1. Einleitung

1.1 Vorbetrachtungen

Die Wahrscheinlichkeitstheorie ist der Zweig der Mathematik, der sich mit Zufallsexperimenten befasst, mit ihrer Beschreibung und der Aufdeckung von Gesetzmäßigkeiten. Wir versuchen mathematische Modelle zu finden für Experimente, bei denen mehrere verschiedene Verläufe möglich sind und deren Ergebnisse ganz oder teilweise vom Zufall abhängen. Dass dies überhaupt möglich ist, darin liegt das Geheimnis und der Reiz dieses Fachgebietes, das ganz im Spannungsfeld des scheinbaren Gegensatzes steht zwischen der Unvorhersagbarkeit des Ergebnisses bei einem Einzelexperiment und den Gesetzmäßigkeiten bei vielfacher Wiederholung des Experimentes. Werfen wir einen Würfel, so lässt sich nicht mehr sagen, als dass das Ergebnis eine Augenzahl zwischen 1 und 6 sein wird. Wiederholen wir das Würfelexperiment genügend oft, so stellen wir fest, dass der Anteil der Experimente, bei denen $1, 2, \ldots, 6$ gewürfelt wird, einer festen Größe zuzustreben scheint. Oder wir betrachten die Lebenserwartung eines neugeborenen Kindes. Ob es 75, 80 oder 85 Jahre alt werden wird, kann niemand vorhersagen. Eine Lebensversicherung kann uns aber anhand von Sterbetafeln ausrechnen, welcher Anteil von Neugeborenen, z.B. des Jahrgangs 2003, dieses Lebensalter erreichen wird. Der Erfolg von Lebensversicherungen beweist, dass diese Berechnungen brauchbar sind. Oder wir betrachten die Bewegung eines einzelnen Tintenmoleküls im Wasser. Diese Bewegung, wenn wir sie betrachten könnten, ist unvorhersagbar. Lassen wir jedoch einen Tropfen Tinte ins Wasser fallen, dann werden wir stets den gleichen Vorgang erleben, eine radiale Ausbreitung der Tinte mit derselben Geschwindigkeit. Und wir könnten vorhersagen, welcher Prozentsatz Tinte sich zu einem bestimmten Zeitpunkt in einem bestimmten Gebiet befindet. Als letztes Beispiel betrachten wir noch den radioaktiven Zerfall, etwa des Kohlenstoffisotops C^{14}. Von einem einzelnen Atom lässt sich unmöglich der Zerfallszeitpunkt vorhersagen. Von einer makroskopischen Menge C^{14} Atomen hingegen wissen wir sehr genau, welcher Anteil davon nach 1000, 2000 oder 3000 Jahren zerfallen sein wird.

Bereits vor über 300 Jahren war Christiaan Huygens (1629-1695) sich dieses scheinbaren Gegensatzes bewusst. In der Einleitung seines *‚Tractatus de Ratiociniis in Ludo Aleae‘* (1657) schreibt er

Wenn bei den Spielen, welche allein vom Glück entschieden werden, auch der Ausgang ungewiss ist, so lässt sich doch immer genau berechnen, um wieviel wahrscheinlicher ein Mitspieler gewinnt als verliert. Z.B.: Wenn Jemand, um zu gewinnen, mit einem Würfel sechs Augen auf den ersten Wurf werfen muss, so ist es ungewiss, ob er gewinnt. Um wieviel wahrscheinlicher es aber ist, dass er verliert, als dass er gewinnt, ist durch die Spielbedingung selbst bestimmt und lässt sich durch Rechnung genau ermitteln. (Übersetzung von Robert Hausner (1899))

In jedem Fachgebiet gibt es Fragen, die sich so einfach formulieren lassen und deren Beantwortung ausbleibt, auszubleiben scheint. Die allererste und dringlichste Frage in der Wahrscheinlichkeitstheorie ist natürlich

Was ist Wahrscheinlichkeit?

Mit dieser grundlegenden, wesentlichen Frage befinden wir uns an der Grenze unseres Fachgebietes. Wir könnten uns einer Beantwortung entziehen mit dem Hinweis, dass diese Frage unzulässig sei, so wie wir den Physiker nicht fragen, was denn Masse sei, den Geometer nicht fragen, was eine Gerade sei, und den Mediziner nicht fragen, was ein Mensch sei. Andererseits haben wir gewisse Vorstellungen von diesen Begriffen, die als Ausgangspunkt für die Beschäftigung mit den jeweiligen Fachgebieten unerlässlich sind. Wir wollen nun für den Begriff ‚Wahrscheinlichkeit' verschiedene intuitive Vorstellungen betrachten. Wenn wir dabei auch keine völlig befriedigende Antwort auf die Ausgangsfrage finden werden, ist es doch wichtig, sie als offene Frage zu behalten, um uns der Grenzen unseres Fachgebietes bewusst zu bleiben.

Von Wahrscheinlichkeiten sprechen wir hier nur im Zusammenhang mit Zufallsexperimenten, wobei wir es an dieser Stelle für den Begriff ‚Zufall' bei unserer intuitiven Vorstellung belassen. Wir betrachten nun drei konkrete Zufallsexperimente mit der Frage nach den verschiedenen Bedeutungen von Wahrscheinlichkeit.

1. Wir werfen einen unverfälschten Würfel und fragen nach der Wahrscheinlichkeit, dass die Augenzahl gerade ist. Dabei soll unverfälscht heißen, dass der Würfel völlig symmetrisch gebaut ist.
2. Wir wissen, dass die Stadt Bochum 400.000 Einwohner hat und dass davon 100.000 Sänger sind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Bochumer Sänger ist?
3. Wir werfen eine Heftzwecke in die Höhe und fragen nach der Wahrscheinlichkeit, dass die Heftzwecke mit der Spitze nach oben oder seitlich wieder aufkommt.

Bei dem Würfelexperiment wird wohl jeder antworten, dass die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ sei. Es gibt 6 verschiedene Verläufe des Experimentes, und das gesuchte Ereignis ‚die Augenzahl ist gerade' tritt bei 3 Ergebnissen ein. Hier haben wir die Laplace'sche Wahrscheinlichkeitsdefinition angewendet, benannt nach dem französischen Mathematiker Pierre-Simon de Laplace (1749-1827). Dabei wird die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses festgelegt

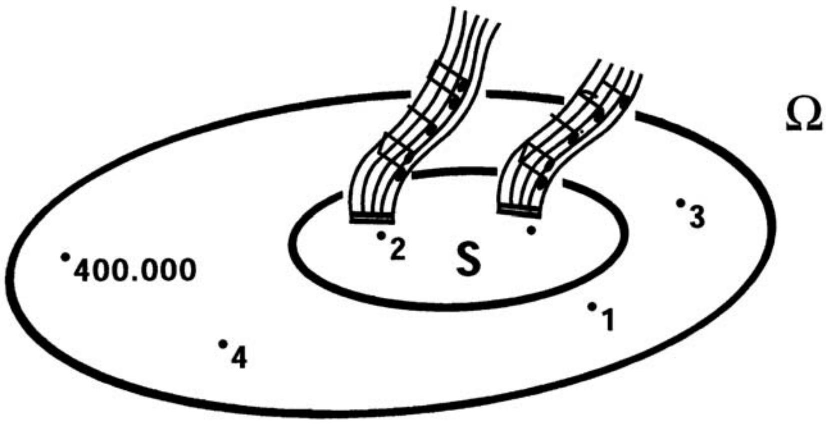


Abb. 1.1. Zufällige Ziehung aus der Gesamtheit aller Einwohner der Stadt Bochum; S stellt die Menge aller Sänger dar.

als Quotient aus der Anzahl der für das Ereignis günstigen Ergebnisse und der Anzahl der möglichen Ergebnisse. Diese Definition bedeutet auch, dass wir alle Ergebnisse eines Experimentes als gleich wahrscheinlich betrachten.

Im zweiten Beispiel passt eine Definition, die die Wahrscheinlichkeit als die relative Häufigkeit eines Merkmals in einer endlichen Grundgesamtheit festlegt. Die Wahrscheinlichkeit ist $\frac{1}{4}$, dass ein zufällig gewählter Bochumer Sänger ist, denn von den 400.000 Bochumer Einwohnern sind 100.000 Sänger. Da ‚zufällig' wählen bedeutet, dass jeder Einwohner dieselbe Wahrscheinlichkeit hat gewählt zu werden, lässt sich diese Definition leicht mit der Laplace'schen Definition in Übereinstimmung bringen.

Bei den ersten beiden Beispielen können wir aufgrund von Symmetrieeigenschaften sagen, dass wir alle einzelnen Ergebnisse des Experimentes als gleich wahrscheinlich ansehen. Diese Voraussetzung ist beim dritten Experiment nicht erfüllt, und so können wir die Laplace'sche Definition nicht anwenden. Hier kann uns die frequentistische Wahrscheinlichkeitsdefinition

$$\perp\ \perp\ \vdash\ \vdash\ \vdash\ \vdash\ \vdash\ \vdash\ \perp\ \perp\ \vdash\ \vdash\ \perp\ \vdash\ \perp\ \vdash\ \vdash\ \vdash\ \vdash\ \vdash\ \vdash\ \perp\ \vdash\ \vdash\ \vdash\ \vdash\ \vdash\ \perp\ \perp\ \vdash$$

Abb. 1.2. Ergebnisse von 30 Würfen mit einer Heftzwecke, A :‚Heftzwecke mit Spitze oben', $n_A = 9$, $\frac{n_A}{n} = 0.3$

helfen. Dabei wird die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A festgelegt als Grenzwert der relativen Häufigkeit ihres Eintretens bei wachsender Anzahl von Wiederholungen des Experimentes. Bei einer gegebenen Anzahl n von Experimenten bezeichnen wir mit n_A die Anzahl der Experimente, bei denen A eintritt, und definieren die Wahrscheinlichkeit von A als $\lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n}$. Da wir nicht wissen können, ob der Grenzwert existiert, ist dies keine mathematisch strenge Definition. Wohl können wir bei solchen Experimenten immer wieder feststellen, dass die relative Häufigkeit des Eintretens eines Ereignisses einer festen Größe zuzustreben scheint, aber auf Grundlage einer endlichen Anzahl von Experimenten können wir nicht mehr aussagen. Diese Beobachtung, die auch empirisches Gesetz der großen Zahlen genannt wird, gab einen wichtigen Anstoß zur Entwicklung einer mathematischen Theorie der Zufallsexperimente.

Wir werden später den mathematischen Satz ‚Gesetz der großen Zahlen' kennenlernen. Dieser Satz sagt, dass innerhalb unserer mathematischen Modelle bei unabhängigen Wiederholungen eines Experimentes die Folge der relativen Häufigkeiten des Eintretens eines Ereignisses konvergiert. Dieses Gesetz der großen Zahlen, zu dessen Voraussetzungen eine idealisierte, mathematische Form von Unabhängigkeit gehört, müssen wir gut unterscheiden von dem empirischen Gesetz der großen Zahlen, das eben ganz dem Experiment entnommen, auf Beobachtung und Erfahrung beruhend, nicht bewiesen werden kann. Dies ist in anderen experimentellen Fächern ebenso. In der klassischen Mechanik leiten die Physiker aus den Newton'schen Gesetzen die Kepler'schen Gesetze her, aber damit beweisen sie nicht die Tatsache, dass die Planetenbahnen Ellipsen sind.

1.2 Terminologie

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung hat wie jedes Fachgebiet ihre eigene Terminologie. Grundbegriffe sind hierbei ‚Ergebnis', ‚Ereignis' und ‚Wahrscheinlichkeit'. Es werden viele Begriffe der Mengenalgebra verwendet, die sehr eigene Entsprechungen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung haben.

Wir können auf verschiedene Weise das Ergebnis ω eines Zufallsexperimentes beschreiben. Die Menge aller möglichen Ergebnisse nennen wir Ergebnisraum, den wir mit Ω bezeichnen. Für das Werfen einer Heftzwecke sind $\Omega_1 = \{\perp, \vdash\}$ oder $\Omega_2 = \{0, 1\}$ mögliche Ergebnisräume und für die zufällige Wahl eines Einwohners der Stadt Bochum $\Omega = \{1, 2, \ldots, 400.000\}$ oder die Liste aller Einwohner. Für ein Würfelexperiment ist $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ein möglicher Ergebnisraum.

Oft sind wir nicht an dem genauen Ergebnis ω des Experimentes interessiert, sondern an einem allgemeineren Ereignis. Formal definieren wir ein Ereignis A als Teilmenge des Ergebnisraumes Ω. Sei $A \subset \Omega$ ein Ereignis und ω das Ergebnis des Experiments, dann heißt $\omega \in A$, dass A eingetreten ist. Im obigen Beispiel des Würfelexperimentes wollten wir nicht wissen, welche Augenzahl gewürfelt wird, sondern ob es eine gerade oder ungerade Augenzahl ist. Wir sprechen dann von dem Ereignis, dass die Augenzahl gerade ist, also $A = \{2, 4, 6\}$. Die Operationen der Mengenalgebra haben ihre je eigenen Entsprechungen für Ereignisse, siehe Abbildung 1.3.

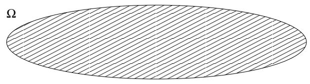
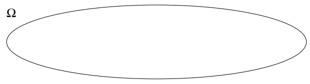
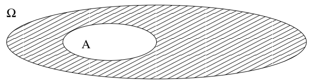
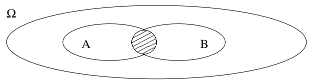
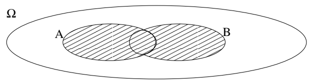
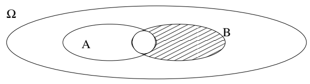
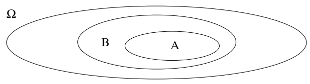
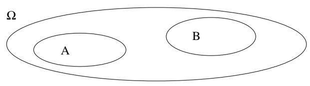
Venn-Diagramm	Symbol	Entsprechung
	Ω	das sichere Ereignis
	$\emptyset$	das unmögliche Ereignis
	A^c	A ist nicht eingetreten
	$A \cap B$	sowohl A als auch B ist eingetreten
	$A \cup B$	A oder B ist eingetreten
	$B \backslash A$	B ist eingetreten, aber A ist nicht eingetreten
	$A \subset B$	wenn A eintritt, dann tritt auch B ein
	$A \cap B = \emptyset$	A und B schließen einander aus, d.h. A und B sind disjunkt

Abb. 1.3. Entsprechungen der Mengenoperationen

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung haben wir oft mit Vereinigungen und Durchschnitten einer Anzahl von Ereignissen $A_1, \ldots, A_n$ oder sogar einer unendlichen Folge $A_1, A_2, \ldots$ zu tun. Hierfür führen wir die Schreibweisen

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i := A_1 \cup \ldots \cup A_n \text{ und } \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i := A_1 \cup A_2 \cup \ldots$$

ein, sowie Entsprechendes für Durchschnitte. Diese Schreibweisen sind in Anlehnung an die Summen- und Reihennotation $\sum_{i=1}^{n}$ und $\sum_{i=1}^{\infty}$ gewählt. Man bemerke, dass, anders als bei Reihen, die unendliche Vereinigung und der unendliche Durchschnitt ohne Grenzübergang definiert werden können. So ist $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ die Menge aller Elemente, die in wenigstens einer der Mengen A_i liegen.

Jedes Ereignis ist Teilmenge von Ω, aber nicht jede Teilmenge von Ω ist ein Ereignis. Die Menge der Ereignisse nennen wir Ereignisraum, den wir mit $\mathcal{F}$ bezeichnen. Am Anfang wird dies meist die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$, d.h. die Menge aller Teilmengen von Ω sein. Später werden wir Beispiele kennenlernen, in denen es sinnvoll oder sogar notwendig ist, sich auf eine Teilmenge von $\mathcal{P}(\Omega)$ zu beschränken.

Ereignissen ordnen wir eine Wahrscheinlichkeit zu, und wir bezeichnen die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A mit $P(A)$. Mathematisch betrachtet ist diese Zuordnung eine Abbildung von der Menge aller Ereignisse in die Menge der reellen Zahlen. Aufgrund des intuitiven Wahrscheinlichkeitsbegriffes ist es sinnvoll zu fordern, dass $0 \leq P(A) \leq 1$, d.h.

$$P : \mathcal{F} \to [0, 1].$$

Im übernächsten Abschnitt werden wir die Axiome formulieren, denen eine solche Funktion P, die wir Wahrscheinlichkeitsmaß oder Wahrscheinlichkeitsverteilung nennen, genügen muss. Im nächsten Abschnitt wollen wir zunächst die hier eingeführten Grundbegriffe auf eine spezielle Klasse von Zufallsexperimenten anwenden.

Übungen

Übung 1.1 Für ein Würfelexperiment, bei dem ein Würfel 2-mal geworfen wird, betrachten wir die Ereignisse

$$\begin{aligned} A &: \text{‚beim 1. Wurf wird eine 6 geworfen'} \\ B &: \text{‚beim 2. Wurf wird eine 6 geworfen'}. \end{aligned}$$

Beschreibe die Ereignisse $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ und $B \setminus A$. Welche Mengen entsprechen den Ereignissen

$$\begin{aligned} C &: \text{‚es wird genau eine 6 geworfen'} \\ D &: \text{‚es wird keine 6 geworfen'?} \end{aligned}$$

Übung 1.2 Beweise und verdeutliche in einem Venn-Diagramm die Regeln von de Morgan

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad \text{und} \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

Übung 1.3 Zeige, dass $A \cup B = (B \setminus A) \cup (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ und dass die Mengen $B \setminus A$, $A \setminus B$ und $A \cap B$ disjunkt sind. Verdeutliche dies in einem Venn-Diagramm.

Übung 1.4 Beweise $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.

Übung 1.5 Für den 3-maligen Wurf einer Münze definieren wir die Ereignisse

A : ‚der 1. Wurf ist Kopf'
B : ‚der 2. Wurf ist Kopf'
C : ‚der 3. Wurf ist Kopf'.

Beschreibe die Ereignisse $A \cap B$, $A \cap B^c \cap C$ und $A \cup B \cup C$. Welche Menge entspricht dem Ereignis

D : ‚beim 3. Wurf wird zum ersten Mal Kopf geworfen'?

Übung 1.6 Bestimme einen geeigneten Ergebnisraum Ω für ein Würfelexperiment, bei dem ein Würfel 2-mal geworfen wird. Welche Mengen entsprechen den Ereignissen

A : ‚die Augensumme ist 10'
B : ‚die höchste Augenzahl ist 5'?

Welchem Ereignis entspricht die Menge $A \setminus B$?

1.3 Modellierung von Laplace-Experimenten

Laplace-Experimente sind Zufallsexperimente mit endlich vielen, gleich wahrscheinlichen Ergebnissen. Wir modellieren solche Experimente mit Laplace-Räumen.

Definition 1.1 *Sei Ω ein endlicher Ergebnisraum. Wir definieren die Laplace-Wahrscheinlichkeitsverteilung, kurz Laplace-Verteilung, auf Ω, indem wir für ein Ereignis $A \subset \Omega$*

$$P(A) := \frac{|A|}{|\Omega|} \tag{1.1}$$

festlegen, wobei $|A|$ die Mächtigkeit der Menge A ist. Das Paar (Ω, P) heißt Laplace-Raum.

Also ist im Laplace-Raum die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A gleich dem Quotienten aus der Anzahl der für A günstigen Ergebnisse und der Anzahl der möglichen Ergebnisse. Das folgende Lemma ist eine direkte Folgerung aus der Definition.

Lemma 1.2 *Die Laplace-Verteilung hat die Eigenschaften*

(La1) $P(\Omega) = 1$
(La2) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ *für disjunkte Ereignisse A und B.*

Beim axiomatischen Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung in Abschnitt 1.4 werden wir diese grundlegenden Eigenschaften in den Axiomen wiederfinden, denen jede Wahrscheinlichkeitsverteilung genügen muss.

Die Laplace-Verteilung hat die besondere Eigenschaft, dass für elementare Ereignisse, dies sind Ereignisse, die aus einem Ergebnis bestehen, gilt

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|}, \tag{1.2}$$

d. h. alle elementaren Ereignisse sind gleich wahrscheinlich. Wenn wir die Eigenschaften (La1) und (La2) aus Lemma 1.2 voraussetzen, folgt aus (1.2) für jedes $A \subset \Omega$

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Also sind dann (1.1) und (1.2) gleichwertige Definitionen der Laplace-Verteilung.

Beispiel 1.3 Wir werfen zwei unverfälschte Münzen und fragen nach der Wahrscheinlichkeit, genau einmal Zahl zu werfen. Als Ergebnisraum wählen wir zunächst

$$\Omega = \{KK, KZ, ZK, ZZ\}$$

und als Wahrscheinlichkeitsverteilung die Laplace-Verteilung. Das Ereignis, das uns interessiert, wird durch die Teilmenge $A = \{KZ, ZK\}$ beschrieben, sodass $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{2}$ ist. Es besteht das praktische Problem, dass wir bei gleichzeitigem Werfen zweier nicht unterscheidbarer Münzen nicht entscheiden können, ob das Ergebnis ZK oder KZ ist. Auch interessiert uns dies ja eigentlich nicht, sondern nur, wie oft Zahl geworfen wird. Erscheint es daher nicht sinnvoll, als Ergebnisraum $\Omega = \{0, 1, 2\}$ zu wählen, wobei ω angibt, wie oft Zahl oben lag? Wenden wir nun die Laplace-Verteilung an, so ist die Wahrscheinlichkeit, genau einmal Zahl zu werfen, gleich $\frac{1}{3}$. Dieses Resultat kann intuitiv nicht stimmen, aber das lässt sich nicht mathematisch streng beweisen. Durch viele Wiederholungen des Experimentes können wir uns davon überzeugen, dass das erste Modell angebracht ist.

In der Geschichte der Wahrscheinlichkeitstheorie hat es einige Diskussionen über dieses Problem gegeben. Im Jahre 1754 schrieb Jean d'Alembert (1717-1783) in einem Artikel mit dem Titel *‚Croix ou Pile'* (Kopf oder Zahl) für die Encyclopédie, dass die Wahrscheinlichkeit, mindestens einmal Kopf zu werfen bei zwei Würfen mit einer unverfälschten Münze gleich $\frac{2}{3}$ sei. Dem lag allerdings wohl weniger ein Gedankenfehler zugrunde als vielmehr die Absicht, die damals herrschenden Auffassungen über die Wahrscheinlichkeitstheorie zur Diskussion zu stellen. In seinem Buch *‚Essai philosophique sur les* *probabilités*‘ (1814) kritisiert Laplace deutlich den d'Alembert'schen Standpunkt.

Wir können durch dieses Beispiel aufmerksam darauf werden, dass es bei der Verwendung der Laplace-Verteilung außerordentlich wichtig ist zu bedenken, ob die Ergebnisse $\omega \in \Omega$ wirklich als gleich wahrscheinlich angesehen werden können. Bei dieser Entscheidung spielen oft Symmetrieeigenschaften eine wichtige Rolle. In letzter Instanz ist das Experiment mit seinen vielfachen Wiederholungen maßgebend.

Beispiel 1.4 Zwei Spieler, A und B, spielen ein Glücksspiel, das aus mehreren Runden besteht. In jeder Runde kann jeder Spieler mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ einen Punkt bekommen. Gewonnen hat der Spieler, der zuerst 5 Punkte erreicht. Leider müssen die Spieler nach 6 Runden das Spiel beim Stand

$$AABABA$$

abbrechen. Welche Aufteilung des Einsatzes ist jetzt fair? Um eine Antwort auf diese Frage zu finden, können wir für jeden Spieler die Gewinnchancen bei diesem Spielstand berechnen. Hätten sie das Spiel fortgesetzt, so wären folgende Ergebnisse bis zur endgültigen Entscheidung möglich gewesen

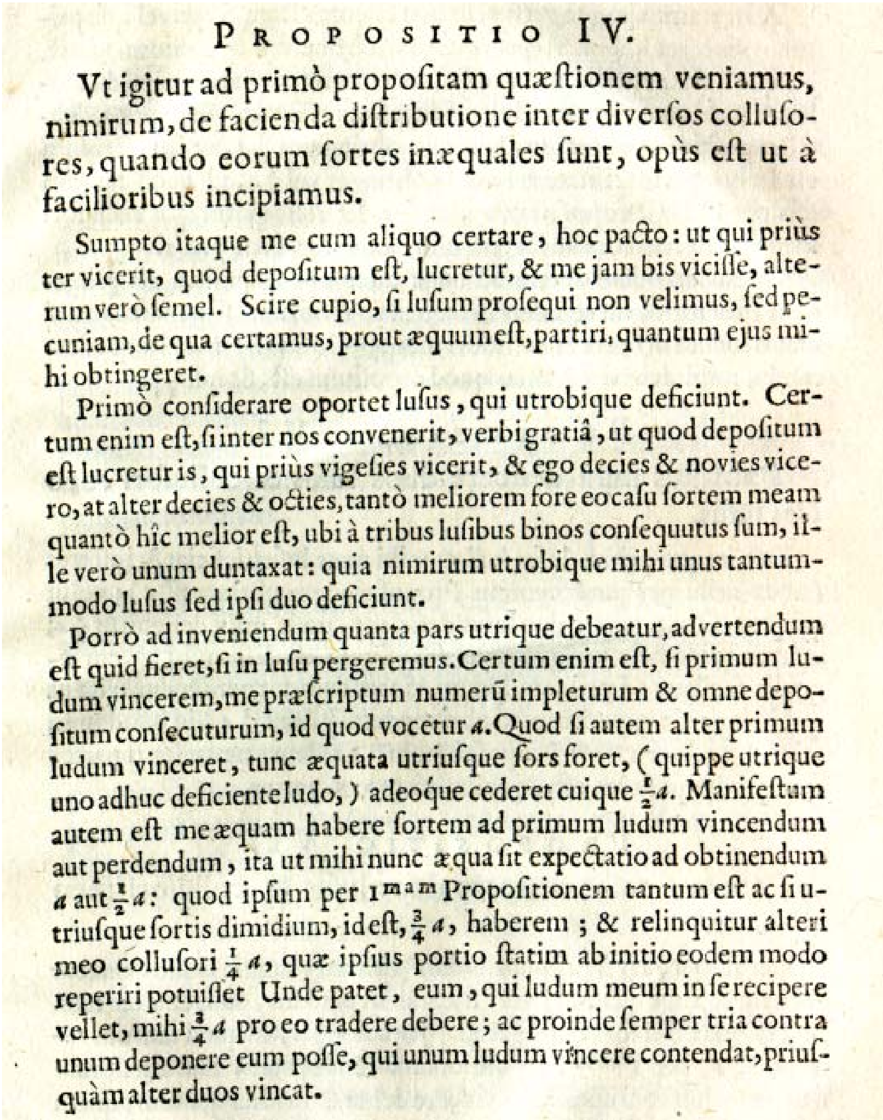
$$\Omega = \{A, BA, BBA, BBB\}.$$

In den ersten 3 Fällen hätte A das Spiel gewonnen, nur im letzten Fall B. Unter der Voraussetzung, dass alle 4 Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind, hätte A mit Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$ und B mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ gewonnen. Erste Zweifel an der Gleichwahrscheinlichkeit lässt schon das erste Ergebnis aufkommen. Dies tritt genau dann ein, wenn A das erste Spiel nach dem Abbruch gewinnt, und die Wahrscheinlichkeit dieses Ergebnisses ist $\frac{1}{2}$. Da die Zahl der noch zu spielenden Runden bei jedem Ergebnis anders ist, können wir keine Symmetrieeigenschaften ausnutzen. Und so machen wir ein Gedankenexperiment: Wir spielen in jedem Fall noch 3 weitere Runden, auch wenn der Ausgang des Spieles schon früher feststeht. Nach diesen zusätzlichen 3 Runden hat auf jeden Fall einer der Spieler 5 Punkte. Die möglichen Ergebnisse sind

$$\Omega = \{AAA, AAB, ABA, ABB, BAA, BAB, BBA, BBB\}.$$

Wenn wir nun die Laplace-Verteilung anwenden, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass A gewinnt $\frac{7}{8}$ und die Gewinnchance von B ist $\frac{1}{8}$. So könnte der Einsatz im Verhältnis 7 : 1 aufgeteilt werden.

So einfach das obige Problem dem heutigen Leser auch vorkommen mag, so hat es doch im 17. Jahrhundert einige bedeutende Gelehrte beschäftigt. Ursprünglich legte der bekannte Glücksspieler Antoine Gombauld, Chevalier



PROPOSITIO IV.

Vt igitur ad primò propoſitam quæſtionem veniamus, nimirum, de facienda diſtributione inter diverſos colluſores, quando eorum ſortes inæquales ſunt, opùs eſt ut à facilioribus incipiamus.

Sumpto itaque me cum aliquo certare, hoc pacto: ut qui priùs ter vicerit, quod depoſitum eſt, lucretur, & me jam bis viciſſe, alterum verò ſemel. Scire cupio, ſi luſum proſequi non velimus, ſed pecuniam, de qua certamus, prout æquum eſt, partiri, quantum ejus mihi obtingeret.

Primò conſiderare oportet luſus, qui utrobique deficiunt. Certum enim eſt, ſi inter nos convenerit, verbi gratiâ, ut quod depoſitum eſt lucretur is, qui priùs vigeſies vicerit, & ego decies & novies vicero, at alter decies & octies, tantò meliorem fore eo caſu ſortem meam quantò hîc melior eſt, ubi à tribus luſibus binos conſequutus ſum, ille verò unum duntaxat: quia nimirum utrobique mihi unus tantummodo luſus ſed ipſi duo deficiunt.

Porrò ad inveniendum quanta pars utrique debeatur, advertendum eſt quid fieret, ſi in luſu pergeremus. Certum enim eſt, ſi primum ludum vincerem, me præſcriptum numerũ impleturum & omne depoſitum conſecuturum, id quod vocetur a. Quod ſi autem alter primum ludum vinceret, tunc æquata utriuſque ſors foret, (quippe utrique uno adhuc deficiente ludo,) adeoque cederet cuique $\frac{1}{2}a$. Manifeſtum autem eſt me æquam habere ſortem ad primum ludum vincendum aut perdendum, ita ut mihi nunc æqua ſit expectatio ad obtinendum a aut $\frac{1}{2}a$: quod ipſum per 1^{mam} Propoſitionem tantum eſt ac ſi utriuſque ſortis dimidium, id eſt, $\frac{3}{4}a$, haberem; & relinquitur alteri meo colluſori $\frac{1}{4}a$, quæ ipſius portio ſtatim ab initio eodem modo reperiri potuiſſet Unde patet, eum, qui ludum meum in ſe recipere vellet, mihi $\frac{3}{4}a$ pro eo tradere debere; ac proinde ſemper tria contra unum deponere eum poſſe, qui unum ludum vincere contendat, priuſquàm alter duos vincat.

Abb. 1.4. Huygens' Lösung des Problems der fairen Aufteilung, aus *'Tractatus de Ratiociniis in Ludo Aleae'* (1657), Übersetzung am Ende des Kapitels

de Méré (1610-1685), diese Frage Blaise Pascal (1623-1662) vor, der wiederum mit Pierre de Fermat (1601-1665) darüber korrespondierte. In dem bereits oben erwähnten Büchlein *'Van Rekeningh in Spelen van Geluck'* hat Christiaan Huygens sich mit diesem Problem befasst. In seiner Lösung führt Huygens einen neuen, originellen Ansatz aus, wobei er zunächst die Möglichkeiten nach einer fiktiven weiteren Runde des Spiels betrachtet und so eine Rekursionsformel findet, siehe Abb. 1.4 und Aufgabe 3.1.

Übungen

Übung 1.7 Sei P eine Laplace-Verteilung. Zeige, dass dann für zwei Ereignisse A und B gilt $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Übung 1.8 Beschreibe den Ergebnisraum für das Laplace-Experiment, dass ein unverfälschter Würfel 2-mal geworfen wird. Berechne die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine 6 zu würfeln.

Übung 1.9 Bei einem fairen Glücksspiel, bei dem zwei Spieler A und B in jeder Runde mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ einen Punkt bekommen, wird vorzeitig abgebrochen. Spieler A benötigt noch 2 Punkte zum Gewinn, Spieler B noch 3 Punkte. Berechne die Gewinnchance für A und die Wahrscheinlichkeit, dass das Spiel nach genau $2, 3, 4$ oder 5 weiteren Runden entschieden ist.

Übung 1.10 Wie werfen drei unverfälschte Münzen. Berechne für dieses Laplace-Experiment die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse A_k : ‚es erscheint k-mal Kopf' für $k = 0, 1, 2, 3$.

1.4 Die Axiome der Wahrscheinlichkeitstheorie

Den meisten Lesern wird ein Axiomensystem aus der Geometrie, der Zahlentheorie oder der Analysis bekannt sein. Bei der Aufstellung eines Axiomensystems erheben wir eine Reihe von einfachen Sätzen, die auf Grund der Erfahrung ohne Beweis anerkannt werden können, zu den Grundgesetzen des Fachgebietes. Alle weiteren Aussagen leiten wir dann durch logisches Schließen aus diesen Grundgesetzen, den Axiomen, ab. Das heute von den meisten Wahrscheinlichkeitstheoretikern verwendete Axiomensystem wurde von Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987) entwickelt und 1933 in seinem Buch *‚Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung'* veröffentlicht.

Wir betrachten zunächst die relative Häufigkeit des Eintretens von Ereignissen bei einer Folge von Wiederholungen desselben Experimentes. Sei n die Gesamtzahl der Wiederholungen und n_A die Anzahl der Experimente, bei denen das Ereignis A eintritt, so gilt $n_\Omega = n$ und $\frac{n_\Omega}{n} = 1$. Für zwei disjunkte Ereignisse A und B gilt $n_{A \cup B} = n_A + n_B$ und somit $\frac{n_{A\cup B}}{n} = \frac{n_A}{n} + \frac{n_B}{n}$. Wenn wir uns jetzt auf das bereits oben erwähnte empirische Gesetz der großen Zahlen berufen, so können wir mit der frequentistischen Wahrscheinlichkeitsdefinition $P(A) := \lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n}$ die ersten zwei Axiome des Axiomensystems von Kolmogorov einsehen.

Definition 1.5 (Kolmogorov'sches Axiomensystem)
Ein Wahrscheinlichkeitsraum ist ein Tripel $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, wobei Ω eine nichtleere Menge ist, $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra von Teilmengen von Ω, d.h. $\mathcal{F}$ ist nicht leer, aus $B \in \mathcal{F}$ folgt $B^c \in \mathcal{F}$ und aus $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ folgt $\bigcup_{i=1}^\infty A_i \in \mathcal{F}$, und $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften

(Ax1) $P(\Omega) = 1$
(Ax2) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ *für disjunkte Ereignisse* A *und* B
(Ax3) $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ *für eine Folge paarweise disjunkter Ereignisse* $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

Die Funktion $P : \mathcal{F} \to [0,1]$ *heißt Wahrscheinlichkeitsmaß, Wahrscheinlichkeitsverteilung oder auch kurz Wahrscheinlichkeit.*

Wir bemerken an dieser Stelle, dass das Wort ‚Wahrscheinlichkeit' sowohl für die Funktion P als auch für den Wert $P(A)$ verwendet wird und dass nur aus dem Zusammenhang deutlich wird, was gemeint ist.

Mit dieser Definition beginnt die Wahrscheinlichkeitstheorie als mathematische Disziplin. Wir können nun Zufallsexperimente beschreiben, modellieren mit Wahrscheinlichkeitsräumen. Von den obigen Axiomen ist streng genommen $(Ax2)$ überflüssig, da es sich aus $(Ax3)$ ableiten lässt. Andererseits lässt sich aus $(Ax2)$ mit vollständiger Induktion herleiten, dass für endlich viele, paarweise disjunkte Mengen $A_1, \ldots, A_n$ gilt $P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + \ldots + P(A_n)$. Ist der Ergebnisraum endlich, so ist $\mathcal{F}$ endlich und $(Ax3)$ folgt aus $(Ax2)$. Laplace-Räume genügen also dem Kolmogorov'schen Axiomensystem. $(Ax3)$ dehnt die Aussage von $(Ax2)$ auf abzählbar unendliche Vereinigungen aus. Die Bedeutung von $(Ax3)$ werden wir erst später einsehen können. In diesem Abschnitt gewinnen wir damit die Aussagen über die Stetigkeit von Wahrscheinlichkeitsverteilungen.

In dem folgenden Satz haben wir einige einfache Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsmaßen zusammengestellt. In der Praxis ist es oft so, dass wir die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses nicht direkt ausrechnen können. Dann versuchen wir, das Ereignis als Vereinigung, Durchschnitt, Differenz oder Komplement von Ereignissen, deren Wahrscheinlichkeiten wir einfacher berechnen können, zu beschreiben und wenden Satz 1.6 an.

Satz 1.6 *(i)* $P(A^c) = 1 - P(A)$
(ii) Aus $A \subset B$ *folgt* $P(B \backslash A) = P(B) - P(A)$.
(iii) Aus $A \subset B$ *folgt* $P(A) \leq P(B)$.
(iv) $P(B \backslash A) = P(B) - P(A \cap B)$
(v) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
(vi) $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$
(vii) $P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

Beweis. (Übung 1.12)

Beispiel 1.7 Wir werfen n-mal mit einem unverfälschten Würfel und fragen nach der Wahrscheinlichkeit, wenigstens eine 6 zu würfeln. Wir wählen als Ergebnisraum $\Omega = \{(\omega_1, \ldots, \omega_n) : \omega_i \in \{1, \ldots, 6\}\}$ und als Wahrscheinlichkeitsmaß die Laplace-Verteilung. Das Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit wir suchen, ist $A = \{(\omega_1, \ldots, \omega_n) : \text{ mindestens ein } \omega_i = 6\}$. Es ist einfacher, die Wahrscheinlichkeit von A^c zu berechnen, denn es gilt $A^c = \{(\omega_1, \ldots, \omega_n) : \omega_i \in \{1, \ldots, 5\}\}$. Aus $|A^c| = 5^n$ und $|\Omega| = 6^n$ folgt $P(A^c) = (\frac{5}{6})^n$ und mit Satz 1.6(i) weiter $P(A) = 1 - (\frac{5}{6})^n$.

Wenn wir die Wahrscheinlichkeit einer Vereinigung nicht notwendig disjunkter Mengen berechnen könnten, so hätten wir noch eine zweite Lösungsmöglichkeit für dieses Beispiel. Wir betrachten zunächst drei Mengen A_1, A_2, A_3. Um die Wahrscheinlichkeit der Vereinigung zu berechnen, dürfen

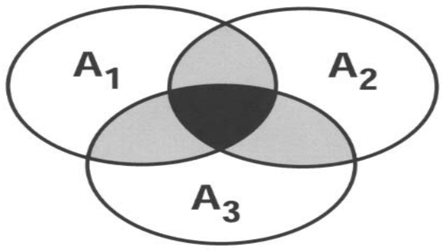


Abb. 1.5. $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup (A_3 \setminus A_1) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3)$

wir keinen Durchschnitt doppelt zählen und den Gesamtdurchschnitt auch nicht vergessen. So gilt also

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1 \setminus A_2) + P(A_2 \setminus A_3) + P(A_3 \setminus A_1) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

und, wenn wir nun Satz 1.6 anwenden, erhalten wir

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = {} & P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \\ & -P(A_1 \cap A_2) - P(A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_3) \\ & +P(A_1 \cap A_2 \cap A_3). \end{aligned}$$

Der folgende Satz ist eine Erweiterung dieser Berechnungsformel für endlich viele Mengen.

Satz 1.8 (Inklusions-/Exklusionsformel) *Für Ereignisse* $A_1, \ldots, A_n$ *gilt*

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}). \tag{1.3}$$

Beweis. Wir führen den Beweis mit vollständiger Induktion nach n. Der Induktionsanfang, $n = 2$, ist genau Satz 1.6(v). Wir nehmen an, dass die Formel für alle Vereinigungen von n Mengen gilt. Dann folgt mit Satz 1.6(v)

$$\begin{aligned} & P(A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup A_{n+1}) \\ & \quad = P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) + P(A_{n+1}) - P((A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cap A_{n+1}) \qquad (1.4) \\ & \quad = P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) + P(A_{n+1}) - P((A_1 \cap A_{n+1}) \cup \ldots \cup (A_n \cap A_{n+1})). \end{aligned}$$

Wir wenden nun die Inklusions-/Exklusionsformel auf $P(A_1 \cup \ldots \cup A_n)$ an und erhalten

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}). \end{aligned}$$

Anwendung der Inklusions-/Exklusionsformel auf $P((A_1 \cap A_{n+1}) \cup \ldots \cup (A_n \cap A_{n+1}))$ ergibt

$$\begin{aligned} &P((A_1 \cap A_{n+1}) \cup \ldots \cup (A_n \cap A_{n+1})) \\ &\quad = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_j \le n} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_j} \cap A_{n+1}) \\ &\quad = \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j-1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_j \le n} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_j} \cap A_{n+1}) \\ &\qquad + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \ldots \cap A_n \cap A_{n+1}) \\ &\quad = \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_{k-1} \le n} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_{k-1}} \cap A_{n+1}) \\ &\qquad + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \ldots \cap A_n \cap A_{n+1}). \end{aligned}$$

Wir setzen jetzt in (1.4) ein und fassen zusammen

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup \ldots \cup A_{n+1}) &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + P(A_{n+1}) \\ &\quad + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} \left(\sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_{k-1} \le n} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_{k-1}} \cap A_{n+1}) \right) \\ &\quad + (-1)^{n} P(A_1 \cap \ldots \cap A_n \cap A_{n+1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n+1} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}). \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir benutzt, dass die Indexmenge $\{(i_1, \ldots, i_k) : 1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n+1\}$ in zwei disjunkte Teile zerlegt werden kann, je nachdem ob $i_k = n+1$ oder $i_k \le n$. Damit ist die Inklusions-/Exklusionsformel für eine Vereinigung von $(n+1)$ Mengen gezeigt. $\square$

Beispiel 1.9 (Fortsetzung von Beispiel 1.7) Mit der Inklusions-/Exklusionsformel haben wir nun eine zweite Lösungsmöglichkeit. Wir betrachten die Ereignisse A_i, dass beim i-ten Wurf eine 6 gewürfelt wird,

$$A_i = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) : \omega_i = 6\}.$$

Dann ist A die Vereinigung der Ereignisse $A_1, \dots, A_n$. Da diese nicht notwendig disjunkt sind, wenden wir die Inklusions-/Exklusionsformel an. Für jedes i gilt $P(A_i) = \frac{|A_i|}{|\Omega|} = \frac{6^{n-1}}{6^n} = \frac{1}{6}$.
Für $1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$ bedeutet das Ereignis $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}$, dass von n Würfen k-mal 6 gewürfelt wird, und zwar bei den Würfen $i_1, \dots, i_k$, und die anderen $(n-k)$ Würfe eine beliebige Augenzahl haben. Also gilt $P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \frac{6^{n-k}}{6^n} = \frac{1}{6^k}$, und es folgt

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1 \cup \dots \cup A_n) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{6^k}. \end{aligned}$$

Für die letzte Identität haben wir eine Formel verwendet, die in diesem Buch erst im nächsten Kapitel eingeführt wird. In Lemma 2.7 werden wir zeigen, dass es genau $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten gibt, Indizes $i_1, \dots, i_k$ mit $1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$ zu finden.
Zum Schluss wollen wir das Resultat beider Lösungsmöglichkeiten vergleichen. Mit Hilfe der Binomialformel von Newton, siehe Beispiel 2.10, können wir umformen

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{6^k} = 1 - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{-1}{6}\right)^k = 1 - \left(1 - \frac{1}{6}\right)^n,$$

und wir sehen, dass beide Resultate übereinstimmen.

Wie wir bei der Einführung der Kolmogorov'schen Axiome bereits erwähnt haben, sind Wahrscheinlichkeitsverteilungen in einem gewissen Sinne stetig,

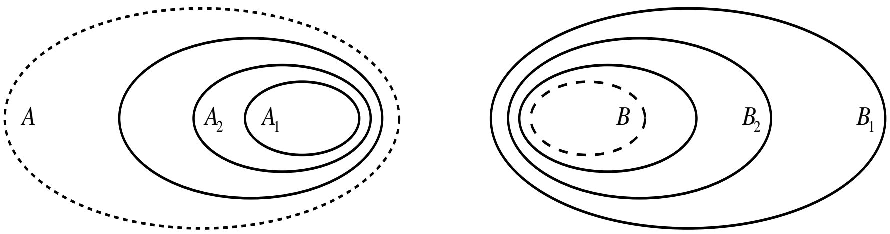


Abb. 1.6. $A_n \nearrow A$ bzw. $B_n \searrow B$

d.h. $\lim P(A_n) = P(A)$, falls die Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in geeigneter Weise gegen A konvergiert, siehe Abb. 1.6. Diese Aussage wird im folgenden Satz präzisiert.

Satz 1.10 (Stetigkeit von Wahrscheinlichkeitsverteilungen)
(i) Sei $(A_n)_{n\geq 1}$ eine aufsteigende Folge von Ereignissen, d.h. $A_1 \subset A_2 \subset \dots$, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right).$$

(ii) Sei $(B_n)_{n\geq 1}$ eine absteigende Folge von Ereignissen, d.h. $B_1 \supset B_2 \supset \dots$, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} P(B_n) = P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right).$$

Beweis. (i) Wir definieren $D_1 := A_1$ und $D_k := A_k \setminus A_{k-1}$ für $k \geq 2$. Dann sind die Mengen $D_1, D_2, \dots$ disjunkt, und es gilt $\bigcup_{k=1}^{n} D_k = \bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_n$ sowie $\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Mit $(Ax2)$ und $(Ax3)$ folgt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} P(A_n) &= \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k=1}^{n} D_k\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P(D_k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P(D_k) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right).\end{aligned}$$

In analoger Weise können wir (ii) beweisen. □

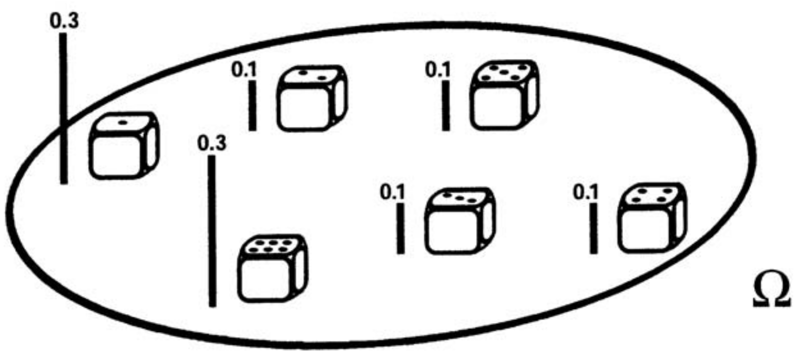


Abb. 1.7. Wahrscheinlichkeitsfunktion eines gefälschten Würfels

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir eine wichtige Klasse von Wahrscheinlichkeitsräumen betrachten, bei denen eine anschauliche Darstellung der Wahrscheinlichkeitsverteilung möglich ist, siehe Abb. 1.7.

Definition 1.11 *Ein Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *heißt diskret, wenn es eine endliche oder abzählbar unendliche Teilmenge* $D \subset \Omega$ *gibt, für die gilt* $P(D) = 1$. *Die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung heißt dann auch diskret, und die durch*

$$p(\omega) := P(\{\omega\})$$

definierte Funktion heißt Wahrscheinlichkeitsfunktion.

Lemma 1.12 *(i) Für diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen gilt*

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega),$$

d.h. P ist durch die Wahrscheinlichkeitsfunktion vollständig festgelegt.
(ii) Eine Wahrscheinlichkeitsfunktion $p : \Omega \to \mathbb{R}$ *hat folgende Eigenschaften*

(W1) $p(\omega) = 0$ *bis auf abzählbar viele* $\omega \in \Omega$
(W2) $p(\omega) \geq 0$ *für alle* $\omega \in \Omega$
(W3) $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$.

Umgekehrt definiert jede Funktion, die diesen drei Bedingungen genügt, eine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung auf Ω.

Beweis. (i) Für jedes Ereignis $A \subset \Omega$ gilt

$$P(A) = P(A \cap D) + P(A \cap D^c) = P(A \cap D),$$

da aus Satz 1.6 folgt $P(A \cap D^c) \leq P(D^c) = 1 - P(D) = 0$. Das Ereignis $A \cap D$ ist eine abzählbare Menge und somit die abzählbare Vereinigung ihrer Elemente. Für alle $\omega \in D^c$ gilt $P(\{\omega\}) = 0$, und wir erhalten mit $(Ax3)$

$$P(A) = P(A \cap D) = \sum_{\omega \in A \cap D} P(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}).$$

(ii) folgt direkt aus den Kolmogorov'schen Axiomen. □

Laplace-Räume sind diskrete Wahrscheinlichkeitsräume mit der konstanten Wahrscheinlichkeitsfunktion $p(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$, $\omega \in \Omega$. Das Werfen eines gefälschten Würfels ist ein einfaches Beispiel eines diskreten Experiments, das sich nicht durch einen Laplace-Raum modellieren lässt.

Übungen

Übung 1.11 Sei $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ eine σ-Algebra. Zeige, dass $\emptyset$ und Ω zu $\mathcal{F}$ gehören.

Übung 1.12 Beweise den Satz 1.6.

Übung 1.13 In den Aufzug des dreistöckigen Gebäudes des Mathematischen Instituts der Universität Groningen steigen um 9 Uhr im Erdgeschoss 6 Personen ein. Suche einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum und berechne für die Ereignisse A_i: ‚auf der i-ten Etage steigt niemand aus' die Wahrscheinlichkeiten $P(A_i)$, $P(A_i \cap A_j)$ für alle $1 \leq i, j \leq 3$ und $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Lift auf jeder Etage halten muss?

Übung 1.14 Wir werfen n-mal eine unverfälschte Münze und definieren die Ereignisse A_k: ‚bei den ersten k Würfen erscheint nur Kopf' für $k = 1, \dots, n$. Modelliere dieses Zufallsexperiment mit einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum und berechne $P(A_k)$. Welchem Ereignis entspricht $A_{k-1} \setminus A_k$ und welche Wahrscheinlichkeit hat dieses Ereignis?

Übung 1.15 Wir werfen 6-mal einen unverfälschten Würfel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, wenigstens eine 6 zu würfeln?

1.5 Aufgaben

Aufgabe 1.1 Ist es wahrscheinlicher, in 4 Würfen mit einem unverfälschten Würfel mindestens eine 6 oder in 24 Würfen mit 2 Würfeln mindestens einmal (6,6) zu würfeln? (In der Geschichte der Wahrscheinlichkeitstheorie ist diese Frage als ‚Paradoxon von de Méré' bekannt. Beim ersten Experiment gibt es 4 Versuche mit Erfolgswahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$, beim zweiten 24 Versuche mit Erfolgswahrscheinlichkeit $\frac{1}{36}$, und trotz der Identität $4 \cdot \frac{1}{6} = 24 \cdot \frac{1}{36}$ stimmen die gesuchten Wahrscheinlichkeiten nicht überein.)

Aufgabe 1.2 Berechne für ein Würfelexperiment mit 3 unverfälschten Würfeln die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse, dass die Augensumme 9 bzw. 10 ist. Für beide Ereignisse gibt es genau 6 Möglichkeiten

$$9 = 6+2+1 = 5+3+1 = 5+2+2 = 4+4+1 = 4+3+2 = 3+3+3$$
$$10 = 6+3+1 = 6+2+2 = 5+4+1 = 5+3+2 = 4+4+2 = 4+3+3,$$

und doch sind die Ereignisse nicht gleich wahrscheinlich!

Aufgabe 1.3 Sei Ω eine nicht-leere Menge und $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ eine σ-Algebra. Zeige, dass eine Funktion $P : \mathcal{F} \to [0,1]$, die den Axiomen $(Ax1), (Ax2)$ und einer der Stetigkeitsbedingungen aus Satz 1.10 genügt, eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist.

Aufgabe 1.4 Seien $A_k, k = 1, 2, \dots$ beliebige Ereignisse. Zeige, dass gilt

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k).$$

Aufgabe 1.5 (i) Wir definieren für beliebige Ereignisse $A_k, k = 1, 2, \ldots$

$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Welchen Ereignissen entsprechen $\liminf_{n\to\infty} A_n$ und $\limsup_{n\to\infty} A_n$? Zeige, dass $(\limsup A_n)^c = \liminf A_n^c$ und $(\liminf A_n)^c = \limsup A_n^c$.
(ii) Eine Münze wird unendlich häufig geworfen. Gib einen geeigneten Ergebnisraum an und beschreibe die folgenden Ereignisse als Teilmengen dieses Ergebnisraumes

A : ‚es fällt unendlich oft Zahl'

B : ‚nach endlich vielen Würfen fällt nur noch Zahl'.

Übersetzung des Auszugs aus Christiaan Huygens Traktat *‚De Ratiociniis in Ludo Aleae'.* (*‚Abhandlungen über die bei Glücksspielen möglichen Berechnungen'*, Übersetzung von Robert Hausner, erschienen 1899 im Band 107/108 in Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaft)

Übersetzung des Textes aus Abb. 1.4:

Aufgabe. *A spielt mit B unter der Bedingung, dass derjenige, welcher zuerst dreimal gewonnen hat, den Spieleinsatz erhält. Nun hat A bereits zweimal, B aber erst einmal gewonnen, und ich will wissen, wie der Spieleinsatz in gerechtem Verhältnisse getheilt werden muss, wenn Beide jetzt das Spiel abbrechen. Wieviel erhält A?*

Um die vorgelegte Frage nach der gerechten Verteilung des Spieleinsatzes unter die beiden Spieler, deren Gewinnhoffnungen ungleiche sind, zu beantworten, beginnen wir mit einem leichteren Falle.

Zuerst muss man die Spiele beachten, welche beiden Spielern noch fehlen. Wenn sie unter einander vereinbart hätten, dass derjenige den Einsatz erhält, welcher zuerst zwanzig Einzelspiele gewonnen hat, und A bereits 19 Spiele gewonnen hat, der Andere aber erst 18, so ist offenbar die Hoffnung des A auf Gewinn um ebensoviel besser wie die des B, als sie es im Falle der vorliegenden Aufgabe ist, wo A von 3 Spielen schon 2 gewonnen hat, B aber erst 1; denn in beiden Fällen fehlt dem A noch ein Spiel, dem B aber fehlen noch 2 Spiele.

Um den jedem der Spieler zukommenden Theil des Einsatzes zu berechnen, muss man erwägen, welche Fälle eintreten können, wenn sie das Spiel fortsetzen. Gewinnt A dann sofort das nächste Spiel, so hat er die vorgeschriebene Zahl von Spielen gewonnen und erhält den ganzen Einsatz, welcher durch a bezeichnet werden mag. Gewinnt aber B das nächste Spiel, so sind die Hoffnungen beider Spieler auf Gewinn einander gleich geworden (da ja jedem von Beiden nur noch ein Spiel fehlt) und jedem kommt daher $\frac{1}{2}a$ zu. Nun hat A aber die gleiche Aussicht, dieses erste Spiel zu gewinnen als es zu verlieren, d.h. die Erwartungen a oder $\frac{1}{2}a$ zu erhalten. Mit Rücksicht auf den Lehrsatz I erhält also A die halbe Summe beider, das ist $\frac{3}{4}a$, und es bleibt folglich seinem Mitspieler $\frac{1}{4}a$ übrig, welcher Theil auch direct auf die gleiche Weise wie der des A hätte gefunden werden können. Daraus ergiebt sich, dass derjenige Spieler, welcher den Platz des A in dem Spiele einnehmen will, ihm $\frac{3}{4}a$ geben muss, und dass derjenige, welcher ein Spiel gewinnen muss, ehe der andere 2 Spiele gewonnen hat, 3 gegen 1 einsetzen kann.

http://www.springer.com/978-3-540-20380-3

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und
Statistik
Dehling, H.; Haupt, B.
2004, XIV, 306 S., Softcover
ISBN: 978-3-540-20380-3