

Band 2

Integrale und Geometrie in $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} u(x_N) - u(x_0) &= \int_{x_0}^{x_N} u'(x) \, dx \\ &\approx \sum_{j=1}^N u'(x_{j-1})(x_j - x_{j-1}) \end{aligned}$$

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

27

Das Integral

Die beiden Probleme, als Erstes, aus gegebener Gleichung für die Tangente die Kurve zu finden, als Zweites, die Kurve aus den Differenzen zu bestimmen, lassen sich auf ein und dasselbe zurückführen. Daraus lässt sich erkennen, dass das Umkehrproblem der Tangentenbildung aus der Quadratur herleitbar ist. (Leibniz 1673)

Utile erit scribit $\int$ pro omnia. (Leibniz, 29. Oktober 1675)

27.1 Stammfunktionen und Integrale

In diesem Kapitel beginnen wir mit der Untersuchung von *Differentialgleichungen*. Sie bilden einen der Knoten, die alle Gebiete der Naturwissenschaften und Ingenieurwissenschaften miteinander verknüpfen und es wäre schwer ihre Rolle zu überschätzen. Wir haben uns bereits seit langem auf dieses Kapitel vorbereitet, angefangen beim Kapitel „Kurzer Kurs zur Infinitesimalrechnung“ durch alle Kapitel über Funktionen, Folgen, Grenzwerte, reelle Zahlen, Ableitungen und Modellbetrachtungen fundamentaler Differentialgleichungen. Daher hoffen wir, dass der freundliche Leser sowohl neugierig als auch bereit zu dieser Entdeckungsreise ist.

Wir beginnen mit der einfachsten Differentialgleichung, die dennoch von fundamentaler Wichtigkeit ist:

Wir suchen zur **Funktion** $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Definitionsmenge $I = [a, b]$ die **Funktion** $u(x)$ auf I , so dass die Ableitung $u'(x)$ von $u(x)$ gleich $f(x)$ ist, für $x \in I$.

Wir können dieses Problem präziser formulieren: Zu $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ist $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ gesucht, so dass

$$u'(x) = f(x) \quad (27.1)$$

für alle $x \in I$. Wir nennen die Lösung $u(x)$ der Differentialgleichung $u'(x) = f(x)$ für $x \in I$ eine *Stammfunktion* von $f(x)$ oder das *Integral* von $f(x)$.

Um zu verdeutlichen, was wir unter der „Lösung“ von (27.1) verstehen, betrachten wir zwei einfache Beispiele. Ist $f(x) = 1$ für $x \in \mathbb{R}$, dann ist $u(x) = x$ eine Lösung von $u'(x) = f(x)$ für $x \in \mathbb{R}$, da $Dx = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Ist etwa $f(x) = x$, dann ist $u(x) = x^2/2$ eine Lösung von $u'(x) = f(x)$ für $x \in \mathbb{R}$, da $Dx^2/2 = x$ für $x \in \mathbb{R}$. Daher ist die Funktion x eine Stammfunktion der konstanten Funktion 1, und $x^2/2$ ist eine Stammfunktion der Funktion x .

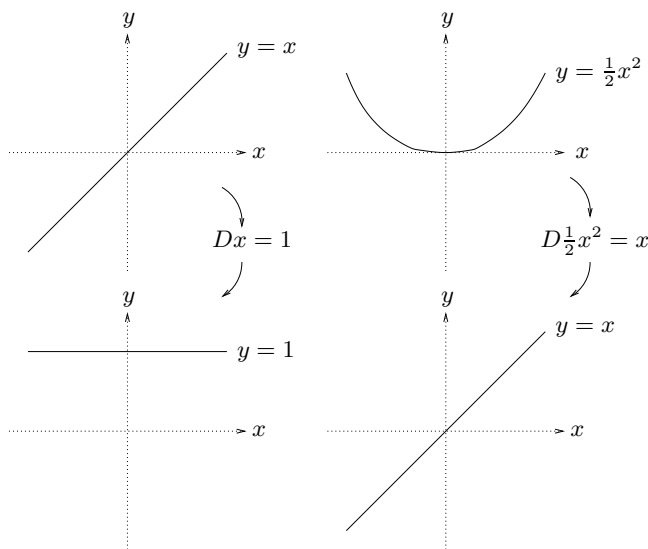


Abb. 27.1. $Dx = 1$ und $D(x^2/2) = x$

Wir betonen nochmals, dass die Lösung von (27.1) eine **Funktion** ist, die auf einem Intervall definiert ist. Wir können das Problem auch praktisch interpretieren und annehmen, dass $u(x)$ für eine Anhäufung oder Ansammlung steht wie Geld auf der Bank, eine Regenmenge oder die Höhe eines Baums. Dabei repräsentiert x eine veränderliche Größe wie die Zeit. Dann entspricht die Lösung von (27.1) der Berechnung einer angesammelten Größe $u(x)$ aus der Kenntnis der Wachstumsrate $u'(x) = f(x)$ für alle x . Diese Interpretation bringt uns auf die Idee, kleine Stücke der augenblicklichen Inkremente oder Veränderungen der Größe $u(x)$ zu summieren, um so die angesammelte Größe $u(x)$ zu erhalten. Daher erwarten wir, dass

die Suche nach dem Integral $u(x)$ einer Funktion $f(x)$, wobei $u'(x) = f(x)$ gilt, uns zu einer Art *Summation* führt.

Ein bekanntes Beispiel für dieses Problem ist etwa, dass $f(x)$ eine Geschwindigkeit ist und x für die Zeit steht, so dass die Lösung $u(x)$ von $u'(x) = f(x)$ den zurückgelegten Weg eines Körpers angibt, der sich mit der augenblicklichen Geschwindigkeit $u'(x) = f(x)$ bewegt. Wie die oben angeführten Beispiele zeigen, können wir dieses Problem in einfachen Fällen lösen. Ist beispielsweise die Geschwindigkeit $f(x)$ gleich einer Konstanten v für all x , so ist der in der Zeit x zurückgelegte Weg gleich $u(x) = vx$. Wenn wir uns mit der konstanten Geschwindigkeit 4 km/h zwei Stunden lang bewegen, dann haben wir 8 km zurückgelegt. Wir erreichen diese 8 km, indem wir schrittweise Weg ansammeln, was offensichtlich ist, wenn wir spazieren gehen!

Eine wichtige Beobachtung ist, dass die Differentialgleichung (27.1) alleine nicht ausreicht, um die Lösung $u(x)$ zu bestimmen. Steht f für die Geschwindigkeit und u für den von einem Körper zurückgelegten Weg, so benötigen wir die Anfangsposition und nicht nur den zurückgelegten Weg, um die aktuelle Position zu bestimmen. Ganz allgemein ist eine Lösung $u(x)$ von (27.1) nur bis auf eine Konstante bestimmt, da die Ableitung einer Konstante Null ist. Ist $u'(x) = f(x)$, dann ist auch $(u(x) + c)' = f(x)$ für jede beliebige Konstante c . So erfüllen beispielsweise sowohl $u(x) = x^2$ als auch $u(x) = x^2 + 1$ die Gleichung $u'(x) = 2x$. Graphisch können wir erkennen, dass es viele „parallele“ Funktionen gibt, die dieselbe Steigung in jedem Punkt haben. Die Konstante lässt sich bestimmen, wenn wir den

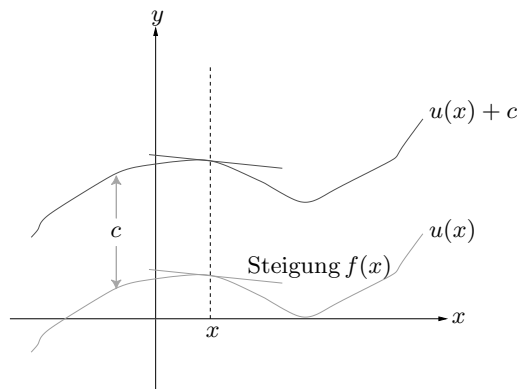


Abb. 27.2. Zwei Funktionen, die in jedem Punkt dieselbe Steigung haben

Wert der Funktion $u(x)$ für einen Punkt angeben. So ist $u(x) = x^2 + c$ die Lösung von $u'(x) = x$ mit einer Konstanten c , und die Angabe von $u(0) = 1$ führt zu $c = 1$.

Ganz allgemein können wir nun unser Anliegen folgendermaßen formulieren: Seien $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und ein Anfangswert u_a gegeben. Gesucht wird

$u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$\begin{cases} u'(x) = f(x) & \text{für } a < x \leq b, \\ u(a) = u_a. \end{cases} \quad (27.2)$$

Das Problem (27.2) ist das einfachste Beispiel eines *Anfangswertproblems*, das eine Differentialgleichung und einen Anfangswert beinhaltet. Die Formulierungen sind eng daran geknüpft, dass x für die Zeit steht und $u(a) = u_a$ dem Wert von $u(x)$ zur Startzeit $x = a$ entspricht. Wir werden auch dann von Anfangswerten reden, wenn x für eine andere Größe steht. In Fällen, in denen x eine Raumkoordinate darstellt, werden wir (27.2) auch alternativ als *Randwertproblem* bezeichnen, wobei $u(a) = u_a$ nun ein vorgegebener *Randwert* ist.

Wir werden nun beweisen, dass das Anfangswertproblem (27.2) eine eindeutige Lösung $u(x)$ hat, wenn die gegebene Funktion $f(x)$ Lipschitz-stetig auf $[a, b]$ ist. Dies entspricht dem *Fundamentalsatz der Integral- und Differentialrechnung*, der in Worten besagt, dass eine Lipschitz-stetige Funktion eine (eindeutige) Stammfunktion besitzt. Leibniz bezeichnete den Fundamentalsatz als das „Umkehrproblem der Tangentenbildung“, da er das Problem mit der Absicht anging, eine Kurve $y = u(x)$ zu finden, die in jedem Punkt x der Steigung $u'(x)$ der Tangente entspricht.

Wir werden einen konstruktiven Beweis für den Fundamentalsatz geben, der nicht nur beweist, dass $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ existiert, sondern auch einen Weg aufzeichnet, $u(x)$ für jedes $x \in [a, b]$ in jeder gewünschten Genauigkeit zu berechnen, indem eine Summe von Werten von $f(x)$ gebildet wird. Somit liefert die Version des Fundamentalsatzes, die wir beweisen werden, zwei Ergebnisse: (i) Die Existenz einer Stammfunktion und (ii) eine Möglichkeit, um die Stammfunktion zu berechnen. Natürlich ist (i) tatsächlich eine Folge von (ii). Denn wissen wir, wie wir eine Stammfunktion berechnen, dann wissen wir auch, dass sie existiert. Diese Vorgehensweise ist analog zur Definition von $\sqrt{2}$, wozu wir eine Cauchy-Folge von Näherungslösungen der Gleichung $x^2 = 2$ mit dem Bisektionsalgorithmus konstruiert haben. Im Beweis des Fundamentalsatzes werden wir ebenfalls eine Cauchy-Folge von Näherungslösungen der Differentialgleichung (27.2) konstruieren und nachweisen, dass der Grenzwert der Folge eine exakte Lösung von (27.2) ist.

Wir werden die Lösung $u(x)$ von (27.2), die wir aus dem Fundamentalsatz erhalten, mit Hilfe von $f(x)$ und u_a wie folgt formulieren:

$$u(x) = \int_a^x f(y) dy + u_a \quad \text{für } a \leq x \leq b, \quad (27.3)$$

wobei wir

$$\int_a^x f(y) dy$$

als das *Integral* von f über dem Intervall $[a, x]$ bezeichnen, a und x als die *untere und obere Integrationsgrenze*, $f(y)$ als den *Integranden* und y als *Integrationsvariable*. Diese Bezeichnungen wurden am 29. Oktober 1675 von Leibniz eingeführt, der sich unter dem Integralzeichen $\int$ eine „Summation“ vorstellte und unter dy das „Inkrement“ in der Variablen y . Die Schreibweise von Leibniz ist Teil des großen Erfolgs der Infinitesimalrechnung in den Naturwissenschaften und der Ausbildung und sie vermittelt (wie eine gute Hülle einer Schallplatte) einen direkten visuellen Zusammenhang zum mathematischen Hintergrund des Integrals, sowohl in Bezug auf die Konstruktion des Integrals als auch bezüglich des Umgangs mit Integralen. Leibniz' Wahl der Schreibweise spielte eine wichtige Rolle dabei, die Infinitesimalrechnung zu einer „Maschine“ zu machen, die „von alleine arbeitet“.

Wir fassen zusammen: Es gibt zwei wichtige Probleme in der Infinitesimalrechnung. Das erste ist, die Ableitung $u'(x)$ einer Funktion $u(x)$ zu bestimmen. Wir haben dieses Problem oben behandelt und wir kennen eine Anzahl von Regeln, mit deren Hilfe wir dieses Problem angehen können. Das zweite Problem ist, eine Funktion $u(x)$ für eine gegebene Ableitung $u'(x)$ zu finden. Beim ersten Problem gehen wir davon aus, $u(x)$ zu kennen und wir suchen $u'(x)$. Beim zweiten Problem gehen wir davon aus, $u'(x)$ zu kennen und suchen $u(x)$.

Als kleines Nebenresultat ergibt der Beweis des Fundamentalsatzes auch, dass das Integral einer Funktion über ein Intervall auch als Fläche unterhalb des Graphen der Funktion über dem Intervall interpretiert werden kann. Dies verknüpft die Suche nach einer Stammfunktion bzw. die Berechnung des Integrals, mit der Berechnung einer Fläche, d.h. der *Quadratur*. Wir werden diese geometrische Interpretation unten noch weiter erläutern.

Wir halten fest, dass wir in (27.2) fordern, dass die Differentialgleichung $u'(x) = f(x)$ für x im halboffenen Intervall $(a, b]$ erfüllt ist und dass im linken Endpunkt $x = a$ die Differentialgleichung durch die Festlegung $u(a) = u_a$ gegeben ist. Eine richtige Begründung dafür werden wir bei der Entwicklung des Beweises des Fundamentalsatzes erkennen. Natürlich entspricht die Ableitung $u'(b)$ im rechten Endpunkt $x = b$ der linksseitigen Ableitung von u . Aufgrund der Stetigkeit wird auch $u'(a) = f(a)$ gelten, wobei $u'(a)$ der rechtsseitigen Ableitung entspricht.

27.2 Stammfunktion von $f(x) = x^m$ für $m = 0, 1, 2, \dots$

Für einige besondere Funktionen $f(x)$ können wir sofort die Stammfunktionen $u(x)$ angeben, die $u'(x) = f(x)$ für x aus einem Intervall erfüllen. Ist beispielsweise $f(x) = 1$, dann ist $u(x) = x + c$ mit konstantem c für $x \in \mathbb{R}$. Ist weiter $f(x) = x$, dann ist $u(x) = x^2/2 + c$ für $x \in \mathbb{R}$. Ganz allgemein ist für $f(x) = x^m$ mit $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ die Stammfunktion

$u(x) = x^{m+1}/(m+1) + c$. Mit der Schreibweise (27.3) für $x \in \mathbb{R}$ können wir auch schreiben:

$$\int_0^x 1 \, dy = x, \quad \int_0^x y \, dy = \frac{x^2}{2} \quad (27.4)$$

und allgemeiner für $m = 0, 1, 2, \dots$,

$$\int_0^x y^m \, dy = \frac{x^{m+1}}{m+1}, \quad (27.5)$$

da die rechte wie die linke Seite für $x = 0$ Null ergeben.

27.3 Stammfunktion von $f(x) = x^m$ für $m = -2, -3, \dots$

Wir halten fest, dass $v'(x) = -nx^{-(n+1)}$ für $v(x) = x^{-n}$ mit $n = 1, 2, 3, \dots$, falls $x \neq 0$. Daher lautet die Stammfunktion von $f(x) = x^m$ für $m = -2, -3, \dots$ offensichtlich $u(x) = x^{m+1}/(m+1)$ für $x > 0$. Wir können diese Tatsache folgendermaßen schreiben: Für $m = -2, -3, \dots$ ist

$$\int_1^x y^m \, dy = \frac{x^{m+1}}{m+1} - \frac{1}{m+1} \quad \text{für } x > 1, \quad (27.6)$$

wobei wir die Integration willkürlich bei $x = 1$ beginnen. Der Anfangspunkt ist wirklich uninteressant, so lange wir 0 vermeiden. Wir müssen 0 vermeiden, da die Funktion x^m für $m = -2, -3, \dots$ gegen Unendlich strebt, falls x sich an Null annähert. Um den Beginn bei $x = 1$ auszugleichen, ziehen wir den entsprechenden Wert von $x^{m+1}/(m+1)$ bei $x = 1$ von der rechten Seite ab. Wir können analoge Formeln für $0 < x < 1$ und $x < 0$ angeben.

Zusammenfassend haben wir gesehen, dass für $m = 0, 1, 2, \dots$ die Polynome x^m die Stammfunktionen $x^{m+1}/(m+1)$ haben, die wiederum Polynome sind. Weiterhin haben auch die rationalen Funktionen x^m für $m = -2, -3, \dots$ die Stammfunktionen $x^{m+1}/(m+1)$, die ebenfalls rationale Funktionen sind.

27.4 Stammfunktion von $f(x) = x^r$ für $r \neq -1$

Bisher waren wir recht erfolgreich, aber wir sollten nicht übertrieben selbstsicher werden. Denn wir stoßen bereits bei diesen ersten Beispielen auf ein ernstes Problem. Da $Dx^s = sx^{s-1}$ für $s \neq 0$ und $x > 0$, können wir die vorangegangenen Argumente auf rationale Potenzen von x erweitern und erhalten für $r = s - 1 \neq -1$:

$$\int_1^x y^r \, dy = \frac{x^{r+1}}{r+1} - \frac{1}{r+1} \quad \text{für } x > 1. \quad (27.7)$$

Diese Formel verliert ihre Gültigkeit für $r = -1$ und deswegen kennen wir keine Stammfunktion für $f(x) = x^r$ mit $r = -1$ und wir wissen noch nicht einmal, ob eine existiert. Tatsächlich können wir die Differentialgleichung (27.2) meistens nicht so lösen, dass wir die Stammfunktion $u(x)$ einfach als Ausdruck bekannter Funktionen schreiben. Dass wir in der Lage sind, einfache rationale Funktionen zu integrieren, ist eine Ausnahme. Der Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung wird uns einen Ausweg weisen, so dass wir unbekannte Lösungen auf jede gewünschte Genauigkeit annähern können.

27.5 Ein kurzer Überblick über den bisherigen Fortschritt

Jede Funktion, die wir als Linearkombination, Produkt, Quotient oder durch Zusammensetzen von Funktionen der Form x^r mit rationalen Potenzen $r \neq -1$ und $x > 0$ erhalten, kann analytisch abgeleitet werden. Ist $u(x)$ eine derartige Funktion, so erhalten wir eine analytische Formel für $u'(x)$. Wählen wir nun $f(x) = u'(x)$, dann erfüllt $u(x)$ natürlich die Differentialgleichung $u'(x) = f(x)$, so dass wir mit Hilfe der Leibnizschen Schreibweise formulieren können:

$$u(x) = \int_0^x f(y) dy + u(0) \quad \text{für } x \geq 0.$$

Diese Formel besagt, dass die Funktion $u(x)$ Stammfunktion ihrer Ableitung $f(x) = u'(x)$ ist (unter der Annahmen, dass $u(x)$ für alle $x \geq 0$ definiert ist und insbesondere kein Zähler für $x \geq 0$ verschwindet).

Wir geben ein Beispiel: Da $D(1+x^3)^{\frac{1}{3}} = (1+x^3)^{-\frac{2}{3}}x^2$ für $x \in \mathbb{R}$, so können wir schreiben:

$$(1+x^3)^{\frac{1}{3}} = \int_0^x \frac{y^2}{(1+y^3)^{\frac{2}{3}}} dy + 1 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Mit anderen Worten, so kennen wir Stammfunktionen $u(x)$, die die Differentialgleichung $u'(x) = f(x)$ für $x \in I$ für jede Funktion $f(x)$ erfüllen, die ihrerseits eine Ableitung einer Funktion $v(x)$ ist, so dass $f(x) = v'(x)$ für $x \in I$. Die Beziehung zwischen $u(x)$ und $v(x)$ ist dann

$$u(x) = v(x) + c \quad \text{für } x \in I$$

mit konstantem c .

Auf der anderen Seite können wir für eine anders lautende beliebige Funktion $f(x)$ nur sehr schwierig oder auch gar nicht eine analytische Formel für die entsprechende Stammfunktion $u(x)$ finden. Der Fundamentalsatz sagt uns dann, wie wir eine Stammfunktion für eine beliebige Lipschitzstetige Funktion $f(x)$ berechnen können. Wir werden erkennen, dass insbesondere die Funktion $f(x) = x^{-1}$ eine Stammfunktion für $x > 0$ besitzt;

die berühmte *logarithmische Funktion* $\log(x)$. Der Fundamentalsatz gibt uns dabei insbesondere eine konstruktive Technik an die Hand, um $\log(x)$ für $x > 0$ zu berechnen.

27.6 „Sehr kurzer Beweis“ des Fundamentalsatzes

Wir werden jetzt in den Beweis des Fundamentalsatzes einsteigen. Zu diesem Zeitpunkt mag eine Wiederholung des Kapitels „Kurzer Kurs zur Infinitesimalrechnung“ hilfreich sein. Wir werden eine Folge immer vollständiger Versionen des Beweises des Fundamentalsatzes geben, die mit jedem Schritt zu größerer Genauigkeit und Allgemeingültigkeit führt.

Das Problem, das wir lösen wollen, hat die folgende Form: Sei eine Funktion $f(x)$ gegeben. Gesucht ist eine Funktion $u(x)$, so dass $u'(x) = f(x)$ für alle x in einem Intervall. Bei dieser Problemstellung beginnen wir mit $f(x)$ und suchen eine Funktion $u(x)$, so dass $u'(x) = f(x)$. In dieser frühen „kurzen“ Version des Beweises gehen wir jedoch scheinbar das Problem von der anderen Seite an, indem wir mit einer gegebenen Funktion $u(x)$ beginnen, u ableiten zu $f(x) = u'(x)$ und dann zu $u(x)$ als der Stammfunktion von $f(x) = u'(x)$ zurückkehren. Dies scheint zunächst ein völlig sinnloser Zirkelschluss zu sein und einige Infinitesimalbücher fangen sich in dieser Falle vollständig. Wir gehen dennoch so vor, um einige Punkte zu verdeutlichen. Beim abschließenden Beweis, werden wir in der Tat mit $f(x)$ beginnen und eine Funktion $u(x)$ konstruieren, die wie gewünscht $u'(x) = f(x)$ erfüllt!

Sei nun $u(x)$ differenzierbar auf $[a, b]$, $x \in [a, b]$ und $a = y_0 < y_1 < \dots < y_m = x$ eine *Unterteilung* von $[a, x]$ in Teilintervalle $[a, y_1]$, $[y_1, y_2]$, $\dots$, $[y_{m-1}, x]$. Indem wir wiederholt $u(y_j)$ abziehen und addieren, erhalten wir die folgende Identität, die wir als *Teleskopsumme* bezeichnen, bei der sich Ausdrücke paarweise aufheben:

$$\begin{aligned} u(x) - u(a) &= u(y_m) - u(y_0) \\ &= u(y_m) - u(y_{m-1}) + u(y_{m-1}) - u(y_{m-2}) + u(y_{m-2}) \\ &\quad - \dots + u(y_2) - u(y_1) + u(y_1) - u(y_0). \end{aligned} \quad (27.8)$$

Dies können wir auch in der Form

$$u(x) - u(a) = \sum_{i=1}^m \frac{u(y_i) - u(y_{i-1})}{y_i - y_{i-1}} (y_i - y_{i-1}) \quad (27.9)$$

oder auch

$$u(x) - u(a) = \sum_{i=1}^m f(y_{i-1})(y_i - y_{i-1}) \quad (27.10)$$

schreiben, falls wir

$$f(y_{i-1}) = \frac{u(y_i) - u(y_{i-1})}{y_i - y_{i-1}} \quad \text{für } i = 1, \dots, m \quad (27.11)$$

setzen. Wir wiederholen die Interpretation der Ableitung als Änderungsrate einer Funktion in Abhängigkeit vom Argument und erhalten so unsere erste Version des Fundamentalsatzes in Analogie zu (27.10) und (27.11):

$$u(x) - u(a) = \int_a^x f(y) dy \quad \text{mit} \quad f(y) = u'(y) \quad \text{für} \quad a < y < x.$$

Bei der Integralschreibweise, entspricht die Summe $\sum$ dem Integralzeichen $\int$, die Inkremente $y_i - y_{i-1}$ entsprechen dy , die y_{i-1} der Integrationsvariablen y und der Differenzenquotient $\frac{u(y_i) - u(y_{i-1})}{y_i - y_{i-1}}$ entspricht der Ableitung $u'(y_{i-1})$.

Auf diesem Weg gelangte Leibniz im Alter von 20 zunächst zum Fundamentalsatz (ohne jemals Infinitesimalrechnung studiert zu haben), den er in seiner *Art of Combinations* 1666 vorstellte.

Beachten Sie, dass (27.8) zum Ausdruck bringt, dass „das Ganze der Summe der Teile entspricht“, wobei „das Ganze“ $u(x) - u(a)$ entspricht und die „Teile“ den Differenzen $(u(y_m) - u(y_{m-1}))$, $(u(y_{m-1}) - u(y_{m-2}))$, $\dots$, $(u(y_2) - u(y_1))$ und $(u(y_1) - u(y_0))$. Vergleichen Sie dies mit der Diskussion im Kapitel „Kurzer Kurs zur Infinitesimalrechnung“, in dem der Jugendtraum von Leibniz enthalten ist.

27.7 „Kurzer Beweis“ des Fundamentalsatzes

Wir wollen nun eine genauere Version des obigen „Beweises“ geben. Um etwas Flexibilität in der Schreibweise zu üben, was eine nützliche Fähigkeit ist, verändern wir die Schreibweise leicht. Sei $u(x)$ gleichmäßig differenzierbar auf $[a, b]$, sei $\bar{x} \in [a, b]$ und sei $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = \bar{x}$ eine Unterteilung von $[a, \bar{x}]$. Wir ändern also y in x und x in $\bar{x}$. Bei dieser Schreibweise dient x als Variable und $\bar{x}$ ist ein spezieller Wert von x . Wir wiederholen die Gleichung (27.9) in neuem Gewand:

$$u(\bar{x}) - u(a) = \sum_{i=1}^m \frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} (x_i - x_{i-1}). \quad (27.12)$$

Aufgrund der gleichmäßigen Differenzierbarkeit von u gilt

$$u(x_i) - u(x_{i-1}) = u'(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) + E_u(x_i, x_{i-1}),$$

wobei

$$|E_u(x_i, x_{i-1})| \leq K_u (x_i - x_{i-1})^2 \quad (27.13)$$

mit Konstanter K_u . Somit können wir (27.12) auch schreiben als:

$$u(\bar{x}) - u(a) = \sum_{i=1}^m u'(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^m E_u(x_i, x_{i-1}). \quad (27.14)$$

Wenn wir nun h dem größten Inkrement $x_i - x_{i-1}$ gleichsetzen, so dass $x_i - x_{i-1} \leq h$ für alle i , erhalten wir

$$\sum_{i=1}^m |E_u(x_i, x_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^m K_u(x_i - x_{i-1})h = K_u(\bar{x} - a)h.$$

Damit lässt sich (27.14) wie folgt schreiben:

$$u(\bar{x}) - u(a) = \sum_{i=1}^m u'(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) + E_h, \quad (27.15)$$

mit

$$|E_h| \leq K_u(\bar{x} - a)h. \quad (27.16)$$

Der Fundamentalsatz entspricht dem folgenden Analogon dieser Formel:

$$u(\bar{x}) - u(a) = \int_a^{\bar{x}} u'(x) dx, \quad (27.17)$$

wobei die Summe $\sum$ dem Integralzeichen $\int$ entspricht, die Inkremente $x_i - x_{i-1}$ entsprechen dx und x_i entspricht der Integrationsvariablen x . Aus (27.16) sehen wir, dass der zusätzliche Ausdruck E_h in (27.15) gegen Null strebt, wenn das größtmögliche Inkrement h gegen Null strebt. Wir erwarten daher, dass (27.17) eine Art Grenzwert von (27.15) ist, wenn h gegen Null strebt.

27.8 Beweis des Fundamentalsatzes der Differential- und Integralrechnung

Wir geben nun einen vollständigen Beweis des Fundamentalsatzes. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass $[a, b] = [0, 1]$ und dass der Anfangswert $u(0) = 0$. Wir gehen auf das allgemeine Problem am Ende des Beweises ein. Das Problem, das wir betrachten, lautet: Sei $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lipschitz-stetige Funktion. Gesucht ist eine Lösung $u(x)$ für das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u'(x) = f(x) & \text{für } 0 < x \leq 1, \\ u(0) = 0. \end{cases} \quad (27.18)$$

Wir konstruieren nun eine Näherung für die Lösung $u(x)$ und geben der Lösungsformel

$$u(\bar{x}) = \int_0^{\bar{x}} f(x) dx \quad \text{für } 0 \leq \bar{x} \leq 1$$

eine Bedeutung. Hierbei sei n eine natürliche Zahl und sei $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1$ eine Unterteilung des Intervalls $[0, 1]$ mit den *Knoten* $x_i^n =$

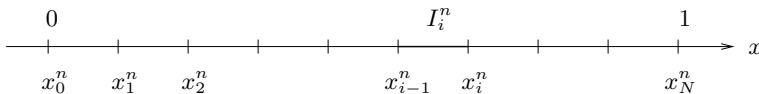


Abb. 27.3. Teilintervalle I_i^n der Länge $h_n = 2^{-n}$

ih_n , $i = 0, \dots, N$ mit $h_n = 2^{-n}$ und $N = 2^n$. Somit unterteilen wir das vorgegebene Intervall $[0, 1]$ in Teilintervalle $I_i^n = (x_{i-1}^n, x_i^n]$ gleicher Länge $h_n = 2^{-n}$, vgl. Abb. 27.3.

Als Näherung für $u(x)$ wählen wir eine stetige, stückweise lineare Funktion $U^n(x)$, die durch die Formel

$$U^n(x_j^n) = \sum_{i=1}^j f(x_{i-1}^n) h_n \quad \text{für } j = 1, \dots, N \quad (27.19)$$

definiert ist, mit $U^n(0) = 0$. Diese Formel liefert die Werte von $U^n(x)$ in den Knoten $x = x_j^n$ und wir interpolieren $U^n(x)$ linear zwischen den Knoten, um so die verbleibenden Werte zu erhalten, vgl. Abb. 27.4.

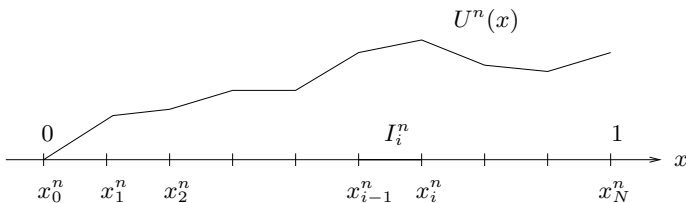


Abb. 27.4. Stückweise lineare Funktion $U^n(x)$

Wir erkennen, dass $U^n(x_j^n)$ für alle Intervalle I_i^n mit $i \leq j$ eine Summe von Produkten $f(x_{i-1}^n) h_n$ ist. Anhand der Konstruktion ist

$$U^n(x_i^n) = U^n(x_{i-1}^n) + f(x_{i-1}^n) h_n \quad \text{für } i = 1, \dots, N, \quad (27.20)$$

so dass wir bei gegebener Funktion $f(x)$ die Funktion $U^n(x)$ aus der Gleichung (27.20) für $i = 1, 2, \dots, N$ schrittweise berechnen können. Dabei berechnen wir zunächst $U^n(x_1^n)$ aus $U^n(x_0^n) = U^n(0) = 0$, dann $U^n(x_2^n)$ mit Hilfe des Wertes $U^n(x_1^n)$ und so fort. Wir können ebenso gut die Formel (27.19) benutzen, die nichts anderes ausdrückt, als dass nach und nach die Produkte addiert werden.

Die durch (27.19) definierte Funktion $U^n(x)$ ist folglich eine stetige, stückweise lineare Funktion, die aus den Knotenwerten $f(x_i^n)$ berechenbar ist und wir werden nun begründen, warum $U^n(x)$ eine gute Chance hat, als Näherung der Funktion $u(x)$ betrachtet zu werden, die (27.18) erfüllt. Ist $u(x)$ gleichmäßig differenzierbar auf $[0, 1]$, dann ist

$$u(x_i^n) = u(x_{i-1}^n) + u'(x_{i-1}^n) h_n + E_u(x_i^n, x_{i-1}^n) \quad \text{für } i = 1, \dots, N, \quad (27.21)$$

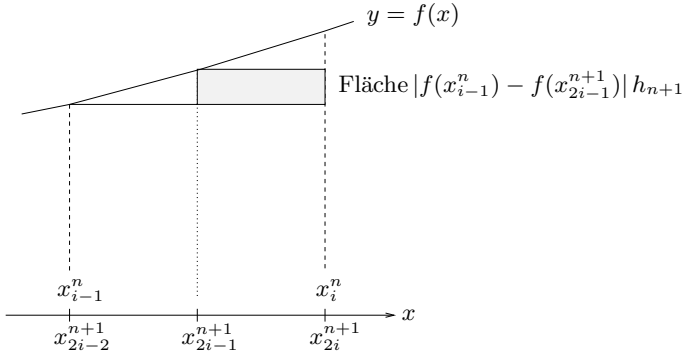


Abb. 27.5. Die Differenz zwischen $U^{n+1}(x)$ und $U^n(x)$

mit $|E_u(x_i^n, x_{i-1}^n)| \leq K_u(x_i^n - x_{i-1}^n)^2 = K_u h_n^2$ und folglich ist

$$u(x_j^n) = \sum_{i=1}^j u'(x_{i-1}^n) h_n + E_h \quad \text{für } j = 1, \dots, N, \quad (27.22)$$

mit $|E_h| \leq K_u h_n$, da $\sum_{i=1}^j h_n = j h_n \leq 1$. Wenn wir annehmen, dass $u'(x) = f(x)$ für $0 < x \leq 1$, dann wird uns die Verbindung zwischen (27.20), (27.21), (27.19) und (27.22) deutlich, zumal, wenn wir berücksichtigen, dass die Ausdrücke $E_u(x_i^n, x_{i-1}^n)$ und E_h klein sind. Wir erwarten daher, dass $U^n(x_j^n)$ eine Näherung von $u(x_j^n)$ in den Knoten x_j^n ist und $U^n(x)$ sollte daher eine zunehmend genaue Näherung von $u(x)$ sein, wenn n anwächst und $h_n = 2^{-n}$ kleiner wird.

Wir untersuchen zunächst die Konvergenz der Funktionen $U^n(x)$, wenn n gegen Unendlich strebt, um diese Näherungstechnik zu präzisieren. Dazu halten wir $\bar{x} \in [0, 1]$ fest und betrachten die Folge von Zahlen $\{U^n(\bar{x})\}_{n=1}^\infty$. Wir wollen beweisen, dass dies eine Cauchy-Folge ist und dazu wollen wir $|U^n(\bar{x}) - U^m(\bar{x})|$ für $m > n$ abschätzen.

Wir beginnen mit der Abschätzung der Differenz $|U^n(\bar{x}) - U^{n+1}(\bar{x})|$ zweier aufeinander folgender Indizes n und $m = n + 1$. Wir erhalten

$$U^n(x_i^n) = U^n(x_{i-1}^n) + f(x_{i-1}^n) h_n.$$

Da $x_{2i}^{n+1} = x_i^n$ und $x_{2i-2}^{n+1} = x_{i-1}^n$ folgt

$$\begin{aligned} U^{n+1}(x_i^n) &= U^{n+1}(x_{2i}^{n+1}) = U^{n+1}(x_{2i-1}^{n+1}) + f(x_{2i-1}^{n+1}) h_{n+1} \\ &= U^{n+1}(x_{i-1}^n) + f(x_{2i-2}^{n+1}) h_{n+1} + f(x_{2i-1}^{n+1}) h_{n+1}. \end{aligned}$$

Durch Abziehen und Substituieren von $e_i^n = U^n(x_i^n) - U^{n+1}(x_i^n)$ erhalten wir

$$e_i^n = e_{i-1}^n + (f(x_{i-1}^n) h_n - f(x_{2i-2}^{n+1}) h_{n+1} - f(x_{2i-1}^{n+1}) h_{n+1}),$$

d.h., da $h_{n+1} = \frac{1}{2}h_n$:

$$e_i^n - e_{i-1}^n = (f(x_{i-1}^n) - f(x_{2i-1}^{n+1}))h_{n+1}. \quad (27.23)$$

Wir nehmen an, dass $\bar{x} = x_j^n$, nutzen (27.23) und die Tatsache, dass $e_0^n = 0$ und $|f(x_{i-1}^n) - f(x_{2i-1}^{n+1})| \leq L_f h_{n+1}$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} |U^n(\bar{x}) - U^{n+1}(\bar{x})| &= |e_j^n| = \left| \sum_{i=1}^j (e_i^n - e_{i-1}^n) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^j |e_i^n - e_{i-1}^n| = \sum_{i=1}^j |f(x_{i-1}^n) - f(x_{2i-1}^{n+1})| h_{n+1} \\ &\leq \sum_{i=1}^j L_f h_{n+1}^2 = \frac{1}{4} L_f h_n \sum_{i=1}^j h_n = \frac{1}{4} L_f \bar{x} h_n, \end{aligned} \quad (27.24)$$

wobei wir auch die Tatsache benutzten, dass $\sum_{i=1}^j h_n = \bar{x}$. Wenn wir diese Abschätzung iterieren und die Formel für die geometrische Reihe anwenden, erhalten wir:

$$\begin{aligned} |U^n(\bar{x}) - U^m(\bar{x})| &\leq \frac{1}{4} L_f \bar{x} \sum_{k=n}^{m-1} h_k = \frac{1}{4} L_f \bar{x} (2^{-n} + \dots + 2^{-m+1}) \\ &= \frac{1}{4} L_f \bar{x} 2^{-n} \frac{1 - 2^{-m+n}}{1 - 2^{-1}} \leq \frac{1}{4} L_f \bar{x} 2^{-n} 2 = \frac{1}{2} L_f \bar{x} h_n, \end{aligned}$$

d.h.

$$|U^n(\bar{x}) - U^m(\bar{x})| \leq \frac{1}{2} L_f \bar{x} h_n. \quad (27.25)$$

Diese Abschätzung zeigt uns, dass $\{U^n(\bar{x})\}_{n=1}^\infty$ eine Cauchy-Folge ist, die folglich gegen eine reelle Zahl konvergiert. Wir entschließen uns, in Anlehnung an Leibniz, diese reelle Zahl mit

$$\int_0^{\bar{x}} f(x) dx$$

zu bezeichnen, die dem Grenzwert von

$$U^n(\bar{x}) = \sum_{i=1}^j f(x_{i-1}^n) h_n$$

entspricht, wenn n gegen Unendlich strebt für $\bar{x} = x_j^n$. Anders formuliert:

$$\int_0^{\bar{x}} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^j f(x_{i-1}^n) h_n.$$

Wenn m in (27.25) gegen Unendlich strebt, können wir diese Beziehung folgendermaßen quantitativ ausdrücken:

$$\left| \int_0^{\bar{x}} f(x) dx - \sum_{i=1}^j f(x_{i-1}^n) h_n \right| \leq \frac{1}{2} L_f \bar{x} h_n.$$

Zum gegenwärtigen Stand haben wir das Integral $\int_0^{\bar{x}} f(x) dx$ für eine gegebene Lipschitz-stetige Funktion $f(x)$ auf $[0, 1]$ für $\bar{x} \in [0, 1]$ als Grenzwert der Folge $\{U^n(\bar{x})\}_{n=1}^\infty$ definiert, wenn n gegen Unendlich strebt. Somit können wir durch die Formel

$$u(\bar{x}) = \int_0^{\bar{x}} f(x) dx \quad \text{für } \bar{x} \in [0, 1] \quad (27.26)$$

eine Funktion $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definieren. Wir werden nun überprüfen, ob die Funktion $u(x)$, die auf diese Weise definiert wird, tatsächlich der Differentialgleichung $u'(x) = f(x)$ genügt. Wir gehen dazu in zwei Schritten vor. Zunächst zeigen wir, dass die Funktion $u(x)$ auf $[0, 1]$ Lipschitz-stetig ist und dann zeigen wir, dass $u'(x) = f(x)$.

Bevor wir in diese Beweise eintauchen, müssen wir noch einen empfindlichen Punkt ansprechen. Wenn wir auf die Konstruktion von $u(x)$ zurückschauen, erkennen wir, dass wir $u(\bar{x})$ für $\bar{x}$ der Form $\bar{x} = x_j^n$ für $j = 0, 1, \dots, 2^n$, $n = 1, 2, \dots$ definiert haben. Diese sind rationale Zahlen mit endlichen Dezimalentwicklungen in der Basis 2. Diese Zahlen liegen *dicht*, in dem Sinne, dass es zu jeder reellen Zahl $x \in [0, 1]$ und jedem $\epsilon > 0$ einen Punkt der Form x_j^n gibt, so dass $|x - x_j^n| \leq \epsilon$. Wenn wir an das Kapitel „Reelle Zahlen“ zurückdenken, verstehen wir, dass wir $u(x)$ auf eine Lipschitz-stetige Funktion auf der Menge der reellen Zahlen in $[0, 1]$ erweitern können, wenn $u(x)$ auf der dichten Menge der Form x_j^n Lipschitz-stetig ist.

Wir gehen daher von $\bar{x} = x_j^n$ und $\bar{y} = x_k^n$ mit $j > k$ aus und halten fest, dass

$$U^n(\bar{x}) - U^n(\bar{y}) = \sum_{i=1}^j f(x_{i-1}^n) h_n - \sum_{i=1}^k f(x_{i-1}^n) h_n = \sum_{i=k+1}^j f(x_{i-1}^n) h_n.$$

Mit Hilfe der Dreiecksungleichung erhalten wir

$$|U^n(\bar{x}) - U^n(\bar{y})| \leq \sum_{i=k+1}^j |f(x_{i-1}^n)| h_n \leq M_f \sum_{i=k+1}^j h_n = M_f |\bar{x} - \bar{y}|,$$

wobei M_f eine positive Konstante ist, mit $|f(x)| \leq M_f$ für alle $x \in [0, 1]$. Wenn n gegen Unendlich strebt, erhalten wir

$$u(\bar{x}) - u(\bar{y}) = \int_0^{\bar{x}} f(x) dx - \int_0^{\bar{y}} f(x) dx = \int_{\bar{y}}^{\bar{x}} f(x) dx, \quad (27.27)$$

wobei natürlich

$$\int_{\bar{y}}^{\bar{x}} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=k+1}^j f(x_{i-1}^n) h_n$$

und folglich

$$|u(\bar{x}) - u(\bar{y})| \leq \left| \int_{\bar{y}}^{\bar{x}} f(x) dx \right| \leq \int_{\bar{y}}^{\bar{x}} |f(x)| dx \leq M_f |\bar{x} - \bar{y}|, \quad (27.28)$$

wobei die zweite Ungleichung die sogenannte *Dreiecksungleichung für Integrale* ist, die wir im nächsten Kapitel beweisen. Somit erhalten wir

$$|u(\bar{x}) - u(\bar{y})| \leq M_f |\bar{x} - \bar{y}|, \quad (27.29)$$

womit die Lipschitz-Stetigkeit von $u(x)$ bewiesen wäre.

Wir beweisen nun, dass die Funktion $u(x)$, die durch die Formel

$$u(x) = \int_a^x f(y) dy$$

für $x \in [0, 1]$ definiert ist, wobei $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lipschitz-stetige Funktion ist, die Differentialgleichung

$$u'(x) = f(x) \quad \text{für } x \in [0, 1]$$

erfüllt, d.h.

$$\frac{d}{dx} \int_0^x f(y) dy = f(x). \quad (27.30)$$

An dieser Stelle wählen wir $x, \bar{x} \in [0, 1]$ mit $x \geq \bar{x}$. Mit Hilfe von (27.27) und (27.28) erkennen wir, dass

$$u(x) - u(\bar{x}) = \int_0^x f(z) dz - \int_0^{\bar{x}} f(y) dy = \int_{\bar{x}}^x f(y) dy$$

und

$$\begin{aligned} |u(x) - u(\bar{x}) - f(\bar{x})(x - \bar{x})| &= \left| \int_{\bar{x}}^x f(y) dy - f(\bar{x})(x - \bar{x}) \right| \\ &= \left| \int_{\bar{x}}^x (f(y) - f(\bar{x})) dy \right| \leq \int_{\bar{x}}^x |f(y) - f(\bar{x})| dy \\ &\leq \int_{\bar{x}}^x L_f |y - \bar{x}| dy = \frac{1}{2} L_f (x - \bar{x})^2, \end{aligned}$$

wobei wir wiederum die Dreiecksungleichung für Integrale benutzt haben. Damit haben wir gezeigt, dass u gleichmäßig auf $[0, 1]$ differenzierbar ist und dass $K_u \leq \frac{1}{2} L_f$.

Schließlich erinnern wir für den Beweis der Eindeutigkeit an (27.15) und (27.16), wonach eine Funktion $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit Lipschitz-stetiger Ableitung $u'(x)$ und $u(0) = 0$ mit $u(0) = 0$ als

$$u(\bar{x}) = \sum_{i=1}^m u'(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) + E_h$$

geschrieben werden kann, mit

$$|E_h| \leq K_u(\bar{x} - a)h.$$

Wenn n gegen Unendlich strebt, so erhalten wir

$$u(\bar{x}) = \int_0^{\bar{x}} u'(x) dx \quad \text{für } \bar{x} \in [0, 1], \quad (27.31)$$

womit wir ausdrücken, dass eine gleichmäßig differenzierbare Funktion mit Lipschitz-stetiger Ableitung dem Integral ihrer Ableitung entspricht. Seien nun $u(x)$ und $v(x)$ zwei gleichmäßig differenzierbare Funktionen auf $[0, 1]$ deren Ableitungen $u'(x) = f(x)$ und $v'(x) = f(x)$ für $0 < x \leq 1$ erfüllen und sei $u(0) = u_0$, $v(0) = u_0$ und sei ferner $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig. Dann ist auch die Differenz $w(x) = u(x) - v(x)$ gleichmäßig differenzierbar auf $[0, 1]$, und $w'(x) = 0$ für $a < x \leq b$ mit $w(0) = 0$. Nun haben wir aber gerade gezeigt, dass

$$w(x) = \int_a^x w'(y) dy$$

und folglich ist $w(x) = 0$ für $x \in [0, 1]$. Damit haben wir bewiesen, dass $u(x) = v(x)$ für $x \in [0, 1]$, woraus die Eindeutigkeit folgt.

Bedenken Sie, dass wir den Fundamentalsatz unter besonderen Umständen bewiesen haben, nämlich für das Intervall $[0, 1]$ mit Anfangswert 0. Wir können die obige Konstruktion direkt verallgemeinern und $[0, 1]$ durch ein beliebiges beschränktes Intervall $[a, b]$ ersetzen, wenn wir h_n durch $h_n = 2^{-n}(b - a)$ ersetzen und annehmen, dass statt $u(0) = 0$ der Anfangswert $u(a) = u_a$ für eine beliebige reelle Zahl u_a gilt. Somit haben wir nun den mächtigen Fundamentalsatz der Integral- und Differentialrechnung bewiesen.

Satz 27.1 (Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung) *Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig. Dann existiert eine eindeutige gleichmäßig differenzierbare Funktion $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, die das Anfangswertproblem*

$$\begin{cases} u'(x) = f(x) & \text{für } x \in (a, b], \\ u(a) = u_a \end{cases} \quad (27.32)$$

für gegebenes $u_a \in \mathbb{R}$ erfüllt. Die Funktion $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ wird gegeben durch

$$u(\bar{x}) = u_a + \int_a^{\bar{x}} f(x) dx \quad \text{für } \bar{x} \in [a, b],$$

wobei

$$\int_0^{\bar{x}} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^j f(x_{i-1}^n) h_n,$$

mit $\bar{x} = x_j^n$, $x_i^n = a + i h_n$, $h_n = 2^{-n}(b - a)$. Genauer formuliert ist für $n = 1, 2, \dots$

$$\left| \int_a^{\bar{x}} f(x) dx - \sum_{i=1}^j f(x_{i-1}^n) h_n \right| \leq \frac{1}{2}(\bar{x} - a) L_f h_n, \quad (27.33)$$

wobei L_f die Lipschitz-Konstante von $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist. Ist außerdem $|f(x)| \leq M_f$ für $x \in [a, b]$, dann ist $u(x)$ Lipschitz-stetig zur Lipschitz-Konstanten M_f und $K_u \leq \frac{1}{2} L_f$, wobei K_u die Konstante zur gleichmäßigen Differenzierbarkeit von $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist.

27.9 Bemerkungen zur Schreibweise

Wir können die Namen der Variablen vertauschen und (27.27) auch als

$$u(x) = \int_0^x f(y) dy \quad (27.34)$$

schreiben.

Wir werden den Fundamentalsatz in der Form

$$\int_a^b u'(x) dx = u(b) - u(a) \quad (27.35)$$

benutzen, was besagt, dass das Integral $\int_a^b f(x) dx$ der Differenz $u(b) - u(a)$ entspricht, wobei $u(x)$ die Stammfunktion von $f(x)$ ist. Manchmal werden wir auch die Schreibweise $[u(x)]_{x=a}^{x=b} = u(b) - u(a)$ oder in Kurzform $[u(x)]_a^b = u(b) - u(a)$ benutzen:

$$\int_a^b u'(x) dx = [u(x)]_{x=a}^{x=b} = [u(x)]_a^b.$$

Gelegentlich wird auch die Schreibweise

$$\int f(x) dx,$$

ohne Integrationsgrenzen für eine Stammfunktion von $f(x)$ verwendet. Mit dieser Schreibweise würde beispielsweise gelten:

$$\int dx = x + C, \quad \int x dx = \frac{x^2}{2} + C, \quad \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C,$$

mit konstantem C . Wir werden diese Schreibweise in diesem Buch nicht verwenden. Wir halten fest, dass die Formel $x = \int dx$ benutzt werden kann, um auszudrücken, dass „das Ganze der Summe der Teile entspricht“.

27.10 Alternative Berechnungsmethoden

Beachten Sie, dass wir ebenso gut $U^n(x_i^n)$ aus $U^n(x_{i-1}^n)$ mit der Gleichung

$$U^n(x_i^n) = U^n(x_{i-1}^n) + f(x_i^n)h_n \quad (27.36)$$

berechnen könnten. Diese Gleichung erhalten wir, wenn wir $f(x_{i-1}^n)$ durch $f(x_i^n)$ ersetzen, oder

$$U^n(x_i^n) = U^n(x_{i-1}^n) + \frac{1}{2}(f(x_{i-1}^n) + f(x_i^n))h_n \quad (27.37)$$

mit Hilfe des Mittelwerts $\frac{1}{2}(f(x_{i-1}^n) + f(x_i^n))$. Diese Alternativen mögen gewisse Vorteile haben und wir werden auf sie im Kapitel „Numerische Quadratur“ zurückkommen. Der Beweis des Fundamentalsatzes ist mit diesen alternativen Konstrukten prinzipiell gleich und wegen der Eindeutigkeit ergeben alle diese alternativen Konstruktionen dasselbe Ergebnis.

27.11 Das Fahrradtachometer

Ein Beispiel einer physikalischen Situation, die durch das Anfangswertproblem (27.2) modelliert wird, ist ein Radfahrer auf einer Geraden, wobei $u(x)$ der momentanen Position zur Zeit x entspricht, $u'(x)$ der Geschwindigkeit zur Zeit x und $u(a) = u_a$ der Anfangsposition zur Startzeit $x = a$. Die Lösung der Differentialgleichung (27.2) entspricht der Positionsbestimmung des Radfahrers zur Zeit $a < x \leq b$, wenn wir die Anfangsposition zur Startzeit $x = a$ und die Geschwindigkeit $f(x)$ zu jeder Zeit x kennen. Ein normales Fahrradtachometer löst dieses Problem, da es die momentane Geschwindigkeit $f(x)$ misst und die zurückgelegte Entfernung $u(x)$ liefert. Ist dies ein gutes Beispiel? Ist es nicht in Wahrheit so, dass das Tachometer den zurückgelegten Abstand misst und dann die augenblickliche (Durchschnitts-)Geschwindigkeit anzeigt? Um diese Frage definitiv zu beantworten, müssten wir detailliert untersuchen, wie ein Tachometer tatsächlich funktioniert und den Leser dann dazu bringen, dieses Problem zu lösen.

27.12 Geometrische Interpretation des Integrals

In diesem Abschnitt wollen wir den Beweis des Fundamentalsatzes so interpretieren, dass das Integral einer Funktion der Fläche unterhalb des Graphen dieser Funktion entspricht. Um genauer zu sein, ist die Lösung $u(\bar{x})$ durch (27.3) gleich der Fläche unter dem Graphen der Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $[a, \bar{x}]$, vgl. Abb. 27.6. Damit diese Diskussion Sinn macht, ist es natürlich, davon auszugehen, dass $f(x) \geq 0$.

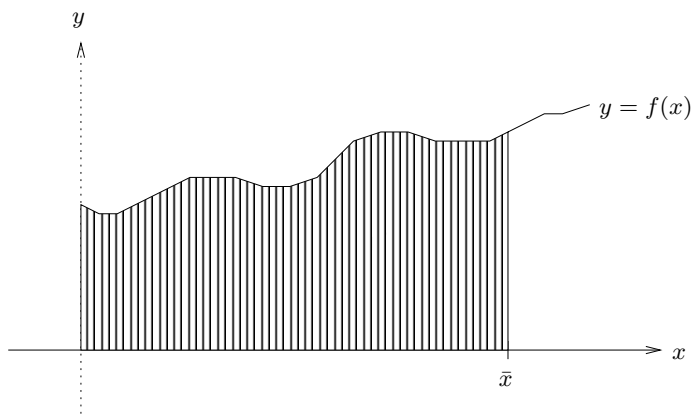


Abb. 27.6. Fläche unter $y = f(x)$

Natürlich müssen wir erklären, was wir unter der Fläche unter dem Graphen der Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $[a, \bar{x}]$ verstehen. Dazu interpretieren wir zunächst die Näherung $U^n(\bar{x})$ von $u(\bar{x})$ als Fläche. Wir wiederholen aus den vorherigen Abschnitten, dass

$$U^n(x_j^n) = \sum_{i=1}^j f(x_{i-1}^n) h_n,$$

mit $x_j^n = \bar{x}$. Nun können wir $f(x_{i-1}^n) h_n$ als die Fläche eines Rechtecks mit Grundseite h_n und Höhe $f(x_{i-1}^n)$ betrachten, vgl. Abb. 27.7.

Somit können wir die Summe

$$\sum_{i=1}^j f(x_{i-1}^n) h_n$$

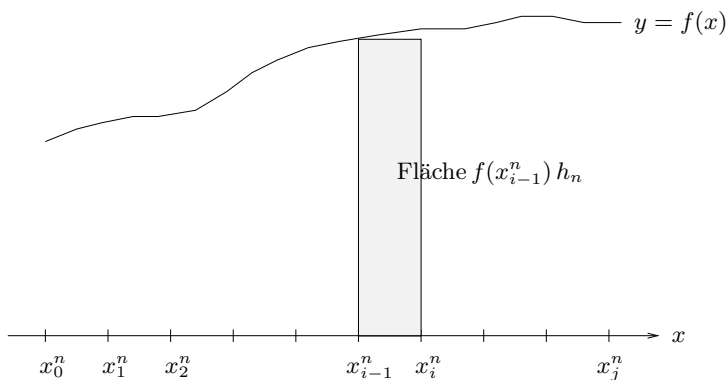


Abb. 27.7. Fläche $f(x_{i-1}^n) h_n$ eines Rechtecks

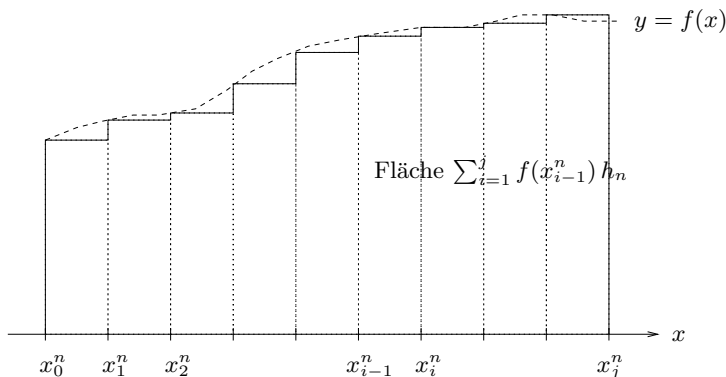


Abb. 27.8. Fläche $\sum_{i=1}^j f(x_{i-1}^n) h_n$ unter einer treppenförmigen Näherung an $f(x)$

als Fläche einer Ansammlung von Rechtecken betrachten, die eine treppenförmige Näherung an $f(x)$ bilden, wie in Abb. 27.8 dargestellt. Diese Summe wird auch *Riemannsche Summe* genannt.

Intuitiv glauben wir, dass die Fläche unter der treppenförmigen Näherung $U^n(\bar{x})$ an $f(x)$ auf $[a, \bar{x}]$ die Fläche unter dem Graphen von $f(x)$ auf $[a, \bar{x}]$ annähert, wenn n gegen Unendlich strebt und somit $h_n = 2^{-n}(b-a)$ gegen Null strebt. Da $\lim_{n \rightarrow \infty} U^n(\bar{x}) = u(\bar{x})$, führt uns das zur *Definition* der Fläche unter $f(x)$ auf dem Intervall $[a, \bar{x}]$ als dem Grenzwert $u(\bar{x})$.

Beachten Sie die Logik dahinter: Der Wert $U^n(\bar{x})$ entspricht der Fläche unter der treppenförmigen Näherung von $f(x)$ auf $[a, \bar{x}]$. Wir wissen, dass $U^n(\bar{x})$ gegen $u(\bar{x})$ strebt, wenn n gegen Unendlich strebt und rein intuitiv fühlen wir, dass der Grenzwert der Fläche unter der Treppe der Fläche unter dem Graphen von $f(x)$ auf $[a, \bar{x}]$ gleichen sollte. Wir definieren dann einfach die Fläche unter $f(x)$ auf $[a, \bar{x}]$ als $u(\bar{x})$. Durch die Definition interpretieren wir also das Integral von $f(x)$ auf $[a, \bar{x}]$ als die Fläche unter dem Graphen der Funktion $f(x)$ auf $[a, \bar{x}]$. Beachten Sie, dass *dies eine Interpretation ist*. Es ist ansonsten keine gute Idee zu sagen, dass das Integral eine Fläche *ist*. Allein schon deswegen, da das Integral vieles repräsentieren kann, wie einen Abstand, einen Geldbetrag, ein Gewicht oder etwas anderes. Wenn wir das Integral als Fläche interpretieren, dann interpretieren wir auch einen Abstand, einen Geldbetrag, ein Gewicht oder etwas anderes als Fläche. Wir verstehen, dass wir diese Interpretation nicht wörtlich nehmen können, da ein Abstand nicht einer Fläche *gleich sein kann*, aber er kann als Fläche *interpretiert* werden. Wir hoffen, dass der Leser diesen (feinen) Unterschied erfasst.

Als Beispiel wollen wir die Fläche F unter dem Graphen der Funktion $f(x) = x^2$ zwischen $x = 0$ und $x = 1$ berechnen:

$$F = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3}.$$

Dies ist ein Beispiel für die Magie der Infinitesimalrechnung, die hinter ihrem enormen Erfolg steht. Wir sind in der Lage eine Fläche zu berechnen, die prinzipiell die Summe vieler sehr kleiner Stücke ist, ohne tatsächlich die mühevollen Arbeit auf uns nehmen zu müssen, diese Summe tatsächlich auszuwerten. Wir finden einfach nur die Stammfunktion $u(x)$ von x^2 und berechneten $F = u(3) - u(0)$ ohne die geringste Mühe. Natürlich kennen wir die Teleskopsummation hinter dieser Illusion, aber wenn wir davon einmal absehen, dann ist es doch beeindruckend, oder? Als Ausblick und um einen Bogen zu schließen, erinnern wir an den Jugendtraum von Leibniz im Kapitel „Kurzer Kurs zur Infinitesimalrechnung“.

27.13 Das Integral als Grenzwert Riemannscher Summen

Der Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung besagt, dass das Integral von $f(x)$ über das Intervall $[a, b]$ dem Grenzwert der Riemannschen Summen entspricht:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2^n} f(x_{i-1}^n) h_n,$$

wobei $x_i^n = a + i h_n$, $h_n = 2^{-n}(b - a)$, oder etwas genauer für $n = 1, 2, \dots$

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=1}^{2^n} f(x_{i-1}^n) h_n \right| \leq \frac{1}{2}(b - a) L_f h_n,$$

wobei L_f die Lipschitz-Konstante von f ist. Wir können daher das Integral $\int_a^b f(x) dx$ als Grenzwert Riemannscher Summen definieren, ohne die zugrunde liegende Differentialgleichung $u'(x) = f(x)$ zu beschwören. Diese Vorgehensweise ist sinnvoll, um Integrale von Funktionen mit mehreren Variablen zu definieren (sogenannte Mehrfachintegrale, wie Doppelintegrale und Dreifachintegrale), da es für diese Verallgemeinerungen keine zugrunde liegende Differentialgleichung gibt.

Bei unserer Formulierung des Fundamentalsatzes der Differential- und Integralrechnung haben wir die Verknüpfung des Integrals $\int_a^x f(y) dy$ mit der verwandten Differentialgleichung $u'(x) = f(x)$ hervorgehoben, aber, wie eben deutlich gemacht, hätten wir diese Verknüpfung auch in den Hintergrund stellen können und das Integral als Grenzwert Riemannscher Summen definieren können, ohne die zugrunde liegende Differentialgleichung zu beschwören. Dadurch erhalten wir eine Verbindung zur Vorstellung, das Integral einer Funktion als Fläche unter dem Graphen der Funktion zu interpretieren und wir werden eine natürliche Erweiterung zu Mehrfachintegralen in den Kapiteln „Doppelintegrale“ und „Mehrfachintegrale“ finden.

Die Definition des Integrals als Grenzwert Riemannscher Summen stellt uns vor die Frage der Eindeutigkeit: Da es verschiedene Wege gibt, Riemannsche Summen zu konstruieren, müssen wir uns fragen, ob alle Grenzwerte wirklich gleich sind. Wir werden im Kapitel „Numerische Quadratur“ auf diese Frage zurückkommen und (natürlich) eine bejahende Antwort geben.

27.14 Ein analoger Integrator

James Thompsen, der Bruder von Lord Kelvin, konstruierte 1876 einen analogen mechanischen Integrator, der aus zwei rotierenden Scheiben besteht, die über eine weitere senkrechte Scheibe, die auf verschiedene Radien der ersten Scheibe eingestellt werden kann, mit einem Zylinder verbunden sind, vgl. Abb. 27.9. Die Idee dahinter war, Probleme der Analytischen Maschine von Babbage aus den 1830ern zu beseitigen. Lord Kelvin versuchte mit einem System derartiger analoger Integratoren verschiedene Probleme von praktischem Interesse zu berechnen, wie etwa die Vorhersage der Gezeiten, aber er stieß auf ernste Probleme genügend genau zu rechnen. Ähnliche Ideen wurden von Vannevar Bush am MIT (Massachusetts Institute of Technology) in den 1930ern verfolgt, der einen *Differential Analyzer* konstruierte, der aus einer Ansammlung analoger Integratoren bestand, die programmierbar waren, um Differentialgleichungen zu lösen. Er wurde im Zweiten Weltkrieg eingesetzt, um Flugbahnen von Geschossen zu berechnen. Eine Dekade danach übernahm der digitale Rechner das Feld und der Kampf zwischen Arithmetik und Geometrie, der vor mehr als 2000 Jahren zwischen den Schulen von Pythagoras und Euklid entfacht wurde, fand schließlich ein Ende.

Aufgaben zu Kapitel 27

27.1. Bestimmen Sie Stammfunktionen auf $\mathbb{R}$ für (a) $(1+x^2)^{-2}2x$, (b) $(1+x)^{-99}$, (c) $(1+(1+x^3)^2)^{-2}(1+x^3)3x^2$.

27.2. Berechnen Sie die Fläche unter dem Graphen der Funktion $(1+x)^{-2}$ zwischen $x=1$ und $x=2$.

27.3. Ein Auto fahre entlang der x -Achse mit der Geschwindigkeit $v(t) = t^{\frac{3}{2}}$ beginnend bei $x=0$ für $t=0$. Berechnen Sie die Position des Autos für $t=10$.

27.4. Führen Sie den Beweis des Fundamentalsatzes für die Versionen (27.36) und (27.37) aus.

27.5. Konstruieren Sie einen *mechanischen Integrator*, der die Differentialgleichung $u'(x) = f(x)$ für $x > 0$, $u(0) = 0$ mit Hilfe eines analogen mechanischen Geräts löst. Hinweis: Benutzen Sie einen drehenden Kegel und einen Faden.

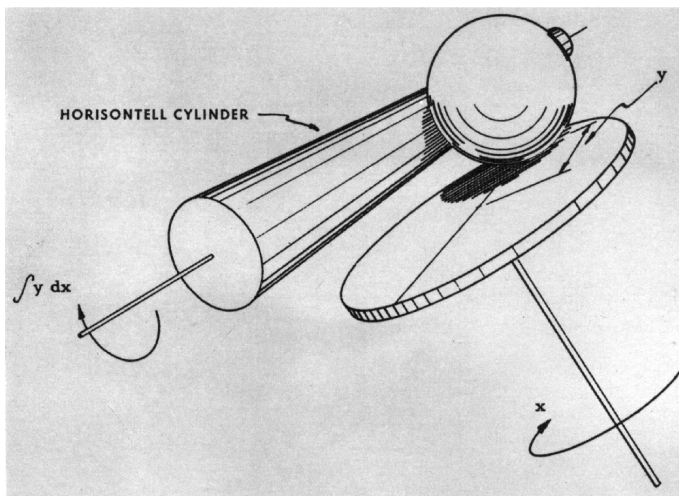


Abb. 27.9. Das Prinzip eines analogen Integrators

27.6. Erklären Sie das Prinzip hinter Thompsons analogem Integrator.

27.7. Konstruieren Sie einen *mechanischen* Tachometer, der die Geschwindigkeit und den zurückgelegten Weg angibt. Hinweis: Prüfen Sie die Konstruktion ihres Fahrradtachometers.

27.8. Finden Sie die Lösungen für das Anfangswertproblem $u'(x) = f(x)$ für $x > 0$, $u(0) = 1$ für die folgenden Funktionen: (a) $f(x) = 0$, (b) $f(x) = 1$, (c) $f(x) = x^r$, $r > 0$.

27.9. Finden Sie die Lösung zum Anfangswertproblem zweiter Ordnung $u''(x) = f(x)$ für $x > 0$, $u(0) = u'(0) = 1$ für die folgenden Funktionen: (a) $f(x) = 0$, (b) $f(x) = 1$, (c) $f(x) = x^r$, $r > 0$. Erklären Sie, warum zwei Anfangsbedingungen angegeben sind.

27.10. Lösen Sie das Anfangswertproblem $u'(x) = f(x)$ für $x \in (0, 2]$, $u(0) = 1$, mit $f(x) = 1$ für $x \in [0, 1)$ und $f(x) = 2$ für $x \in [1, 2]$. Zeichnen Sie einen Graphen für die Lösung und berechnen Sie $u(3/2)$. Zeigen Sie, dass $f(x)$ nicht Lipschitz-stetig auf $[0, 2]$ ist und bestimmen Sie, ob $u(x)$ auf $[0, 2]$ Lipschitz-stetig ist.

27.11. Ein Lichtstrahl benötigt die Zeit $t = \frac{d}{c/n}$, um einen Körper zu durchdringen, wobei c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist; n ist der Brechungsindex des Körpers und d ist seine Dicke. Wie lange benötigt ein Lichtstrahl, um auf dem kürzesten Weg durch die Mitte eines Wasserglases zu kommen, wenn der Brechungsindex von Wasser $n_w(r)$ vom Abstand r von der Glasmitte abhängt. Der Radius des Glases sei R und das Glas habe eine konstante Dicke h und einen konstanten Brechungsindex n_g .



Abb. 27.10. David Hilbert, (1862–1943), im Alter von 24: „Eine mathematische Theorie darf nicht als vollständig angesehen werden, bevor sie nicht so klar ist, dass man sie dem Erstbesten auf der Straße erklären kann“

27.12. Seien f und g Lipschitz-stetig auf $[0, 1]$. Zeigen Sie, dass dann und nur dann $\int_0^1 |f(x) - g(x)| dx = 0$, wenn $f = g$ auf $[0, 1]$. Gilt dies auch, wenn $\int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$ durch $\int_0^1 (f(x) - g(x)) dx$ ersetzt wird?

Angewandte Mathematik: Body and Soul
Band 2: Integrale und Geometrie in $\mathbb{R}^n$
Eriksson, K.; Estep, D.; Johnson, C.
2005, XXIV, 362 S., Hardcover
ISBN: 978-3-540-22879-0