

# 5 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

Differentialgleichungen sind Bestimmungsgleichungen für Funktionen. In den folgenden Kapiteln werden wir uns mit gewöhnlichen Differentialgleichungen befassen, in denen eine Funktion in Abhängigkeit von einer Variablen, meistens der Zeit, gesucht wird. Differentialgleichungen erhalten wir in der Mechanik z.B. aus dem Aktionsgesetz  $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$ . Andere Differentialgleichungen erhalten wir, wenn wir die Änderung einer Größe betrachten, die zu dieser Größe selbst proportional ist, wie z.B. beim radioaktiven Zerfall oder der Entladung eines Kondensators.

## 5.1 Einführung

### 5.1.1 Was ist eine Differentialgleichung (DGL)?

Eine Differentialgleichung (DGL) ist eine Bestimmungsgleichung für eine Funktion, d.h. die Lösung einer Differentialgleichung ist eine Funktion.

**Definition 33.** Eine Gleichung, in der gewöhnliche Ableitungen einer unbekannten Funktion  $x(t)$  bis zur  $n$ -ten Ordnung auftreten, heißt eine gewöhnliche Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung.

Eine gewöhnliche Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung enthält als höchste Ableitung die  $n$ -te Ableitung  $x^{(n)}(t)$  der unbekannten Funktion  $x(t)$ , kann aber auch Ableitungen niedrigerer Ordnung sowie die Funktion  $x(t)$  und deren unabhängige Variable  $t$  enthalten. Sie ist darstellbar in impliziter Form  $F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n)}) = 0$  oder, falls diese Gleichung nach der höchsten Ableitung  $x^{(n)}$  auflösbar ist, in expliziter Form  $x^{(n)} = f(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n-1)})$ . Neben gewöhnlichen DGLs gibt es partielle DGLs, die Bestimmungsgleichungen für Funktion mehrerer Variablen sind, vgl. Kap. 12.

Gewöhnliche Differentialgleichungen haben Formen wie  $x(t) = c\dot{x}$ ,  $\dot{x}(t) = -c\ddot{x}$  oder  $x(t) = c_1\dot{x} + c_2\ddot{x} + c_3x^{(3)} + \dots$ . Physikalische Beispiele für gewöhnliche DGLs sind (radioaktiver) Zerfall ( $\lambda < 0$ ) oder exponentielles Wachstum ( $\lambda > 0$ ) beschrieben durch  $dN = \lambda N dt$  und in der Mechanik die Bewegungsgleichung  $F = ma = m\ddot{x}$  z.B. mit  $F = -kx$  als Rückstellkraft beim Federpendel:  $m\ddot{x} = -kx$ .

Da eine Differentialgleichung eine Bestimmungsgleichung für eine unbekannte Funktion ist, sind ihre Lösungen Funktionen.

**Definition 34.** Eine Funktion  $x(t)$  ist Lösung oder Integral der Differentialgleichung, wenn sie mit ihren Ableitungen die Differentialgleichung identisch erfüllt.

Eine Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung hat eine *allgemeine Lösung*, die noch  $n$  voneinander unabhängige Parameter (Integrationskonstanten) enthält. Eine *spezielle* oder *partikuläre Lösung* wird aus der allgemeinen Lösung gewonnen, indem man auf Grund zusätzlicher Bedingungen den  $n$  freien Parametern feste Werte zuweist. Dies kann durch Anfangs- oder durch Randbedingungen geschehen.

Bei einem *Anfangswertproblem* bzw. einer *Anfangswertaufgabe* werden der Lösungsfunktion  $x = x(t)$  insgesamt  $n$ -Werte, nämlich der Funktionswert sowie die Werte der  $n - 1$  Ableitungen an einer Stelle  $t_0$  vorgeschrieben:  $x(t_0)$ ,  $\dot{x}(t_0)$ ,  $\ddot{x}(t_0)$ , ...,  $x^{(n-1)}(t_0)$ . Anschaulich geben diese Anfangswertbedingungen bei einer Differentialgleichung 1. Ordnung einen Punkt  $(t_0, x(t_0))$ , durch den die Kurve verläuft, bzw. bei einer DGL zweiter Ordnung einen Punkt und die Steigung in diesem Punkt. *Anfangsbedingungen* beschreiben also einen Anfangszustand des Systems. Mit der DGL werden die Regeln zur Beschreibung der weiteren Entwicklung des Systems vorgegeben.

Bei einem *Randwertproblem* bzw. einer *Randwertaufgabe* werden der gesuchten speziellen Lösung  $y(x)$  einer Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung an  $n$  verschiedenen Stellen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  die Funktionswerte  $y(x_1), y(x_2), \dots, y(x_n)$  vorgeschrieben. Sie werden als Randwerte oder Randbedingungen bezeichnet. Physikalische Beispiele sind ein an einem Ende eingespannter Stab oder die Auflagepunkte einer Brücke auf ihren Trägern. In diesen Kapiteln werden wir es mit Anfangsbedingungen zu tun haben, Randbedingungen werden uns in Kap. 12 begegnen.

### 5.1.2 Lösung durch Raten

Beim Federpendel ist die Bewegung durch die rückstellende Kraft  $F_r = -kx$  der Feder bestimmt. Einsetzen in die Bewegungsgleichung liefert die DGL

$$\ddot{x} = -\omega^2 x(t) \quad \text{mit der Abkürzung} \quad \omega^2 = k/m. \quad (5.1)$$

Wir suchen also eine Funktion  $x(t)$ , deren zweite Ableitung das Negative der Funktion multipliziert mit einem Vorfaktor ergibt. Eine Funktion, die diese Anforderungen erfüllt, ist eine Winkelfunktion wie z.B. der Sinus

$$x(t) = \sin(ct). \quad (5.2)$$

Diese ergibt als erste Ableitung  $\dot{x} = c \cos(ct)$  und als zweite Ableitung wieder die Ausgangsfunktion multipliziert mit einem negativen Vorfaktor:

$$\ddot{x} = -c^2 \sin(ct) = -c^2 x(t). \quad (5.3)$$

Die Funktion  $x(t) = \sin(\omega t)$  löst also nach Def. 34 mit  $c = \omega$  die Differentialgleichung. Allerdings finden wir auch eine andere Lösung  $x(t) = \cos(\omega t)$  mit  $\dot{x} = -\omega \sin(\omega t)$  und  $\ddot{x} = -\omega^2 \cos(\omega t) = -\omega^2 x(t)$ . Da beide Lösungen der DGL sind, ist es auch ihre Linearkombination:

$$x(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t), \quad (5.4)$$

wie man durch zweimaliges Ableiten sehen kann.

Die Linearkombination ist die allgemeine Lösung, die anderen sind Spezialfälle, bei denen der Koeffizient  $A$  bzw.  $B$  verschwindet. Die Koeffizienten ergeben sich aus den Anfangsbedingungen: so ergibt sich für die Anfangswerte  $x(0) = 0$  und  $\dot{x}(0) = v_{\max}$  (Nulldurchgang) der Sinus als Lösung, für  $x(0) = x_{\max}$  und  $\dot{x}(0) = 0$  (maximale Auslenkung) dagegen der Kosinus. Für andere Anfangswerte ergibt sich die allgemeine Lösung (5.4).

### 5.1.3 Gewöhnliche lineare DGL erster Ordnung

Eine Differentialgleichung erster Ordnung enthält nur die gesuchte Funktion und ihre erste Ableitung. Die Differentialgleichung ist gewöhnlich, wenn die gesuchte Funktion nur von einer Variablen abhängt und damit keine partiellen Ableitungen auftreten. Die Differentialgleichung ist linear, wenn (1)  $x$  und  $\dot{x}$  nur linear, d.h. in der ersten Potenz auftreten, und (2) keine gemischten Produkte  $x\dot{x}$  auftreten.

**Definition 35.** Eine Differentialgleichung 1. Ordnung heißt linear, wenn sie in der Form  $\dot{x} = f(t)x + g(t)$  darstellbar ist.

Die Funktion  $g(t)$  wird als *Störfunktion* oder *Störglied* bezeichnet. Fehlt das Störglied, so handelt es sich um eine *homogene lineare Differentialgleichung* erster Ordnung. Ist  $g(t)$  von Null verschieden, so wird die Differentialgleichung als inhomogen bezeichnet. Der Zusatzterm  $g(t)$  ist die *Inhomogenität*.

## 5.2 Homogene lineare DGL erster Ordnung

**Definition 36.** Eine lineare homogene Differentialgleichung 1. Ordnung ist eine Bestimmungsgleichung für eine Funktion  $x(t)$ , in der nur die Funktion  $x$ , ihre erste Ableitung  $\dot{x}$  und die gegebenenfalls von  $t$  abhängige Proportionalitätskonstante  $a$  auftreten:  $\dot{x} = a x$ .

Gesucht wird also eine Funktion  $x(t)$ , die an jeder Stelle  $t$  dem Wert  $\dot{x}(t)$  ihrer ersten Ableitung proportional ist. Eine Lösungsfunktion können wir erraten: die Exponentialfunktion.

Wir können jedoch auch ein formaleres Verfahren anwenden. Für homogene DGLs erster Ordnung ist das Standardlösungsverfahren die *Trennung*

bzw. *Separation der Variablen*. Dazu werden alle Terme mit  $t$  auf die eine Seite der Gleichung gebracht, alle Terme mit  $x$  auf die andere:

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) \quad \Rightarrow \quad a(t)x = \frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad a(t) dt = \frac{dx}{x} . \quad (5.5)$$

Beide Seiten der Gleichung werden nun integriert:

$$\int a(t) dt = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int a(t) dt = \ln x + c_1 . \quad (5.6)$$

Auflösen nach  $x$  liefert die *allgemeine Lösung* der Differentialgleichung:

$$\exp \left\{ \int a(t) dt \right\} = x c_2 \quad \Rightarrow \quad x = c \exp \left\{ \int a(t) dt \right\} . \quad (5.7)$$

Die Integrationskonstante  $c$  wird aus den Anfangsbedingungen bestimmt. Ihre Zahl hängt von der Ordnung der DGL ab, d.h. im Falle einer Differentialgleichung 1. Ordnung wird ein Anfangswert benötigt.



Oder zusammengefasst: eine homogene Differentialgleichung 1. Ordnung vom Typ  $\dot{x} + a(t)x = 0$  lässt sich durch Trennung der Variablen lösen. Die allgemeine Lösung ist

$$x = c \exp \left\{ - \int f a(t) dt \right\} . \quad (5.8)$$

Das zugehörige Lösungsverfahren besteht aus folgenden Schritten:

1. Trennung der beiden Variablen.
2. Integration der beiden Seiten der Gleichung.
3. Auflösung der allgemeinen Lösung nach  $x$ .
4. Bestimmung der Integrationskonstanten aus den Anfangsbedingungen.

Das Integral in (5.8) ist einfach lösbar falls  $a$  eine Konstante ist:  $\int a dt = at$ . Damit wird die allgemeine Lösung der DGL  $x = c e^{at}$ . Mit der Anfangsbedingung  $x(0) = x_0$  ergibt sich als spezielle Lösung  $x = x_0 e^{at}$ .

*Beispiel 60. Radioaktiver Zerfall:* Die Zahl  $dN/dt$  der pro Zeiteinheit zerfallenden Atome ist proportional der Zahl  $N$  der vorhandenen Atome und einer Zerfallskonstanten  $\lambda$  [ $s^{-1}$ ]. Damit ergibt sich die Differentialgleichung

$$\dot{N} = -\lambda N \quad \Rightarrow \quad dN = -\lambda N dt . \quad (5.9)$$

Separation der Variablen liefert:

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt . \quad (5.10)$$

Die Integration ergibt

$$\ln N + \ln c_1 = -\lambda t \quad (5.11)$$

und mit der Randbedingung  $N(0) = N_0$

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t} . \quad (5.12)$$

□

*Beispiel 61. Exponentielles Wachstum* wird ähnlich beschrieben. Es tritt auf, wenn die Änderung der Zahl der Individuen einer Population (Frösche oder Seerosen im Teich, Bakterien in einer Nährlösung) proportional zu ihrer Zahl und einer Vermehrungsrate ist. Die Differentialgleichung  $dN = \lambda N dt$  unterscheidet sich von (5.9) nur durch das fehlende Minus-Zeichen auf der rechten Seite: hier ist die Änderung nicht negativ (Abnahme der Population) sondern positiv (Zunahme der Population). Das Lösungsverfahren ist völlig analog. Separation der Variablen liefert  $dN/N = \lambda dt$ , Integration liefert  $\ln N + \ln c_1 = \lambda t$ . Berücksichtigung der Randbedingung  $N(0) = N_0$  führt auf die spezielle Lösung

$$N(t) = N_0 e^{\lambda t} . \quad (5.13)$$

□

*Beispiel 62. Gradlinige Bewegung mit Reibung:* Die Beschleunigung eines sich entlang einer Geraden bewegenden Körpers ist  $a = -\beta v$ . Die Bewegungsgleichung wird damit

$$\ddot{x} = \dot{v} = -\beta v , \quad (5.14)$$

d.h. die Bewegung wird durch eine lineare homogene Differentialgleichung erster Ordnung für  $v(t)$  beschrieben. Separation der Variablen liefert

$$\frac{dv}{v} = -\beta dt \quad (5.15)$$

und damit nach Integration mit der Anfangsbedingung  $v(0) = v_0$

$$v = v_0 e^{-\beta t} . \quad (5.16)$$

Für den Ort  $x(t)$  können wir ebenfalls eine Differentialgleichung  $dx = v dt$  aufstellen. Mit der Anfangsbedingung  $x(0) = x_0$  ergibt sich die Lösung

$$x = x_0 + \frac{v_0}{\beta} (1 - e^{-\beta t}) . \quad (5.17)$$

Aus der Kombination von (5.16) und (5.17) erhalten wir für die Geschwindigkeit in Abhängigkeit vom Ort  $v(x) = v_0 - \beta(x - x_0)$ . □

### 5.3 Homogene lineare DGL erster Ordnung mit konstantem Summanden

Wir werden jetzt die Differentialgleichung um einen konstanten Summanden erweitern. Eine physikalische Situation wäre der Fall mit Reibung: dann tritt in der Bewegungsgleichung (5.15) aus Bsp. 62 zusätzlich ein konstanter Term  $mg$  auf, der die Gravitationskraft beschreibt, vgl. Bsp. 63.

**Definition 37.** Eine Differentialgleichung der Form  $\dot{x} = ax + b$  wird als homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung mit konstantem Summanden bezeichnet.

Diese Form der DGL lässt sich ebenfalls durch Separation der Variablen lösen, allerdings wird bei der Durchführung der Integration eine Substitution benötigt. Separation der Variablen liefert

$$ax + b = \frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad a dt = \frac{dx}{x + b/a} . \quad (5.18)$$

Jetzt werden wieder beide Seiten der Gleichung integriert:

$$\int a dt = \int \frac{dx}{x + b/a} . \quad (5.19)$$

Mit der Substitution  $u = x + b/a$  und  $u' = 1$  ergibt sich

$$\int a dt = \int \frac{du}{u} \quad (5.20)$$

und damit nach Ausführen der Integration  $at = \ln u + c_1$ , wobei wieder beide Integrationskonstanten auf der rechten Seite zusammengefasst sind. Auflösen nach  $u$  liefert  $u = ce^{at}$ . Re-Substitution ergibt  $x + b/a = ce^{at}$  und damit  $x = ce^{at} - b/a$ . Die Integrationskonstante ergibt sich aus  $y(0) = 0$  wegen  $0 = ce^0 - b/a$  zu  $c = b/a$ . Die Lösung der Differentialgleichung ist damit

$$x = -\frac{b}{a}e^{at} + \frac{b}{a} = \frac{b}{a}(1 - e^{at}) = x_0(1 - e^{at}) . \quad (5.21)$$



Dieses Verfahren lässt sich erweitern um einen Term, der die unabhängige Variable  $t$  enthält. Damit erhalten wir das folgende Kochrezept: Differentialgleichungen 1. Ordnung vom Typ  $\dot{x} = f(at + bx + c)$  bzw.  $\dot{x} = f(x/t)$  lassen sich durch die Substitutionen  $u = at + bx + c$  bzw.  $u = t/x$  lösen unter Verwendung der folgenden Schritte:

1. Durchführung der Substitution.
2. Integration der neuen Differentialgleichung 1. Ordnung für die Hilfsfunktion  $u$  durch Trennung der Variablen.
3. Rücksubstitution und Auflösen der Gleichung nach  $x$ .

*Beispiel 63.* Fall mit Stokes'scher Reibung: eine Masse  $m$  fällt mit einer Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  im Schwerfeld der Erde senkrecht nach unten. Als verzögernde Kraft wirkt eine Reibungskraft der Form  $-\beta v$ . Die Situation unterscheidet sich von der in Bsp. 62 dadurch, dass auf der rechten Seite der Bewegungsgleichung zusätzlich ein konstanter Term, die nach unten gerichtete Gewichtskraft  $-mg$ , auftritt. Die Bewegungsgleichung ist<sup>1</sup>

$$m \dot{v} = -mg - \beta v . \quad (5.22)$$

Separation der Variablen liefert

<sup>1</sup> In dieser Form ist das Koordinatensystem so gewählt, dass die positive  $z$ -Achse nach oben weist – daher wird die Gravitationskraft mit einem Minuszeichen angegeben und die Geschwindigkeit nimmt für  $t \rightarrow \infty$  negative Werte an. Alternativ kann auch die  $z$ -Achse nach unten zählen. Dann entfällt das negative Vorzeichen vor der Gewichtskraft und die Geschwindigkeit nimmt positive Werte an.

$$\frac{m dv}{mg + \beta v} = -dt . \quad (5.23)$$

Mit der Substitution  $u = mg + \beta v$  wird  $du = \beta dv$  und es ergibt sich

$$\frac{m}{\beta} \int_{v_0}^v \frac{du}{u} = - \int_{t_0}^t dt . \quad (5.24)$$

Hier bestimmen wir nicht erst die allgemeine Lösung und dann die Integrationskonstanten aus den Anfangsbedingungen sondern nutzen die Anfangsbedingungen als Integrationsgrenzen. Integration und Re-Substitution liefern

$$\frac{m}{\beta} \ln \left( \frac{mg + \beta v}{mg + \beta v_0} \right) = -t . \quad (5.25)$$

Anwendung der Exponentialfunktion liefert

$$\frac{mg + \beta v}{mg + \beta v_0} = \exp \left\{ -\frac{\beta}{m} t \right\} \quad (5.26)$$

und damit für die Geschwindigkeit

$$v(t) = -\frac{mg}{\beta} + \left( \frac{mg}{\beta} + v_0 \right) \exp \left\{ -\frac{\beta}{m} t \right\} . \quad (5.27)$$

Mit zunehmender Zeit strebt diese Geschwindigkeit gegen einen Grenzwert  $v_\infty$ . Anschaulich ist dann die abwärts beschleunigende Kraft  $-mg$  gleich der verzögernden Kraft  $\beta v$ , d.h. durch Gleichsetzen der beiden Kräfte erhalten wir  $v_\infty = -mg/\beta$ . Diese Endgeschwindigkeit erhalten wir auch, wenn wir in (5.27) die Zeit gegen  $\infty$  gehen lassen. Dann geht die Exponentialfunktion gegen Null und nur der erste Summand bleibt stehen.  $\square$

## 5.4 Inhomogene lineare DGL erster Ordnung

Bei der inhomogenen Differentialgleichung erster Ordnung verschwindet die Inhomogenität  $g(t)$  in Def. 35 nicht, d.h. es ist die Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(t) x + g(t) \quad (5.28)$$

zu lösen. Dieser Typ von DGL ist stets analytisch lösbar. Dazu wird zuerst die homogene Differentialgleichung durch Separation der Variablen gelöst; die Integrationskonstante wird noch nicht bestimmt. Dann wird eine beliebige spezielle Lösung  $x_p$  der inhomogenen Differentialgleichung bestimmt.

**Theorem 4.** *Die allgemeine Lösung einer linearen Differentialgleichung ergibt sich als die Summe einer speziellen inhomogenen Lösung und der allgemeinen homogenen Lösung.*

Mit dem ersten Schritt, der Lösung der homogenen DGL, haben wir uns bereits beschäftigt. Die Lösung der inhomogenen DGL kann auf zwei verschiedene Methoden erfolgen, durch Variation der Konstanten oder durch Aufsuchen einer speziellen (partikulären) Lösung.

### 5.4.1 Variation der Konstanten

Von der inhomogenen linearen DGL 1. Ordnung

$$\dot{x} = f(t)x + g(t) \quad (5.29)$$

lösen wir zunächst den homogenen Teil  $\dot{x} = f(t)x$  durch Trennung der Variablen und erhalten die allgemeine Lösung (5.8)

$$x_H = c \exp \left\{ \int f(t) dt \right\}. \quad (5.30)$$

Die Integrationskonstante  $c$  wird nicht bestimmt sondern durch eine unbekannte Funktion  $c(t)$  ersetzt. Der Produktansatz

$$x = c(t) \exp \left\{ \int f(t) dt \right\} \quad (5.31)$$

soll die inhomogene DGL lösen. Dazu leiten wir (5.31) unter Verwendung der Produkt- und Kettenregel ab:

$$\dot{x} = c(t) f(t) \exp \left\{ \int f(t) dt \right\} + \dot{c}(t) \exp \left\{ \int f(t) dt \right\}. \quad (5.32)$$

Einsetzen von (5.31) und (5.32) in (5.29) ergibt

$$cf \exp \left\{ \int f dt \right\} + \dot{c} \exp \left\{ \int f dt \right\} = fc \exp \left\{ \int f dt \right\} + g(t) \quad (5.33)$$

und damit als Differentialgleichung für die noch unbekannte Funktion  $c(t)$ :

$$\dot{c}(t) = g(t) \exp \left\{ - \int f(t) dt \right\}. \quad (5.34)$$

Diese Differentialgleichung kann direkt integriert werden.

$$c(t) = \int g(t) \exp \left\{ - \int f(t) dt \right\} dt + C. \quad (5.35)$$

Setzen wir diesen Ausdruck in die Lösung (5.30) der homogenen Differentialgleichung ein, so erhalten wir die Lösung der inhomogenen DGL

$$x = \left[ \int \left( g(t) \exp \left\{ - \int f(t) dt \right\} \right) dt + C \right] \exp \left\{ \int f(t) dt \right\}. \quad (5.36)$$

*Beispiel 64.* Die Differentialgleichung  $ax = \dot{x} + \cos(\omega t)$  ist eine inhomogene lineare DGL mit konstantem Koeffizienten  $a$  und der Inhomogenität  $\cos(\omega t)$ . Zuerst bestimmen wir die Lösung der homogenen DGL  $ax = \dot{x}$  durch Separation  $dx/x = a dt$ . Integration liefert  $\ln x = at + c_1$  und damit  $x = ce^{at}$ . Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung ergibt sich durch Variation der Konstanten  $x = c(t)e^{at}$ . Dieser Ansatz wird abgeleitet

$$\dot{x} = \dot{c}(t)e^{at} + c(t)ae^{at} \quad (5.37)$$



und in die DGL eingesetzt

$$\{\dot{c}(t) e^{at} + ac(t) e^{at}\} + \cos(\omega t) = a c(t) e^{at}. \quad (5.38)$$

Die Differentialgleichung für  $c(t)$  ist damit

$$\dot{c}(t) = -\cos(\omega t) e^{-at}. \quad (5.39)$$

Zweifache partielle Integration liefert

$$c(t) = -\frac{e^{-at}}{a^2 + \omega^2} (-a \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t)) + C \quad (5.40)$$

mit  $C$  als Integrationskonstante. Zusammen mit der Lösung der homogenen DGL ergibt sich die Gesamtlösung

$$x(t) = \left( -\frac{e^{-at}}{a^2 + \omega^2} (-a \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t)) + C \right) e^{at}. \quad (5.41)$$

□

### 5.4.2 Aufsuchen einer partikulären Lösung

Eine inhomogene lineare DGL 1. Ordnung vom Typ  $\dot{x} + f(t)x = g(t)$  lässt sich auch durch Aufsuchen einer partikulären Lösung lösen. Dazu lösen wir zunächst wieder die homogene DGL. Mit Hilfe eines geeigneten Lösungsansatzes, der noch einen oder mehrere Parameter enthält, wird eine partikuläre Lösung  $x_p$  der inhomogenen linearen DGL bestimmt. Die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen DGL ist dann die Summe aus der allgemeinen Lösung der homogenen und einer speziellen Lösung der inhomogenen DGL:  $x = x_H + x_p$ . Das Aufsuchen einer partikulären Lösung setzt etwas Erfahrung voraus, da wir einen geeigneten Lösungsansatz Raten müssen. Manchmal ist dieser ähnlich offensichtlich wie die in Abschn. 5.1.2 gefundene Lösung. In der Regel wird dieser Ansatz ähnlich der Inhomogenität gewählt, vgl. Abschn. 6.3.

*Beispiel 65.* Der homogene Teil der inhomogenen DGL  $\dot{x} = 4t - x$  ist gegeben als  $\dot{x} = -x$  und hat die allgemeine Lösung  $x_H = c e^{-t}$ . Der Ansatz für die spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung soll der Inhomogenität  $2t$  ähnlich sein. Die Inhomogenität hat die Form  $at + b$ , d.h. wir machen für die spezielle Lösung den Ansatz  $x_p = at + b$ . Ableiten ergibt  $\dot{x}_p = a$  und damit nach Einsetzen in die DGL  $a = 4t - at - b$ . Hier müssen die Glieder mit  $t$  jeweils die gleichen Vorfaktoren haben, da die Gleichung sonst nicht für beliebige  $t$  erfüllt sein kann, d.h. wir erhalten  $a = 4$ . Einsetzen liefert dann  $b = -4$  und damit für die spezielle Lösung  $x_p = 4t - 4$ . Die Lösung der inhomogenen DGL ergibt sich als die Summe aus der Lösung der homogenen DGL und der speziellen Lösung der inhomogenen DGL zu

$$x = c e^{-t} + 4t - 4, \quad (5.42)$$

die Integrationskonstante  $c$  wird aus den Anfangsbedingungen bestimmt. □

## Literaturhinweise

Eine sehr gute Einführung in gewöhnliche Differentialgleichungen mit vielen anwendungsbezogenen Beispielen und ohne weitreichende mathematische Voraussetzungen bietet Robinson [51]. Das Buch behandelt auch numerische Verfahren mit Schwerpunkt auf der Verwendung von MATLAB. Zwar etwas formaler aber ebenfalls sehr stark an Beispielen orientiert ist die Einführung von Heuser [29], eine sehr große Sammlung von Beispielen findet sich auch in Ayres [2]. Umfangreich und ausführlich ist die Einführung von Boyce und Prima [8]. Eine anspruchsvollere Darstellung, die aber alle Typen von Differentialgleichungen umfasst, geben King und Koautoren [32]. Gewöhnliche Differentialgleichungen, insbesondere die Schwingungsgleichung, werden auch im Korsch [33] und im Grossmann [24] behandelt. Eine Sammlung gewöhnlicher Differentialgleichungen mit ihren Lösungen findet sich in Polyanin und Zaitsev [44].

## Fragen

- 5.1.** Was ist eine Differentialgleichung?
- 5.2.** Was ist das Ergebnis einer Differentialgleichung?
- 5.3.** Was versteht man unter der Ordnung einer DGL?
- 5.4.** Was ist eine homogene, was eine inhomogene DGL?
- 5.5.** Wodurch zeichnet sich eine lineare DGL aus?
- 5.6.** Was ist eine gewöhnliche DGL, was eine partielle?
- 5.7.** Welche generelle Regel gilt für die Lösung einer inhomogenen DGL?
- 5.8.** Was versteht man unter dem Superpositionsprinzip?
- 5.9.** Welche Bedeutung haben Anfangsbedingungen bei einer DGL?
- 5.10.** Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Anfangsbedingungen und der Ordnung einer DGL?
- 5.11.** Skizzieren Sie das Standardlösungsverfahren für eine homogene DGL 1. Ordnung.
- 5.12.** Welche Lösungsverfahren gibt es für eine inhomogene Differentialgleichung 1. Ordnung?
- 5.13.** Wie wählt man den Lösungsansatz beim Aufsuchen der partikulären Lösung einer inhomogenen Differentialgleichung?

## Aufgaben

**5.1. •** Klassifizieren Sie die folgenden DGLs 1. Ordnung in linear/nicht-linear ( $a, b, c, d = \text{const}$ ) und homogen/inhomogen:

- |   |  |
|---|--|
| (a) $\dot{x} = xt$ ,                              | (b) $t^a \dot{x} - x = btx^c$ ,                |
| (c) $\dot{x} - ax = e^t$ ,                        | (d) $\dot{x} \cos t - x \sin t = a$ ,          |
| (e) $\dot{x} x^a + t^b = c$ ,                     | (f) $\dot{x} = \sqrt{x}$ ,                     |
| (g) $\dot{x} = t(1 + x^a)$ ,                      | (h) $t\dot{x} + x = a \ln t$ ,                 |
| (i) $\dot{x} \sqrt{x} - t = 0$ ,                  | (j) $\dot{x} = 5t^4(x + 1)$ ,                  |
| (k) $m\dot{v} + kv = mg$ ,                        | (l) $L\dot{I} + RI = U(t)$                     |
| (m) $t^2\ddot{x} - t\dot{x} + (t^2 - a^2)x = 0$ , | (n) $m\ddot{x} + kx = a\dot{x} - b\dot{x}^3$ . |

**5.2. •** Zeigen Sie, dass  $x = at/(1+t)$  Lösung der DGL  $t(1+t)\dot{x} - x = 0$  ist. Welche Lösung ergibt sich für die Randbedingung  $x(1) = 8$ ?

**5.3. •** Gegeben ist die Differentialgleichung  $\ddot{x} - 4\dot{x} - 5x = 0$ . Zeigen Sie, dass  $x = ae^{5t} + be^{-t}$  Lösung ist.

**5.4.** Zeigen Sie, dass (5.42) Lösung von  $\dot{x} = 4t - x$  ist.

**5.5. •** Zeigen Sie, dass die in der rechten Spalte gegebenen Funktionen Lösungen der links davon stehenden Differentialgleichungen sind:

$\ddot{x} - \dot{x}/t + 2/t$	$\dot{x} = c_1 + 2t + c_2t^2$
$t\ddot{x} + 2\dot{x} - tx = 0$	$tx = 2e^t - 3e^{-t}$
$\ddot{s} + 4s = 0$	$s = c_1 \cos(2t + c_2)$ .

**5.6. ••** Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen durch Separation der Variablen:

- |                                 |  |
|---------------------------------|--|
| (a) $x\dot{x} + 2t = 0$ ,       | (b) $(1 - \cos \alpha) d\varrho - \varrho \sin \alpha d\alpha = 0$ , |
| (c) $x(x-1)dy + y(y-1)dx = 0$ , | (d) $y' + y \cos x = 0$ ,  |
| (e) $x(x+1)y' = y$ ,            | (f) $y^2y' + x^2 = 1$ , $y(2) = 1$ ,                                 |
| (g) $x^2y' = y^2$ ,             | (h) $y'(1+x^2) = xy$ ,   |
| (i) $y' = (1-y)^2$ ,            | (j) $y' \sin y = -x$ ,   |
| (k) $y' + 4y = 0$ ,             | (l) $2y' + 4y = 0$ ,   |
| (m) $-3y' = 8y$ ,               | (n) $ay' - by = 0$ ,   |
| (o) $\dot{n} = -\lambda n$ ,    | (p) $-3y' + 18y = 0$ ,   |
| (q) $L\dot{I} + RI = 0$ ,       | (r) $2y' + 18y = 0$ ,  |
| (s) $3y' - 5ay = 0$ ,           | (t) $T\dot{u} + u = 0$ .   |

**5.7.** Die Differentialgleichung für die Entladung eines Kondensators (Ladung  $Q$ , Kapazität  $C$ ) über einen Widerstand  $R$  ist gegeben als  $\dot{Q} = -Q/(CR)$ . Lösen Sie die DGL.

**5.8. ••** Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen 1. Ordnung mit Hilfe einer geeigneten Substitution:

- (a)  $xy' = y + 4x$  ,                      (b)  $y' = (x + y + 1)^2$  ,  
 (c)  $x^2y' = \frac{1}{4}x^2 + y^2$  ,                (d)  $y' = \sin(y/x) + y/x$  ,  
 (e)  $yy' = x + y^2/x$  .

**5.9.** Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Differentialgleichungen:

- (a)  $(1 - \cos \alpha) d\rho - \rho \sin \alpha d\alpha = 0$                 (b)  $\dot{p} = kp/T$   
 (c)  $x(x - 1) dy + y(y - 1) dx = 0$  .

**5.10. •** Der Luftdruck nimmt mit der Höhe ab, wobei die Abnahme durch den Koeffizienten  $\rho_0 g/p_0$  charakterisiert ist mit  $\rho_0$  als der Dichte am Boden,  $p_0$  als dem Luftdruck am Boden und  $g$  als Gravitationsbeschleunigung. Stellen Sie die Differentialgleichung auf und lösen Sie sie.

**5.11. ••** Das Aufladen eines Kondensators wird durch die Differentialgleichung  $Q/C + R\dot{Q} = U$  beschrieben mit  $Q$  als Ladung,  $C$  als Kapazität,  $t$  als Zeit und  $U$  als Spannung. (a) Welche Lösung ergibt sich für  $U = 0$ ? In welcher Zeit ist die anfängliche Ladung  $Q_0$  auf  $Q_0/e$  abgesunken? (b) Lösen Sie die Differentialgleichung für eine konstante angelegte Spannung  $U_0 = \text{const.}$  (c) Lösen Sie die Differentialgleichung für eine Wechselspannung  $U = U_0 \sin(\omega t)$ .

**5.12. •** Ein Körper besitzt zur Zeit  $t_0$  die Temperatur  $T_0$ . Er steht im Wärmeaustausch mit seiner Umgebung, die eine konstante Temperatur  $T_L$  hat ( $T_L < T_0$ ). Der Abkühlungsprozess wird durch die Differentialgleichung  $\dot{T} = -k(T - T_L)$  mit  $k > 0$  als der Rate der Abgabe bzw. Aufnahme von Wärme beschrieben. Bestimmen Sie den zeitlichen Verlauf der Temperatur  $T$  des Körpers; gegen welchen Endwert strebt die Temperatur des Körpers?

**5.13. ••** Der Raum, in dem sich der Körper aus Aufg. 5.12 befindet, wird durch die Sonne gemäß einer Sinus-Funktion aufgeheizt, d.h. es ist  $T_L(t) \sim \sin t$ . Stellen Sie die Differentialgleichung auf und bestimmen Sie den zeitlichen Verlauf der Temperatur des Körpers.

**5.14. ••** Außerdem befindet sich im Raum aus Aufg. 5.13 noch ein Heizkörper, der gemäß einer Kosinusfunktion die Raumluft  $T_L$  erwärmt. Stellen Sie die Differentialgleichung unter Berücksichtigung beider Wärmequellen auf und bestimmen Sie den zeitlichen Verlauf der Temperatur.

**5.15.** Lösen Sie (5.39).

**5.16. ••** Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen 1. Ordnung durch Variation der Konstanten:

- (a)  $y' + xy = 4x$  ,                      (b)  $y' + \frac{y}{1+x} = e^{2x}$  ,  
 (c)  $xy' + y = x \sin x$  ,                (d)  $y' \cos x - y \sin x = 1$  ,  
 (e)  $y' - (2 \cos x)y = \cos x$  ,        (f)  $xy' - y = x^2 + 4$  ,  
 (g)  $xy' - y = x^2 \cos x$  ,                (h)  $y' + (\tan x)y = 5 \sin(2x)$  ,  
 (i)  $xy' + y = \ln x$  ,                      (j)  $y' - 3y = x e^x$  .

**5.17. ∞** Ein Stromkreis mit einem zeitabhängigen Ohmschen Widerstand wird durch die DGL  $\dot{I} + (2 \sin t) I = \sin(2t)$  beschrieben. Bestimmen Sie den zeitlichen Verlauf des Stroms  $I$  für den Anfangswert  $I(0) = 0$ .

**5.18. ∞** Lösen Sie die folgenden inhomogenen linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten durch Aufsuchen einer partikulären Lösung:

- |                                     |                            |
|-------------------------------------|----------------------------|
| (a) $y' = 2x - y$ ,                 | (b) $y' + 2y = 4e^{5x}$ ,  |
| (c) $y' + y = e^{-x}$ ,             | (d) $y' - 4y = 5 \sin x$ , |
| (e) $y' - 5y = \cos x + 4 \sin x$ , | (f) $y' - 6y = 3e^{6x}$ ,  |
| (g) $y' + 4y = x^3 - x$ ,           | (h) $y' - y = e^x$ ,       |
| (i) $y' + 3y = -\cos x$ .           |                            |

**5.19. ∞** Das exponentielle Wachstum in Bsp. 61 ist kein realistisches Modell für eine Bevölkerungsentwicklung, da es unbegrenztes Wachstum erlaubt und die beschränkten Ressourcen nicht berücksichtigt. Eine bessere Annäherung bietet die *logistische Gleichung*  $\dot{N} = \lambda N(1 - N/M)$  mit  $N$  als der Größe der Population,  $\lambda$  als der Wachstumsrate kleiner Populationen und  $M$  als der maximal erhaltbaren Population. Lösen Sie die Differentialgleichung für allgemeine  $N$  und skizzieren Sie den Verlauf der Lösung.

**5.20. ∞** Selbst bei einer kleinen Population ist das Wachstumsgesetz aus Bsp. 61 nur dann gültig, wenn es keine Verluste gibt. Ein Wachstumsmodell, dass zwei konkurrierende Spezies enthält, kann durch eine Differentialgleichung der Form

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(a_1x + a_2)}{x(a_3 - a_4y)}$$

mit  $a_i > 0$  und konstant beschrieben werden. Lösen Sie die Differentialgleichung und skizzieren Sie die Lösung.

**5.21. ∞** Die Bewegungsgleichung für den schrägen Wurf mit Reibung ist gegeben als  $m\ddot{\mathbf{r}} = m\dot{\mathbf{v}} = -m\mathbf{g} - \beta\mathbf{v} = -mg\mathbf{e}_z - \beta\mathbf{v}$ . Bestimmen Sie die Lösung dieser Gleichung für die Anfangsbedingung  $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$ . Bestimmen Sie ferner den Ort  $\mathbf{r}$  in Abhängigkeit von der Zeit für die Anfangsbedingung  $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$ .

**5.22. ∞∞** Die Bewegungsgleichung für eine Bewegung mit Newton'scher Reibung ist gegeben durch  $m\ddot{x} = -\gamma\dot{x}^2$  oder  $m\dot{v} = -\gamma v^2$ . Lösen Sie die Bewegungsgleichung (Angabe von  $x(t)$  und  $v(t)$ ) für die Anfangsbedingungen  $v(0) = v_0$  und  $x(0) = 0$ .

**5.23. ∞** Lösen Sie die beiden DGLs aus Bsp. 64 und 65 jeweils mit der anderen Methode.

Rechenmethoden der Physik

Mathematischer Begleiter zur Experimentalphysik

Kallenrode, M.-B.

2005, XVIII, 386 S. 90 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-540-21454-0