

Dynamique qualitative et théorie des oscillations

Les ouvrages sur la théorie des oscillations (en particulier ceux de l'école d'Andronov [Andronov-Vitt-Khaikin, 1966] mettent l'accent sur l'universalité du phénomène des oscillations qui intervient en physique, biologie, économie, dynamique des populations, ect... Ils distinguent traditionnellement les oscillations linéaires des oscillations non linéaires. A leur lecture, on comprend mieux la genèse du concept d'oscillation qui se forme à partir des multiples situations expérimentales. Andronov distingue les systèmes auto-oscillants (qui n'ont pas besoin d'un forçage périodique extérieur pour osciller) des systèmes d'oscillateurs forcés. Il identifie les oscillations des systèmes auto-oscillants avec les oscillations des cycles limites de Poincaré. Cette identification nous paraît aujourd'hui évidente et nous la passons sous silence. Il n'est pas sûr que ce raccourci soit heureux d'un point de vue pédagogique car il est au fondement de l'intérêt de la dynamique qualitative pour la modélisation.

1.1 Les théorèmes fondamentaux : le théorème d'existence et d'unicité des solutions, le lemme de Gronwall, la dépendance régulière en fonction des données initiales et d'un paramètre

Le théorème fondamental d'existence et unicité des solutions des équations différentielles est une conséquence directe du théorème du point fixe appliqué dans un certain espace fonctionnel. Il ne permet a priori de contrôler la solution que pendant un temps court. Par contraste les méthodes de moyennisation le permettent sur des temps longs et le théorème de stabilité de Poincaré-Lyapunov donne le premier exemple d'asymptotique. Un outil clef pour démontrer ces résultats plus fins que le théorème d'existence est le lemme de Gronwall. Pour le confort de la lecture, on inclut ici les démonstrations de ces résultats de base. On supposera néanmoins connues les notions fondamentales de topologie et de calcul différentiel, en particulier, le théorème des fonctions implicites, le théorème de Jordan, les notions

de variété différentiable, d'immersion, plongement et difféomorphisme, germe d'une donnée différentiable (champ de vecteurs, fonction, difféomorphisme).

Théorème 1. *Le théorème fondamental*

On considère une équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad x \in R^n, \quad t \in R,$$

et on suppose que le second membre de l'équation est donné par une fonction f qui est Lipschitzienne de rapport K par rapport à x , uniformément en $t \in [-a, a]$. Soit x_0 une donnée initiale, il existe une seule solution $x(t)$ de l'équation différentielle qui satisfait $x(0) = x_0$ et qui est définie sur l'intervalle $[-c, c]$ avec $c < \text{Min}(a, 1/K)$.

Preuve. Cette solution satisfait l'équation intégrale

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(x(u), u) du.$$

On considère l'espace des fonctions continues $y \in C^0([-a, a])$ muni de la norme $\|y\| = \text{Max}_{t \in [-a, a]} \|y(t)\|$. Soit $L : C^0([-a, a]) \mapsto C^0([-a, a])$ l'opérateur linéaire défini par

$$L(y)(t) = x(0) + \int_0^t f(y(u), u) du.$$

Cet opérateur satisfait

$$L(y)(t) - L(y')(t) = \int_0^t [f(y(u), u) - f(y'(u), u)] du,$$

et donc

$$\|L(y) - L(y')\| \leq c.K \|y - y'\|.$$

Si on impose $c < \text{Min}(a, 1/K)$, on obtient que l'opérateur L est une contraction. Il possède donc un unique point fixe dans l'espace fonctionnel $C^0([-a, a])$. Cet unique point fixe est une fonction continue qui est solution de l'équation différentielle (et de fait, elle est différentiable) et ceci démontre l'existence et l'unicité cherchée. \square

Un cas particulier important pour les applications est celui où f est supposée différentiable. Dans ce cas, le théorème des accroissements finis démontre que f satisfait une condition de Lipschitz locale.

Théorème 2. *Le lemme de Gronwall*

Soit $\phi(t)$ une fonction continue, à valeurs positives définie sur un intervalle $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ qui satisfait une inégalité du type :

$$\phi(t) \leq \delta_1 \int_{t_0}^t \phi(s) ds + \delta_2(t - t_0) + \delta_3,$$

alors on peut majorer la fonction par

$$\phi(t) \leq \left(\frac{\delta_2}{\delta_1} + \delta_3\right) \exp[\delta_1(t - t_0)] - \frac{\delta_2}{\delta_1},$$

pour toute valeur de t comprise dans l'intervalle $[t_0, t_0 + T]$.

Preuve. On peut poser

$$\psi(t) = \phi(t) + \frac{\delta_2}{\delta_1}$$

et obtenir l'inégalité

$$\psi(t) \leq \delta_1 \int_{t_0}^t \psi(s) ds + \frac{\delta_2}{\delta_1} + \delta_3.$$

Ceci donne donc l'inégalité

$$\frac{\delta_1 \psi(t)}{\delta_1 \int_{t_0}^t \psi(s) ds + \frac{\delta_2}{\delta_1} + \delta_3} \leq \delta_1.$$

Puis par intégration

$$\log\left[\delta_1 \int_{t_0}^t \psi(s) ds + \frac{\delta_2}{\delta_1} + \delta_3\right] - \log\left(\frac{\delta_2}{\delta_1} + \delta_3\right) \leq \delta_1(t - t_0),$$

ce qui donne

$$\delta_1 \int_{t_0}^t \psi(s) ds + \frac{\delta_2}{\delta_1} + \delta_3 \leq \left(\frac{\delta_2}{\delta_1} + \delta_3\right) e^{\delta_1(t - t_0)}.$$

Si on applique à nouveau l'inégalité initiale, il vient

$$\psi(t) \leq \left(\frac{\delta_2}{\delta_1} + \delta_3\right) e^{\delta_1(t - t_0)},$$

et en revenant à la fonction $\phi(t)$, on obtient l'inégalité cherchée.

□

Théorème 3. On considère une équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, \lambda),$$

et on suppose que le second membre de l'équation est donné par une fonction f qui est Lipschitzienne de rapport K par rapport à x uniformément par rapport à un paramètre λ et par rapport à $t \in [-a, +a]$. Il existe une unique solution maximale $\phi = \phi(t, t_0, x_0)$ telle que $\phi(t_0, t_0, x_0) = x_0$, définie sur un intervalle maximum $I(t_0, x_0) = (\omega_-(t_0, x_0, \lambda), \omega_+(t_0, x_0, \lambda))$.

On se pose ici la question de la régularité de la dépendance de la solution en fonction de (t_0, x_0, λ) . On commence par remarquer que la dépendance en fonction du paramètre additionnel λ se ramène à la dépendance en fonction de (t_0, x_0) en remplaçant le système par

$$\dot{x} = f(x, t, \lambda), \quad \dot{\lambda} = 0.$$

Le lemme de Gronwall a la conséquence immédiate suivante

Théorème 4. *Régularité de la solution en fonction des données initiales*

Pour $t \in I(t_0, x_0) \cap I(t_0, y_0)$, on a

$$|\phi(t, t_0, x_0) - \phi(t, t_0, y_0)| \leq \exp(K |t - t_0|) |x_0 - y_0|.$$

Il s'ensuit que la solution dépend continûment de la donnée initiale.

La dépendance continue en fonction de t_0 s'obtient plus directement et sa démonstration est laissée au lecteur. Plus généralement, si on suppose que le champ de vecteurs est différentiable, on peut montrer que la solution dépend aussi de façon différentiable de (t_0, x_0) .

1.2 Flot, portrait de phase, points singuliers, section transverse, théorème de redressement du flot, ensemble ω -limite et α -limite, orbites périodiques et application de premier retour.

Soit U un ouvert de R^n , un champ de vecteurs X de classe C^k sur U est la donnée d'une application $X : U \rightarrow R^n$ de classe C^k

$$X : x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x)). \quad (1.1)$$

On lui associe le système différentiel

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.2)$$

où les fonctions $x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto f_i(x)$ (appelées composantes du champ de vecteurs X) sont des fonctions de classe C^k sur l'ouvert U .

D'après le théorème 1, il existe une solution maximale unique $x(t)$ aux équations (1.1) telle que $x(0) = x_0$.

Définition 1. La correspondance $\phi_t : x_0 \mapsto x(t)$ qui associe à une donnée initiale x_0 la valeur de la solution maximale $x(t)$ au temps t , qui correspond à cette donnée initiale, est appelée le flot au temps t du champ de vecteurs X . Le flot du champ de vecteurs est l'application qui associe à (t, x) la solution maximale $x(t)$ au temps t qui correspond à la donnée initiale x :

$$(t, x) \mapsto \phi(t, x) = \phi_t(x) = x(t).$$

Le flot est dit complet lorsque cette correspondance est définie pour toute valeur de $t \in [-\infty, +\infty]$.

Définition 2. *L'orbite (ou courbe intégrale) γ du champ de vecteurs X passant par le point x_0 est la courbe différentiable formée des points $x(t)$ de U donnés par la solution de (1.1) avec donnée initiale x_0 . Cette courbe est orientée par le sens de variation de t . Sa tangente au point $x(t)$ est la droite affine passant par $x(t)$ de direction le vecteur $X(x(t))$. On distingue éventuellement l'orbite positive $\gamma_+ = \{x(t), t \geq 0\}$ et l'orbite négative $\gamma_- = \{x(t), t \leq 0\}$ passant par le point $x(0) = x_0$.*

Le portrait de phase du champ de vecteurs X est la partition de l'ouvert U en les orbites. Le théorème 1 implique que la décomposition en orbites définit une partition de l'ouvert U . L'analyse qualitative a pour objet d'étudier les caractéristiques géométriques du portrait de phase.

Définition 3. *Un point singulier du champ de vecteurs X est un point x_0 où toutes les composantes du champ s'annulent simultanément :*

$$f_i(x_0) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

On dit aussi que x_0 est un zéro du champ de vecteurs ou éventuellement une position d'équilibre. Un point qui n'est pas singulier est dit régulier.

Définition 4. *Soit X un champ de vecteurs différentiable défini sur un ouvert U de R^n . Soit A un ouvert de R^{n-1} . Une section transverse locale du champ X est une application différentiable $f : A \rightarrow U$ telle que en tout point $a \in A$, $Df(a)(R^{n-1}) \oplus X(f(a)) = R^n$. On munit $\Sigma = f(A)$ de la topologie induite. Si $f : A \rightarrow \Sigma$ est un homéomorphisme, on dit que Σ est une section transverse au champ X .*

Définition 5. *Deux champs de vecteurs X et Y de classe C^k sont dits topologiquement équivalents s'il existe un homéomorphisme h qui envoie les orbites de X sur celles de Y en préservant l'orientation. Si on note $\phi(t, x)$ (resp. $\psi(t, x)$) les flots de X (resp. Y), étant donné un point p et un réel $\delta > 0$, il existe donc un ϵ tel que pour t , $0 < t < \delta$, il existe un t' , $0 < t' < \epsilon$, tels que*

$$h(\phi(t, p)) = \psi(t', h(p))$$

Définition 6. *Deux champs de vecteurs X et Y de classe C^k sont dits conjugués par un difféomorphisme (resp. topologiquement conjugués) s'il existe un difféomorphisme h (resp. un homéomorphisme) qui envoie les orbites de X sur les orbites de Y en conservant le temps. Autrement dit, si on désigne par $\phi(t, x)$ et $\psi(t, x)$ les flots de X et de Y , on a*

$$h(\phi(t, x)) = \psi(t, h(x)).$$

Si le difféomorphisme $h : U \rightarrow U$ est défini sur le même ouvert U d'une variété, la conjugaison par le difféomorphisme h est équivalent à la réécriture du champ de vecteurs dans un autre système de coordonnées.

Théorème 5. Soit X un champ de vecteurs de classe C^k défini sur un ouvert de R^n et soit p un point régulier du champ X . Soit $f : A \rightarrow \Sigma$ une section transverse locale de X telle que $f(0) = p$. Il existe un voisinage V de p et un difféomorphisme h de classe $C^k : h : V \rightarrow (-\epsilon, +\epsilon) \times B$ où B est une boule ouverte de R^{n-1} centrée à l'origine, tel que

$$(i) \ h(\Sigma \cap V) = 0 \times B$$

(ii) h est une conjugaison de classe C^k entre le champ X restreint à V et le champ constant Y

$$Y : (-\epsilon, +\epsilon) \times B \rightarrow R^n, \quad Y = (1, 0, 0, \dots, 0) \in R^n.$$

On désigne par $\phi(t, p)$ le flot du champ de vecteurs au temps t appliqué au point p . On définit l'application $F : (t, u) \mapsto \phi(t, f(u))$. Cette application envoie, bien sûr, les segments de droites parallèles à l'axe des ordonnées sur les orbites de X . L'application linéaire tangente $DF(0)$ est un isomorphisme et d'après le théorème de l'inverse local, il s'ensuit que F est un difféomorphisme local. On peut donc choisir un voisinage $(-\epsilon, +\epsilon) \times B$ de l'origine tel que F restreint à ce voisinage soit un difféomorphisme sur l'image $V = F((-\epsilon, +\epsilon) \times B)$. On pose h égal à la restriction de F^{-1} à ce voisinage V . On a alors, $h(\Sigma \cap V) = 0 \times B$ et

$$Dh^{-1}(t, u).Y(t, u) = \frac{dF(t, u)}{dt} = X(F(t, u)) = X(h^{-1}(t, u)).$$

Corollaire 1. Soit Σ une section transverse locale de X . Soit p un point de Σ . Il existe $\epsilon(p)$ et un voisinage V de p et une fonction $\tau : V \rightarrow R$ de classe C^k telle que $\tau(V \cap \Sigma) = 0$ et

(i) Pour tout point $q \in V$, la courbe intégrale $\phi(t, q)$ de $X|_V$ existe pour toute valeur de $t \in (-\epsilon + \tau(q), +\epsilon + \tau(q))$.

(ii) Le point q appartient à Σ si et seulement si $\tau(q) = 0$.

Il suffit en effet de montrer ce résultat pour un champ constant, où il est évident, puis d'observer que le résultat subsiste par conjugaison.

Définition 7. Soit $\phi(t, p)$ une courbe intégrale du champ de vecteurs X , définie sur un ouvert U de R^n , qui passe par le point p . On suppose cette courbe intégrale définie sur un intervalle maximal (α, β) .

Si $\beta = +\infty$, on définit l'ensemble ω -limite de l'orbite comme

$$\omega(p) = \{q \in U, \text{ il existe une suite } t_n \rightarrow \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t_n) = q\}.$$

De même, dans le cas où $\alpha = -\infty$, on définit l'ensemble α -limite de l'orbite comme

$$\alpha(p) = \{q \in U, \text{ il existe une suite } t_n \rightarrow -\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t_n) = q\}.$$

Si γ_p désigne l'orbite passant par p et si $q \in \gamma_p$, alors $\omega(p) = \omega(q)$. Ceci justifie la définition suivante :

Définition 8. *L'ensemble ω -limite (resp. α -limite) d'une orbite γ est l'ensemble $\omega(p)$ où p est un point quelconque de γ . On le désigne par $\omega(\gamma)$ (resp. $\alpha(\gamma)$).*

Dans le théorème suivant, on peut remplacer ω -limite par α -limite (avec des changements évidents).

Théorème 6. *Soit X un champ de vecteurs de classe C^k défini sur un ouvert U . On suppose que la demi-orbite positive d'un point : $\gamma^+(p) = \{\phi(t, p), t \geq 0\}$ est contenue dans un compact K de U . Alors $\omega(p)$ est non vide, compact connexe et invariant par le flot.*

Preuve. Soit t_n une suite de réels qui tend vers l'infini. Comme la suite $\phi(t_n, p)$ est contenue dans un compact, il existe une sous-suite convergente. Soit q la limite de cette sous-suite, on a $q \in \omega(p)$ et il s'ensuit que $\omega(p)$ est non vide.

Soit q_n une suite de $\omega(p)$ qui converge vers un point q . On va montrer que $q \in \omega(p)$. On a donc une suite t'_m telle que : $\phi(t'_m, p) \rightarrow q_n$. On choisit $m(n)$ tel que $t_n = t'_{m(n)} > n$ et $d(\phi(t_n, p), q_n) < \frac{1}{n}$. On a $d(\phi(t_n, p), q) \rightarrow 0$ et donc $q \in \omega(p)$. L'ensemble $\omega(p)$ est un fermé contenu dans un compact, il est donc compact.

Le fait que $\omega(p)$ est invariant par le flot est évident. On démontre maintenant qu'il est connexe. Par l'absurde, on suppose que $\omega(p)$ est formé de deux fermés disjoints A et B et on pose $d = d(A, B)$. Il existe une suite t'_n qui tend vers l'infini telle que $\phi(t'_n, p) \rightarrow a \in A$ et une autre suite t''_n telle que $\phi(t''_n, p) \rightarrow b \in B$. On peut donc former une nouvelle suite t_n dont les termes pairs satisfont $d(\phi(t_n, p), A) < d/2$ et les termes impairs $d(\phi(t_n, p), A) > d/2$. La fonction $f(t) = d(\phi(t, p), A)$ est une fonction continue sur le segment (t_n, t_{n+1}) qui prend des valeurs supérieures et inférieures à $d/2$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc une valeur τ_n telle que $d(\phi(\tau_n, p), A) = d/2$. On peut extraire de la suite $\phi(\tau_n, p)$ une suite convergente dont on désigne par q^* sa limite. On a $q^* \in \omega(p)$ et de plus $d(q^*, A) = d/2$ et $d(q^*, B) \geq d(A, B) - d(q^*, A) = d/2$. Il s'ensuit que q^* n'appartient ni à A ni à B , ce qui est contradictoire. \square

Définition 9. *Une orbite périodique d'un champ de vecteurs X est une orbite passant par un point x_0 , qui n'est pas un point singulier, pour lequel il existe un nombre $T > 0$ appelé période vérifiant*

$$x(T) = x(0).$$

On qualifie de période minimale, le plus petit nombre réel positif T qui satisfait cette condition. Les multiples de la période minimale sont aussi des périodes. Lorsqu'on ne précise pas plus, par exemple pour une orbite périodique de période T , on comprend toujours la période minimale.

Soit Γ une orbite périodique d'un champ de vecteurs X de classe C^k défini par $\dot{x} = f(x)$, passant par le point x_0 . Soit Σ un germe d'hyperplan transverse à Γ en x_0 . Pour tout point $x \in \Sigma$ suffisamment proche de x_0 , la solution du système différentiel passant par x pour $t = 0$ est notée $\phi_t(x)$.

Théorème 7. *On note*

$$\Gamma = \{x \mid x = \phi_t(x_0), 0 \leq t \leq T\},$$

l'orbite périodique de période T .

Soit Σ l'hyperplan orthogonal à Γ en x_0

$$\Sigma = \{x \mid (x - x_0) \cdot f(x_0) = 0\}.$$

Alors il existe $\delta > 0$ et une unique fonction $x \mapsto \tau(x)$ de classe C^k définie pour

$$x \in \Sigma, \quad |x - x_0| < \delta,$$

telle que

$$\phi_{\tau(x)}(x) \in \Sigma.$$

La fonction $x \mapsto \tau(x)$ est appelée la fonction temps de premier retour.

Preuve. On définit la fonction de classe C^k :

$$F(t, x) = [\phi_t(x) - x_0] \cdot f(x_0).$$

De la périodicité de l'orbite périodique, il résulte que

$$F(T, x_0) = 0.$$

De plus, on a

$$\frac{\partial F(T, x_0)}{\partial t} = \frac{\partial \phi_t(x_0)}{\partial t} \Big|_{t=T} \cdot f(x_0) = f(x_0) \cdot f(x_0) = |f(x_0)|^2 \neq 0,$$

puisque x_0 ne peut pas être un point singulier du système différentiel. D'après le théorème des fonctions implicites, il existe une unique fonction $\tau(x)$ de classe C^k telle que $\tau(x_0) = T$ et

$$F(\tau(x), x) = 0,$$

ce qui est équivalent à

$$\phi_{\tau(x)}(x) \in \Sigma.$$

□

Définition 10. *L'application*

$$P : x \mapsto P(x) = \phi_{\tau(x)}(x),$$

est appelée l'application de premier retour de Poincaré associée à l'orbite périodique Γ . Ce qui précède démontre qu'elle est de classe C^k .

L'application de Poincaré est un des outils importants d'investigation des orbites périodiques. On ramène l'étude d'un système différentiel de dimension n au voisinage de l'orbite à celle d'une application d'une section transverse de dimension $n - 1$ dans elle-même. Pour cette raison, l'étude des systèmes différentiels de dimension n se ramène souvent à celle des systèmes dynamiques discrets (itération d'une application) de dimension $n - 1$. On peut considérer des applications de premier retour au voisinage d'un ensemble invariant plus général qu'une orbite périodique. Le principe de la construction et la démonstration de l'existence est le même et il ne sera pas répété.

On distingue les systèmes dynamiques continus (associés aux solutions d'un système différentiel) des systèmes dynamiques discrets engendrés par l'itération d'une application (ou d'un difféomorphisme). On n'étudiera pas ici les systèmes dynamiques discrets pour leur intérêt propre. On introduit néanmoins la terminologie associée car il est commode de l'appliquer aux applications de premier retour de Poincaré. Pour une application F on désigne par F^2, \dots, F^n, \dots les itérés successifs.

Définition 11. *Un point fixe d'une application est un point x tel que $F(x) = x$. Plus généralement, un point périodique de période n est un point fixe de l'itéré F^n :*

$$F^n(x) = x,$$

qui n'est pas un point fixe de F^m avec $m < n$.

Les points périodiques des applications jouent le rôle des orbites périodiques pour les systèmes discrets. Les points fixes jouent le rôle des points singuliers.

1.3 Les champs de vecteurs du plan, exemples de points singuliers, les systèmes conservatifs et dissipatifs, les cycles limites

Dans ce paragraphe, on considère le cas particulier de la dimension deux. Un champ de vecteurs du plan est défini par un système d'équations différentielles

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = g(x, y), \quad (1.3)$$

où les deux fonctions $(f(x, y), g(x, y))$ sont supposées suffisamment régulières (au moins de classe C^1) pour que la solution $(x(t), y(t))$ avec donnée initiale $(x(0), y(0))$ existe et soit unique. Le flot défini en toute dimension dans le paragraphe précédent s'écrit ici en particulier sous la forme : $(x(0), y(0)) \mapsto (x(t), y(t))$. Pour $(x(0), y(0))$ fixé, l'ensemble des points du plan de la forme $(x(t), y(t))$ constitue l'orbite du système différentiel passant par le point $(x(0), y(0))$. La partition du plan en les orbites du système différentiel s'appelle le plan de phase.

Un point singulier du système différentiel (1.3) est un point $(x(0), y(0))$ tel que :

$$f(x(0), y(0)) = g(x(0), y(0)) = 0.$$

Définition 12. *Un point singulier est dit générique (ou simple) si la Jacobienne*

$$J(x(0), y(0)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} \right)(x(0), y(0))$$

est différente de 0.

Soient λ et μ les deux valeurs propres de la matrice $J(x(0), y(0))$. On suppose donc que $\lambda, \mu \neq 0$.

Si les deux valeurs propres sont réelles et de signes distincts, le point singulier est appelé col. Si les deux valeurs propres sont réelles et de même signe, le point est un noeud (stable ou instable selon le signe commun des valeurs propres). Dans le premier cas, le point singulier est un attracteur, dans le second un répulseur. Si les deux valeurs propres sont complexes conjuguées de partie réelle non nulle, on a un foyer stable ou instable selon le signe de la partie réelle. On dit que le point singulier est un centre si toutes les orbites au voisinage du point singulier sont périodiques (ceci implique que les deux valeurs propres $\lambda = \bar{\mu}$ sont imaginaires pures, mais cette condition n'est pas suffisante).

Dans ce premier chapitre, on se borne à donner des exemples de champs de vecteurs linéaires ayant ces différents types de points singuliers.

Le premier exemple est donné par :

$$\dot{x} = x$$

$$\dot{y} = -y.$$

L'intégration de ce système est immédiate et l'origine est un point singulier de type col.

Le second exemple est :

$$\dot{x} = x$$

$$\dot{y} = y,$$

pour lequel l'origine est un noeud instable.

L'exemple suivant :

$$\dot{x} = -x$$

$$\dot{y} = -y,$$

possède un noeud stable.

Le champ de vecteurs

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = -x,$$

possède un centre à l'origine.

Enfin l'exemple

$$\dot{x} = y + \alpha x$$

$$\dot{y} = -x + \alpha y,$$

définit un foyer stable si $\alpha < 0$ et instable si $\alpha > 0$.

Définition 13. Une fonction différentiable $(x, y) \mapsto H(x, y)$ est une intégrale première du système différentiel si :

$$f(x, y) \frac{\partial H}{\partial x} + g(x, y) \frac{\partial H}{\partial y} = 0.$$

Un système différentiel défini sur un domaine du plan est dit conservatif s'il possède une intégrale première sur ce domaine. Dans le cas où il ne possède pas d'intégrale première, il est dit dissipatif.

On peut utiliser le terme intégrable au lieu de conservatif. Il peut être difficile dans certaines circonstances de montrer qu'un système donné n'est pas conservatif surtout si on ne précise pas plus la régularité de l'intégrale première.

Les systèmes Hamiltoniens constituent une classe particulière de systèmes conservatifs. Ce sont les systèmes pour lesquels il existe une fonction $(x, y) \mapsto H(x, y)$ pour laquelle le système s'écrit :

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}. \quad (1.4)$$

Il est facile de vérifier que le système possède la fonction $H(x, y)$ comme intégrale première.

Définition 14. Pour un système plan, on appelle cycle limite une orbite périodique qui est isolée dans l'ensemble des orbites périodiques.

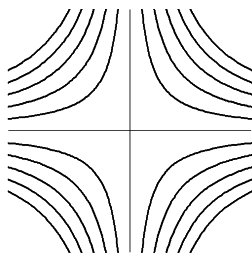
La notion d'oscillateur s'est progressivement imposée par son aspect universel à de nombreuses modélisations. La définition proposée par Y. Rocard [Rocard, 1943] est la suivante :

“Un oscillateur étant défini comme un système fermé, complet, capable de fournir et de maintenir une loi de variation périodique entretenue pour l'une au moins des variables qui fixent son état ou servent à le décrire”.

Il n'est pas si facile de proposer une définition “d'oscillateur” dans le cadre de l'analyse qualitative. On peut avancer (en première approximation) la définition suivante :

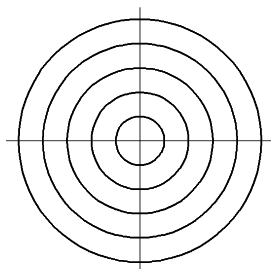
Définition 15. Un oscillateur est un système différentiel du plan qui est soit conservatif et dans ce cas il possède un continuum d'orbites périodiques (les composantes connexes des lignes de niveaux de l'intégrale première), soit dissipatif et dans ce cas il présente un cycle limite.

$$(i) \quad \begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$



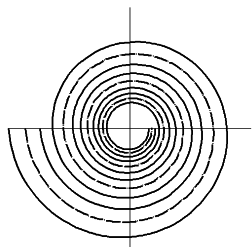
« point col »
 $xy = C^{te}$

$$(ii) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$



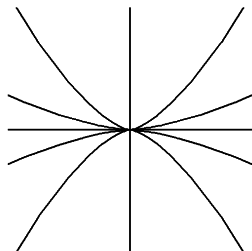
« centre »
 $x^2 + y^2 = C^{te}$

$$(iii) \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho & \alpha \\ -\alpha & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



« foyer »
 $z = e^{(\rho - i\alpha)t} z_0$

$$(iv) \quad \begin{cases} \dot{x} = 2x \\ \dot{y} = 3y \end{cases}$$



« nœud »
 $\begin{cases} x = x_0 e^{2t} \\ y = y_0 e^{3t} \end{cases}$

Fig.1 – Exemples de points singuliers pour un système différentiel linéaire

1.4 Le théorème de Poincaré-Bendixson

L'énoncé est le suivant :

Théorème 8. *On considère un champ de vecteurs du plan X*

$$\dot{x} = f(x, y)$$

$$\dot{y} = g(x, y),$$

où les fonctions f, g sont partout de classe C^1 . Soit $\gamma_m = \{\phi(t, m), t \in \mathbb{R}\}$ une courbe intégrale de X , définie pour tout t , telle que l'orbite positive passant par le point m : $\gamma_m^+ = (\phi(t, m), t \geq 0)$ est contenue dans un compact K . On suppose que le champ X a un nombre fini de singularités contenues dans $\omega(m)$. Il y a trois possibilités :

- a) Si $\omega(m)$ ne contient pas de points singuliers, c'est une orbite périodique.
- b) Si $\omega(m)$ contient à la fois des points singuliers et des points réguliers, $\omega(m)$ est constitué d'un ensemble d'orbites et chacune d'entre elles tend vers un des points singuliers lorsque $|t| \rightarrow \infty$. Dans ce cas, l'ensemble $\omega(m)$ est appelé un graphique.
- c) Si $\omega(m)$ ne contient aucun point régulier, alors c'est un point singulier.

La démonstration est découpée en plusieurs lemmes.

Lemme 1. *Soit Σ une section transversale au flot du champ X , $\gamma = \{\phi(t, q), t \in \mathbb{R}\}$ une orbite de X et p un point de $\Sigma \cap \omega(\gamma)$. Il existe une suite de points $\phi(\tau_n)(q)$, $n \rightarrow \infty$ de points de Σ , telle que*

$$p = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(\tau_n, q).$$

Preuve. Soit V et $\tau : V \rightarrow \mathbb{R}$ le voisinage et l'application donnés par le corollaire 1. Comme $p \in \omega(\gamma)$, il existe une suite t_n telle que $t_n \rightarrow \infty$ et $\phi(t_n, q) \rightarrow p$ quand $n \rightarrow \infty$. On peut supposer que les points de la suite $\phi(t_n, q)$ sont dans l'ouvert V (à partir d'un certain rang). On pose

$$\tau_n = t_n + \tau(\phi(t_n, q)).$$

On a donc que

$$\phi(\tau_n, q) = \phi(\tau(\phi(t_n, q)), \phi(t_n, q)),$$

appartient à Σ . On a de plus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(\tau_n, q) = \phi(\tau(\phi(t_n, q)), \phi(t_n, q)) = \phi(0, p) = p,$$

parce que τ est continue. □

Dans le cas du plan, une section transverse Σ est difféomorphe à un intervalle. Il existe donc un ordre naturel sur les points de Σ .

Lemme 2. *Soit Σ une section transverse à X . Une orbite positive $\gamma^+(p) = \{\phi(t, p), t \geq 0\}$, de X intersecte Σ en une suite monotone $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$.*

Preuve. Désignons par $D = \{t \geq 0, \phi(t, p) \in \Sigma\}$. Le théorème 5 montre que D est discret. On peut donc ordonner D :

$$D = \{0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots\}.$$

On peut désigner par $p_1 = p$, $p_2 = \phi(t_1, p)$ et par induction $p_n = \phi(t_{n-1}, p)$. Si $p_1 = p_2$, l'orbite est périodique et $p_n = p$, pour tout n . Si $p_1 \neq p_2$, on peut supposer $p_1 < p_2$. S'il existe p_3 , on va montrer que nécessairement $p_2 < p_3$.

On oriente la section Σ . Du fait que Σ est connexe, les orbites de X coupent la section Σ dans le "même sens", par exemple de la gauche vers la droite. On considère la courbe de Jordan formée de l'arc $p_1 p_2$ de Σ et de l'arc de l'orbite compris entre p_1 et p_2 : $\{\phi(t, p), 0 \leq t \leq t_1\}$. D'après le théorème de Jordan, cette courbe a un intérieur et un extérieur. L'orbite γ entre dans l'intérieur du domaine déterminé par la courbe par le segment $p_1 p_2$. Elle ne peut pas sortir de ce domaine. Il s'ensuit que $p_1 < p_2 < p_3$. On démontre ainsi le résultat de proche en proche. \square

Lemme 3. *Soit Σ une section transverse et p un point de U . L'ensemble $\omega(p)$ contient au plus un point dans Σ .*

Preuve. En effet, d'après le lemme 1, un point de $\Sigma \cap \omega(p)$ est nécessairement la limite d'une suite de points de l'orbite qui sont sur Σ . D'après le lemme 2, la suite des points d'intersection de Σ avec l'orbite positive est monotone. Elle est donc nécessairement convergente et toute sous-suite ne peut converger que vers un seul point qui est la limite de la suite. \square

Lemme 4. *Soit p un point de U tel que la demi-orbite positive $\gamma^+(p)$ est contenue dans un compact. Soit γ une orbite de X qui est contenue dans $\omega(p)$. Si $\omega(\gamma)$ contient des points réguliers, alors γ est une orbite fermée et $\omega(p) = \gamma$.*

Preuve. Soit $q \in \omega(\gamma)$ un point régulier. On considère V un voisinage de q donné par le théorème 5 et soit Σ une section transverse au flot qui contient q . D'après le lemme 1, il existe une suite $t_n \rightarrow \infty$ telle que $\gamma(t_n) \in \Sigma$. Comme $\gamma(t_n) \in \omega(p)$, la suite se réduit à un point d'après le lemme 3. Ceci montre que l'orbite γ est périodique. \square

On doit maintenant montrer que $\gamma = \omega(p)$. Comme on sait que $\omega(p)$ est connexe et que γ est fermée, il suffit de montrer que γ est ouvert dans $\omega(p)$.

Soit \bar{p} un point quelconque de γ . Soit $V_{\bar{p}}$ le voisinage et $\Sigma_{\bar{p}}$ la section transverse prévus par le théorème 5. On a bien sûr $V_{\bar{p}} \cap \gamma \subset V_{\bar{p}} \cap \omega(p)$. On va démontrer l'inclusion inverse. Par l'absurde, on suppose qu'il existe un point $q' \in V_{\bar{p}} \cap \omega(p)$ qui n'appartient pas à γ . Par le théorème 5 et par l'invariance de $\omega(p)$, il existe $t \in R$ tel que $\phi(t, q') \in \omega(p) \cap \Sigma_{\bar{p}}$ et $\phi(t, q') \neq \bar{p}$. On obtient

ainsi une contradiction parce qu'il ne peut exister deux points distincts de $\omega(p)$ dans $\Sigma_{\bar{p}}$, d'après le lemme 3. On a donc $V_{\bar{p}} \cap \gamma = V_{\bar{p}} \cap \omega(p)$. On considère alors l'ouvert $U = \cup_{\bar{p} \in \gamma} V_{\bar{p}}$ qui satisfait $U \cap \omega(p) = U \cap \gamma = \gamma$ et on obtient que γ est ouvert dans $\omega(p)$.

Démonstration du théorème de Poincaré-Bendixson

Dans le premier cas où tous les points de $\omega(p)$ sont réguliers, on considère un point régulier $q \in \omega(p)$. L'orbite γ_q est contenue dans $\omega(p)$. Comme $\omega(p)$ est compact, $\omega(\gamma_q)$ est non vide. Il suit du lemme 4 que $\omega(p) = \gamma_q$ est une orbite périodique.

Si maintenant on suppose que $\omega(p)$ contient à la fois des points réguliers et des points singuliers, on considère une orbite γ contenue dans $\omega(p)$ qui n'est pas réduite à un point singulier. Comme $\omega(\gamma)$ et $\alpha(\gamma)$ ne peuvent pas contenir de points réguliers d'après le lemme 4, qu'ils sont connexes et qu'il existe un nombre fini de points singuliers dans $\omega(p)$, ce sont eux-mêmes des points singuliers.

Dans la troisième situation, le même raisonnement montre que $\omega(p)$ est réduit à un point singulier.

1.5 Indice et degré

Soit $\phi : S^1 \rightarrow S^1$ une application continue du cercle dans lui-même. On peut lui associer une application continue $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\phi(\exp(is)) = \exp(i\psi(s)).$$

Dans ce contexte, on dit que ψ "relève" ϕ . Lorsque la variable s croît de s_0 à $s_0 + 2\pi$, le point $z = \exp(is)$ effectue sur S^1 un tour dans le sens positif. Si on suit par continuité, $\psi(s)$ varie de $\psi(s_0)$ à $\psi(s_0 + 2\pi)$ et il existe un entier n tel que

$$\psi(s_0 + 2\pi) = \psi(s_0) + 2\pi n.$$

Cet entier n ne dépend pas du point s_0 et de l'application ψ choisie pour relever ϕ . Cet entier qui ne dépend que de ϕ s'appelle le degré de l'application.

Proposition 1. Soient $\phi_1 : S^1 \rightarrow S^1$ et $\phi_2 : S^1 \rightarrow S^1$ deux applications continues telles que pour tout $z \in S^1$, $\phi_1(z)$ et $\phi_2(z)$ ne sont pas opposés sur le cercle. Alors les degrés de ϕ_1 et de ϕ_2 sont les mêmes.

Preuve. En effet, on peut prendre une détermination du logarithme complexe en dehors de l'axe réel négatif et construire une application continue θ telle que

$$\phi_1(z) = \phi_2(z)\exp(i\theta(z)).$$

On obtient alors de suite l'égalité des degrés. □

Une propriété fondamentale du degré est son invariance par homotopie que on rappelle brièvement ici.

Définition 16. Soient X et Y deux espaces topologiques séparés, $f_0 : X \rightarrow Y$ et $f_1 : X \rightarrow Y$ deux applications continues. On dit que f_0 et f_1 sont homotopes s'il existe une application continue $g : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ telle que, pour tout $x \in X$, on ait

$$g(x, 0) = f_0(x)$$

$$g(x, 1) = f_1(x).$$

Toute application g satisfaisant ces conditions est appelée une homotopie de f_0 à f_1 .

Théorème 9. Si deux applications continues $\phi_0 : S^1 \rightarrow S^1$ et $\phi_1 : S^1 \rightarrow S^1$ sont homotopes, elles ont même degré.

Preuve. On note $\phi_t(z) = g(z, t)$. L'application g est uniformément continue et pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $d(y, z) < \eta$ et $|t - s| < \eta$ implique $d(g(y, s), g(z, t)) < \epsilon$. En particulier, si $z \in S^1$, et $|t - s| < \eta$, les points $\phi_t(z)$ et $\phi_s(z)$ ne peuvent pas être opposés. D'après la proposition 1, le degré $t \mapsto \deg(\phi_t)$ est localement constant donc constant puisque $[0, 1]$ est connexe. \square

Définition 17. Soit X un champ de vecteurs, défini sur un ouvert U du plan. Soit C une courbe de Jordan contenue dans U définie par $h : S^1 \rightarrow C$, telle que le champ de vecteurs ne s'annule pas en aucun point de C . Le degré de l'application continue du cercle dans lui-même définie par la composition

$$s \mapsto h(s) = x \mapsto \frac{X(x)}{\|X(x)\|},$$

s'appelle l'indice de la courbe C par rapport au champ de vecteurs X . On le note $I_X(C)$.

Cet indice peut se calculer avec une intégrale. Si on désigne par

$$X(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)),$$

les composantes du champ de vecteurs, l'indice $I_X(C)$ est égal à

$$I_X(C) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{P(s) \frac{dQ(s)}{ds} - Q(s) \frac{dP(s)}{ds}}{P^2(s) + Q^2(s)} ds, \quad (1.5)$$

où on a posé

$$P(s) = P(x(s), y(s)), \quad Q(s) = Q(x(s), y(s)).$$

On considère trois exemples fondamentaux.

Si $X(x, y) = (x, y)$ (noeud répulsif linéaire) et C est le cercle centré à l'origine de rayon 1, on trouve

$$I_X(C) = +1.$$

Si $X(x, y) = (-y + \alpha x, x + \alpha y)$, (foyer linéaire) on trouve

$$I_X(C) = +1.$$

Enfin dans le cas $X(x, y) = (x, -y)$, (col linéaire) on trouve

$$I_X(C) = -1.$$

Si on introduit la 1-forme différentielle fermée

$$\eta = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2},$$

et l'application :

$$F : (x, y) \mapsto (P(x, y), Q(x, y)),$$

cette formule s'écrit au moyen de l'intégrale curviligne

$$I_X(C) = \int_C F * (\eta). \quad (1.6)$$

Avec la formule de Green-Riemann, on démontre facilement le

Lemme 5. *Si deux courbes de Jordan C et C' sont telles que C' est contenue dans l'intérieur de C et si le champ X n'a pas de zéros dans C et C' et dans l'intersection de l'intérieur de C et de l'extérieur de C' , alors*

$$I_X(C) = I_X(C').$$

Soit p un point singulier isolé d'un champ de vecteurs X . L'indice $I_X(C)$ d'une courbe de Jordan C , dont l'intérieur ne contient pas d'autre point singulier de X que p , ne dépend que du point p . Il est appelé l'indice du point singulier et noté $I_X(p)$.

On peut aussi, grâce à l'expression intégrale, montrer que si un champ de vecteurs X est localement conjugué au voisinage d'un point singulier p à un autre champ de vecteurs Y plus simple (par exemple linéaire) alors $I_X(p) = I_Y(p)$.

Théorème 10. *Soit X un champ de vecteurs différentiable sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^2 , et soit a un point singulier isolé de ce champ de vecteurs. On suppose que l'application linéaire tangente $A = DX(a)$ est inversible. Alors l'origine est un point singulier isolé du champ linéaire A et de plus*

$$I_X(a) = I_A(0).$$

Preuve. On peut supposer que $a = 0$. On peut supposer de plus que sur une boule contenant l'origine, on a

$$|X(x) - A(x)| < |A(x)|/2,$$

et donc on a que $X(x)$ et $A(x)$ ne sont jamais opposés sur un cercle centré à l'origine contenu dans cette boule. La proposition 1 démontre le résultat. \square

Avec la formule de Green-Riemann, on démontre aussi facilement le

Théorème 11. *Soit C une courbe de Jordan qui contient en son intérieur un nombre fini de points singuliers d'un champ de vecteurs X . L'indice de la courbe de Jordan par rapport au champ de vecteurs est égal à*

$$I_X(C) = \sum_{i=1}^s I_X(p_i).$$

On peut aussi montrer avec la formule intégrale le résultat suivant

Théorème 12. *Soit X un champ de vecteurs différentiable du plan et C une orbite périodique de X . L'indice $I_X(C)$ est égal à 1.*

Les deux résultats mis ensemble conduisent à :

Théorème 13. *Soit X un champ de vecteurs différentiable et C une orbite périodique. On suppose que le domaine borné bordé par C contient un nombre fini de points singuliers isolés : $(p_i, i = 1, \dots, s)$, alors*

$$\sum_{i=1}^s I_X(p_i) = 1.$$

En particulier, dans l'intérieur du domaine délimité par une orbite périodique, il existe au moins un point singulier.

1.6 La stabilité structurelle

La notion de stabilité structurelle est née avec les travaux de [Andronov-Pontryagin, 1937] et a été précisée avec les travaux de [Peixoto, 1962] puis ceux de [Kupka, 1963] et [Smale, 1967].

Soit M une variété compacte et X un champ de vecteurs de classe C^1 sur M . La norme de X est définie par

$$\|X\|_1 = \sup_{x \in M} |X(x)| + \sup_{x \in M} |DX(x)|.$$

Définition 18. *Un champ de vecteurs $X \in C^1(M)$ est dit structurellement stable s'il existe ϵ tel que tout $Y \in C^1(M)$ tel que*

$$\|X - Y\|_1 < \epsilon,$$

est topologiquement équivalent à X

La stabilité structurelle signifie donc que les caractéristiques topologiques ne changent pas si on déforme un peu le champ de vecteurs. Cette notion ne doit pas être confondue avec la notion de stabilité qui est développée dans le chapitre suivant.

1.7 La notion de forme normale

Les formes normales sont des systèmes de coordonnées locales définis au voisinage d'un point qui est singulier pour un certain champ de vecteurs. Elles relèvent donc de la géométrie analytique locale. On va, dans ce paragraphe utiliser les notations traditionnelles qui sont adaptées à ces études locales.

Définition 19. *On désigne par E l'anneau local des germes de fonctions C^∞ en $0 \in R^n$ et M son idéal maximal formé des germes qui s'annulent à l'origine. Un changement de coordonnées locales en $0 \in R^n$ est un germe de difféomorphisme indéfiniment différentiable qui fixe l'origine. Il est dit tangent à l'identité si son Jacobien à l'origine est l'identité.*

Un champ de vecteurs qui s'annule en $0 \in R^n$ et qui est C^∞ au voisinage de ce point détermine une dérivation de l'anneau local E qui conserve l'idéal maximal M . Il induit donc pour tout entier k une application linéaire $X_k : E/M^k \mapsto E/M^k$. Il est commode de complexifier cette donnée et de procéder sur le corps de base C au lieu de R en revenant à la fin de l'analyse dans le réel (voir [Francoise, 1995] pour plus de détails). On écrit alors pour tout k , la décomposition de Jordan de X_k : $X_k = S_k + N_k$ avec $[S_k, N_k] = 0$. On vérifie que ces décompositions sont compatibles entre les différentes valeurs de k (c'est à dire que la troncation de la décomposition à l'ordre $k+1$ est la décomposition à l'ordre k) et on obtient ainsi une décomposition au niveau des champs de vecteurs formels en la partie semi-simple et la partie nilpotente du jet infini du champ de vecteurs X . La définition formelle d'une forme normale est :

Définition 20. *Une forme normale est un système de coordonnées formelles dans lequel la partie semi-simple du champ de vecteurs est linéaire.*

Dans ce livre, on va aller au plus vite vers des exemples et laisser tomber la partie théorique. Obtenir une forme normale consiste donc à faire un changement de coordonnées donné par des développements de Taylor tronqués à un certain ordre. On essaye d'éliminer le plus de termes possibles dans l'écriture du champ de vecteurs dans le nouveau système de coordonnées sans toucher à sa partie linéaire qu'on peut pour simplifier supposer diagonale. Le système obtenu par l'approche théorique évoquée brièvement ci-dessus est tel qu'à tout ordre le développement de Taylor du champ de vecteurs commute à sa partie linéaire. On fait alors le calcul immédiat suivant :

$$\left[\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}, A_\alpha x^\alpha \frac{\partial}{\partial x_j} \right] =$$

$$A_\alpha (< \lambda, \alpha > - \lambda_j) x^\alpha \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

D'où l'importance des résonances définies comme il suit :

Définition 21. *Etant donné un champ de vecteurs C^∞ qui a un point singulier et dont les valeurs propres de sa partie linéaire en ce point sont les $\lambda_i, i = 1, \dots, n$, on appelle résonances de ce champ (au point singulier) les multi-entiers $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ tels que :*

$$\langle \lambda, \alpha \rangle > -\lambda_i = 0.$$

Le seul exemple de forme normale que nous utiliserons dans ce livre est pour les champs de vecteurs dont la partie linéaire est une multi-rotation :

$$\sum_i^n l_i (x_i \frac{\partial}{\partial y_i} - y_i \frac{\partial}{\partial x_i}).$$

Les valeurs propres du complexifié sont $\lambda_i = il_i$ et $\lambda_{i+n} = -il_i$. Il y a donc les résonances $\lambda_i = -\lambda_{i+n}$. On fait l'hypothèse de l'absence d'autre résonance (par exemple en supposant que les l_i sont indépendants sur \mathbb{Z}). Alors, dans ce cas la forme normale obtenue est appelée la forme normale de Birkhoff et elle s'écrit :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n f_i(p_1, \dots, p_n) (x_i \frac{\partial}{\partial y_i} - y_i \frac{\partial}{\partial x_i}) + \\ & \sum_{i=1}^n g_i(p_1, \dots, p_n) (x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + y_i \frac{\partial}{\partial y_i}), \end{aligned}$$

avec

$$p_i = x_i^2 + y_i^2, i = 1, \dots, n.$$

Dans le cas d'une famille de champ de vecteurs dépendant de paramètres, les coefficients de la forme normale de Birkhoff dépendent des paramètres. Par exemple, si les paramètres n'interviennent pas dans la partie linéaire, les coefficients de Birkhoff dépendent polynômialement des paramètres [Francoise, 1997].

Problèmes

1.1. L'équation logistique

On considère l'équation

$$\frac{dp}{dt} = kp - bp^2.$$

Montrer que cette équation s'intègre et donner une expression explicite de la solution générale.

Cette équation s'appelle l'équation logistique. Elle fut introduite par P.-F. Verhulst en 1838 [Verhulst, 1838] pour décrire l'évolution d'une population. Par opposition à la croissance exponentielle qualifiée souvent de Malthusienne, la croissance logistique d'une population se caractérise par l'existence d'une saturation asymptotique.

1.2. L'application logistique

On considère l'application $F : R \rightarrow R$,

$$F(x) = rx(1 - x),$$

$r > 0$, et le système dynamique discret qu'il engendre, formé des itérés successifs $F^2(x) = F(F(x))$, $F^3(x) = F(F^2(x))$, ...

Vérifier que F possède deux points fixes : 0 et $x_0 = 1 - \frac{1}{r}$.

Un point périodique x de période n est dit stable (resp. instable) si $|(F^n)'(x)| < 1$ (resp. $|(F^n)'(x)| > 1$).

Montrer que l'origine est stable si $r < 1$ et que le deuxième point fixe est stable si $1 < r < 3$.

Montrer que si on augmente r au delà de la valeur $r = 3$, un point périodique de période 2 apparaît [May, 1976]. Déterminer sa stabilité.

Si on continue à augmenter r , montrer que pour $r = 3.83...$, un point périodique de période 3 apparaît.

A cette valeur particulière un nouveau phénomène se produit. Si on itère le système à partir de deux valeurs initiales très proches, les itérés deviennent rapidement très éloignés (forte dépendance par rapport aux conditions initiales). En 1976, May [May, 1976] a montré qu'il est visuellement impossible de distinguer la solution déterministe du système d'une suite de nombres tirés au hasard. Le phénomène a été étudié dans un article au titre fameux "Period three implies Chaos" par Li et York [Li-York, 1975].

1.3. Exemples d'oscillateurs

Montrer que le système

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \omega y \\ \frac{dy}{dt} &= -\omega x,\end{aligned}$$

a toutes ses orbites périodiques de même période $T = 2\pi/\omega$. Il est appelé l'oscillateur harmonique. Il ne possède bien sûr aucun cycle limite.

Montrer que le système

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\sin(x),\end{aligned}$$

a des solutions périodiques (de période variable) et des solutions non bornées.

Ce système représente le pendule simple. L'isochronisme approché des petites oscillations a été observé par Gallilée.

Vérifier que le système

$$\frac{dx}{dt} = y^3$$

$$\frac{dy}{dt} = -x,$$

a aussi toutes ses orbites périodiques.

Ce système est appelé l'oscillateur de Duffing. Les orbites sont données par les courbes de niveau de la fonction $H(x, y) = (1/2)x^2 + (1/4)y^4$ et la période dépend de l'orbite (système non isochrone).

1.4. Les systèmes “ $\lambda - \omega$ ”

Montrer que le système

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \lambda(r)x - \omega(r)y \\ \frac{dy}{dt} &= \omega(r)x + \lambda(r)y, \quad (r^2 = x^2 + y^2)\end{aligned}$$

possède un cycle limite qui est un cercle centré à l'origine, de rayon $r = r_0$ pour toutes les valeurs de r_0 qui sont des zéros de la fonction $\lambda(r)$.

Ces systèmes sont appelés “systèmes $\lambda - \omega$ ” en modélisation. Ils présentent l'avantage que l'on connaît explicitement une équation pour le cycle limite. On peut en fait intégrer explicitement cette équation qui est une forme normale de Birkhoff.

1.5. L'équation de Lotka-Volterra

On considère les équations

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax - \alpha xy, \\ \frac{dy}{dt} &= -cy + \gamma xy.\end{aligned}$$

Montrer que ses équations sont séparables et qu'elles admettent l'intégrale première

$$H(x, y) = a \ln y - \alpha y + c \ln x - \gamma x.$$

Vérifier l'existence d'un domaine où toutes les orbites sont périodiques. *L'équation de Lotka-Volterra décrit la compétition entre deux espèces proie-prédateur. En l'absence de prédateurs, une population de proies croît exponentiellement*

$$\frac{dx}{dt} = ax.$$

En l'absence de proie, une population de prédateurs décroît exponentiellement

$$\frac{dy}{dt} = -cx.$$

Si on met ensemble les deux populations, on suppose en première approximation que le nombre de proies décroît (et le nombre de prédateurs croît) de façon proportionnelle au produit $x.y$ des deux populations. On obtient alors le système précédent. Le résultat est donc que les solutions décrivent des oscillations du nombre d'individus de chaque espèce.

1.6. Un théorème de Kolmogoroff sur les dynamiques de populations

On considère un système de la forme

$$\dot{x} = xf(x, y),$$

$$\dot{y} = yg(x, y),$$

tel que

1. $\frac{\partial f}{\partial x} < 0$ pour x grand, $\frac{\partial g}{\partial x} > 0$,
2. $\frac{\partial f}{\partial y} < 0$, $\frac{\partial g}{\partial y} < 0$

Démontrer que ce système possède un cycle limite en utilisant le théorème de Poincaré-Bendixson.

Une des raisons invoquées par Kolmogoroff pour modifier le système de Lotka-Volterra (cf. Ex. 1.5.) est que ce dernier n'est pas structurellement stable (cf. 1.6). On peut montrer que sous certaines conditions, le système de Kolmogoroff est structurellement stable. Si on remplace dans les équations de Lotka-Volterra la croissance Malthusienne de la proie en l'absence du prédateur par une croissance logistique plus réaliste et si on introduit un effet de saturation à l'efficacité du prédateur, on aboutit au système de May :

$$\dot{x} = ax(1-x) - b \cdot \frac{xy}{A+y},$$

$$\dot{y} = -cy + d \cdot \frac{xy}{A+y}.$$

Ce système satisfait les conditions de Kolmogoroff et il a un cycle limite.

1.7. L'approche d'Andronov au circuit de l'oscillateur électronique à valve

Il s'agit du circuit électrique suivant formé d'une valve électronique, d'un condensateur, d'une résistance et de deux inductances qui s'influencent à distance par induction électromagnétique. La valve laisse passer un courant $I_a = f(U_s)$ si on a une différence de potentiel U_s entre l'anode et la plaque s . La fonction f appelée la caractéristique de la valve satisfait :

$$\lim_{U_s \rightarrow -\infty} f(U_s) = 0, \quad \lim_{U_s \rightarrow \infty} f(U_s) = I_N, \quad f''(U_s) = 0.$$

On obtient les équations :

$$J + I_{ka} = I_a$$

$$L\dot{I}_{kb} + RI_{ba} + \frac{1}{C} \int I_{ak} dt = 0.$$

Par induction mutuelle entre l'inductance kb et l'inductance ks , on a $U_s = M\dot{I}_{kb}$. Si on désigne par J le courant qui traverse la résistance R , on obtient finalement

$$L\ddot{J} + R\dot{J} + \frac{J}{C} = \frac{1}{C}f(MJ).$$

Si on pose $x = J$ et $y = \dot{J}$, on peut écrire cette équation sous la forme

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = -\omega^2 x - \delta y - P(y),$$

avec $\delta = R/L$, $\omega^2 = 1/LC$, $P(y) = \frac{1}{C}f(My)$.

On approche la caractéristique par une fonction discontinue : $P(y) = 0$, si $y < 0$, $P(y) = A > 0$, si $y > 0$.

1- Décrire les trajectoires de ce système discontinu (aussi qualifié de système hybride).

2- Montrer qu'il y a un cycle limite attractif en calculant explicitement une application de premier retour.

On avait observé expérimentalement la présence d'oscillations stables auto-entretenues et plusieurs tentatives d'explications théoriques de leur existence basées sur des systèmes différentiels linéaires avaient échouées. Jusqu'à ce que Andronov propose l'explication qui fait l'objet de l'exercice ci-dessus fondée sur l'analyse qualitative non linéaire et les cycles limites. Cet exemple est complètement traité dans le livre [Pontryagin, 1962].

1.8. Nombre de cols, noeuds et foyers

On considère un système différentiel du plan :

$$\dot{x} = f(x, y)$$

$$\dot{y} = g(x, y).$$

On suppose qu'il existe une boule de rayon R centrée en 0 telle que

$$(x, y) \mapsto F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$$

soit une application différentiable dont la restriction $F|_{\delta B(0, R)}$ au bord de la boule est un difféomorphisme

$$F|_{\delta B(0, R)}: \delta B(0, R) \rightarrow F(\delta B(0, R)).$$

On suppose que le système différentiel n'a que des points singuliers génériques dans l'intérieur de la boule $B(0, R)$.

Démontrer que le nombre de noeuds N , le nombre de foyers F et le nombre de cols C à l'intérieur de la boule $B(0, R)$ satisfont la relation

$$N + F - C = 1.$$

Cette relation est un cas particulier d'un théorème beaucoup plus général qu'on appelle le théorème de l'indice de Hopf. En toute généralité, il se démontre pour une surface compacte et fait intervenir un invariant topologique de la surface appelé la caractéristique d'Euler.

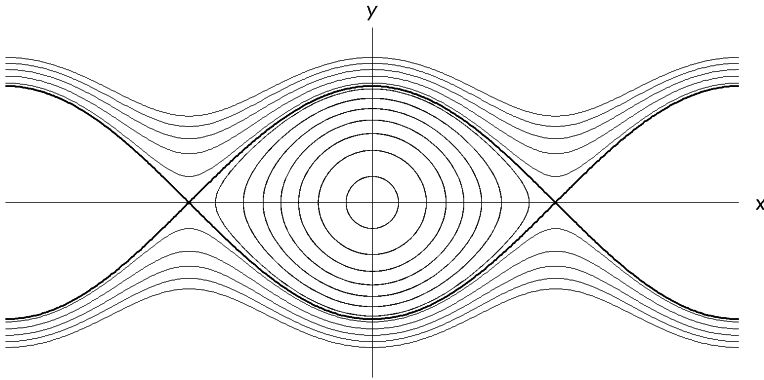


Fig.2 – Portrait de phase du pendule simple

Oscillations en biologie

Analyse qualitative et modèles

Françoise, J.-P.

2005, XII, 179 p., Softcover

ISBN: 978-3-540-25152-1