

Kapitel 3

Dynamische Systeme mit kontinuierlicher Zeit

3.1 Analysis zufälliger Prozesse

3.1.1 Stetigkeit zufälliger Prozesse

3.1.1.1 Konvergenz im quadratischen Mittel

Im Abschnitt 1.3.1.1 (Beispiele 1.30 und 1.31) wurden zwei spezielle stochastische Prozesse angegeben, die beide insofern vom gleichen Typ sind, als sie zu den Prozessen gehören, die sich in der Form

$$\mathbf{X} : \mathbf{X}(t) = X_t = \psi(t, X_1, X_2, \dots, X_n)$$

(X_i : Zufallsgröße, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$) darstellen lassen. Da aber die Realisierungen \mathbf{x} des Prozesses \mathbf{X} in Beispiel 1.31 differenzierbar sind, kann man \mathbf{X} auch durch diejenige Differenzialgleichung beschreiben, deren Lösungen \mathbf{x} gerade mit den Prozessrealisierungen übereinstimmen. Für das Beispiel 1.31 (Abschnitt 1.3.1.1) gilt dann also: Die Zeitfunktion \mathbf{x} ist genau dann eine Realisierung des Prozesses \mathbf{X} , wenn sie eine Lösung der Differenzialgleichung

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) + 2|x_2|\dot{\mathbf{x}}(t) + (x_2^2 + x_3^2)\mathbf{x}(t) = 0 \quad (3.1)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\mathbf{x}(0) = x_1 \quad \text{und} \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = -x_1|x_2| \quad (3.2)$$

ist. Aus der Lösung

$$\mathbf{x}(t) = x_1 e^{-|x_2|t} \cos(x_3 t) \quad (x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R})$$

von (3.1) mit (3.2) ist die Übereinstimmung mit den im Abschnitt 1.3.1.1, Beispiel 1.31, angegebenen Realisierungen sofort ersichtlich.

Wegen $\mathbf{x}(t) = X_t(\omega) = \mathbf{X}(t)(\omega)$ und $x_i = X_i(\omega)$ ($i \in \{1, 2, 3\}$) schreibt man statt (3.1) bzw. (3.2)

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{X}}(t)(\omega) + 2|X_2(\omega)|\dot{\mathbf{X}}(t)(\omega) + (X_2^2(\omega) + X_3^2(\omega))\mathbf{X}(t)(\omega) &= 0, \\ \mathbf{X}(0)(\omega) &= X_1(\omega), \quad \dot{\mathbf{X}}(0)(\omega) = -X_1(\omega)|X_2(\omega)|\end{aligned}$$

oder kürzer

$$\ddot{\mathbf{X}}(t) + 2|X_2|\dot{\mathbf{X}}(t) + (X_2^2 + X_3^2)\mathbf{X}(t) = 0, \quad (3.3)$$

$$\mathbf{X}(0) = X_1, \quad \dot{\mathbf{X}}(0) = -X_1|X_2|. \quad (3.4)$$

Man sieht aber leicht, dass der Prozess aus Beispiel 1.30 (Abschnitt 1.3.1.1) nicht auf diese Weise durch eine Differenzialgleichung beschrieben werden kann, da seine Realisierungen nicht (überall) differenzierbar sind.

Die Prozesse mit differenzierbaren Realisierungen bilden also eine relativ enge und dazu noch „unbrauchbare“ Klasse, da sie sich nicht durch endlichdimensionale Verteilungsfunktionen definieren lassen, d.h. es lässt sich keine Verteilungsfunktion $F_{\mathbf{X}}$ angeben, aus der die Differenzierbarkeit aller Realisierungen von \mathbf{X} ableitbar wäre. Zur Untersuchung dynamischer Systeme unter der Einwirkung stochastischer Prozesse ist es daher erforderlich, einige fundamentale Begriffe der Analysis (Grenzwert, Stetigkeit, Ableitung, Integral) so zu verallgemeinern, dass sie auf eine möglichst große Klasse zufälliger Prozesse übertragen werden können.

Zunächst betrachten wir aus der Menge \mathbb{A} aller Zufallsgrößen auf dem Ereignisraum (Ω, \mathcal{A}) die Teilmenge

$$\mathbb{L}_2 = \{X \mid E(X^2) < \infty\} \subset \mathbb{A}, \quad (3.5)$$

d.h. die Menge aller Zufallsgrößen X mit endlichem quadratischen Mittelwert. Diese Menge bildet einen *linearen Raum* über dem Körper der reellen Zahlen. Mit Hilfe der durch (1.137) definierten Norm

$$\|X\| = \sqrt{E(X^2)} \quad (3.6)$$

ist jeder Zufallsgröße X aus \mathbb{L}_2 eine nichtnegative reelle Zahl zugeordnet, so dass \mathbb{L}_2 sogar einen *normierten linearen Raum* bildet (Bild 3.1).

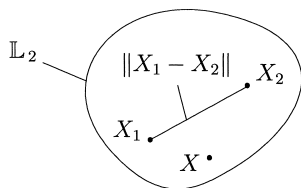


Bild 3.1: „Abstand“ zweier Zufallsgrößen

Mit Hilfe der Norm (3.6) lässt sich zwischen zwei Elementen $X_1 \in \mathbb{L}_2$ und $X_2 \in \mathbb{L}_2$ ein „Abstand“

$$\|X_1 - X_2\| = \sqrt{E((X_1 - X_2)^2)} \quad (3.7)$$

definieren (Bild 3.1). Verschwindet der Abstand $\|X_1 - X_2\|$, so gilt wegen (1.140)

$$\|X_1 - X_2\| = 0 \Leftrightarrow P\{X_1 = X_2\} = 1 \Leftrightarrow X_1 \doteq X_2, \quad (3.8)$$

d.h. in diesem Fall ist es fast sicher, dass X_1 und X_2 die gleichen Werte annehmen (vgl. auch (1.72)).

Der oben eingeführte Abstandsbegriff bildet die Grundlage der folgenden Grenzwertdefinition. Wir betrachten eine Folge von Zufallsgrößen X_i ($i = 1, 2, \dots$) mit $X_i \in \mathbb{L}_2$ (Bild 3.2). Dann gilt:

Definition 3.1 Die Folge $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ konvergiert im quadratischen Mittel (i.q.M.) gegen die Zufallsgröße X ($X_i, X \in \mathbb{L}_2$), falls

$$\|X_i - X\| \rightarrow 0 \quad \text{für } i \rightarrow \infty. \quad (3.9)$$

Anstelle von (3.9) schreibt man auch kurz

$$X_i \rightarrow X \quad (3.10)$$

oder

$$\text{l.i.m.}_{i \rightarrow \infty} X_i = X. \quad (3.11)$$

Die Abkürzung l.i.m. kann als „limit in mean“ (Grenzwert im Mittel) gelesen werden. Der Grenzwert einer Folge von Zufallsgrößen im Sinne der Definition (3.9) ist eindeutig bestimmt, d.h. aus $X_i \rightarrow X_1$ und $X_i \rightarrow X_2$ folgt $X_1 \doteq X_2$.

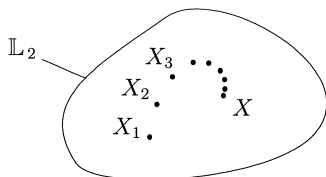


Bild 3.2: Folge von Zufallsgrößen

Von besonderer Bedeutung für die Untersuchung der Konvergenz von Folgen von Zufallsgrößen ist der Satz

$$X_i \rightarrow X \Leftrightarrow \|X_i - X_j\| < \varepsilon \quad \text{für } i, j > N(\varepsilon). \quad (3.12)$$

Dieser Satz besagt, dass bei einer i.q.M. konvergenten Folge von Zufallsgrößen der Abstand $\|X_i - X_j\|$ zweier Glieder X_i und X_j der Folge beliebig klein wird, wenn nur i und j hinreichend groß gewählt werden (*Kriterium von Cauchy*). Gilt umgekehrt für eine Folge $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ die rechte Seite von (3.12), so konvergiert die Folge gegen ein Element X des Raumes \mathbb{L}_2 (Vollständigkeitseigenschaft von \mathbb{L}_2). Man erhält auf diese Weise eine Aussage über die Konvergenz der Folge, ohne den Grenzwert selbst zu kennen.

Für den Erwartungswert des Grenzwertes einer i.q.M. konvergenten Folge geben wir noch die wichtige Formel

$$E\left(\text{l.i.m.}_{i \rightarrow \infty} X_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} E(X_i) \quad (3.13)$$

an. Auf der rechten Seite der Gleichung steht der gewöhnliche Grenzwert der Folge der Erwartungswerte $E(X_i)$. Zum Beweis von (3.13) ist zu zeigen, dass mit $X_i \rightarrow X$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} E(X_i) = E(X)$$

gilt. Das ergibt sich aus $\|X_i - X\| \rightarrow 0$ für $i \rightarrow \infty$ mit Hilfe der Schwarzischen Ungleichung (1.145) in der Form $|E(Y)| \leq \|Y\|$. Dann folgt nämlich

$$|E(X_i - X)| \leq \|X_i - X\| \rightarrow 0 \quad \text{für } i \rightarrow \infty,$$

woraus $E(X_i) \rightarrow E(X)$ für $i \rightarrow \infty$ sofort abgelesen werden kann.

Für eine i.q.M. konvergente Folge von Zufallsgrößen X_i ($i = 1, 2, \dots$) erhält man mit Hilfe der Tschebyschewschen Ungleichung (1.138)

$$P\{\omega \mid |X_i(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\|X_i - X\|^2}{\varepsilon^2},$$

worin die rechte Seite wegen $\|X_i - X\| \rightarrow 0$ für $i \rightarrow \infty$ verschwindet, falls $X_i \rightarrow X$ gilt. Daraus ergibt sich die folgende Definition.

Definition 3.2 Die Folge $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ heißt *stochastisch konvergent* mit dem Grenzwert X , falls

$$P\{\omega \mid |X_i(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\} \rightarrow 0 \quad \text{für } i \rightarrow \infty. \quad (3.14)$$

Man schreibt hierfür kurz

$$\text{st-l.i.m.}_{i \rightarrow \infty} X_i = X. \quad (3.15)$$

Es sind also zwei Arten der Konvergenz von Folgen von Zufallsgrößen zu unterscheiden: die Konvergenz im quadratischen Mittel und die stochastische Konvergenz. Ist eine Folge von Zufallsgrößen konvergent im quadratischen Mittel, so ist sie auch stochastisch konvergent, aber nicht umgekehrt.

3.1.1.2 Stetigkeit im quadratischen Mittel

Wir gehen nun wieder zur Betrachtung zufälliger Prozesse über und definieren:

Definition 3.3 Ein zufälliger Prozess $\mathbf{X} = \langle X_t \rangle_{t \in T}$ heißt *Prozess 2. Ordnung*, falls für alle $t \in T$ gilt

$$\mathbf{X}(t) = X_t \in \mathbb{L}_2 \quad (\text{d.h. } E(X_t^2) < \infty). \quad (3.16)$$

Für alle weiteren Untersuchungen wollen wir stets Prozesse 2. Ordnung voraussetzen. Bezüglich der Stetigkeit eines solchen Prozesses erhalten wir dann die folgende Aussage:

Definition 3.4 Ein zufälliger Prozess $\mathbf{X} = \langle X_t \rangle_{t \in T}$ heißt *stetig i.q.M.*, wenn für alle $t \in T$ gilt:

$$\|X_{t+\tau} - X_t\| \rightarrow 0 \quad \text{für } \tau \rightarrow 0, \quad (3.17)$$

oder in anderer Schreibweise

$$\text{l.i.m.}_{\tau \rightarrow 0} X_{t+\tau} = X_t. \quad (3.18)$$

Die Stetigkeit des Prozesses \mathbf{X} im Sinne dieser Definition bedeutet nicht, dass alle Realisierungen $\mathbf{x} = \mathbf{X}(\omega)$ dieses Prozesses stetig sein müssen. Sind jedoch alle Realisierungen \mathbf{x} eines Prozesses \mathbf{X} stetig (im gewöhnlichen Sinne) und gilt $|\mathbf{x}(t+\tau) - \mathbf{x}(t)| < |c||\tau|$ ($c \in \mathbb{R}$), so ist der Prozess \mathbf{X} stetig i.q.M.

Da die Untersuchung der Stetigkeit i.q.M. eines gegebenen Prozesses mit Hilfe von (3.17) oft recht kompliziert ist, verwendet man häufig den folgenden Satz.

Satz 3.1 Ein zufälliger Prozess $\mathbf{X} = \langle X_t \rangle_{t \in T}$ ist genau dann stetig i.q.M., falls die Korrelationsfunktion $s_{\mathbf{X}}$ (im gewöhnlichen Sinne) stetig ist, d.h. $s_{\mathbf{X}}(t_1, t_2)$ ist stetig für alle $t_1, t_2 \in T$.

(Den Beweis dieses Satzes für stationäre Prozesse enthält Übungsaufgabe 3.1-1).

Beispiel 3.1 Gegeben sei der zufällige Prozess

$$\mathbf{X} : \mathbf{X}(t) = X_t = a \cos(\omega_0 t - X) \quad (a, \omega_0 \in \mathbb{R}),$$

worin X eine im Intervall $(0, 2\pi]$ gleichverteilte Zufallsgröße bezeichnet. Die Korrelationsfunktion $s_{\mathbf{X}}$ dieses Prozesses (Berechnung siehe Abschnitt 1.3.2.1, Beispiel 1.36)

$$s_{\mathbf{X}}(t_1, t_2) = \frac{a^2}{2} \cos \omega_0(t_2 - t_1)$$

ist stetig für alle $t_1, t_2 \in T$, folglich ist \mathbf{X} stetig i.q.M. Das Ergebnis ist ohne weiteres einleuchtend, wenn man beachtet, dass alle Realisierungen

$$\mathbf{x} : \mathbf{x}(t) = a \cos(\omega_0 t - x) \quad (x = X(\omega))$$

dieses Prozesses gleichmäßig stetige Zeitfunktionen darstellen.

Beispiel 3.2 Für den Wiener-Prozess $\mathbf{X} = \mathbf{W}$ wurde im Abschnitt 1.3.2.3 die Korrelationsfunktion $s_{\mathbf{X}}$:

$$s_{\mathbf{X}}(t_1, t_2) = \text{Min}(t_1, t_2) = \begin{cases} t_1 & \text{für } t_1 \leq t_2 \\ t_2 & \text{für } t_1 \geq t_2 \end{cases}$$

errechnet (vgl. auch (1.244)). Offensichtlich ist $s_{\mathbf{X}}$ stetig in beiden Variablen t_1 und t_2 und damit $\mathbf{X} = \mathbf{W}$ stetig i.q.M.

Beispiel 3.3 Betrachtet wird ein zufälliger Prozess $\mathbf{X} = \langle X_t \rangle_{t \in T}$, dessen Realisierungen \mathbf{x} nur die Werte $+A$ und $-A$ (je mit der Wahrscheinlichkeit $0,5$) annehmen können. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass während des Zeitintervalls $[t, t + \tau]$ genau n Nulldurchgänge erfolgen, sei durch

$$p(n, k, \tau) = \frac{(k\tau)^n}{n!} e^{-k\tau} \quad (k > 0, \tau > 0; n = 0, 1, 2, \dots)$$

gegeben. Bild 3.3 zeigt eine Realisierung dieses Prozesses.

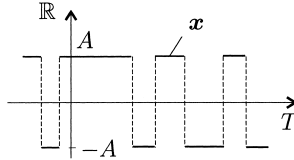


Bild 3.3: Realisierung eines i.q.M. stetigen Prozesses

Es lässt sich zeigen (s. Übungsaufgabe 1.3-7), dass der betrachtete Prozess die Korrelationsfunktion $s_{\mathbf{X}}$:

$$s_{\mathbf{X}}(t_1, t_2) = A^2 e^{-2k|t_1 - t_2|}$$

hat, die für alle t_1, t_2 stetig ist. Damit ist \mathbf{X} stetig i.q.M., obwohl die Realisierungen \mathbf{x} dieses Prozesses nicht überall stetig sind.

3.1.2 Ableitung und Integral

3.1.2.1 Differenziation im quadratischen Mittel

Gegeben seien zwei Prozesse \mathbf{X} und \mathbf{Y} (Prozesse 2. Ordnung). Dann gilt die folgende Definition.

Definition 3.5 Der Prozess $\mathbf{Y} = \langle Y_t \rangle_{t \in T}$ heißt *Ableitung i.q.M.* von $\mathbf{X} = \langle X_t \rangle_{t \in T}$ genau dann, wenn für alle $t \in T$ gilt

$$\left\| \frac{X_{t+\tau} - X_t}{\tau} - Y_t \right\| \rightarrow 0 \quad \text{für } \tau \rightarrow 0, \quad (3.19)$$

oder in anderer Schreibweise

$$\text{l.i.m.}_{\tau \rightarrow 0} \frac{X_{t+\tau} - X_t}{\tau} = Y_t. \quad (3.20)$$

Existiert eine Ableitung i.q.M. für einen Prozess \mathbf{X} , so schreibt man anstelle von (3.19) und (3.20) auch

$$\mathbf{Y} = \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \dot{\mathbf{X}} \quad (3.21)$$

oder für einen festen Zeitpunkt $t \in T$

$$\mathbf{Y}(t) = \frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \dot{\mathbf{X}}(t). \quad (3.22)$$

Die Ableitung i.q.M. $\dot{\mathbf{X}}$ ist also wieder ein zufälliger Prozess und die Ableitung i.q.M. im Zeitpunkt t eine Zufallsgröße \dot{X}_t (Statt $\dot{\mathbf{X}}(t)$ kann auch \dot{X}_t geschrieben werden). Sind fast alle Realisierungen $\mathbf{x} = \mathbf{X}(\omega)$ des Prozesses \mathbf{X} differenzierbar (im gewöhnlichen Sinne) und existiert seine Ableitung i.q.M., so erhält man die Realisierungen $\mathbf{y} = \mathbf{Y}(\omega)$ des Prozesses \mathbf{Y} durch Differenziation der (differenzierbaren) Realisierungen $\mathbf{x} = \mathbf{X}(\omega)$ von \mathbf{X} .

Die häufig relativ komplizierte Untersuchung der Differenzierbarkeit eines Prozesses \mathbf{X} mit Hilfe von (3.19) lässt sich umgehen, wenn die Korrelationsfunktion $s_{\mathbf{X}}$ des Prozesses gegeben ist. Es gilt nämlich folgender Satz:

Satz 3.2 Ein zufälliger Prozess $\mathbf{X} = \langle X_t \rangle_{t \in T}$ ist genau dann i.q.M. differenzierbar, wenn die gemischte 2. partielle Ableitung der Korrelationsfunktion

$$\frac{\partial^2 s_{\mathbf{X}}(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}$$

für alle $t_1, t_2 \in T$ existiert (Beweis in Übungsaufgabe 3.1-2).

Für die Korrelationsfunktion der Ableitung i.q.M. $\dot{\mathbf{X}}$ bzw. die Kreuzkorrelationsfunktion von \mathbf{X} und $\dot{\mathbf{X}}$ gelten dann die folgenden Regeln (vgl. Übungsaufgabe 3.1-3):

$$E(\dot{X}_{t_1} \dot{X}_{t_2}) = s_{\dot{\mathbf{X}}}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 s_{\mathbf{X}}(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \quad (3.23)$$

$$E(X_{t_1} \dot{X}_{t_2}) = s_{\mathbf{X}\dot{\mathbf{X}}}(t_1, t_2) = \frac{\partial s_{\mathbf{X}}(t_1, t_2)}{\partial t_2} \quad (3.24)$$

$$E(\dot{X}_{t_1} X_{t_2}) = s_{\dot{\mathbf{X}}\mathbf{X}}(t_1, t_2) = \frac{\partial s_{\mathbf{X}}(t_1, t_2)}{\partial t_1}. \quad (3.25)$$

Für stationäre Prozesse \mathbf{X} , deren Korrelationsfunktion $s_{\mathbf{X}}$ nur von einer Zeitvariablen τ ($\tau = t_2 - t_1$) abhängt, ergibt sich aus diesen Regeln

$$s_{\dot{\mathbf{X}}}(\tau) = - \frac{d^2 s_{\mathbf{X}}(\tau)}{d\tau^2} \quad (3.26)$$

$$s_{\mathbf{X}\dot{\mathbf{X}}}(\tau) = \frac{ds_{\mathbf{X}}(\tau)}{d\tau} = -s_{\dot{\mathbf{X}}\mathbf{X}}(\tau). \quad (3.27)$$

Beispiel 3.4 Gegeben sei der zufällige Prozess

$$\mathbf{X} : \mathbf{X}(t) = X_t = a \cos(\omega_0 t - X)$$

($a, \omega_0 \in \mathbb{R}$, X ist eine in $(0, 2\pi]$ gleichverteilte Zufallsgröße) mit der Korrelationsfunktion

$$s_{\mathbf{X}}(t_1, t_2) = \frac{a^2}{2} \cos \omega_0(t_2 - t_1)$$

(vgl. Beispiel 3.1, Abschnitt 3.1.1.2). Der betrachtete zufällige Prozess ist differenzierbar i.q.M., da

$$\frac{\partial^2 s_{\mathbf{X}}(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = \frac{1}{2} a^2 \omega_0^2 \cos \omega_0(t_2 - t_1)$$

für alle $t_1, t_2 \in T$ existiert. Er hat ersichtlich auch differenzierbare Realisierungen. Damit ist die Ableitung i.q.M. mit der Realisierungsableitung identisch, und es gilt

$$\dot{\mathbf{X}} : \dot{\mathbf{X}}(t) = \dot{X}_t = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t - X)$$

mit der Korrelationsfunktion $s_{\dot{\mathbf{X}}}$:

$$s_{\dot{\mathbf{X}}}(t_1, t_2) = \frac{1}{2} a^2 \omega_0^2 \cos \omega_0(t_2 - t_1).$$

Beispiel 3.5 Wir betrachten nun wieder den Wiener-Prozess $\mathbf{X} = \mathbf{W}$ (vgl. Beispiel 3.2, Abschnitt 3.1.1.2) mit der Korrelationsfunktion (1.244)

$$s_{\mathbf{X}}(t_1, t_2) = \text{Min}(t_1, t_2) = \begin{cases} t_1 & \text{für } t_1 \leq t_2 \\ t_2 & \text{für } t_1 \geq t_2. \end{cases}$$

Hier erhalten wir

$$\frac{\partial s_{\mathbf{X}}(t_1, t_2)}{\partial t_1} = \begin{cases} 1 & \text{für } t_1 < t_2 \\ 0 & \text{für } t_1 > t_2, \end{cases}$$

so dass die gemischte 2. partielle Ableitung an der Stelle $t_1 = t_2$ nicht existiert und damit der betrachtete Prozess nicht i.q.M. differenzierbar ist. Der Wiener-Prozess \mathbf{W} ist also i.q.M. stetig, jedoch nicht i.q.M. differenzierbar.

Für die Berechnung der Verteilungsfunktion $F_{\dot{\mathbf{X}}}$ (bzw. der Dichtefunktion $f_{\dot{\mathbf{X}}}$) der Ableitung $\dot{\mathbf{X}}$ eines zufälligen Prozesses \mathbf{X} aus seiner Verteilungsfunktion $F_{\mathbf{X}}$ (bzw. der Dichte $f_{\mathbf{X}}$) gibt es keine einfachen Regeln. Im Allgemeinen ist diese Aufgabe relativ kompliziert, jedoch grundsätzlich lösbar.

Eine Ausnahme bildet der Gauß-Prozess. Ist nämlich bekannt, dass der zufällige Prozess \mathbf{X} ein Gauß-Prozess (und i.q.M. differenzierbar) ist, so ist die Ableitung i.q.M. $\dot{\mathbf{X}}$ ebenfalls ein Gauß-Prozess. Die Begründung lässt sich folgendermaßen andeuten: Sind zwei Zufallsgrößen $X_{t+\tau}$ und X_t normalverteilt, so ist es auch ihre Summe bzw. ihre Differenz (s. Übungsaufgabe 1.2-19 für den Fall unabhängiger Summanden). Damit sind alle Glieder $\frac{1}{\tau}(X_{t+\tau} - X_t)$ der Folge (3.19) normalverteilt und schließlich auch ihr Grenzwert \dot{X}_t im quadratischen Mittel.

3.1.2.2 Integration im quadratischen Mittel

In einem Intervall $T' = [a, b] \subset \mathbb{R}$ seien ein zufälliger Prozess $\mathbf{X} = \langle X_t \rangle_{t \in T'}$, und eine determinierte Funktion

$$f : T' \times T \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(t, \tau) = u \in \mathbb{R}$$

gegeben. In Bild 3.4 sind eine Realisierung $\mathbf{x} = \mathbf{X}(\omega)$ des Prozesses und die gegebene Funktion f eingezeichnet.

Wir unterteilen nun das Intervall T' durch die Zeitpunkte $t_0 = a, t_1, t_2, \dots, t_n = b$ in n Teilintervalle und wählen danach weitere Zwischenpunkte t'_1, t'_2, \dots, t'_n . Nun bilden wir die Riemannsche Summe

$$Y_{n,\tau} = \sum_{k=1}^n f(t'_k, \tau) X_{t'_k} (t_k - t_{k-1}), \quad (3.28)$$

welche offensichtlich eine von der Anzahl n und der Art der Unterteilung abhängige Zufallsgröße darstellt. In Abhängigkeit von der Anzahl n der Teilintervalle ergibt sich also eine Folge von Zufallsgrößen $Y_{n,\tau}$ ($n = 1, 2, \dots$; $Y_{n,\tau} \in \mathbb{L}_2$), welche für $n \rightarrow \infty$ einem Grenzwert zustreben kann. Genauer gilt die folgende Definition.

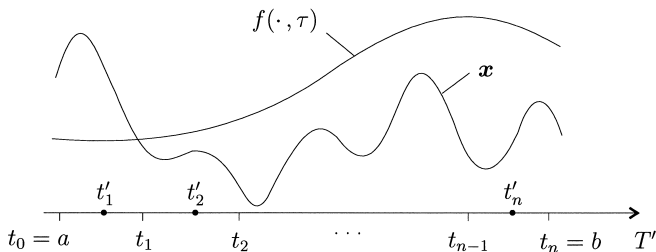


Bild 3.4: Zur Erläuterung des Integrals über einen zufälligen Prozess

Definition 3.6 Der Prozess $\mathbf{Y} = \langle Y_\tau \rangle_{\tau \in T}$ heißt *Integral i.q.M.* von $f(\cdot, \tau)\mathbf{X}$ genau dann, wenn für alle $\tau \in T$ (mit $\text{Max}|t_k - t_{k-1}| \rightarrow 0$) in (3.28) gilt

$$\text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty} Y_{n,\tau} = Y_\tau. \quad (3.29)$$

Existiert das Integral i.q.M. für $f(\cdot, \tau)\mathbf{X}$, so schreibt man dafür

$$\mathbf{Y} = \int_a^b f(t, \cdot) \mathbf{X}(t) dt \quad (3.30)$$

oder für einen festen Zeitpunkt $\tau \in T$

$$Y_\tau = \mathbf{Y}(\tau) = \int_a^b f(t, \tau) \mathbf{X}(t) dt. \quad (3.31)$$

Sind fast alle Realisierungen \mathbf{x} des Prozesses \mathbf{X} stetig (im gewöhnlichen Sinne) und existiert das Integral i.q.M. von $f(\cdot, \tau)\mathbf{X}$, so erhält man die Realisierungen \mathbf{y} des Prozesses \mathbf{Y} durch Integration der mit $f(\cdot, \tau)$ multiplizierten (stetigen) Realisierungen \mathbf{x} von \mathbf{X} . Es lässt sich zeigen, dass $f(\cdot, \tau)\mathbf{X}$ genau dann i.q.M. integrierbar ist, wenn das (gewöhnliche) Integral

$$\int_a^b \int_a^b f(t_1, \tau) f(t_2, \tau) s_{\mathbf{X}}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \quad (3.32)$$

über die Korrelationsfunktion $s_{\mathbf{X}}$ des Prozesses \mathbf{X} existiert (vgl. Übungsaufgabe 3.1-5).

Ist der zufällige Prozess \mathbf{X} stetig i.q.M., so ist \mathbf{X} auch integrierbar i.q.M. Ist nämlich \mathbf{X} stetig i.q.M., so ist – wie bereits im Abschnitt 3.1.1.2 erwähnt wurde – die Korrelationsfunktion $s_{\mathbf{X}}$ überall stetig und damit die Existenz des Integrals (3.32) gesichert.

Mit (3.13) wurde bereits gezeigt, dass die Bildung des Grenzwertes i.q.M. und die Erwartungswertbildung vertauscht werden können. Außerdem ist der Mittelwert einer Summe von Zufallsgrößen gleich der Summe der Mittelwerte dieser Zufallsgrößen (vgl. (1.134)). Wendet man diese Regeln auf (3.29) bzw. (3.31) an, so zeigt sich, dass Erwartungswertbildung und Integration i.q.M. ebenfalls miteinander vertauscht werden können. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\int_a^b f(t, \tau) \mathbf{X}(t) dt \right) &= \mathbb{E} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(t'_k, \tau) X_{t'_k}(t_k - t_{k-1}) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(t'_k, \tau) \mathbb{E}(\mathbf{X}(t_{k'}))(t_k - t_{k-1}) \\ &= \int_a^b f(t, \tau) \mathbb{E}(\mathbf{X}(t)) dt. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Mit Hilfe von (3.33) kann die Korrelationsfunktion $s_{\mathbf{Y}}$ des Prozesses \mathbf{Y} in (3.30) bestimmt werden. Dabei erhält man (vgl. Übungsaufgabe 3.1-6)

$$s_{\mathbf{Y}}(\tau_1, \tau_2) = \int_a^b \int_a^b f(t_1, \tau_1) f(t_2, \tau_2) s_{\mathbf{X}}(t_1, t_2) dt_1 dt_2. \quad (3.34)$$

Die Berechnung der Verteilungs- bzw. Dichtefunktion des Prozesses \mathbf{Y} in (3.30) aus den entsprechenden Funktionen des Prozesses \mathbf{X} ist im allgemeinen Fall relativ kompliziert. Ist jedoch \mathbf{X} ein Gauß-Prozess, so ist – wie sich zeigen lässt – auch \mathbf{Y} ein Gauß-Prozess.

Es sei abschließend noch besonders darauf hingewiesen, dass bei der Herleitung des Integrals i.q.M. über einen zufälligen Prozess \mathbf{X} nicht ohne Grund das Integral über $f(\cdot, \tau) \mathbf{X}$ gebildet wurde, d.h. der zufällige Prozess \mathbf{X} wurde stets mit einer Zeitfunktion f zusammen betrachtet. Diese Betrachtungsweise ist deshalb zweckmäßig, weil in den Anwendungen (wie im folgenden Abschnitt 3.2) meistens Integrale dieser Art auftreten.

3.1.3 Aufgaben zum Abschnitt 3.1

3.1-1 Man zeige: Ein stationärer Prozess \mathbf{X} mit der Korrelationsfunktion $s_{\mathbf{X}}$ ist genau dann stetig i.q.M., wenn $s_{\mathbf{X}}(\tau)$ in $\tau = 0$ stetig ist!

Hinweis: Man untersuche den Ausdruck

$$\|X_{t+\tau} - X_t\|^2 = \mathbb{E}((X_{t+\tau} - X_t)^2) \geq 0$$

für $\tau \rightarrow 0$!

3.1-2 Man zeige, dass ein zufälliger Prozess \mathbf{X} mit der Korrelationsfunktion $s_{\mathbf{X}}$ i.q.M. differenzierbar ist, falls

$$\frac{\partial^2 s_{\mathbf{X}}(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}$$

existiert!

3.1-3 Gegeben ist ein i.q.M. differenzierbarer Prozess \mathbf{X} mit dem Erwartungswert $m_{\mathbf{X}}$ und der Korrelationsfunktion $s_{\mathbf{X}}$. Man zeige, dass gilt:

$$\text{a) } m_{\dot{\mathbf{X}}}(t) = \frac{d}{dt} m_{\mathbf{X}}(t) \quad \text{b) } s_{\dot{\mathbf{X}}}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} s_{\mathbf{X}}(t_1, t_2)$$

$$\text{c) } s_{\mathbf{X}\dot{\mathbf{X}}}(t_1, t_2) = \frac{\partial}{\partial t_2} s_{\mathbf{X}}(t_1, t_2) \quad \text{d) } s_{\dot{\mathbf{X}}\mathbf{X}}(t_1, t_2) = \frac{\partial}{\partial t_1} s_{\mathbf{X}}(t_1, t_2)!$$

e) Wie lauten diese Gleichungen, wenn \mathbf{X} stationär ist?

3.1-4 An einer idealen Kapazität C liegt eine Spannung, die durch einen stationären Gauß-Prozess U mit $m_U(t) = 0$ und

$$s_U(\tau) = A^2 \exp(-a\tau^2) \quad (A \in \mathbb{R}; a > 0)$$

beschrieben werden kann. Man berechne für den Strom I durch C

- a) den Erwartungswert $m_I(t)$,
- b) die Kreuzkorrelationsfunktionen $s_{IU}(\tau)$ und $s_{UI}(\tau)$,
- c) die Korrelationsfunktion $s_I(\tau)$,
- d) die Dichtefunktion $f_I(i, t)!$

3.1-5 Man zeige, dass der zufällige Prozess $f(\cdot, \tau)\mathbf{X}$ i.q.M. integrierbar ist, falls das Integral

$$I = \int_a^b \int_a^b f(t_1, \tau) f(t_2, \tau) s_{\mathbf{X}}(t_1, t_2) dt_1 dt_2$$

existiert! (Hierbei ist $f(\cdot, \tau)$ eine determinierte Funktion und $s_{\mathbf{X}}$ die Korrelationsfunktion des Prozesses \mathbf{X}).

3.1-6 Es sei \mathbf{X} ein i.q.M. integrierbarer Prozess mit der Korrelationsfunktion $s_{\mathbf{X}}$ und

$$\mathbf{Y} : \mathbf{Y}(\tau) = \int_a^b f(t, \tau) \mathbf{X}(t) dt.$$

Wie lautet die Korrelationsfunktion $s_{\mathbf{Y}}$ des Prozesses \mathbf{Y} ?

3.2 Determinierte lineare Systeme

3.2.1 Prozessabbildungen determinierter linearer Systeme

3.2.1.1 Zustandsgleichungen

Wir wollen nun die Frage untersuchen, wie sich ein dynamisches System unter der Einwirkung eines zufälligen Prozesses verhält. Die Aufgabe besteht also darin, zu einem gegebenen Eingabeprozess \mathbf{X} , von dem z.B. die Verteilungsfunktion $F_{\mathbf{X}}$, die Dichte $f_{\mathbf{X}}$, die Korrelationsfunktion $s_{\mathbf{X}}$ usw. bekannt sind, die entsprechenden Kenngrößen des Prozesses \mathbf{Y} am Ausgang des Systems zu bestimmen. Zur Lösung dieser Aufgabe müssen also die durch das dynamische System vermittelten Prozessabbildungen untersucht werden.

Im Abschnitt 2.2.1.1 wurde der Begriff Prozessabbildung bereits definiert (vgl. (2.41) und Bild 2.12) und die Einschränkung auf determinierte Prozessabbildungen (Realisierungsabbildungen) vorgenommen (vgl. (2.42)). Neben den bereits betrachteten *statischen*



<http://www.springer.com/978-3-540-29225-8>

Stochastische Systeme
Wunsch, G.; Schreiber, H.
2006, XIV, 218 S., Softcover
ISBN: 978-3-540-29225-8