

11 Integration von Feldern: Kurven- und Flächenintegrale

Wir haben uns in Abschn. 3.4 bei der Integration vektorwertiger Funktionen auf Funktion in Abhängigkeit von einem Skalar beschränkt. Felder jedoch sind vektorwertige Funktionen in Abhängigkeit von den drei Raumkoordinaten. Ein einfaches Beispiel für ein ein Feld enthaltendes Integral ist die Arbeit W , definiert als $W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$: wir müssen die Kraft \mathbf{F} entlang eines Weges \mathbf{s} integrieren, d.h. ein Kurven- oder Linienintegral bilden. Wenn wir Quellen und Senken eines elektrischen Feldes betrachten, so können wir ein Volumenelement heraus greifen und den Fluss dieses Feldes durch die Oberfläche des Volumens bestimmen. Auf diese Weise bilden wir ein Oberflächenintegral. Wir werden ferner die Integralsätze von Gauß und Stokes kennenlernen, mit deren Hilfe die lokal definierten Größen Divergenz und Rotation auf größere Raumbereiche erweitert werden können. Diese Integralsätze ermöglichen es, die Maxwell'schen Gleichungen in integraler und differentieller Form darzustellen, außerdem können sie eine rechentechnische Hilfe sein.

11.1 Kurven und Flächen

Um entlang einer Kurve oder Fläche integrieren zu können, benötigen wir eine Darstellungsform für Kurven und Flächen, die es erlaubt, die Integration mit den aus Kap. 3 bekannten Verfahren durchzuführen. Die Bewegung einer Raupe entlang eines Grashalms ist zwar eine Bewegung im dreidimensionalen Raum; der Ort der Raupe lässt sich jedoch durch einen einzigen Parameter, z.B. den Abstand von der Spitze des Grashalms, eindeutig beschreiben – das ist eine Kurve in Parameterdarstellung.

11.1.1 Darstellung ebener und räumlicher Kurven

Die Parameterdarstellung einer Kurve erfolgt durch einen Vektor. Der Ortsvektor einer Raumkurve lässt sich schreiben als

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{e}_x + y(t)\mathbf{e}_y + z(t)\mathbf{e}_z, \quad (11.1)$$

mit t als einem Parameter, der einen Bereich $t_1 \leq t \leq t_2$ durchläuft.

Definition 63. Eine Raumkurve wird als glatt bezeichnet, wenn es mindestens eine stetig differenzierbare Parameterdarstellung $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ gibt, für die an keiner Stelle $d\mathbf{r}/dt$ verschwindet.

Die Wurfparabel lässt sich z.B. darstellen als

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} (v_0 \cos \alpha)t \\ (v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix} \quad (11.2)$$

mit $t \geq 0$. Wir stellen also den Ort \mathbf{r} des Körpers nicht in Abhängigkeit von den räumlichen Koordinaten x und y dar sondern in Abhängigkeit von einem einzigen Parameter, der Zeit t . Wenn wir bei dieser anschaulichen Vorstellung bleiben, können wir den vom Körper entlang seiner Flugbahn zurückgelegten Weg s beschreiben als Bogenlänge $s = \int v(t) dt$.

Definition 64. Die Bogenlänge s ist die Länge der Raumkurve, gemessen entlang der gekrümmten Kurve:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\mathbf{r}}| dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt. \quad (11.3)$$

Die Größe $\dot{\mathbf{r}} = v$ weist tangential entlang der Kurve. Mit ihr kann jedem Punkt der Kurve ein *Tangenteneinheitsvektor* \mathbf{t} zugeordnet werden

$$\mathbf{t} = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|}, \quad (11.4)$$

sowie ein darauf senkrecht stehender *Hauptnormaleneinheitsvektor*

$$\mathbf{n} = \frac{\dot{\mathbf{t}}}{|\dot{\mathbf{t}}|}, \quad (11.5)$$

der in Richtung der *Kurvenkrümmung* weist.

Beispiel 114. Mit \mathbf{t} und \mathbf{n} können wir eine Beschleunigung in einen Tangential- und einen Normalanteil zerlegen. Es ist ds das Bogenelement entlang der Kurve und damit $|d\mathbf{r}| = ds$. Für die Geschwindigkeit gilt (Kettenregel)

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \mathbf{t} v \quad (11.6)$$

mit $\mathbf{t} = d\mathbf{r}/ds$ als dem Tangenteneinheitsvektor. Die Beschleunigung ergibt sich durch nochmaliges Ableiten zu

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \mathbf{t} + v \frac{d\mathbf{t}}{dt} = a_t \mathbf{t} + \frac{d\mathbf{t}}{ds} \frac{ds}{dt} v = a_t \mathbf{t} + v^2 \frac{d\mathbf{t}}{ds}; \quad (11.7)$$

Mit der *Kurvenkrümmung* κ und dem *Krümmungsradius* ϱ gemäß

$$\kappa = \sqrt{\left(\frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} \right)^2} = \sqrt{\left(\frac{d^2 x}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2 y}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2 z}{ds^2} \right)^2} = \frac{1}{\varrho} = \left| \frac{d\mathbf{t}}{ds} \right| \quad (11.8)$$

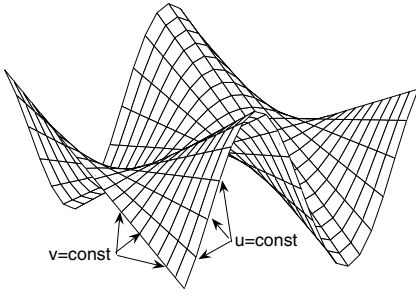


Abb. 11.1. Darstellung einer Fläche durch Parameterlinien mit $u = \text{const}$ und $v = \text{const}$

ergibt sich für die Beschleunigung als Summe aus *Tangentialbeschleunigung* a_t und *Normalbeschleunigung* v^2/ϱ

$$\mathbf{a} = a_t \mathbf{t} + \frac{v^2}{\varrho} \mathbf{n} . \quad (11.9)$$

□

Mit Hilfe dieser beiden Vektoren lässt sich das *begleitende Dreiein* definieren, ein System aus drei orthonormalen Vektoren, die sich mit dem Körper entlang der Bahnkurve bewegen:

\mathbf{t} Tangenteneinheitsvektor

\mathbf{n} Hauptnormaleneinheitsvektor

\mathbf{b} Binormaleneinheitsvektor $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$

Die beiden Normalenvektoren spannen die Ebene senkrecht zur Bahnkurve auf. Erfolgt die Bewegung in einer Ebene, so ist \mathbf{b} konstant und die Ebene wird durch \mathbf{t} und \mathbf{n} aufgespannt.

11.1.2 Flächen im Raum

Eine Fläche im Raum lässt sich durch einen Ortsvektor beschreiben, der von zwei Parametern u und v abhängt:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} . \quad (11.10)$$

Die Fläche wird von einem Netz von *Parameter-* oder *Koordinatenlinien* durchzogen, vgl. Abb. 11.1. Entlang der Parameterlinien ist jeweils einer der Parameter konstant, ähnlich den Längen- und Breitenkreisen auf dem Globus.

Die *Tangentenvektoren* an die Koordinatenlinien beschreiben die Änderung des Ortsvektors in Richtung der Parameterlinien:

$$\mathbf{t}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{t}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} . \quad (11.11)$$

Sind die Parameter u und v einer Fläche $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ Funktionen einer reellen Variablen t , so beschreibt der Ortsvektor

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t)) \quad (11.12)$$

eine auf der Fläche verlaufende Kurve (*Flächenkurve*). Der Tangentenvektor dieser Flächenkurve ist

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{u}\mathbf{t}_u + \dot{v}\mathbf{t}_v. \quad (11.13)$$

Jedem Punkt der Fläche $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ lässt sich eine *Flächennormale* zuordnen mit $|\mathbf{n}| = 1$ und

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v}{|\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v|}. \quad (11.14)$$

Dieser Vektor steht senkrecht auf der von den beiden Tangentenvektoren gebildeten *Tangentialebene* an die Fläche. Damit ergibt sich für die Gleichung der Tangentialebene in einem festen Flächenpunkt \mathbf{r}_0

$$\mathbf{n}_0 \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0. \quad (11.15)$$

Ein Flächenelement ist dann

$$dA = |\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v| du dv. \quad (11.16)$$

11.2 Kurvenintegrale

In der Physik ist die Arbeit definiert als

$$W = \int_{s_1}^{s_2} dW = \int_{s_1}^{s_2} \mathbf{F}(s) \cdot d\mathbf{s}, \quad (11.17)$$

d.h. wir müssen das Integral entlang eines Weges \mathbf{s} bilden, das *Linien-* oder *Kurvenintegral*.

Definition 65. $\mathbf{F}(x, y, z)$ sei ein räumliches Vektorfeld, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ der Ortsvektor einer von P_1 nach P_2 verlaufenden Raumkurve C mit $t_1 \leq t \leq t_2$ und $\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}(t)$ der zugehörige Tangentenvektor der Kurve. Dann heißt das Integral

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) dt \quad (11.18)$$

das *Linien-* oder *Kurvenintegral* des Vektorfeldes \mathbf{F} längs der Raumkurve C .

Die Berechnung eines Linien- oder Kurvenintegrals $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} dt$ erfolgt in zwei Schritten:

1. Zunächst werden im Feldvektor $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ die Koordinaten x , y und z durch die parameterabhängigen Koordinaten $x(t)$, $y(t)$ und $z(t)$ der Raumkurve C ersetzt, d.h. der Feldvektor und seine Komponenten hängen nur noch von t ab. Dann differenziert man den Ortsvektor $\mathbf{r}(t)$ nach dem Parameter t , erhält den Tangentenvektor $\dot{\mathbf{r}}(t)$ und bildet das skalare Produkt $\mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}}$ aus dem Feld- und Tangentenvektor.



2. Das Skalarprodukt $\mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}}$ hängt jetzt nur noch vom Parameter t ab und kann in den Grenzen von t_1 bis t_2 integriert werden.

Beispiel 115. Gegeben ist eine Kraft $\mathbf{F} = (yz, xz, xy)$. In diesem Kraftfeld wird eine Masse von $\mathbf{r}_1 = (0, 0, 0)$ m nach $\mathbf{r}_2 = (1, 1, 1)$ m verschoben. Die Arbeit, die dabei entlang einer Geraden $\mathbf{r} = (t, t, t)$ und längs einer Parabel $\mathbf{r} = (t, t^2, t^4)$ zu verrichten ist, ist zu bestimmen. Für die Arbeit entlang der Geraden erhalten wir wegen $\dot{\mathbf{r}} = (1, 1, 1)$

$$\begin{aligned} W &= \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} dt \\ &= \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 \\ t^2 \\ t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 3t^2 dt = 1 \text{ Nm} . \end{aligned} \quad (11.19)$$

Für die Arbeit entlang der Parabel ergibt sich wegen $\dot{\mathbf{r}} = (1, 2t, 4t^3)$

$$W = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^6 \\ t^5 \\ t^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 4t^3 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 7t^6 dt = 1 \text{ Nm} , \quad (11.20)$$

d.h. die Arbeit entlang zweier unterschiedlicher Wege ist die gleiche. Das Kraftfeld könnte also ein konservatives Feld sein. \square

Ein Vektorfeld heißt *konservativ* bzw. *Potentialfeld*, wenn das Linien- oder Kurvenintegral nur vom Anfangs- und Endpunkt, nicht aber vom eingeschlagenen Verbindungsweg zwischen den beiden Punkten abhängt. Ein konservatives Kraftfeld kann durch die folgenden, gleichwertigen Eigenschaften charakterisiert werden, vgl. Bsp. 125:

- Das Linienintegral ist vom eingeschlagenen Weg unabhängig.
- Das Linienintegral entlang einer geschlossenen Kurve verschwindet: $\oint \mathbf{F} d\mathbf{r} = 0$.
- Das Vektorfeld ist als Gradient eines Potentials U darstellbar: $\mathbf{F} = \nabla U$.
- Das Skalarprodukt $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ ist das totale Differential eines Potentials U : $dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.
- Das Vektorfeld ist wirbelfrei: $\nabla \times \mathbf{F} = 0$.

Beispiel 116. Jetzt können wir die am Ende von Bsp. 115 geäußerte Vermutung, das Feld $\mathbf{F} = (yz, xz, xy)$ sei konservativ, überprüfen. Dazu bilden wir dessen Rotation:

$$\begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x \\ y - y \\ z - z \end{pmatrix} = 0 , \quad (11.21)$$

d.h. das Feld ist wirbelfrei und damit konservativ. \square

Bei Umkehr des Durchlaufs der Kurve \mathcal{C} ändert sich das Vorzeichen des Linienintegrals:

$$\int_{-\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (11.22)$$

beim Anheben eines Steins gegen die Gewichtskraft wird Hubarbeit geleistet, auf dem umgekehrten Weg verrichtet das Gravitationsfeld Beschleunigungsarbeit am Stein.

Das Kurvenintegral ist additiv: kann die Kurve \mathcal{C} in zwei Abschnitte \mathcal{C}_1 und \mathcal{C}_2 zerlegt werden, so gilt

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (11.23)$$

Die beim Treppensteigen vom Erdgeschoss in den vierten Stock verrichtete Arbeit ist die Summe der Arbeiten für den Weg vom Erdgeschoss bis in den zweiten Stock und dann vom zweiten Stock bis in den vierten.

Aus diesen beiden Eigenschaften folgt, dass das Kurvenintegral in einem Gebiet genau dann wegunabhängig ist, wenn die *Zirkulation* verschwindet

$$Z_{\mathcal{C}} = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (11.24)$$

mit \mathcal{C}_1 und \mathcal{C}_2 als zwei Kurven zwischen den Punkten P_1 und P_2 . Umgekehrt verschwindet die Zirkulation, wenn das Kurvenintegral wegunabhängig ist, d.h. wenn das Feld konservativ ist.

Beispiel 117. Gegeben ist das Feld $\mathbf{F} = (-y/(x^2 + y^2), x/(x^2 + y^2))$. Ein Körper wird in diesem Feld vom Punkt $(1,0)$ zum Punkt $(-1,0)$ verschoben. Die Arbeit ist entlang der beiden halbkreisförmigen Wege gegen und mit dem Uhrzeigersinn zu bestimmen. Die Wege lassen sich in Polarkoordinaten beschreiben, in einem Fall für $0 \leq \varphi \leq \pi$, der andere Weg ist $0 \geq \varphi \geq -\pi$ oder alternativ $2\pi \leq \varphi \leq \pi$. Der Ortsvektor ist $\mathbf{r} = r(\cos \varphi, \sin \varphi)$ und nach Ableiten $\dot{\mathbf{r}} = r(-\sin \varphi, \cos \varphi)$. Für das Skalarprodukt erhalten wir

$$\mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} -r \sin \varphi / r^2 \\ r \cos \varphi / r^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \end{pmatrix} = \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1 \quad (11.25)$$

und damit für die beiden Integrale

$$W_o = \int_0^\pi d\varphi = [\varphi]_0^\pi = \pi \quad \text{und} \quad W_u = \int_0^{-\pi} d\varphi = [\varphi]_0^{-\pi} = -\pi, \quad (11.26)$$

d.h. das Kraftfeld ist nicht konservativ. Würden wir entlang eines geschlossenen Pfades integrieren, z.B. den Kreis von 0 bis 2π durchlaufen, wäre das Integral $W = 2\pi$, ebenfalls ein Hinweis darauf, dass das Feld nicht konservativ ist. \square

11.3 Oberflächenintegrale

Das Oberflächenintegral ist uns bereits in (10.32) begegnet. Dort hatten wir den Fluss durch eine Fläche definiert als

$$\Phi = \int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \quad \text{bzw.} \quad \Phi = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \quad (11.27)$$

für den Fluss durch eine geschlossene Oberfläche.

Die Berechnung eines Oberflächenintegrals $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}$ unter Verwendung symmetriegerechter Koordinaten erfolgt in zwei Schritten:



1. Zunächst werden geeignete Koordinaten ausgewählt und die Flächennormale \mathbf{n} , das Flächenelement $d\mathbf{A}$ sowie das Produkt $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA$ in den gewählten Koordinaten bestimmt. Auch die Integrationsgrenzen werden dem gewählten Koordinatensystem angepasst.
2. Das Integral $\int \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA$ kann jetzt direkt bestimmt werden.

Ist die Fläche A in Parameterform $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ gegeben, so lässt sich das Oberflächenintegral schreiben als

$$\int_A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \int_A \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA = \iint_A \mathbf{F} \cdot (\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v) du dv. \quad (11.28)$$

Für Integralberechnung wird das Vektorfeld zunächst durch die Parameter u und v ausgedrückt: $\mathbf{F}(x, y, z) \rightarrow \mathbf{F} = \mathbf{F}(u, v)$. Anschließend werden die Tangentenvektoren $\mathbf{t}_u = \partial \mathbf{r} / \partial u$ und $\mathbf{t}_v = \partial \mathbf{r} / \partial v$ an die Parameterlinien der Fläche werden gebildet, ebenso das Produkt $\mathbf{F} \cdot (\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v)$. Damit wird das Integral $\iint \mathbf{F} \cdot (\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v) du dv$ als gewöhnliches Mehrfachintegral berechnet.

Für einige Geometrien ist die Bestimmung des Flusses besonders einfach. So verschwindet der Fluss eines homogenen Vektorfeldes $\mathbf{F} = \text{const}$ durch eine geschlossene Oberfläche: $\oint_A \mathbf{c} \cdot d\mathbf{A} = 0$. Der Fluss eines zylindersymmetrischen Vektorfeldes $\mathbf{F} = f(\varrho) \mathbf{e}_\varrho$ durch die geschlossene Oberfläche eines Zylinders mit Radius R und Höhe H um die z -Achse ist das Produkt aus der Feldstärke an der Oberfläche und der Zylinderoberfläche:

$$\oint_A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = f(R) 2\pi R H. \quad (11.29)$$

Entsprechend ist der Fluss eines kugel- oder radialsymmetrischen Vektorfeldes $\mathbf{F} = f(r) \mathbf{e}_r$ durch die Oberfläche einer geschlossenen konzentrischen Kugel mit Radius R gleich dem Produkt aus der Kugeloberfläche und der Feldstärke an der Oberfläche

$$\oint_A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = f(R) 4\pi R^2. \quad (11.30)$$

Beispiel 118. Der elektrische Fluss Φ durch eine Fläche A ist definiert als

$$\Phi = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} . \quad (11.31)$$

Eine Punktladung q erzeugt ein elektrisches Feld $\mathbf{E} = q/(4\pi\epsilon_0 r^2) \mathbf{e}_r$. Der Fluss dieser Ladung durch eine Kugeloberfläche $r = 2$ lässt sich nach obigem Kochrezept wie folgt bestimmen: auf der Kugeloberfläche weist der Normalenvektor in Verlängerung des Ortsvektors stets radial nach außen, d.h. er hat die Richtung (x, y, z) oder in Kugelkoordinaten \mathbf{e}_r . Für das Produkt $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ erhalten wir damit

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} . \quad (11.32)$$

Mit dem Flächenelement $dA = r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ ergibt sich

$$\Phi = \int \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} r^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta = \frac{q}{\epsilon_0} . \quad (11.33)$$

Der Rechenweg ist für beliebigen radialen Abstand anwendbar, an keiner Stelle geht die Angabe $r = 2$ aus der Aufgabenstellung ein. Dies bedeutet, dass im Falle einer Punktladung der elektrische Fluss durch eine Kugeloberfläche stets $\Phi = q/\epsilon_0$ ist, unabhängig vom Radius der Kugel. Anschaulich ist diese Aussage klar: der elektrische Fluss ist gleichsam ein Zählen der durch die Kugelfläche gehenden Feldlinien. Da das Feld mit zunehmendem Abstand mit r^{-2} abnimmt, die Kugeloberfläche jedoch mit r^2 zunimmt, bleibt das Produkt konstant. Gleichung (11.30) ist eine Konsequenz davon. \square

Beispiel 119. Das geomagnetische Feld kann als ein Dipolfeld mit dem Dipolmoment \mathbf{m} angenähert werden. \mathbf{m} weist vom (magnetischen) Süd- zum Nordpol, sein Betrag ist ein Maß für die Stärke des Dipols. Das Magnetfeld im Abstand \mathbf{r} ist gegeben als

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{3\mathbf{e}_r(\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{m}) - \mathbf{m}}{r^3} . \quad (11.34)$$

Der magnetische Fluss durch die Eroberfläche (bzw. eine Kugeloberfläche mit beliebigem Radius) ist

$$\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} . \quad (11.35)$$

In Kugelkoordinaten erhalten wir mit (2.100)

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \frac{3\mathbf{e}_r(\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{m}) - \mathbf{m}}{r^3} \cdot \mathbf{e}_r r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \left[\frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{m}) - \mathbf{r} \cdot \mathbf{m}}{r^2} \right] \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \frac{2mr \cos \vartheta}{r^2} \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = 2\pi \int_{\vartheta=0}^{\pi} \frac{2m}{r} \sin \vartheta \cos \vartheta \, d\vartheta \\
&= 2\pi \frac{2m}{r} [\sin^2 \vartheta]_0^{\pi} = 0,
\end{aligned} \tag{11.36}$$

d.h. der Fluss des geomagnetischen Feldes durch die Erdoberfläche verschwindet. Zwar ist in jedem einzelnen Flächenelement (abgesehen von denen am Äquator, da dort $\mathbf{B} \perp d\mathbf{A}$) der Fluss $d\Phi$ von Null verschieden, jedoch weist das Feld auf der einen Hemisphäre aus der Erdkugel heraus, auf der anderen in sie hinein. Das Flächenelement $d\mathbf{A}$ dagegen weist immer nach außen, so dass eine Hemisphäre einen positiven Beitrag zum Fluss liefert, die andere einen gleich großen entgegengesetzten. \square

11.4 Gauß'scher Integralsatz

Divergenz und Rotation sind lokale Eigenschaften eines Feldes: sie werden für jeden Raumpunkt \mathbf{r} bestimmt. Anschaulicher werden diese Größen, wenn man sie mit dem Fluss durch die Oberfläche eines Volumenelements oder der Zirkulation längs einer (geschlossenen) Kurve in Verbindung bringt.

Theorem 6. Der Integralsatz von Gauß (Divergenztheorem) besagt, dass der Fluss eines Vektorfeldes \mathbf{F} durch eine Oberfläche $O(V)$ eines Volumens V gleich dem Volumenintegral der Divergenz über das Volumen ist:

$$\oint_{O(V)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV. \tag{11.37}$$

Damit wird der Zusammenhang zwischen der lokalen Größe Divergenz und den Eigenschaften eines Feldes in einem makroskopischen Volumen gelegt. Anschaulich bedeutet der Gauß'sche Integralsatz: alles, was im Volumen an Feld entsteht (beschrieben durch die Divergenz oder Quellstärke), strömt durch die Oberfläche hinaus. Formal lässt sich dies durch eine Zerlegung in Teilvolumina zeigen, vgl. Abb. 11.2: die Zerlegung eines Volumens in zwei Teilvolumina liefert auf den Außenflächen die gleichen Beträge zum Integral wie das Gesamtvolumen. Lediglich die Trennfläche zwischen den beiden Teilvolumina wurde im Gesamtvolumen nicht berücksichtigt. Der Fluss durch die Trennfläche liefert jedoch keinen Beitrag, da die Flächenvektoren stets nach außen gerichtet und damit entgegengesetzt sind – damit heben sich die beiden Beiträge zum Fluss weg. Dies lässt sich auf beliebig viele Teilvolumina verallgemeinern und führt zu

$$\oint_{O(V)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \sum_{i=1}^N \oint_{O(V)_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}. \tag{11.38}$$

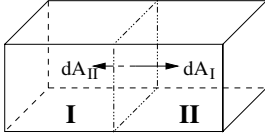


Abb. 11.2. Gauß'scher Integralsatz: die Flüsse durch die Grenzfläche zwischen zwei Teilvolumina heben sich auf, da die Normalenvektoren der Grenzfläche entgegengesetzte Richtung haben

Betrachten wir im Grenzübergang $\Delta V_i \rightarrow 0$ unendlich viele infinitesimal kleine Teilvolumina, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{O}(V)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \Delta V_i \frac{1}{\Delta V_i} \oint_{\mathcal{O}(V)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \Delta V_i \nabla \cdot \mathbf{F} = \int \nabla \cdot \mathbf{F} dV . \end{aligned} \quad (11.39)$$

Beispiel 120. Eine Anwendung des Gauß'schen Integralsatzes ist das Gauß'sche Gesetz des elektrischen Feldes (1. Maxwell'sche Gleichung):

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \nabla \mathbf{E} = \frac{\varrho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} . \quad (11.40)$$

Die Quellstärke des elektrischen Feldes ist durch die Ladungsdichte ϱ bestimmt, die Permittivität ε ist eine Kopplungskonstante, die beschreibt, wie stark die Ursache (die Ladung) und der Effekt (das Feld) gekoppelt sind. Gleichung (11.40) ist die differentielle Darstellung der ersten Maxwell'schen Gleichung. Die Integraldarstellung dieser Gleichung,

$$\oint_{\mathcal{O}(V)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \int_V \frac{\varrho}{\varepsilon_0} dV , \quad (11.41)$$

ist die bekanntere Form: der Fluss des elektrischen Feldes durch eine geschlossene Fläche im drei-dimensionalen Raum (linke Seite) ist gleich der von dieser Fläche eingeschlossenen Ladung (rechte Seite). Der Übergang zwischen der Integralform und der differentiellen Darstellung wird durch den Gauß'schen Integralsatz (11.37) beschrieben. Dazu integrieren wir die differentielle Form (11.40) über ein Volumen V

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{E} dV = \int_V \frac{\varrho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} dV . \quad (11.42)$$

Die Anwendung des Gauß'schen Satzes auf die linke Seite liefert

$$\oint_{\mathcal{O}(V)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \int_V \frac{\varrho}{\varepsilon_0} dV , \quad (11.43)$$

bzw. für den Spezialfall, dass die Ladungsdichte außerhalb des Volumens V verschwindet

$$\oint_{\partial(V)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q}{\varepsilon_0} . \quad (11.44)$$

Die linke Seite ist der aus (11.31) bekannte Fluss des elektrischen Feldes.

Die entsprechende Maxwell Gleichung für das Magnetfeld ist

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 . \quad (11.45)$$

Sie besagt, dass das magnetische Feld keine Quellen hat – oder in einfacherer Formulierung: es gibt keine magnetischen Monopole. \square

Beispiel 121. Eine weitere Anwendung des Gauß'schen Integralsatzes ist die Herleitung der *Kontinuitätsgleichung*. Allgemein ändert sich eine Eigenschaft ε innerhalb eines Volumenelements durch die Konvergenz des Flusses $\mathbf{C}(\varepsilon)$ in dieses Volumen hinein sowie durch die Quellen und Senken $S(\varepsilon)$ innerhalb des Volumens:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{C}(\varepsilon) = S(\varepsilon) . \quad (11.46)$$

Dies ist die allgemeine Form einer Kontinuitätsgleichung, die auch auf andere physikalische Größen, z.B. auf Energie oder Impuls, angewandt werden kann.

Die einfachste Anwendung ist die Erhaltung der Masse. Mit ϱ als der Dichte und $\mathbf{j} = \varrho \mathbf{v}$ als der Dichte des Massenstroms ergibt sich

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} - \nabla(\varrho \mathbf{u}) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} = -\nabla(\varrho \mathbf{u}) = -\nabla \mathbf{j} . \quad (11.47)$$

S verschwindet, da es im Volumenelement keine Quellen oder Senken gibt.

Unter Verwendung von (10.27) lässt sich die Kontinuitätsgleichung (11.47) schreiben als

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \varrho = -\varrho \nabla \mathbf{v} , \quad (11.48)$$

d.h. die totale Änderung der Dichte in einem Volumenelement ist proportional der Divergenz des Geschwindigkeitsfeldes.

Unter Verwendung des Gauß'schen Integralsatzes lässt sich die differentielle Form in eine integrale überführen. Dazu integrieren wir die Kontinuitätsgleichung (11.47) über ein Volumenelement und wenden (11.37) auf die rechte Seite an:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \varrho dV = - \oint_{\partial(V)} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A} . \quad (11.49)$$

\square

Beispiel 122. Die Gültigkeit des Gauß'schen Integralsatzes können wir am Beispiel eines Vektorfeldes $\mathbf{F} = (x^2, y^2, z^2)$ demonstrieren. Als Volumen wählen wir eine Kugel mit Radius r . Für die linke Seite von (11.37) bilden wir dazu mit $d\mathbf{A} = dA \mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r dA$

$$\oint_{\mathcal{O}(\mathcal{V})} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \oint_{\mathcal{O}(\mathcal{V})} \frac{1}{r} \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} dA = \oint_{\mathcal{O}(\mathcal{V})} r^2 dA . \quad (11.50)$$

Mit dem Flächenelement in Kugelkoordinaten $dA = r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ ergibt sich

$$\oint_{\mathcal{O}(\mathcal{V})} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} r^4 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = 2\pi r^4 . \quad (11.51)$$

Für die rechte Seite von (11.37) ergibt sich mit $dV = r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dr$

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \mathbf{F} dV &= 2 \int_{\mathcal{V}} (x + y + z) dV \\ &= 2 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{r=0}^r r^3 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi = 2\pi r^4 , \end{aligned} \quad (11.52)$$

d.h. (11.51) und (11.52) sind identisch. \square

Beispiel 123. Die Anwendung des Gauß'schen (oder Stokes'schen) Integralsatzes kann auch rechentechnische Gründe haben. Verifizieren wir dazu den Gauß'schen Integralsatz für das Feld $\mathbf{F} = (xy^2, yz^2, zx^2)$ und eine Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = 16$. Für die Divergenz des Feldes erhalten wir

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} xy^2 \\ yz^2 \\ zx^2 \end{pmatrix} = y^2 + z^2 + x^2 = r^2 . \quad (11.53)$$

Damit wird die rechte Seite von (11.37)

$$\begin{aligned} \text{RS} &= \int \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \int_{r=0}^4 \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r^4 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta dr \\ &= 2\pi \int_{r=0}^4 \int_{\vartheta=0}^{\pi} r^4 \sin \vartheta d\vartheta dr = 2\pi \int_{r=0}^4 [-\cos \vartheta]_0^{\pi} r^4 dr \\ &= 4\pi \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^4 = \frac{4^6}{5} \pi . \end{aligned} \quad (11.54)$$

Für die linke Seite müssen wir über die Kugeloberfläche integrieren. Der Normalenvektor weist radial nach außen – da die Kugel einen Radius von 4 hat, erhalten wir $\mathbf{n} = \frac{1}{4}(x, y, z)$ und damit für das Produkt aus Feld und Normalenvektor

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} xy^2 \\ yz^2 \\ zx^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{4}(x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2) . \quad (11.55)$$

In Kugelkoordinaten lässt sich dies schreiben als

$$\begin{aligned}\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} &= \frac{r^4}{4} (\sin^4 \vartheta \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi \cos^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi) \\ &= \frac{1}{4} r^4 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi + \frac{1}{4} r^4 \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta .\end{aligned}\quad (11.56)$$

Das Flächenelement in Kugelkoordinaten ist $dA = r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$. Damit ergibt sich für die linke Seite

$$\begin{aligned}\text{LS} &= \frac{r^6}{4} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} (\sin^4 \vartheta \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \\ &= 4^5 \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} (\sin^5 \vartheta \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + \sin^3 \vartheta \cos^2 \vartheta) d\vartheta d\varphi \\ &= 4^5 \int_{\vartheta=0}^{\pi} \left(\sin^5 \vartheta \left[\frac{\varphi}{8} - \frac{\sin 4\varphi}{32} \right]_0^{2\pi} + \sin^3 \vartheta \cos^2 \vartheta [\varphi]_0^{2\pi} \right) d\vartheta \\ &= 2\pi 4^5 \int_{\vartheta=0}^{\pi} \left(\frac{\sin^5 \vartheta}{8} + \sin^3 \vartheta \cos^2 \vartheta \right) d\vartheta \\ &= 2\pi 4^5 \left[\int_{\vartheta=0}^{\pi} \frac{\sin^5 \vartheta}{8} d\vartheta + \int_{\vartheta=0}^{\pi} \sin^3 \vartheta \cos^2 \vartheta d\vartheta \right] \\ &= 2\pi 4^5 \left[\frac{1}{8} \left(\left[-\frac{\sin^3 \vartheta \cos \vartheta}{5} \right]_0^{2\pi} + \frac{4}{5} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \sin^3 \vartheta d\vartheta \right) + \int_{\vartheta=0}^{\pi} \sin^3 \vartheta \cos^2 \vartheta d\vartheta \right] \\ &= 2\pi 4^5 \left[\frac{1}{10} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \sin^3 \vartheta d\vartheta + \int_{\vartheta=0}^{\pi} \sin^3 \vartheta \cos^2 \vartheta d\vartheta \right] \\ &= 2\pi 4^4 \left[\frac{1}{10} \left[-\cos \vartheta + \frac{1}{3} \cos^3 \vartheta \right]_0^{\pi} + \int_{\vartheta=0}^{\pi} \sin^3 \vartheta \cos^2 \vartheta d\vartheta \right] \\ &= 2\pi 4^4 \left[\frac{1}{10} \left(2 - \frac{2}{3} \right) + \left[\frac{\sin^2 \vartheta \cos^3 \vartheta}{5} \right]_0^{\pi} + \frac{2}{5} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \sin \vartheta \cos^2 \vartheta d\vartheta \right] \\ &= 2\pi 4^5 \left[\frac{2}{15} - \frac{2}{5} \frac{1}{3} [\cos^3 \vartheta]_0^{\pi} \right] = 2\pi 4^5 \left(\frac{2}{15} + \frac{4}{15} \right) = \frac{4^6}{5} \pi .\end{aligned}\quad (11.57)$$

An diesem Beispiel wird deutlich, dass es wesentlich einfacher sein kann, den Fluss durch eine Oberfläche auf der Basis des Gauß'sches Satzes über die Divergenz zu bestimmen als über die Oberfläche zu integrieren. \square

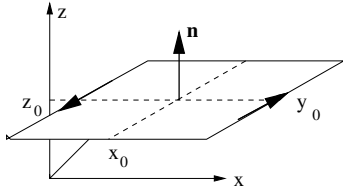


Abb. 11.3. Zirkulation längs einer kleinen Rechteckkurve parallel zur (x, y) -Ebene um $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$

11.5 Stokes'scher Integralsatz

Der Stokes'sche Integralsatz besagt, dass sich alles, was innerhalb einer geschlossenen Fläche an Wirbeln entsteht, zu einer Gesamtzirkulation entlang der Umrandung addiert. Um diese Aussage zu verstehen, beginnen wir mit der Darstellung der Rotation als Wirbelstärke.

11.5.1 Rotation als Wirbelstärke

In einem Feld \mathbf{F} wird eine kleine rechteckige Kurve \mathcal{C} mit den Kantenlängen $2\Delta x$ und $2\Delta y$ um $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ betrachtet, vgl. Abb. 11.3. Die Zirkulation um diese Fläche ist

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{x_0-\Delta x}^{x_0+\Delta x} dx [F_x(x, y_0 - \Delta y, z_0) - F_x(x, y_0 + \Delta y, z_0)] + \int_{y_0-\Delta y}^{y_0+\Delta y} dy [F_y(x_0 + \Delta x, y, z_0) - F_y(x_0 - \Delta x, y, z_0)] . \quad (11.58)$$

Taylor-Entwicklung des Integranden liefert

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= -\frac{\partial F_x}{\partial y}(\tilde{x}, y_0, z_0) 2\Delta y \int_{x_0-\Delta x}^{x_0+\Delta x} dx + \frac{\partial F_y}{\partial x}(x_0, \tilde{y}, z_0) 2\Delta x \int_{y_0-\Delta y}^{y_0+\Delta y} dy \\ &= -\frac{\partial F_x}{\partial y}(\tilde{x}, y_0, z_0) 4\Delta y \Delta x + \frac{\partial F_y}{\partial x}(x_0, \tilde{y}, z_0) 4\Delta x \Delta y . \end{aligned} \quad (11.59)$$

Im Grenzübergang $\Delta \rightarrow 0$ ergibt sich

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta A} \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = (\text{rot} \mathbf{F})_z . \quad (11.60)$$

Die Rotation oder Wirbelstärke ist gleich der Zirkulation längs der Randkurve $\mathcal{O}(\Delta F)$ einer Fläche $\mathbf{F} = \mathbf{n}F$ im Grenzfall $\mathbf{F} \rightarrow 0$.

11.5.2 Stokes'scher Integralsatz

Theorem 7. Der Integralsatz von Stokes besagt, dass die Zirkulation eines Vektorfeldes \mathbf{F} entlang der Umrandung $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ einer Fläche \mathcal{A} gleich dem Flächenintegral der Rotation des Feldes über die Fläche ist:

$$\oint_{\mathcal{C}(\mathcal{A})} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{A}} \text{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} . \quad (11.61)$$

Anschaulich bedeutet dies: alles was an Wirbeln innerhalb der geschlossenen Fläche entsteht (beschrieben durch die Rotation oder Wirbelstärke) addiert sich zu einer Gesamtzirkulation entlang der Umrandung. Dieser Zusammenhang ist erstaunlich, da sich eine Umrandung \mathcal{C} durch unendlich viele verschiedene Oberflächen realisieren lässt, z.B. einfach die Kreisfläche, eine Halbkugel oder ein Zylinder. Die Details dieser Fläche sind jedoch irrelevant, da sich, wie beim Gauß'schen Integralsatz, die Beiträge an den Innengrenzen aufheben. Dazu zerlegen wir die Fläche in Teilflächen:

$$\oint_{\mathcal{C}(\mathcal{A})} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^N \oint_{\mathcal{C}(\mathcal{A}_i)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} . \quad (11.62)$$

Hierbei liefern die äußeren Umrandungen der Teilflächen die gleichen Beiträge wie bei der Gesamtfläche, während sich die Beiträge der Trennlinien aufgrund des entgegengesetzten Umlaufsinnns aufheben. Im Grenzübergang $\Delta A_i \rightarrow 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}(\mathcal{A})} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \oint_{\mathcal{C}(\mathcal{A}_i)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\Delta A_i} \oint_{\mathcal{C}(\mathcal{A}_i)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \Delta A_i \\ &= \int_{\mathcal{A}} \text{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} . \end{aligned} \quad (11.63)$$

Beispiel 124. Wichtige Anwendungen sind das dritte und vierte Maxwell'sche Gesetz, die das magnetische und das elektrische Feld miteinander verbinden. Auch für diese beiden Maxwell'schen Gesetze gibt es jeweils eine differentielle und eine Integralform. In Integralform ist das Ampere'sche Gesetz

$$\oint_{\mathcal{C}(\mathcal{A})} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \int_{\mathcal{A}} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \int_{\mathcal{A}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A} . \quad (11.64)$$

Es besagt, dass ein Strom der Stromdichte \mathbf{j} oder die Änderung eines elektrischen Flusses Φ_E ein Magnetfeld erzeugt. Dieses Feld umschließt den Strom bzw. den sich ändernden elektrischen Fluss. Im einfachsten Fall eines stromdurchflossenen Drahtes erhalten wir ein kreisförmiges Magnetfeld um den Draht, bei mehreren stromdurchflossenen Drähten ergibt sich ein aus geschlossenen Magnetfeldlinien bestehendes Feld um diese Drähte. Diese geschlossenen Feldlinien sind typisch für ein Wirbelfeld, d.h. es wäre sinnvoll,

eine Darstellung über die Rotation des Feldes zu finden. Diese ist durch die differentielle Form des Ampere'schen Gesetzes gegeben:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{j} . \quad (11.65)$$

Den Übergang zwischen den beiden Formen vermittelt der Stokes'sche Integralsatz. Integration der differentiellen Form (11.64) über eine Fläche liefert

$$\oint_{\mathcal{A}} \operatorname{rot} \mathbf{B} \, d\mathbf{A} = \int_{\mathcal{A}} \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \, d\mathbf{A} + \int_{\mathcal{A}} \mu_0 \mathbf{j} \, d\mathbf{A} . \quad (11.66)$$

Die rechte Seite entspricht bereits der Integralform (11.64). Auf der linken Seite können wir mit Hilfe des Stokes'schen Integralsatzes (11.61) das Flächenintegral über die Rotation durch ein Linienintegral ersetzen und erhalten damit die linke Seite von (11.64).

Das Faraday'sche Induktionsgesetz lässt sich formal völlig analog darstellen. In Integralform ist es gegeben durch

$$\oint \mathbf{E} \, d\mathbf{l} = - \frac{\partial \Phi_B}{\partial t} . \quad (11.67)$$

Es besagt, dass ein sich ändernder magnetischer Fluss ein elektrisches Feld um das Magnetfeld herum erzeugt. In differentieller Form lässt sich dieses elektrische Wirbelfeld schreiben als

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} . \quad (11.68)$$

□

Beispiel 125. Mit Hilfe des Stokes'schen Satzes lässt sich zeigen, dass ein Feld $\mathbf{F} = \nabla U$ konservativ ist, d.h. das Linienintegral vom Punkt P_1 zum Punkt P_2 wegunabhängig ist. Auf der rechten Seite des Stokes'schen Satzes (11.61) wird die Rotation des Feldes benötigt: $\nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times \nabla U = 0$. Damit ist auch

$$\oint \mathbf{F} \, d\mathbf{r} = \int \nabla \times \mathbf{F} \, d\mathbf{A} = 0 . \quad (11.69)$$

Das Integral entlang eines beliebigen geschlossenen Weges verschwindet also. Zerlegen wir den Weg in zwei Teile $\overrightarrow{P_1 P_2}$ und $\overrightarrow{P_2 P_1}$ so erhalten wir

$$\oint \mathbf{F} \, d\mathbf{r} = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F} \, d\mathbf{r} + \int_{P_2}^{P_1} \mathbf{F} \, d\mathbf{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F} \, d\mathbf{r} - \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F} \, d\mathbf{r} = 0$$

wobei die Pfade zwischen P_1 und P_2 beliebig sein können. □

Beispiel 126. Gegeben ist das Vektorfeld $\mathbf{F} = (-y, x, 1)$, der Stokes'sche Satz ist für eine auf der xy -Ebene liegende Halbkugel mit $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ zu verifizieren. Die Halbkugel, und damit auch der Kreis, der sich in der xy -Ebene bildet, haben einen Radius von 4. Der Normalenvektor auf der

Halbkugel ist damit gegeben als $\mathbf{n} = (x, y, z)/4$. Für das Linienintegral ist der Kreis in der xy -Ebene daher gegen den Uhrzeigersinn zu umlaufen. In Parameterform lässt sich der Kreis schreiben als $x = \cos \varphi$ und $y = \sin \varphi$ mit $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Damit erhalten wir für das Feld $\mathbf{F} = (-4 \sin \varphi, 4 \cos \varphi, 1)$, für den Ortsvektor $\mathbf{r} = (4 \cos \varphi, 4 \sin \varphi, 0)$ und für seine Ableitung nach dem Parameter φ $\frac{d\mathbf{r}}{d\varphi} = (-2 \sin \varphi, 2 \cos \varphi, 0)$. Die linke Seite von (11.61) wird damit

$$\begin{aligned} \text{LS} &= \oint \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{d\varphi} d\varphi = \oint \begin{pmatrix} -4 \sin \varphi \\ 4 \cos \varphi \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \sin \varphi \\ 2 \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi \\ &= \oint (16 \sin^2 \varphi + 16 \cos^2 \varphi) d\varphi = \oint 16 d\varphi = 32\pi. \end{aligned} \quad (11.70)$$

Für die rechte Seite erhalten wir

$$\text{RS} = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\varrho=0}^4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \varrho d\varrho d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\varrho=0}^4 4 \varrho d\varrho d\varphi = 32\pi. \quad (11.71)$$

□

Literatur

Eine einfache Einführung mit vielen Beispielen und Aufgaben aber einer Vorliebe für kartesische Koordinaten gibt Papula [43]. Die Themen werden, wenn auch kurz, ebenfalls im Korsch [33] und Grossmann [24] behandelt. Für ein vertieftes Studium sind z.B. Shey [56] und Jänich [30] geeignet, eine sehr gute Einführung in die Vektoranalysis gibt auch Marsden [38].

Fragen

11.1. Was versteht man unter der Parameterdarstellung räumlicher Kurven? Geben Sie Beispiele.

11.2. Was versteht man unter einem konservativen Kraftfeld? Geben Sie verschiedene Eigenschaften an, nennen Sie Beispiele.

11.3. Geben Sie eine anschauliche Interpretation des Flusses einer vektoriellen Größe.

11.4. Der Fluss durch eine einen Dipol umschließende Fläche (Bsp. 119) ist Null. Welcher Fluss ergibt sich, wenn bei einem elektrischen Dipol die Fläche nur eine der Ladungen umschließt, die andere aber außerhalb liegt?

11.5. Skizzieren Sie das Verfahren zur Bestimmung eines Linienintegrals.

11.6. Skizzieren Sie das Verfahren zur Bestimmung eines Oberflächenintegrals.

11.7. Erläutern Sie den Gauß'schen Integralsatz. Geben Sie eine formale und eine anschauliche Erläuterung. Nennen Sie Anwendungsbeispiele.

11.8. Erläutern Sie den Stokes'schen Integralsatz. Geben Sie eine formale und eine anschauliche Erläuterung. Nennen Sie Anwendungsbeispiele.

Aufgaben

11.1. • Gegeben ist die Raumkurve $\mathbf{r}(t) = 2 \cos(5t)\mathbf{e}_x + 2 \sin(5t)\mathbf{e}_y + 10t\mathbf{e}_z$. Bestimmen Sie den Tangenten- und Hauptnormaleneinheitsvektor.

11.2. • Ein Teilchen bewege sich auf der ebenen Kurve $\mathbf{r}(t) = e^{-t} \cos t \mathbf{e}_x + e^{-t} \sin t \mathbf{e}_y$. Berechnen Sie die Tangential- und Normalgeschwindigkeit und -beschleunigung.

11.3. • Wie lautet der Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}(t)$ eines Massenpunktes, der sich auf der Kugeloberfläche längs der folgenden Bahnen bewegt: (a) Breitenkreis $\vartheta = \text{const} = \vartheta_0$, $\varphi = t$, (b) Längenkreis $\varphi = \text{const} = \varphi_0$, $\vartheta = t$, (c) $\vartheta = t$, $\varphi = t^2$, jeweils mit t als der Zeit.

11.4. • Berechnen Sie die Arbeit des Kraftfeldes $\mathbf{F} = \frac{y}{1+x^2+y^2}\mathbf{e}_x - \frac{x}{1+x^2+y^2}\mathbf{e}_y$ beim Verschieben einer Masse von $A = (1, 0)$ nach $B = (-1, 0)$ entlang der beiden möglichen halbkreisförmigen Wege. Warum hängt die Arbeit noch vom Weg ab?

11.5. • In einem ebenen Kraftfeld $\mathbf{F} = (x + 2y, 0)$ wird die Masse von $P = (1, 0)$ aus auf dem Einheitskreis im Gegenuhrzeigersinn einmal herumgeführt. Welche Arbeit wird dabei vom Kraftfeld verrichtet?

11.6. •• Berechnen Sie das Linienintegral $\int (xy^2 dx - x^2 y dz + xz^2 dz)$ längs des Weges $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{e}_x + t^2\mathbf{e}_y + t^3\mathbf{e}_z$ mit $1 \leq t \leq 2$.

11.7. •• Berechnen Sie das Kurvenintegral über einen Kreis um $(0, 0, 0)$ mit Radius R für das Feld $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}_0 = \text{const}$.

11.8. •• Welche Arbeit verrichtet das Kraftfeld $\mathbf{F} = xy\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y + yz\mathbf{e}_z$ an einer Masse, wenn diese sich längs einer Schraubenlinie $\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{e}_x + \sin t \mathbf{e}_y + t \mathbf{e}_z$ von 0 nach 2π bewegt?

11.9. ••• Zeigen Sie, dass das Linienintegral $\int \mathbf{r} d\mathbf{r}$ unabhängig vom Integrationsweg ist. Wie lautet das Potential U des Feldes?

11.10. •• Gegeben ist das Vektorfeld $\mathbf{F} = (xy^2, yx^2)$. Bestimmen Sie die Arbeit, die zwischen den Punkten $\mathbf{r}_1 = (0, 0)$ und $\mathbf{r}_2 = (a, a)$ verrichtet wird bei Verschiebung entlang (a) einer geraden Linie $y = x$, (b) einer Parabel $y = x^2/a$, und (c) entlang eines Viertelkreises.

Rechenmethoden der Physik

Mathematischer Begleiter zur Experimentalphysik

Kallenrode, M.-B.

2005, XVIII, 386 S. 90 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-540-21454-0