

---

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction, Exemples</b>	<b>1</b>
1.1	Introduction	1
1.2	Quelques exemples académiques	3
1.2.1	Problèmes isopérimétriques	3
1.2.2	Surfaces minimales et surfaces capillaires	5
1.2.3	Problèmes de valeurs propres	6
1.3	Exemples plus appliqués	12
1.3.1	Formage électromagnétique d'un jet de métal liquide	12
1.3.2	Optimisation d'un aimant	14
1.3.3	Segmentation d'images	15
1.3.4	Identification de fissures ou de défauts	16
1.3.5	Problèmes de renforcement ou d'isolation	17
1.3.6	Mélange de matériaux et optimisation de structures	19
1.3.7	Exemples en aéronautique	21
<b>2</b>	<b>Topologies sur les domaines de <math>\mathbb{R}^N</math></b>	<b>23</b>
2.1	Pourquoi une topologie?	23
2.2	Différentes topologies sur les domaines	24
2.2.1	Introduction	24
2.2.2	La convergence des fonctions caractéristiques	25
2.2.3	La convergence des ouverts au sens de Hausdorff	28
2.2.4	La convergence au sens des compacts	35
2.2.5	Lien entre ces différentes notions de convergence	36
2.2.6	Résultats de compacité	39
2.3	Suites d'ensembles à périmètre borné	44
2.3.1	Définition du périmètre, propriétés	44
2.3.2	Continuité, compacité	47
2.4	Suites d'ouverts uniformément réguliers	50
	Exercices	58

<b>3</b>	<b>Continuité par rapport au domaine</b>	61
3.1	Le problème de Dirichlet	62
3.1.1	L'espace $H_0^1$ et son dual $H^{-1}$	62
3.1.2	" $Lip \circ H^1 \subset H^1$ "	67
3.1.3	L'inégalité de Poincaré	70
3.1.4	Le problème de Dirichlet pour le Laplacien	73
3.2	Continuité pour le problème de Dirichlet	74
3.2.1	Position du problème	74
3.2.2	Premières propriétés	75
3.2.3	Indépendance par rapport à $f$	77
3.2.4	Suites croissantes	78
3.2.5	Le cas de la dimension 1	79
3.2.6	Contre-exemples à la continuité en dimension 2	80
3.2.7	Suite d'ouverts uniformément lipschitziens	82
3.3	Capacité associée à la norme $H^1$	85
3.3.1	Définition(s) et propriétés	85
3.3.2	Capacité relative et potentiel capacitair	89
3.3.3	Quelques exemples de calculs de capacité	93
3.3.4	Quasi-continuité, quasi-ouverts	97
3.3.5	Une nouvelle définition de $H_0^1(\Omega)$	103
3.4	Retour au problème de Dirichlet	105
3.4.1	Perturbation locale	106
3.4.2	Convergence compacte et ouverts stables	106
3.4.3	Contraintes de type capacitair	108
3.5	La $\gamma$ -convergence	112
3.5.1	Définition	112
3.5.2	Lien avec la convergence au sens de Mosco	113
3.5.3	D'autres opérateurs associés à la $H_0^1$ $\gamma$ -convergence	115
3.5.4	Remarques pour les opérateurs non-linéaires	116
3.6	Estimations quantitatives	117
3.7	Continuité pour le problème de Neumann	118
3.7.1	Introduction	118
3.7.2	Le résultat de convergence	120
3.7.3	D'autres résultats de convergence	121
3.7.4	$\gamma$ -convergence et condition de Neumann	124
3.8	L'opérateur bi-Laplacien	126
3.8.1	Capacité $H^2$	127
3.8.2	Etude de la continuité par rapport au domaine	128
	Exercices	130
<b>4</b>	<b>Existence de formes optimales</b>	133
4.1	Quelques problèmes géométriques	133
4.1.1	Problèmes isopérimétriques	133
4.1.2	Une extension	135
4.1.3	Surfaces capillaires	135

4.2	Exemples de non-existence .....	137
4.3	Régularité uniforme des formes admissibles .....	144
4.4	Contraintes de type capacitaire .....	146
4.5	Minimisation de l'énergie de Dirichlet .....	147
4.6	L'effet de contraintes sur le périmètre .....	154
4.7	Monotonie de la fonctionnelle .....	157
	Exercices .....	165
<b>5</b>	<b>Dérivation par rapport au domaine .....</b>	<b>167</b>
5.1	Introduction .....	167
5.2	Intégrales sur un domaine variable .....	169
5.2.1	Introduction .....	169
5.2.2	Notations .....	170
5.2.3	La formule de dérivation .....	172
5.2.4	Les démonstrations .....	173
5.2.5	Dérivation sur un intervalle et premières applications ..	176
5.3	Un problème modèle .....	178
5.3.1	Présentation du problème .....	178
5.3.2	Un calcul formel .....	179
5.3.3	Les deux énoncés principaux .....	180
5.3.4	Les démonstrations .....	181
5.3.5	Dérivabilité d'ordre supérieur .....	185
5.3.6	Dérivabilité dans des espaces réguliers .....	186
5.4	Intégrales sur un bord variable .....	188
5.4.1	Intégrales de bord: définitions et propriétés .....	188
5.4.2	Un premier énoncé .....	191
5.4.3	Un peu de géométrie différentielle .....	192
5.4.4	Extension de la normale à un domaine variable .....	197
5.4.5	Une formule générale de dérivation au bord .....	199
5.5	Dérivation du problème de Neumann .....	202
5.6	Comment dériver les problèmes aux limites .....	206
5.7	Dérivation d'une valeur propre simple .....	207
5.8	Utilisation de l'état adjoint .....	212
5.9	Structure des dérivées de forme .....	216
5.9.1	Introduction et notations .....	216
5.9.2	Un premier résultat de structure .....	217
5.9.3	Exemples de dérivées 1ères de forme .....	218
5.9.4	Le théorème de structure et ses corollaires .....	220
5.9.5	Les démonstrations .....	222
5.9.6	Exemples de calculs de dérivées secondes .....	225
5.9.7	Trois remarques finales .....	228
5.9.8	Conclusion .....	229
	Exercices .....	230

<b>6</b>	<b>Propriétés géométriques de l'optimum</b>	233
6.1	Symétrie	233
6.1.1	Introduction	233
6.1.2	Utiliser la symétrisation de Steiner	235
6.1.3	Utilisation des conditions d'optimalité et du principe du maximum	240
6.1.4	Utilisation d'un autre problème d'optimisation de forme	243
6.1.5	Un cas de non symétrie: le problème de Newton	247
6.2	Convexité	249
6.2.1	Introduction	249
6.2.2	Comparaison avec l'enveloppe convexe	251
6.2.3	Courbure positive	254
6.3	Caractère étoilé	256
6.3.1	Utilisation de sous-solutions et sur-solutions	256
6.3.2	Utilisation de réarrangement étoilé	258
6.4	Autres propriétés géométrico-topologiques	262
6.4.1	Connexité	262
6.4.2	Propriété géométrique de la normale	267
6.4.3	Autres propriétés en lien avec un domaine fixé	269
<b>7</b>	<b>Relaxation, homogénéisation</b>	271
7.1	Introduction	271
7.1.1	La $\Gamma$ -convergence	272
7.1.2	La $G$ -convergence	274
7.2	Relaxation pour le problème de Dirichlet	277
7.2.1	Introduction	277
7.2.2	Complétion pour la $\gamma$ -convergence	278
7.2.3	Un autre exemple	287
7.3	Relaxation par homogénéisation	299
7.3.1	Présentation du problème	299
7.3.2	Relaxation	301
7.3.3	Conditions d'optimalité	303
7.3.4	Un exemple d'application	308
	<b>Références</b>	313
	<b>Index des notes bibliographiques</b>	327
	<b>Index général</b>	329

Variation et optimisation de formes

Une analyse géométrique

Henrot, A.; Pierre, M.

2005, XII, 334 p., Softcover

ISBN: 978-3-540-26211-4