

1 Einleitung

1.1 Was ist Computeralgebra ?

In der älteren Geschichte der Mathematik und insbesondere nach Einführung der Differentialrechnung durch Newton und Leibniz wurde eine große Anzahl mathematischer Probleme durch aufwändige, und zu einem großen Teil algebraische, Berechnungen gelöst. So festigte etwa Gauß im Alter von 24 Jahren (1801) seinen Ruf als herausragender Mathematiker durch die Berechnung der Bahngleichungen des gerade entdeckten (aber ziemlich unbedeutenden) Planetoiden Ceres.

Das wohl bekannteste Beispiel für solch komplizierte algebraische Umformungen lieferte der französische Astronom Charles E. Delaunay: Im Jahre 1847 begann er die Berechnung der Bahn des Mondes aus dem Newtonschen Gravitationsgesetz. So einfach die Lösung des Zweikörper-Problems Erde-Mond ist (1. Semester Physik), so kompliziert wird es, wenn man den Einfluss der Sonne noch mit einbezieht.

Delaunay brauchte für seine Berechnungen 10 Jahre und weitere 10 Jahre, um alles nochmals nachzuprüfen! Seine Ergebnisse wurden 1867 in zwei Bänden veröffentlicht. Ein Band enthält dabei auf 128 Seiten nur die Formel für die Mondbahn.

Delaunays Arbeit wurde erst in den 60er Jahren dieses Jahrhunderts von Wissenschaftlern der Boeing Scientific Research Laboratories in Seattle wieder ausgegraben, die sich für Satellitenbahnen interessierten [DHR]. Mit Hilfe eines Computeralgebra-Systems gelang es Ihnen, die Ergebnisse von Delaunay in ca. 20 Stunden nachzurechnen. Sie fanden dabei erstaunlicherweise nur 3 kleinere Fehler, wobei 2 davon Folgefehler des ersten waren.

Inzwischen konnte man mit Hilfe größerer Rechner und verbesserter Computeralgebra-Programme noch weitere Information in die Rechnung eingehen lassen und die Bahngleichungen verfeinern (etwa den Einfluss atmosphärischer Reibung auf erdnahe Satelliten oder Änderungen des Gravitationsfeldes der Erde durch die nicht exakt kugelförmige Gestalt usw.).

Delaunays Beispiel zeigt einige wichtige Aspekte:

- Ein großes Problem beim exakten Umgang mit algebraischen Ausdrücken ist die Datenexplosion. Aus dem sehr einfachen Gravitationsgesetz wird durch Einsetzen in das Dreikörperproblem Erde-Sonne-Mond eine 128 Seiten lange Formel. Dieses ist eines der Hauptprobleme der Computeralgebra. Oft tritt es noch heimtückischer auf, wenn nämlich Ein- und Ausgabe relativ kleine Ausdrücke sind, aber beim Rechnen immens große Zwischenergebnisse vorkommen.
- Die Verkürzung der Rechenzeit von 20 Jahren auf 20 Stunden (heutzutage wären es auf einem entsprechend schnellen Rechner wahrscheinlich einige Minuten), verbunden mit der garantierten Richtigkeit der Ergebnisse (abgesehen von Programmierfehlern), eröffnet auch Wissenschaftlern ohne die Engelsgeduld eines Ch. Delaunay ganz neue Möglichkeiten. Durch Computeralgebra-Programme sind in einigen Gebieten die Grenzen des Machbaren deutlich verschoben worden.
- Aus der fertigen Formel lassen sich im Gegensatz zu langen Zahlenkolonnen wertvolle allgemeine Erkenntnisse ziehen. Eine spätere numerische Auswertung – etwa die Berechnung der Mondposition zu einem gewissen Zeitpunkt – stellt meist kein Problem mehr dar. In vielen Computeralgebra-Programmen bestehen zusätzlich zur eigenen (beliebig genauen) Arithmetik auch Schnittstellen zu Programmiersprachen wie C oder FORTRAN.

Während das Beispiel mit der Mondbahn eigentlich „nur“ Computer-unterstützte höhere Mathematik umfasst und die ersten Computeralgebra-Systeme auch auf dieses Gebiet spezialisiert waren, versteht man heute unter Computeralgebra den **Grenzbereich zwischen Algebra und Informatik, der sich mit Entwurf, Analyse, Implementierung und Anwendung algebraischer Algorithmen befasst**.

Das umfasst sehr viel mehr, als man im ersten Moment glauben mag; die Übergänge zur Analysis, numerischen Mathematik, Zahlentheorie oder Algebra sind fließend: So ist man vielleicht nach der obigen „Definition“ erstaunt, dass man in vielen Computeralgebra-Systemen Integrations-Routinen vorfindet. Doch zeigt die Betrachtung dieser Algorithmen, dass sie erst durch eine Algebraisierung des Problems so effizient wurden, dass man sie erfolgreich in diesen Paketen einsetzen konnte.

Heute gibt es einige Computeralgebra-Programme, die zusätzlich zur üblichen höheren Mathematik noch einige Routinen etwa zur Gruppentheorie oder endlichen Körpern anbieten. Weiterhin gibt es aber auch immer mehr spezialisierte Programme, etwa zur Gruppentheorie, zur Zahlentheorie, zu Lie-Gruppen oder auch zur Relativitätstheorie. Auf einige dieser Programme wird noch in einem gesonderten Abschnitt eingegangen.

1.2 Literatur

Erst in den 80er Jahren wurden die ersten Bücher speziell zur Computeralgebra herausgegeben. Die Forschung auf diesem Gebiet schlägt sich seit den 60er Jahren in einigen speziellen Zeitschriften nieder, von denen ich hier nur zwei nennen möchte:

- SIGSAM Bulletin (**S**pecial **I**nterest **G**roup on **S**ymbolic and **A**lgebraic **M**anipulation of the **A**ssociation for **C**omputing **M**achinery, vierteljährlich bei ACM Press).
- Journal of Symbolic Computation (gegründet von Bruno Buchberger von der Johannes Kepler Universität in Linz; monatlich bei Academic Press; ISSN 0747-7171).

Viele andere Zeitschriften, wie etwa das SIAM Journal on Computing oder Mathematics of Computation sind ebenfalls gute Referenzen für die Computeralgebra. Siehe hierzu auch die Bibliographie.

Entsprechend zur SIGSAM in Amerika hat sich in Deutschland die Fachgruppe Computeralgebra der GI, DMV und GAMM gebildet. Der von dieser Fachgruppe herausgegebenen Computeralgebra-Rundbrief bringt Hinweise auf Konferenzen, Vorlesungen, Software etc. Der Rundbrief und viele andere Informationen zur Computeralgebra sind elektronisch über den WWW-Server der Fachgruppe (<http://www.fachgruppe-computeralgebra.de/>) abrufbar. Auch in anderen Ländern gibt es ähnliche Interessengruppen, so etwa die NIGSAM (Nordic Interest Group for Symbolic and Algebraic Manipulation), die die NIGSAM-News herausgibt oder die SAM-AFCET (Le Group Calcul Formel d'Association Française pour la Cybernétique Economique et Technique), die das CALSYF-Bulletin herausgibt.

Weiterhin finden laufend Konferenzen zum Thema statt, die jeweils Proceedings herausgegeben haben. Einige dieser Konferenzen und genauere Literaturhinweise auf die zugehörigen Proceedingsbände sind im Anschluss an die Bibliographie aufgelistet. In der Bibliographie selbst erscheinen sie jeweils nur unter Abkürzungen wie etwa SYMSAC-76 oder ISSAC-90.

Außer den speziellen Büchern zur Computeralgebra ist natürlich jedes gute Buch zu den algebraischen, zahlentheoretischen etc. Grundlagen zu empfehlen, solange es die algorithmischen Aspekte nicht ignoriert. Dazu gehört etwa die „Moderne Algebra“ von B.L. van der Waerden [Wa1] und [Wa2]. Dieses Werk enthält viele konstruktive algebraische Methoden. Einige davon beruhen auf Leopold Kroneckers Konzept der „Konstruktion in endlich vielen Schritten“, s. dazu auch die von Kurt Hensel herausgegebene Sammlung der Werke von Kronecker (z.B. [Kro]).

Für die Langzahl- und Polynomarithmetik bis hin zur Faktorisierung ist der zweite Band der Reihe „The Art of Computer Programming“ von D. E. Knuth mit dem Titel „Seminumerical Algorithms“ [Kn2] eine Standardreferenz.

Speziell zu Gröbner-Basen und ihren Anwendungen sind erschienen:

- Cox, Little, O’Shea: „Ideals, Varieties and Algorithms“, [CLO].
- Th. Becker, V. Weispfenning, (H. Kredel): „Gröbner Bases. A Computational Approach to Commutative Algebra“, [BWe].

Allgemeine Einführungen zur Computeralgebra sind etwa

- B. Buchberger, G. E. Collins, R. Loos (Herausgeber): „Computer Algebra, Symbolic and Algebraic Computation“, [BCL] (sehr gute Artikelsammlung mit ausführlichen Bibliographien).
- J. H. Davenport, Y. Siret, E. Tournier: „Computer Algebra“, [DST] (schöner Überblick mit einer Kurzeinführung in die Sprache REDUCE).
- M. Mignotte: „Mathematics for Computer Algebra“, [Mi3] (Schwerpunkt bei Langzahl- und Polynomarithmetik).
- K. O. Geddes, S. R. Czapor, G. Labahn: „Algorithms for Computer Algebra“, [GCL] (sehr umfangreiche und praxisbezogene Einführung von einigen der „MAPLE-Macher“).
- J. von zur Gathen; J. Gerhard: „Modern Computer Algebra“, [vGG] (800 Seiten voll mit Algorithmen, Laufzeitanalysen und Anwendungsbeispielen aus Chemie, Kryptographie usw.).
- J. Grabmeier, E. Kaltofen, V. Weispfennig, V. (Herausgeber): „Computer Algebra Handbook“, [GKW] (Sammelband, zu dem ca. 200 Wissenschaftler beigetragen haben. Es werden 67 Computeralgebra-Systeme beschrieben, viele Anwendungen der Computeralgebra angegeben und auf die Theorie eingegangen).

1.3 Computeralgebra-Systeme

H. G. Kahrmanian [Kah] und J. Nolan [Nol] schrieben unabhängig voneinander im Jahr 1953 ihre Diplomarbeiten über symbolisches Differenzieren und Programme dazu in Philadelphia bzw. am M.I.T. Diese beiden Programme gelten heute als die ersten Computeralgebra-Programme. Man bedenke, dass es damals noch keine der heute gängige Computer-„Hochsprachen“ gab (FORTRAN kam z.B. erst 1958 auf den Markt).

Erst, als 1960/61 die Sprache LISP auf den Markt kam, die wegen ihrer Listenverarbeitungsmöglichkeiten für die Computeralgebra ungleich besser geeignet war, als eher numerisch orientierte Sprachen, wie etwa ALGOL oder FORTRAN, wurden auch größere Computeralgebra-Pakete entwickelt. Eines der ersten, das einem größeren Publikum zugänglich war, war REDUCE. Obwohl das Gebiet also relativ jung ist, gibt es heute eine Flut von CA-Programmen.

Wie bereits erwähnt, gibt es sowohl sehr allgemein gehaltene Programme, die mehr oder weniger gut die Vorlesungen bis zum Vordiplom und teilweise darüber hinaus abdecken, als auch sehr spezialisierte Programme, die dafür in ihrem Spezialgebiet oft sehr viel besser sind, als die anderen.

Im **Anhang A** sind einige der verbreitetsten Systeme zusammengestellt. Die Liste erhebt allerdings weder Anspruch auf Vollständigkeit, noch sollen die Programme im einzelnen verglichen werden. Dies wäre schon wegen der verschiedenen Plattformen, auf denen die Programme laufen, und wegen der verschiedenen Absichten (und Preise) kaum möglich. Nur für die allgemein gehaltenen Systeme, die auch auf ein und dem gleichen Rechner verfügbar sind, gibt es Vergleichstests:

- Von Barry Simon (California Institute of Technology) gibt es mehrere vergleichende Artikel zu DERIVE, MACSYMA, MAPLE und MATHEMATICA, etwa [Si3] und [Si4].
- An der Universität Inria (Rocquencourt, Frankreich) wurden mehrmals MACSYMA, MAPLE und MATHEMATICA verglichen. Die Ergebnisse sind teilweise im WWW zu finden (<http://www.loria.fr/~zimmerma/maple/>).
- Die Fachgruppe Computeralgebra der GI, DMV und GAMM sammelt unter <http://krum.rz.uni-mannheim.de/cafgbench.html> Computer Algebra Benchmarks.

Außer den Handbüchern der einzelnen Programme, die teilweise in Bibliotheken oder Buchhandlungen zu haben sind, seien für weiter Interessierte die folgenden Schriften empfohlen:

- Wester, M. J. (ed.): *Computer Algebra Systems: A Practical Guide* [Wes]
- Harper, D.; Wooff, C.; Hodgkinson, D.: *A Guide to computer algebra systems* [HWH]
- Fuchssteiner, B; Wiwianka, W.; Hering, K. (Redaktion): *mathPAD, Vol. 1, Heft 3* [FWH]
- Gonnet, G. H.; Gruntz, D.W.: *Algebraic Manipulation: Systems* [GGr]
- Computeralgebra in Deutschland (Herausgegeben von der Fachgruppe Computeralgebra der GI, DMV und GAMM), 1993. Eine aktualisierte Version davon findet sich unter <http://www.fachgruppe-computeralgebra.de/ca-brd/ca-brd.html>.

Eine recht komplette Liste von zur Zeit verfügbarer Computeralgebra-Software mit viel Zusatzinformationen wird von Paulo Ney de Souza geführt und auf seiner Homepage <http://www.math.berkeley.edu/~desouza/> bereitgestellt.



<http://www.springer.com/978-3-540-21379-6>

Computeralgebra

Kaplan, M.

2005, XII, 391 S., Softcover

ISBN: 978-3-540-21379-6