durch den Prozess der Gärung berauschende Getränke entstehen oder warum gar Heilmittel wirken, dies alles war zu der damaligen Zeit völlig unbekannt.

Erst im antiken Griechenland wurden die Fragen nach dem Warum gestellt. Auf der Suche nach grundlegenden Prinzipien, mit denen sich die Natur verstehen lässt, entwickelten die Griechen zwei tragfähige Theorien, die weit in die folgende Zeit hinein wirkten. Dabei handelt es sich zum einen um die Vorstellung, dass alle irdischen Stoffe aus Elementen aufgebaut sind. Man war damals der Meinung, dass alle Stoffe aus den vier Elementen Erde, Luft, Feuer und Wasser in jeweils unterschiedlichen Mengenverhältnissen aufgebaut seien. Die zweite tragfähige Theorie lag in der Vorstellung, dass alle Stoffe aus kleinsten Teilchen, den unteilbaren Atomen, bestehen würden.

Aus einer Verbindung der alten ägyptischen Handwerkskünste und der griechischen Philosophie erwuchs in Ägypten, insbesondere in Alexandria, die Alchemie. Die Herkunft des Begriffs Chemie wird unterschiedlich beurteilt. Er kann griechischen Ursprungs sein; es wird auch angenommen, dass das arabische Wort chemi für schwarz auch für die aus Ägypten übernommene Wissenschaft galt. In Büchern aus Alexandria, den ältesten Schriften über chemische Themen, finden sich Darstellungen chemischer Apparate und Beschreibungen von Laboroperationen, die wir heute Destillation und Kristallisation nennen.

Von vorherrschendem Interesse war im Mittelalter der Wunsch, unedle Metalle wie Eisen und Blei in das Edelmetall Gold umwandeln zu können. Die Alchemisten jener Zeit glaubten an die Existenz eines wirkungsvollen Agens, mit dessen Hilfe die gewünschten Veränderungen realisiert werden könnten; später Stein der Weisen genannt. Mit der Ausbreitung des Islam ab dem 7. Jahrhundert eroberten die Araber die Zentren der hellenistischen Kultur in Ägypten. So wurden die griechischen Texte über Alchemie ins Arabische übersetzt, aus dem Stein der Weisen wurde El-Iksir, worauf unser Begriff Elixier zurückgeht. Neben dem Wunsch, aus unedlen Metallen Gold herzustellen, wollte man ein Lebenselixier finden, das Menschen unsterblich machen sollte.

Erstmals im 17. Jahrhundert wurden die Theorien der Alchemisten angezweifelt. So hat Robert Boyle 1661 "The Sceptical Chemist" publiziert. Darin kritisierte er die alchemistische Denkweise und betonte, dass chemische Theorien auf experimentellen Beobachtungen aufgebaut werden müssten. Die Umwandlung von Metallen in Gold hielt jedoch auch er für möglich.

Eine bis in das 18. Jahrhundert hinein maßgebliche Theorie war die Vorstellung, in jeder brennbaren Substanz sei Phlogiston, ein "Feuerprinzip", enthalten. Jede Substanz würde bei der Verbrennung ihr Phlogiston verlieren und dann zu einem einfachen Stoff reduziert werden. Nach dieser Vorstellung war Holz aus Asche und Phlogiston aufgebaut. Die Tatsache, dass brennendes Holz sein Phlogiston zwar verliert, die entstehende Asche jedoch weniger wiegt als das ursprüngliche Holz, konnte damit nicht erklärt werden. Dennoch lassen sich Parallelen zu unserer heutigen Anschauung ziehen, wenn man unter Phlogiston das versteht, was wir heute Energie nennen.

Die moderne Chemie begann mit den Arbeiten von A.L. de Lavoisier (1743-94). Er hatte sich das Ziel gesetzt, die Phlogiston-Theorie zu widerlegen. Dabei stützte er sich auf quantitative Experimente, vornehmlich die Waage, um chemische Erscheinungen zu erklären. Von grundlegender Bedeutung ist das von ihm formulierte Gesetz der Erhaltung der Masse: Die Gesamtmasse aller reagierenden Stoffe (der Edukte) ist gleich der Gesamtmasse aller Produkte.

Dieser Satz ging über die alten Vorstellungen weit hinaus. Es erwies sich zunächst experimentell als außerordentlich schwierig, die Massen der beteiligten Gase zu berücksichtigen. Dies wurde erst später möglich, als man Gase zu handhaben, zu messen und zu identifizieren lernte. Die heute gültigen Definitionen für Elemente und Verbindungen gehen auf Lavoisier zurück. In seinem Buch "Traité Élémentaire de Chimie" von 1789 führte er die heute übliche Terminologie ein. Das Jahr der Französischen Revolution markiert somit gleichzeitig den Beginn der modernen Chemie. Lavoisier wurde in den Revolutionswirren als ehemaliger Steuerpächter angeklagt und 1794 hingerichtet. „Die Revolution braucht keine Chemiker“, so hieß es damals. Wie oft hat sich in der Geschichte Ähnliches ereignet.

Der heutige Lehrstoff der Chemie beinhaltet das, was seit Lavoisier in nunmehr gut 200 Jahren an Erkenntnissen zusammengetragen wurde. Wie jede andere wissenschaftliche Disziplin hat sich die Chemie im Laufe ihrer Zeit weiter ausdifferenziert. Im Folgenden sei die heute gängige Aufteilung der Chemie in verschiedene Fachgebiete dargestellt, wobei gleichzeitig auf die jeweiligen Inhalte kurz eingegangen wird.

*Allgemeine und Anorganische Chemie:* Zunächst werden die gemeinsamen Grundlagen behandelt, die in allen Teilgebieten von Bedeutung sind. Der Aufbau der Atome und der Stoffe, das Periodensystem der Elemente, chemische Bindungen und chemische Reaktionen, Zustandsgleichungen für Gase und Lösungen, chemisches Gleichgewicht sowie Oxidation und Reduktion. Es folgt eine Behandlung der Elemente des Periodensystems, unterteilt in die Hauptgruppen. Diese Themen sind Bestandteil einer Einführung in die Chemie für praktisch alle Studiengänge in den Ingenieurwissenschaften, so etwa für den Maschinenbau.

In einer großen und wachsenden Anzahl von Studiengängen spielt die Chemie eine immer wichtigere Rolle, in Verfahrenstechnik, Chemieingenieurwesen, Metallurgie, Werkstofftechnik, Kunststofftechnik und Umweltschutztechnik. Hier nimmt die Chemie einen breiteren Raum ein als im Maschinenbau.

*Organische Chemie:* Damit ist die Chemie der Kohlenstoffverbindungen gemeint, daher mitunter auch Kohlenstoffchemie genannt. Neben Kohlenstoff und insbesondere Wasserstoff können die Moleküle der organischen Verbindungen noch weitere Anteile wie Sauerstoff, Stickstoff, Schwefel und Phosphor enthalten. Die Unterteilung in anorganische und organische Chemie ist historisch zu verstehen. Ursprünglich vermutete man, dass nur Lebewesen die Kohlenstoffverbindungen aufbauen können. Durch die Harnstoffsynthese 1828 durch Wöhler wurde diese Trennungslinie aufgehoben. Obwohl es keine scharfe Abgrenzung zwischen der anorganischen und der organischen Chemie geht, ist diese Unterscheidung nach wie vor von praktischem Nutzen.

Aus der Organischen Chemie haben sich die Biochemie- und die Physiologische Chemie entwickelt. Die Biochemie, teilweise auch molekulare Biologie genannt, befasst sich mit der Chemie, die in lebenden Organismen abläuft. Die Physiologische Chemie hat einen engen Bezug zu Medizin (hier als Fach Physiologie), Pharmazie und Landwirtschaft. Die Biochemie gehört zu den Wissensbereichen der Naturwissenschaften, die sich in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts am schnellsten entwickelt haben.

*Physikalische Chemie:* Sie ist das Grenzgebiet zwischen Chemie und Physik. Sie befasst sich mit den physikalischen Prinzipien, die dem Aufbau und der Umwandlung von Stoffen zu Grunde liegen. Dazu gehören die Thermodynamik, die Reaktionskinetik, Phasen und Phasenänderungen sowie Transportvorgänge wie Diffusion und Wärmeleitung.

Neben der Allgemeinen und Anorganischen Chemie sind auch die Organische und die Physikalische Chemie Bestandteil im Grundstudium der Verfahrenstechnik, des Chemieingenieurwesens, der Metallurgie und Werkstofftechnik, der Kunststofftechnik und der Umweltschutztechnik.

Den meisten Ingenieurstudenten liegt die Physik näher als die Chemie. Jedoch ist alles Chemie, ist man fast geneigt zu sagen. Denn die Produkte der Chemie sind aus unserem täglichen Leben nicht mehr wegzudenken. Daneben ist die Chemie eine faszinierende Disziplin, denn sie lehrt uns, dass eins und eins mehr als zwei sind. Natrium ist ein unedles und schlecht handhabbares sehr reaktionsfreudiges Leichtmetall. Chlor ist unter Normalbedingungen ein Gas von stechendem Geruch und ebenfalls extrem reaktionsfreudig. Eine Verbindung dieser beiden unfreundlichen Elemente ergibt Natriumchlorid, bekannt als das überaus nützliche Kochsalz. Dieses war im Mittelalter ein außerordentlich bedeutsames Handelsprodukt, denn in Ermangelung von Kühlanlagen war die Beigabe von Salz die einzige Möglichkeit, Lebensmittel wie Fleisch oder Fisch über eine längere Zeit genießbar zu halten. Fisch aus Skandinavien gegen Salz aus den Lüneburger Salinen, das war ein typischer Seehandel der mittelalterlichen Hanse. Salzstraßen wurden zu bedeutenden Handelswegen.

Ich empfinde es nach wie vor als ein "Wunder", dass aus nur gut 100 chemischen Elementen unsere Welt und unser Leben aufgebaut ist. Gegenwärtig sind 111 Elemente bekannt, davon 88 natürliche und 23 künstliche. Die Zahl der uns bekannten Verbindungen ist außerordentlich hoch. Man kennt über 12.000 anorganische und mehr als 5 Millionen organische Verbindungen. Bei letzteren kommen pro Jahr etwa 300.000 hinzu, entweder durch Entdeckungen in der Natur oder durch Synthese.

## 2.5 Bemerkungen und Literaturempfehlungen

Die hier behandelten Grundlagenfächer werden bereits in der Schule mehr oder weniger ausführlich behandelt. Leider teilweise eher weniger als mehr, weil ein Ausweichen in bequemere Fächer durch das Kurssystem möglich war und mitunter noch ist. Hier ist nicht die richtige Stelle um darüber zu lamentieren. Aber ein Hinweis auf die „gute alte Zeit“ erscheint mir angebracht.

Natürlich hat jede Generation in dieser und anderer Hinsicht ihre „gute alte Zeit“ gehabt. Ich meine hiermit meine Studienzeit Ende der 50er und Anfang der 60er Jahre. Seinerzeit studierten nur etwa 5% eines Altersjahrgangs. Heute liegt der Anteil mit regionalen Unterschieden bei 30 bis 40%. Hinzu kommt ein zweiter oben angesprochener Aspekt. „Damals“ gab es auf den Gymnasien nur die Wahl zwischen einem sprachlichen und einem naturwissenschaftlichen Zweig. Hinzu kamen ein paar Humanisten, die zahlenmäßig kaum ins Gewicht fielen.

Die Studienanfänger in den Natur- und Ingenieurwissenschaften kamen überwiegend aus einem naturwissenschaftlichen Zweig mit dem Wissen eines nahezu festgefügt Kanons. Die Professoren meiner Studienzeit wussten, mit welchem Vorwissen sie rechnen konnten, in Mathematik, in Physik und in Chemie. Wie sieht dies heute aus? Nach wie vor erleben wir Studienanfänger mit exzellenten Kenntnissen in diesen Fächern. Aber wir erleben in nicht gerade geringer Zahl auch solche, die davon fast unbeleckt zu sein scheinen. Und die sich dennoch entschließen, Ingenieurwissenschaften zu studieren.

Wie glücklich wären wir, die Professoren, wenn unsere Erstsemester Leistungskurse in Mathematik, Physik und in Chemie hätten. Stellen Sie sich diesen Lehrstoff vor, dann haben Sie schon eine Ahnung davon, was Sie in den ersten Semestern erwartet, natürlich noch ein wenig mehr.

Da Sie in jedem Fall eine Vorstellung davon haben, was unter den drei genannten Fächern zu verstehen ist, möchte ich keine Lehrbücher anführen. Ausführliche Angaben finden Sie zunehmend auf den Selbstdarstellungen der Technischen Universitäten im Netz (etwa unter [www.tu-clausthal.de](http://www.tu-clausthal.de)). Dort finden Sie Vorlesungsgliederungen ebenso wie Hinweise auf empfohlene Literatur.

Ich möchte vorwiegend auf Bücher hinweisen, die in diese Gebiete auf andere Weise einführen, entweder allgemeinverständlich, oder spielerisch, oder geschichtlich. Derartige „populär-wissenschaftliche“ Bücher sind nach meiner Erfahrung sehr zu empfehlen, wenn Sie sich in fremde Bereiche einlesen möchten. Glücklicherweise gibt es vermehrt Bücher dieser Art. Es folgt eine subjektive



Auswahl an Büchern, die ich schätze. Dabei nenne ich die Ausgaben, die mir vorliegen, auch wenn diese entweder nicht mehr im Handel (dann aber noch über die Fernleihe) verfügbar sind oder durch neue Auflagen ersetzt wurden. Zur Mathematik:

- Aigner M, Behrends E (Hrsg) (2000) Alles Mathematik – von Pythagoras zum CD-Player. Vieweg, Braunschweig
- Basieux P (1995) Die Welt als Roulette – Denken in Erwartungen. Rowohlt TB, Reinbek
- Basieux P (1999) Abenteuer Mathematik – Brücken zwischen Fiktion und Wirklichkeit. Rowohlt TB, Reinbek
- Bell ET (1967) Die großen Mathematiker. ECON, Düsseldorf
- Beutelspacher A (1996) In Mathe war ich immer schlecht, ... Vieweg, Braunschweig (Der Autor hat 2000 den erstmals verliehenen Communicator Preis der Deutschen Forschungsgemeinschaft erhalten. Seine Ausstellung „Mathematik zum Anfassen“ wurde bisher in über 50 Städten gezeigt, daraus ist das Mathematische Museum in Gießen entstanden. Aus diesem Grund ist ein zweites Buch des Autors genannt.)
- Beutelspacher A (1997) Geheimsprachen. Beck Wissen, München
- Davis PJ, Hersh R (1986) Erfahrung Mathematik. Birkhäuser, Basel
- Devlin K (1992) Sternstunden der modernen Mathematik. dtv Wissenschaft, München
- Gardner M (1977) Mathematischer Karneval. Ullstein, Frankfurt am Main
- Neunzert H, Rosenberger B (1991) Schlüssel zur Mathematik. ECON, Düsseldorf
- Popp W (1981) Wege des exakten Denkens – Vier Jahrtausende Mathematik. Ehrenwirth, München
- Randow G von (1993) Das Ziegenproblem – Denken in Wahrscheinlichkeiten. Rowohlt TB, Reinbek

Die Informatik ist als junge und dynamische Disziplin mit Büchern der genannten Art naturgemäß noch wenig vertreten. Hier nenne ich:

- Desel J (Hrsg) (2001) Das ist Informatik. Springer, Berlin
- Fachlexikon Computer (2003). Brockhaus, Leipzig
- Friedrich J, Herrmann T, Peschek M, Rolf A (Hrsg) (1995) Informatik und Gesellschaft. Spektrum, Heidelberg
- Rechenberg P (2000) Was ist Informatik? Hanser, 3. Auflage, München
- Wilhelm R (1996) Informatik. Beck Wissen, München

Die kurzgefasste Darstellung von Wilhelm und die ausführlichere von Rechenberg führen sehr anschaulich in die Informatik ein. Desel fasst Beiträge einer Vortragsreihe aus dem Jahre 1999 zusammen. Dabei ging es um die Frage, was das Fach Informatik ausmacht bzw. was es ausmachen sollte. Die Antworten darauf gehen stark auseinander und bewegen sich in dem Spannungsfeld zwischen (eher geisteswissenschaftlicher) Grundlagendisziplin und Ingenieurwissenschaft. Die Dynamik des Faches Informatik wird daran sehr schön deutlich gemacht. In dem Band von Friedrich u.a. wird der gesellschaftliche Bezug der Informatik hervorgehoben. Das soeben erschienene Brockhaus-Lexikon ist mehr als ein Lexikon, es ist eine wahre Fundgrube.

Offenkundig bietet sich die Physik in besonderer Weise für populärwissenschaftliche Bücher an:

- Dürr H-P (Hrsg) (1986) Physik und Transzendenz. Scherz, Bern  
 Einstein A, Infeld I (1956) Die Evolution der Physik. Rowohlt TB, Reinbek  
 Epstein LC (1988) Epsteins Physikstunde. Birkhäuser, Basel  
 Feynman RP (1988) „Sie beliebten wohl zu scherzen, Mr. Feynman!“ Piper, München  
 Heisenberg W (1965) Das Naturbild der heutigen Physik. Rowohlt TB, Reinbek  
 Hermann A (1981) Weltreich der Physik. Bechtle, Esslingen  
 Hund F (1978) Geschichte der physikalischen Begriffe, 2 Bände. Bibliographisches Institut, Mannheim  
 Krauss LM (1996) „Nehmen wir an, die Kuh ist eine Kugel.“ DVA, Stuttgart  
 Locqueneux R (1989) Kurze Geschichte der Physik. UTB Vandenhoeck, Göttingen  
 Meÿenn K von (Hrsg) (1997) Die großen Physiker, 2 Bände. Beck, München  
 Segré E (1986) Von den fallenden Körpern zu den elektromagnetischen Wellen. Piper, München  
 Sexl RU (1982) Was die Welt zusammenhält. DVA, Stuttgart  
 Simonyi K (1995) Kulturgeschichte der Physik. Harri Deutsch/ Thun, Frankfurt am Main  
 Teller E (1993) Die dunklen Geheimnisse der Physik. Piper, München  
 Trefil J (1994) Physik in der Berghütte. Rowohlt TB, Reinbek  
 Vogel H (1987) Skriptum Physik – Eine Einführung für Studierende mit Nebenfach Physik. Springer, Berlin  
 Weizsäcker CF von (1988) Aufbau der Physik. dtv, München  
 Weizsäcker CF von, Jülf J (1958) Physik der Gegenwart. Vandenhoeck, Göttingen

Auch zur Chemie gibt es seit einiger Zeit eine Reihe empfehlenswerter einführender, populärwissenschaftlicher oder geschichtlicher Darstellungen:

- Atkin PW (2000) Im Reich der Elemente. Spektrum, Heidelberg  
 Bilow U (1999) Auf der Spur der Elemente. dtv, München  
 Böhme G, Böhme H (1996) Feuer, Wasser, Luft und Erde. Beck, München  
 Brock WH (1997) Viewegs Geschichte der Chemie. Vieweg, Braunschweig  
 Emsley J (1997) Parfum, Portwein, PVC, ... VCH, Weinheim  
 Schwedt G (2001) Experimente mit Supermarktprodukten. Wiley – VCH, Weinheim  
 Schwedt G (2002) Chemische Experimente in Schlössern, Klöstern und Museen. Wiley – VCH, Weinheim

Sehr empfehlenswert ist generell die Reihe der dtv- Atlanten, hier:

- dtv – Atlas zur Mathematik (2 Bände)  
 dtv – Atlas zur Informatik (1 Band)  
 dtv – Atlas zur Physik (2 Bände)  
 dtv – Atlas zur Chemie (2 Bände)

Ferner sei auf den Band Naturwissenschaften dieser Buchreihe verwiesen, insbesondere auf die Beiträge zur Umweltphysik und Umweltchemie:

- Härdtle W (Hrsg) (2002) Naturwissenschaften. Springer, Berlin

Studium der Umweltwissenschaften

Ingenieurwissenschaften

Jischa, M.F. - Haupt-Hrsg.: Brandt, E.

2004, XIX, 300 S. 115 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-540-41951-8