

Mathematische Voraussetzungen

In diesem Kapitel werden die benötigten Voraussetzungen über Maße, Integrale und Wahrscheinlichkeiten zusammengestellt. Es dient zur allgemeinen Orientierung, zur Festlegung von Notationen, und als Referenz für spätere Kapitel. Sätze werden hier keine bewiesen. Ihre Relevanz für das Folgende wird aber diskutiert und an einige Konstruktionen, auf die später Bezug genommen wird, wird erinnert. Diese Zusammenstellung eignet sich sicherlich nicht als Einführung in die mathematischen Grundlagen; hierzu findet man etwa in [BN] in kurzer und vollständiger Form alles Benötigte. Ausführlichere Standardwerke über Maß- und Integrationstheorie sind [Ba1,El]; für Wahrscheinlichkeitstheorie sei auf [Ba2] verwiesen. Am Ende dieses Kapitels wird kurz auf sonstige mathematische Voraussetzungen eingegangen.

1.1 Voraussetzungen über Maß- und Integrationstheorie

In der Maßtheorie geht es zunächst darum ein “Maß“ $\mu(A)$ für *möglichst viele* Teilmengen A einer Grundmenge Ω festzulegen. Ein Grundproblem ist, dass $\mu(A)$ i.A. nicht für *alle* $A \subset \Omega$ definierbar ist, wenn μ gewisse Mindestbedingungen erfüllen soll (etwa die Translationsinvarianz von μ für $\Omega = \mathbb{R}^3$). Es hat sich aber gezeigt, dass es einen Typ von *Mengensystemen* \mathcal{F} über Ω gibt (d.h. eine Menge \mathcal{F} von Teilmengen $A \subset \Omega$), für welchen die Festlegung eines Maßbegriffs mit hinreichend allgemeinen Grundeigenschaften möglich ist:

Definition. Eine σ -Algebra \mathcal{F} über einer (nichtleeren) Menge Ω ist ein System von Teilmengen $A \subset \Omega$ mit folgenden Eigenschaften:

- (S1) $\Omega \in \mathcal{F}$.
- (S2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$ (A^c bezeichnet das Komplement von A).
- (S3) $A_n \in \mathcal{F}$ für alle $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$.

Ist \mathcal{H} ein Teilsystem von \mathcal{F} , also $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$, welches ebenfalls eine σ -Algebra über Ω ist heißt *Unter- σ -Algebra von \mathcal{F}* .

Bemerkungen. 1. Das Paar (Ω, \mathcal{F}) stellt die Grundlage zur Definition von Maßen dar und wird als *Messraum* oder auch als *messbarer Raum* bezeichnet. 2. Aus (S1) und (S2) folgt $\emptyset \in \mathcal{F}$. Das Mengensystem $\{\Omega, \emptyset\}$ ist die kleinste σ -Algebra über Ω , das System aller Teilmengen von Ω (die *Potenzmenge* $\mathcal{P}(\Omega)$) ist die größte σ -Algebra über Ω . 3. Aus (S2) und (S3) folgt, dass mit $A_n \in \mathcal{F}$ auch $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$ gilt. *Abzählbare* Mengenoperationen führen also nicht aus einer σ -Algebra heraus. Dies ist für Grenzwerteigenschaften wichtig.

Der Umgang mit σ -Algebren ist meistens nicht besonders schwierig. Dies soll anhand einiger Grundbegriffe nun kurz diskutiert werden:

1. Ist ein beliebiges Mengensystem \mathcal{A} über Ω gegeben, so gibt es eine kleinste σ -Algebra, genannt *die von \mathcal{A} erzeugte σ -Algebra* $\sigma(\mathcal{A})$, welche \mathcal{A} enthält. Per Definition heißt dies, dass jede weitere σ -Algebra \mathcal{F} welche \mathcal{A} enthält auch $\sigma(\mathcal{A})$ enthält. $\sigma(\mathcal{A})$ besteht aus genau denjenigen $A \subset \Omega$ welche in *jeder* σ -Algebra $\mathcal{F} \supset \mathcal{A}$ enthalten sind.
2. Ist umgekehrt eine σ -Algebra \mathcal{F} über Ω gegeben, so nennt man ein Teilsystem $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ einen *Erzeuger von \mathcal{F}* , wenn $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{F}$ gilt.
3. Die Mengen einer σ -Algebra sind (bis auf wenige Ausnahmen) fast nie explizit bekannt. Diese “technische Schwierigkeit“ ist aber beherrschbar, denn meist genügt es Eigenschaften nur für einen Erzeuger \mathcal{E} von \mathcal{F} nachzuweisen. \mathcal{E} ist im Gegensatz zu $\sigma(\mathcal{E})$ häufig explizit bekannt.
4. Ist \mathcal{F} eine σ -Algebra über Ω , so definiert

$$\mathcal{F} \cap \Omega_0 := \{A \cap \Omega_0 \mid A \in \mathcal{F}\}$$

eine σ -Algebra über $\Omega_0 \subset \Omega$, die sogenannte *Spur- σ -Algebra*.

Definition. Es seien (Ω, \mathcal{F}) und (Ω', \mathcal{F}') zwei Messräume. Eine Abbildung $T : \Omega \rightarrow \Omega'$ heißt $\mathcal{F} - \mathcal{F}'$ -*messbar* (oder kurz: $T : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\Omega', \mathcal{F}')$ heißt *messbar*), wenn für das Urbild jeder Menge $A' \in \mathcal{F}'$ gilt:

$$T^{-1}(A') := \{\omega \in \Omega \mid T(\omega) \in A'\} \in \mathcal{F}.$$

Eine Abbildung T ist bereits dann messbar, wenn für einen beliebigen Erzeuger $\mathcal{E}' \subset \mathcal{F}'$ die Inklusion $T^{-1}(\mathcal{E}') \subset \mathcal{F}$ gilt. Die Regel $(T_1 \circ T_2)^{-1} = T_2^{-1} \circ T_1^{-1}$ zeigt, dass Kompositionen messbarer Abbildungen messbar sind. Besonders wichtig sind messbare, reelle Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Auf \mathbb{R} wählt man standardmäßig die *Borelsche σ -Algebra* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Diese wird erzeugt durch alle Intervalle $[a, b) \subset \mathbb{R}$. Es ist nicht schwierig zu zeigen, dass $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ auch durch das System aller offenen Mengen in \mathbb{R} erzeugt wird. Ist klar welche σ -Algebra \mathcal{F} auf Ω vorliegt, so nennt man eine $\mathcal{F} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbare Funktion f einfach *messbar*. Es gelten folgende *Stabilitätseigenschaften*:

- Ist $\alpha \in \mathbb{R}$ und sind f und g messbare Funktionen, so sind auch $f + \alpha g$, $f \cdot g$, $f \wedge g := \min\{f, g\}$ und $f \vee g := \max\{f, g\}$ messbar.
- Ist $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine (punktweise) konvergente Folge messbarer Funktionen so ist die punktweise definierte Grenzfunktion messbar.

Für Maß-Integrale werden sogenannte *numerische Funktionen* f benötigt, d.h. \mathcal{F} - $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ -messbare Abbildungen $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Dabei wird die σ -Algebra $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ erzeugt durch $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ und durch die Mengen $\{-\infty\}$ und $\{\infty\}$. Per Spurbildung sind damit auch alle σ -Algebren von Teilmengen $I \subset \overline{\mathbb{R}}$ festgelegt, etwa $\mathcal{B}([0, \infty]) := \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \cap [0, \infty]$. Nach diesen mengentheoretischen Vorbereitungen kommen wir nun zum Begriff des Maßes:

Definition. Sei (Ω, \mathcal{F}) ein Messraum. Eine Abbildung $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$ heißt *Maß auf \mathcal{F}* , wenn folgende beiden Eigenschaften erfüllt sind:

(M1) $\mu(\emptyset) = 0$.

(M2) μ ist σ -additiv, d.h. für disjunkte Mengen A_1, A_2, \dots in \mathcal{F} gilt:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n). \quad (1.1)$$

μ heißt *endliches Maß* falls $\mu(\Omega) < \infty$, bzw. *Wahrscheinlichkeitsmaß* (kurz W-Maß), wenn $\mu(\Omega) = 1$. Ein $N \in \mathcal{F}$ mit $\mu(N) = 0$ heißt (μ -) *Nullmenge*, $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ heißt *Maßraum*. Ist klar welche σ -Algebra \mathcal{F} auf Ω gegeben ist, so spricht man auch kurz von einem *Maß auf Ω* .

Beispiel. Sei (Ω, \mathcal{F}) ein Messraum und $\omega_0 \in \Omega$. Dann definiert,

$$\varepsilon_{\omega_0}(A) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \omega_0 \in A \\ 0 & \text{falls } \omega_0 \notin A, \end{cases}$$

ein W-Maß ε_{ω_0} auf \mathcal{F} , das *Einpunkt-* bzw. *Dirac-Maß in ω_0* .

Bemerkungen. 1. Dieses Beispiel zeigt, dass auf jeder σ -Algebra Maße existieren. Trotz ihres trivialen Charakters spielen Dirac-Maße ε_{ω_0} in der Wahrscheinlichkeitstheorie (kurz *W-Theorie*) eine wichtige Rolle. 2. Aus (M1) und (M2) folgt leicht, dass für $B_n \in \mathcal{F}$ mit $B_n \subset B_{n+1}$ und $B := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ – kurz: $B_n \uparrow B$ – die Konvergenz $\mu(B_n) \rightarrow \mu(B)$ gilt. [Ist μ ein endliches Maß, $B_n \supset B_{n+1}$ und $B := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$ – kurz $B_n \downarrow B$ – so gilt dies ebenfalls.] Weiter ist μ σ -subadditiv, d.h. für eine beliebige Folge A_1, A_2, \dots in \mathcal{F} ist in (1.1) “=” durch “ \leq ” zu ersetzen. Insbesondere sind abzählbare Vereinigungen von Nullmengen wieder Nullmengen, und μ *isoton*, d.h. für $A, B \in \mathcal{F}$ gilt:

$$A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B).$$

3. Allgemein nennt man eine Funktion μ von einem Mengensystem \mathcal{R} nach $[0, \infty]$ σ -additiv, wenn sie folgende Eigenschaft hat: Ist $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge disjunkter Mengen in \mathcal{R} für die auch $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{R}$ ist, so gilt (1.1). 4. Jedes Maß μ auf \mathcal{F} lässt sich durch eine messbare Abbildung $T : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\Omega', \mathcal{F}')$ nach \mathcal{F}' „verpflanzen“, indem man das *Bildmaß* $T_*\mu$ (auch *induziertes Maß* genannt) auf \mathcal{F}' durch $T_*\mu(A') := \mu(T^{-1}(A'))$ definiert. Man schreibt auch $T_*\mu = \mu \circ T^{-1}$, wobei man die Zuordnung $A' \mapsto T^{-1}(A')$ als Abbildung $T^{-1} : \mathcal{P}(\Omega') \rightarrow \mathcal{P}(\Omega)$ zwischen Potenzmengen auffasst.

Das bereits oben angedeutete Problem der *Konstruktion von Maßen* μ auf einer σ -Algebra über Ω lässt sich allgemein in zwei Schritten lösen, und basiert auf dem Begriff des Rings: Ein Mengensystem $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt *Ring über* Ω , wenn mit $A, B \in \mathcal{R}$ auch $A \cup B \in \mathcal{R}$ und $A \setminus B \in \mathcal{R}$ gelten.

Im *ersten Schritt* legt man μ auf einem System $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ fest, welches ein *Halbring* ist, d.h. mit $A, B \in \mathcal{H}$ ist auch $A \cap B \in \mathcal{H}$, und $A \setminus B$ lässt sich darstellen als endliche disjunkte Vereinigung von Mengen aus \mathcal{H} . Nun lässt sich μ leicht auf den von \mathcal{H} erzeugten *Ring* $\mathcal{R} \supset \mathcal{H}$ fortsetzen, denn dieser besteht aus allen endlichen Vereinigungen $\cup_{k=1}^n A_k$ disjunkter Mengen $A_k \in \mathcal{H}$, sodass eine eindeutige Fortsetzung durch $\mu(\cup_{k=1}^n A_k) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k)$ definiert wird. Ist μ auf \mathcal{H} sogar σ -additiv (dieser Nachweis ist der schwierigste Teil bei der Konstruktion konkreter Beispiele), so ist μ auf \mathcal{R} auch σ -additiv.

Der *zweite Schritt* der Maßfortsetzung wird allgemein für Ringe gelöst:

Satz 1.1 (Fortsetzungssatz). *Sei \mathcal{R} ein Ring über Ω und $\mu : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty]$ eine σ -additive Funktion mit $\mu(\emptyset) = 0$. Dann existiert ein Maß $\hat{\mu}$ auf $\sigma(\mathcal{R})$ welches μ fortsetzt, d.h. welches auf \mathcal{R} mit μ übereinstimmt:*

$$\hat{\mu}(A) = \mu(A), \quad \text{für alle } A \in \mathcal{R}.$$

Bemerkungen. 1. Abgesehen von der Ringstruktur von \mathcal{R} sind die Voraussetzungen an μ im Fortsetzungssatzes unverzichtbar, in Anbetracht der beiden Eigenschaften (M1) und (M2), welche jedes Maß per Definition erfüllen muss. 2. Satz 1.1 lässt sich mit Hilfe der *Carathéodory-Konstruktion* beweisen. Da ein Aspekt diese Konstruktion für spätere Kapitel relevant ist, sei diese hier kurz erläutert: Zunächst definiert man folgende Abbildung $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$:

$$\mu^*(A) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \mid \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n \supset A, A_n \in \mathcal{R} \ \forall n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Die entscheidende Beobachtung von Carathéodory ist nun, dass

$$\mathcal{F} := \{A \subset \Omega \mid \mu^*(B) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A^c \cap B), \forall B \subset \Omega\}$$

eine σ -Algebra $\mathcal{F} \supset \sigma(\mathcal{R})$ ist, und dass $\mu^*|_{\mathcal{F}}$ ein Maß ist mit $\mu^*|_{\mathcal{R}} = \mu$. Das Fortsetzungsproblem wird daher durch die Festlegung $\hat{\mu} := \mu^*|_{\sigma(\mathcal{R})}$ gelöst.

Man beachte, dass Satz 1.1 keine Eindeutigkeitsaussage über $\hat{\mu}$ macht. Hierfür wird ein weiterer Begriff benötigt: Ein Mengensystem \mathcal{E} heißt *\cap -stabil*, wenn mit $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$ auch $E_1 \cap E_2 \in \mathcal{E}$ gilt.

Satz 1.2 (Eindeutigkeitssatz). *Sei (Ω, \mathcal{F}) ein Messraum, \mathcal{E} ein \cap -stabiler Erzeuger von \mathcal{F} , und μ_1, μ_2 Maße auf \mathcal{F} . Es gelte*

$$(E1) \quad \mu_1(E) = \mu_2(E), \text{ für alle } E \in \mathcal{E}.$$

$$(E2) \quad \exists \text{ Folge } (E_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ in } \mathcal{E} \text{ mit } \mu_1(E_n) < \infty \text{ und } \cup_{n \in \mathbb{N}} E_n = \Omega.$$

Dann stimmen die beiden Maße auf ganz \mathcal{F} überein, also $\mu_1 = \mu_2$.

Bemerkungen. 1. Ist μ in Satz 1.1 σ -endlich, d.h. gibt es geeignete $A_n \in \mathcal{R}$ mit $\mu(A_n) < \infty$ und $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \Omega$, so ist die Fortsetzung $\hat{\mu}$ eindeutig: Ist nämlich $\tilde{\mu}$ eine zweite Fortsetzung, so gilt $\hat{\mu}(A_n) = \mu(A_n) = \tilde{\mu}(A_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. nach Satz 1.2 (mit $\mathcal{E} := \mathcal{R}$) muss $\tilde{\mu} = \hat{\mu}$ gelten. 2. Bei der Konstruktion von W-Maßen gilt häufig $\Omega \in \mathcal{R}$. In diesem Fall nennt man \mathcal{R} eine (*Mengen-*) *Algebra*. Da ein W-Maß μ die Eigenschaft $\mu(\Omega) = 1$ hat, so zeigt die Wahl $A_n = \Omega$, dass μ σ -endlich ist, sodass die Fortsetzung $\hat{\mu}$ wieder eindeutig bestimmt ist. 3. Die Beweise der Sätze 1.1 und 1.2 sind nicht einfach, vgl. [Ba2], aber sie sind relativ leicht anwendbar. Die Anwendungen von Satz 1.2 sind oft fast trivial, während der Nachweis der σ -Additivität in Satz 1.1 das Hauptproblem bei konkreten Maß-Konstruktionen ist.

Beispiele.

1. (Lebesgue-Maß λ auf \mathbb{R} .) Man konstruiert λ wie folgt: Zuerst definiert man λ auf dem Halbring $\mathcal{H} := \{[a, b) \subset \mathbb{R} \mid a \leq b \text{ und } a, b \in \mathbb{R}\}$ durch die Festlegung $\lambda([a, b)) := b - a$. Es ist richtig (aber keineswegs trivial) dass λ auf \mathcal{H} σ -additiv ist, d.h. λ ist auch auf dem von \mathcal{H} erzeugten Ring \mathcal{R} σ -additiv. Nach Satz 1.1 existiert eine Fortsetzung $\hat{\lambda}$ auf $\sigma(\mathcal{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Wegen $\lambda([-n, n)) = 2n < \infty$ und $\cup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n) = \mathbb{R}$ ist $\hat{\lambda}$ σ -endlich und durch \mathcal{H} eindeutig bestimmt. $\hat{\lambda}$ (kurz λ) heißt *Lebesgue-Maß* auf \mathbb{R} .
2. (Produktmaße.) Sind $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mu_1)$, $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$ σ -endliche Maßräume so lässt sich hieraus der *Produktraum* $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$ wie folgt konstruieren: Man definiert die *Produkt- σ -Algebra* durch

$$\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 := \sigma(A_1 \times A_2 \mid A_1 \in \mathcal{F}_1, A_2 \in \mathcal{F}_2),$$

und legt das *Produktmaß* auf $\mathcal{H} := \{A_1 \times A_2 \mid A_1 \in \mathcal{F}_1, A_2 \in \mathcal{F}_2\}$ (einem Halbring, wie man leicht verifiziert) wie folgt fest:

$$\mu_1 \otimes \mu_2(A_1 \times A_2) := \mu_1(A_1)\mu_2(A_2). \quad (1.2)$$

Dabei wird die in der Maßtheorie übliche Konvention $0 \cdot \infty = 0$ zugrunde gelegt. Mit Satz 1.1 erhält man eine Fortsetzung auf $\sigma(\mathcal{H}) = \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$. Aus Satz 1.2 folgt deren Eindeutigkeit durch die Werte (1.2).

Nun zur Definition des Maß-Integrals $\int f d\mu$. Dieses Integral soll durch einen Grenzübergang von Summen der Form $\sum \alpha_k \mu(A_k)$ definiert werden, wobei f auf $A_k \subset \Omega$ näherungsweise den Wert α_k hat. Damit eine solche Summe wohldefiniert ist muss $A_k \in \mathcal{F}$ gelten, und Terme $\mu(A_k) = \infty$ dürfen nicht mit unterschiedlichen Vorzeichen linear kombiniert werden. Dies gilt jedenfalls dann, wenn alle Koeffizienten $\alpha_k \geq 0$ sind:

Definition. Sei (Ω, \mathcal{F}) ein Messraum. Eine Funktion $f : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ heißt *Elementarfunktion*, kurz $f \in E(\Omega, \mathcal{F})$, wenn es $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0, \infty)$ gibt mit

$$f = \sum_{k=1}^n \alpha_k 1_{A_k}. \quad (1.3)$$

Dabei bilden die $A_k \in \mathcal{F}$ eine *disjunkte Zerlegung von Ω* (d.h. $A_k \cap A_l = \emptyset$ für $k \neq l$, und $\cup_{k=1}^n A_k = \Omega$), und $1_A(\omega) = 1$ für $\omega \in A$, bzw. $1_A(\omega) = 0$ für $\omega \notin A$, heißt *Indikatorfunktion* der Menge A . Das *Maß-Integral von f bezüglich μ* (oder kürzer *μ -Integral*) ist dann definiert durch

$$\int f d\mu := \sum_{k=1}^n \alpha_k \mu(A_k) \in [0, \infty]. \quad (1.4)$$

Es sei angemerkt, dass die Darstellung von f in (1.3) nicht eindeutig ist (man zerlege etwa A_1 in zwei Teile). Jedoch ist leicht zu sehen, dass (1.4) von dieser Mehrdeutigkeit nicht abhängt. Die Ausdehnung des Integrals (1.4) erfolgt nun in zwei Schritten. (Im Folgenden bedeutet $f_n \nearrow f$, dass die Folge (f_n) punktweise monoton wachsend gegen f konvergiert.)

Satz und Definition. *Es sei $E^*(\Omega, \mathcal{F})$ die Menge aller $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ für die $f_n \in E(\Omega, \mathcal{F})$ existieren mit $f_n \nearrow f$. Dann ist $\int f d\mu := \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu$ ($\in [0, \infty]$) unabhängig von der speziellen Wahl der f_n , und heißt *Maß-Integral von f bezüglich μ* (kurz *μ -Integral von f*).*

Ist aus dem Kontext klar welches μ zugrunde liegt, so sagt man oft nur *Integral* anstelle von *μ -Integral*. Es ist elementar zu zeigen, dass $E^*(\Omega, \mathcal{F})$ übereinstimmt mit allen messbaren $f : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow ([0, \infty], \mathcal{B}([0, \infty]))$. Bereits mit den nun vorhandenen Begriffen lässt sich einer der wichtigsten Konvergenzsätze der Integrationstheorie beweisen:

Satz 1.3 (Monotone Konvergenz). *Für jede monoton wachsende Folge (f_n) in $E^*(\Omega, \mathcal{F})$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \in E^*(\Omega, \mathcal{F})$ und weiter*

$$\int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

Eine direkte Anwendung dieses Satzes sind *Maße mit μ -Dichten* (Übung!): Ist $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum und $h \in E^*(\Omega, \mathcal{F})$, so definiert

$$h\mu(A) := \int 1_A \cdot h d\mu$$

ein Maß $h\mu$ auf (Ω, \mathcal{F}) , und für $f \in E^*(\Omega, \mathcal{F})$ gilt $\int f d(h\mu) = \int f h d\mu$. Für $\mu = \lambda$ heißt h *Lebesgue-Dichte*. Anstelle von $\int_A h(x) d\lambda(x)$ schreibt man auch $\int_A h(x) dx$, denn für Intervalle $A = [\alpha, \beta]$ und Riemann-integrierbare Funktionen h stimmt das Riemann-Integral mit dem Lebesgue-Integral überein.

Der zweite Schritt bei der Ausdehnung des μ -Integrals besteht nun darin, Funktionen mit variablem Vorzeichen zu integrieren. Für eine numerische Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definiert man deren *Positivteil* $f^+ := f \vee 0$ bzw. *Negativteil* $f^- := -(f \wedge 0)$. Es gelten die offensichtlichen Relationen

$$f^\pm \geq 0, \quad f = f^+ - f^-, \quad |f| = f^+ + f^-.$$

Darüberhinaus ist f genau dann messbar, wenn f^+ und f^- messbar sind.

Definition. Eine numerische Funktion $f = f^+ - f^-$ heißt (μ) -integrierbar falls $f^\pm \in E^*(\Omega, \mathcal{F})$, falls $\int f^+ d\mu < \infty$ und $\int f^- d\mu < \infty$. In diesem Fall sei

$$\int f d\mu := \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu. \quad (1.5)$$

Ist $A \in \mathcal{F}$, so setzt man weiter (wann immer die rechte Seite existiert)

$$\int_A f d\mu := \int 1_A \cdot f d\mu.$$

Lemma 1.4 (Elementare Eigenschaften des Integrals). *Seien f und g reelle, integrierbare Funktionen auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Dann gilt:*

(a) Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $f + \alpha g$ integrierbar und

$$\int (f + \alpha g) d\mu = \int f d\mu + \alpha \int g d\mu. \quad (\text{Linearität})$$

(b) Ist $f \leq g$, so gilt

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu. \quad (\text{Monotonie})$$

Ist $f < g$ und $\mu(\Omega) > 0$, so steht auch zwischen den Integralen ein $<$.

Eine weitere elementare und wichtige Eigenschaft des Integrals ist, dass es auf Nullmengen bei der Integration „nicht ankommt“: Ist f integrierbar und g eine messbare numerische Funktion mit $f(\omega) = g(\omega)$ für alle $\omega \in N^c$, mit $\mu(N) = 0$ (kurz: μ -fast überall, μ -f.ü.), so ist auch g integrierbar und es gilt $\int f d\mu = \int g d\mu$. Hieraus folgt leicht eine weitere, sehr nützliche und im Folgenden oft verwendete Aussage: Ist $A \in \mathcal{F}$ und ist f messbar mit $f(\omega) > 0$ für alle $\omega \in A$ so gilt:

$$\int_A f d\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu(A) = 0. \quad (1.6)$$

Die Konstruktion des allgemeinen Maß-Integrals (1.5) dient nicht nur zu seiner Definition, sondern sie wird vielfach bei Beweisen zu Integralen wiederholt. Folgender elementare Sachverhalt ist hierfür ein Beispiel:

Lemma 1.5 (Transformationssatz für Integrale). *Sei $T : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\Omega', \mathcal{F}')$ eine messbare Abbildung und μ ein Maß auf \mathcal{F} . Dann ist eine numerische Funktion $f' : \Omega' \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ genau dann $T_*\mu$ -integrierbar, wenn $f' \circ T$ μ -integrierbar ist. In diesem Fall gilt die Transformationsformel*

$$\int_{\Omega} f' \circ T d\mu = \int_{\Omega'} f' d(T_*\mu).$$

Zum Beweis von Grenzwertaussagen für Integrale sind Ungleichungen oft unentbehrlich. Eine der am häufigsten benutzten Ungleichungen lautet:

Satz 1.6 (Höldersche Ungleichung). *Seien f, g numerische Funktionen auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Sei weiter $p > 1$, und q die durch $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ definierte adjungierte Zahl. Dann gilt (mit der Konvention $\infty^\alpha = \infty$ für $\alpha > 0$):*

$$\int |fg| d\mu \leq \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p} \left(\int |g|^q d\mu \right)^{1/q}. \quad (1.7)$$

Bemerkungen. 1. Für $p = q = 2$ heißt (1.7) *Cauchy-Schwarzsche Ungleichung*.
2. Eine numerische Funktion f heißt *p-fach integrierbar* (mit $p \in [1, \infty)$), wenn $|f|^p$ integrierbar ist.

Die Menge aller integrierbaren Funktionen f auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ bildet *keinen* Vektorraum, da beispielsweise $\infty - \infty$ kein wohldefinierter Ausdruck ist. Man muss dazu vielmehr explizit die Endlichkeit von f voraussetzen: $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, oder kurz $\mathcal{L}^p(\mu)$ bzw. \mathcal{L}^p , bezeichnet die Menge aller *reellwertigen*, messbaren, p -fach integrierbaren Funktionen. Mit der Definition

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p(\mu)} := \|f\|_p := \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p}, \quad \forall f \in \mathcal{L}^p(\mu),$$

und der (ebenfalls wichtigen) *Minkowskischen Ungleichung*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p, \quad \forall f, g \in \mathcal{L}^p(\mu),$$

folgt nun sofort, dass $\mathcal{L}^p(\mu)$ ein Vektorraum ist. Mit der Schreibweise $\|f\|_{\mathcal{L}^p(\mu)}$ wird deutlich gemacht, bezüglich welchem Maß μ integriert wird.

Notation. Eine Folge (f_n) in \mathcal{L}^p konvergiert bezüglich $\|\cdot\|_p$ gegen $f \in \mathcal{L}^p$ wenn gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = 0.$$

Man sagt auch f_n *konvergiert im p-ten Mittel gegen f* . Entsprechend definiert man den Begriff einer Cauchy-Folge (abgekürzt CF).

Bemerkungen. 1. Ist f p -fach integrierbar, so gibt es ein $\hat{f} \in \mathcal{L}^p(\mu)$ mit $f(\omega) = \hat{f}(\omega)$ μ -fast überall. Die p -fach integrierbaren Funktionen sind also „im Wesentlichen“ (d.h. abgesehen von Werten auf einer Nullmenge) in $\mathcal{L}^p(\mu)$.
2. Sind $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ und wählt man $A = \{|f - g|^p > 0\}$ so folgt mit (1.6):

$$\|f - g\|_p = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f(\omega) = g(\omega) \quad \mu - \text{fast überall}.$$

Dies zeigt, dass $\|\cdot\|_p$ i. A. nur eine *Halbnorm* definiert. (Dieser Begriff wird im Anschluss an Satz 2.11 definiert und diskutiert.)

Der folgende Satz ist zweifellos der wichtigste Konvergenzsatz für Maß-Integrale. Er wird hier gleich für \mathcal{L}^p -Funktionen formuliert. In seiner Grundform ($p = 1$) kommt er ohne Benutzung von \mathcal{L}^p -Räumen aus.

Satz 1.7 (Majorisierte Konvergenz). *Sei $1 \leq p < \infty$ und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{L}^p(\mu)$ die μ -f.ü. konvergiert. Es gebe eine p -fach integrierbare Funktion $g \in E^*(\Omega, \mathcal{F})$ mit $|f_n| \leq g$ f.ü., für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eine reelle, messbare Funktion f auf Ω , gegen die f_n f.ü. konvergiert. Jedes solche f liegt in $\mathcal{L}^p(\mu)$, und f_n konvergiert im p -ten Mittel gegen f .*

Abschließend seien noch Integrale bezüglich Produktmaßen betrachtet. Für solche Integrale ist der Satz von Fubini unetbehrlich. Allerdings erfordert eine bequeme Formulierung dieses Satzes eine geringfügige (durchaus natürliche) *Erweiterung des Begriffs einer integrierbaren Funktion*: Eine μ -f.ü. definierte numerische Funktion f auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ heißt μ -integrierbar, wenn es eine (im engeren Sinn) integrierbare Funktion \tilde{f} auf Ω gibt, die μ -f.ü. mit f übereinstimmt. Man setzt

$$\int f \, d\mu := \int \tilde{f} \, d\mu.$$

Offenbar hängt diese Definition nicht von der speziellen Wahl von \tilde{f} ab. Entsprechend definiert man p -fache Integrierbarkeit von f .

Satz 1.8 (Fubini). *Seien $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mu_i)$ σ -endliche Maßräume für $i = 1, 2$, und $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ -messbare Funktion. Dann sind für alle $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2$ die Funktionen $f(\omega_1, \cdot)$ und $f(\cdot, \omega_2)$ \mathcal{F}_2 - bzw. \mathcal{F}_1 -messbar, und es gilt:*

(a) *Ist $f \geq 0$ so sind die Funktionen*

$$\omega_1 \mapsto \int f(\omega_1, \omega_2) \, d\mu_2(\omega_2), \quad \omega_2 \mapsto \int f(\omega_1, \omega_2) \, d\mu_1(\omega_1) \quad (1.8)$$

in $E^(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ bzw. in $E^*(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$, und es gilt*

$$\begin{aligned} \int f \, d(\mu_1 \otimes \mu_2) &= \int \left(\int f(\omega_1, \omega_2) \, d\mu_1(\omega_1) \right) d\mu_2(\omega_2) \\ &= \int \left(\int f(\omega_1, \omega_2) \, d\mu_2(\omega_2) \right) d\mu_1(\omega_1). \end{aligned} \quad (1.9)$$

(b) *Ist f $\mu_1 \otimes \mu_2$ -integrierbar, so ist $f(\omega_1, \cdot)$ für μ_1 -fast alle ω_1 μ_2 -integrierbar, und $f(\cdot, \omega_2)$ ist für μ_2 -fast alle ω_2 μ_1 -integrierbar. Die somit f.ü. definierten Funktionen in (1.8) sind μ_1 - bzw. μ_2 -integrierbar und wieder gelten die Gleichungen (1.9).*

Bemerkungen. 1. Wendet man (a) auf ein $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ -messbares $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ an, so erhält man folgende wichtige Aussage: *Ist eines der Integrale*

$$\int |f| d(\mu_1 \otimes \mu_2), \quad \int \left(\int |f| d\mu_1 \right) d\mu_2, \quad \int \left(\int |f| d\mu_2 \right) d\mu_1$$

endlich, so sind auch die beiden anderen endlich und es gilt (1.9). 2. Die Verallgemeinerung des Satzes von Fubini auf Produktmaße mit mehreren Faktoren folgt induktiv leicht aus der Gleichheit

$$(\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n) \otimes \mu_{n+1} = \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_{n+1}.$$

1.2 Voraussetzungen über Wahrscheinlichkeitstheorie

In der Wahrscheinlichkeitstheorie (W-Theorie) werden Vorgänge bei Zufallsexperimenten durch *Wahrscheinlichkeitsräume* (Ω, \mathcal{F}, P) (W-Räume) modelliert. Dies sind per Definition Maßräume mit Wahrscheinlichkeitsmaßen (W-Maßen), also mit $P(\Omega) = 1$. Meistens (aber nicht immer) handelt es sich bei Ω um die möglichen Ausgänge eines zugrunde liegenden Zufallsexperiments, etwa um $\Omega = \{1, \dots, 6\}$ beim einmaligen Würfeln.

Bemerkungen. 1. In der Maßtheorie haben σ -Algebren in erster Linie eine geometrische Bedeutung. In der W-Theorie besitzen σ -Algebren einen weiteren, nämlich „informationstheoretischen“ Charakter: Sie modellieren die Ereignisstruktur des zugrunde liegenden Zufallsexperiments, d.h. die logischen Beziehungen zwischen Aussagen, welche sich über den Ausgang eines Zufallsexperiments machen lassen. (Dementsprechend nennt man $F \in \mathcal{F}$ ein *Ereignis*.) Bei einfachen Experimenten ist diese Rolle der σ -Algebra normalerweise kaum sichtbar. Bei stochastischen Prozessen hingegen treten Ereignisse zeitlich nacheinander ein, und der zugehörige Begriff einer Filtration ist in diesem Zusammenhang hauptsächlich vom informationstheoretischen Standpunkt relevant, was sich in einigen Grundbegriffen stochastischer Prozesse niederschlägt. Aus diesem Grund lassen sich stochastische Prozesse ohne den allgemeinen maßtheoretischen Rahmen (welcher durch (Ω, \mathcal{F}, P) gegeben ist) praktisch kaum sinnvoll behandeln. 2. Ist A ein Ereignis, so wird $P(A)$ als relative Häufigkeit des Eintretens von A im Grenzfalle unendlich vieler (unabhängiger) Versuchswiederholungen interpretiert. (Bernoullisches Gesetz der großen Zahlen.) 3. In der W-Theorie lässt sich der allgemeine Begriff des Maßraumes nicht ganz vermeiden, weil man W-Maße sehr oft mit Hilfe allgemeiner Maße darstellen kann (z.B. Maße mit Lebesgue-Dichten; auch Maße mit Dichten bezüglich des Wiener-Maßes werden wir betrachten).

Beispiel. Eine wichtige Klasse von W-Maßen bilden die *Gauß-Maße auf \mathbb{R}* . Dies sind Maße ν_{μ, σ^2} ($\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$) mit Lebesgue-Dichte:

$$\nu_{\mu, \sigma^2}(B) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_B e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Messbare Funktionen $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ werden in der W-Theorie als *Zufallsvariablen* (Z.V.) bezeichnet. Ihre definierende Eigenschaft $X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) \subset \mathcal{F}$ bedeutet anschaulich, dass die Wahrscheinlichkeit für alle Ereignisse der Form $\{X \in B\} := \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in B\}$, mit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, wohldefiniert ist. Für das Bildmaß (auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$) schreibt man häufig

$$X_*P = P_X,$$

und nennt P_X die *Verteilung* von X auf \mathbb{R} . Ist $X = (X_1, \dots, X_n)$ ein Zufallsvektor (Z.Vek.), so schreibt man analog $X_*P = P_{(X_1, \dots, X_n)}$.

Der wichtigste Begriff, welcher die W-Theorie von der Maßtheorie abgrenzt ist der Begriff der *Unabhängigkeit*.

Definition. Sei (Ω, \mathcal{F}, P) ein W-Raum und $(\mathcal{E}_i, i \in I)$ eine Familie (indiziert durch eine beliebige Menge I) von Mengensystemen $\mathcal{E}_i \subset \mathcal{F}$. Diese Familie heißt (stochastisch) *unabhängig* wenn für jede endliche Auswahl von Mengen $A_{i_1} \in \mathcal{E}_{i_1}, \dots, A_{i_n} \in \mathcal{E}_{i_n}$ folgende Faktorisierung gilt:

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n}) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_n}).$$

Eine Familie von Zufallsvariablen $(X_i, i \in I)$ auf (Ω, \mathcal{F}, P) heißt (stochastisch) *unabhängig* (kurz: die X_i sind unabhängig), wenn das System der erzeugten σ -Algebren $(\sigma(X_i), i \in I)$ unabhängig ist. Schließlich heißt eine Z.V. X auf (Ω, \mathcal{F}, P) unabhängig von der σ -Algebra $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$, wenn die beiden σ -Algebren $\sigma(X)$ und \mathcal{H} unabhängig sind.

Beispiel. X heißt *Gaußsche Z.V.* wenn es ein $(\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ gibt, sodass $P_X = \nu_{\mu, \sigma^2}$ gilt. Abkürzend sagt man auch X ist $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilt. Sind X_1, \dots, X_n unabhängige, $N(\mu_n, \sigma_n^2)$ -verteilte Zufallsvariablen, so hat deren Summe $X := X_1 + \dots + X_n$ eine $N(\sum_{k=1}^n \mu_k, \sum_{k=1}^n \sigma_k^2)$ -Verteilung.

Ist $(X_i, i \in I)$ unabhängig und $A_i \in \sigma(X_i)$, so gibt es per Definition eine Menge $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ mit $A_i = X_i^{-1}(B) = \{X_i \in B\}$. Aus obiger Definition folgt unmittelbar, dass die X_i genau dann unabhängig sind, wenn für jede endliche Auswahl $B_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und $i_1, \dots, i_n \in I$ folgende Faktorisierungseigenschaft gilt:

$$P(X_{i_1} \in B_1, \dots, X_{i_n} \in B_n) = P(X_{i_1} \in B_1) \cdots P(X_{i_n} \in B_n).$$

Diese Eigenschaft, kombiniert mit dem Eindeutigkeitssatz für W-Maße liefert unmittelbar: Die Z.V.n X_1, \dots, X_n auf (Ω, \mathcal{F}, P) sind genau dann unabhängig, wenn deren *gemeinsame Verteilung* faktorisiert, d.h. wenn

$$P_{(X_1, \dots, X_n)} = P_{X_1} \otimes \cdots \otimes P_{X_n}. \quad (1.10)$$

Neben den maßtheoretischen Begrifflichkeiten spielen auch Integrale in der W-Theorie eine zentrale Rolle, denn sie gestatten das asymptotische Verhalten statistischer Mittelwerte von Zufallsvariablen mathematisch sauber durch den Begriff des Erwartungswerts zu modellieren. (Der Zusammenhang wird durch das starke Gesetz der großen Zahlen hergestellt). Ist nun X eine integrierbare, reelle Zufallsvariable, so heißt

$$E[X] := \int X \, dP$$

der *Erwartungswert* von X ; im Fall $E[X] = 0$ heißt X *zentriert*. (Auch für nicht integrierbare Z.V.n $X \geq 0$ benutzt man die Abkürzung $E[X]$.) Ein oft nützlicher Zusammenhang zwischen Wahrscheinlichkeit und Erwartungswert ist die folgende Tschebyschevsche Ungleichung. Sie wird in den Abschnitten 2.5 und 7.2 durch die Kolmogorovsche bzw. die Doobsche Maximalungleichung verallgemeinert (womit dann auch der folgende Satz bewiesen ist):

Satz 1.9. *Für jede Zufallsvariable $X = X^+ - X^-$ und jedes $\lambda > 0$ gilt*

$$P(X > \lambda) \leq \frac{1}{\lambda} E[X^+].$$

Ist $p \geq 1$ und $X \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ so gilt die Tschebyschevsche Ungleichung

$$P(|X| > \lambda) \leq \frac{1}{\lambda^p} E[|X|^p].$$

Die Faktorisierung von $P_{(X_1, \dots, X_n)}$ in (1.10) führt unmittelbar zu

Satz 1.10 (Faktorisierung des Erwartungswerts). *Sind X_1, \dots, X_n unabhängige, integrierbare Z.V.n so ist auch das Produkt $X_1 \cdots X_n$ integrierbar mit*

$$E[X_1 \cdots X_n] = E[X_1] \cdots E[X_n].$$

Definition. Sei $p \in \mathbb{N}$ und X eine p -fach integrierbare reelle Z.V. auf (Ω, \mathcal{F}, P) . Dann heißt $E[X^p]$ das p -te *Momente* von X . Hat X ein endliches zweites Moment, so nennt man

$$\text{Var}[X] := E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2$$

die *Varianz* von X . Hat auch die Z.V. Y ein endliches zweites Moment, so nennt man $\text{Cov}(X, Y) := E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$ die *Kovarianz* von X und Y . X und Y heißen *unkorreliert*, wenn $\text{Cov}(X, Y) = 0$ gilt.

Satz 1.10 impliziert, dass unabhängige, integrierbare Z.V.n X und Y auch unkorreliert sind. Dies wiederum impliziert, dass für unabhängige, integrierbare X_1, \dots, X_n der *Satz von Bienaymé* gilt, d.h.

$$\text{Var}[X_1 + \cdots + X_n] = \text{Var}[X_1] + \cdots + \text{Var}[X_n].$$

Abschließend diskutieren wir elementare Integrationseigenschaften der Gauß-Maße noch etwas ausführlicher, denn diese werden wir im Kontext der Brownschen Bewegung noch mehrfach benötigen:

Beispiel. (Gauß-Verteilung.) Ist X eine $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilte Z.V., so gilt

$$E[X] = \mu, \quad \text{Var}[X] = \sigma^2.$$

Speziell für $\mu = 0$ lässt sich auch das p -te Moment von X sehr leicht berechnen (beispielsweise mit partieller Integration). Es lautet $E[X^p] = 0$ für ungerades p , und für gerade Potenzen $p = 2n$ gilt:

$$E[X^{2n}] = \sigma^{2n} 1 \cdot 3 \cdots (2n-1). \quad (1.11)$$

Mit monotoner Konvergenz gilt außerdem für jedes reelle λ :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\lambda x|^n}{n!} d\nu_{\mu, \sigma^2}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{|\lambda x|} d\nu_{\mu, \sigma^2}(x) < \infty. \quad (1.12)$$

Wegen $|e^{\lambda x}| \leq e^{|\lambda x|}$ existieren somit alle Momente von e^X , und mit (1.11) und majorisierter Konvergenz folgt nun (wieder für $\mu = 0$)

$$\begin{aligned} E[e^{\lambda X}] &= \int_{\mathbb{R}} e^{\lambda x} d\nu_{0, \sigma^2}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} x^n d\nu_{0, \sigma^2}(x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2n}}{(2n)!} \sigma^{2n} 1 \cdot 3 \cdots (2n-1) = e^{\frac{1}{2} \sigma^2 \lambda^2}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Damit sind die Voraussetzungen aus Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie nun zusammengestellt. Die in diesem Buch gegebenen vorbereitenden Abschnitte lassen sich auf dieser Grundlage verstehen.

Weitere Voraussetzungen. Wir werden die *Existenz* einer Brownschen Bewegung voraussetzen, und ab Kapitel 7 auch die *Existenz* bedingter Erwartungswerte. Diese reinen Existenzsätze sind weder für das Verständnis, noch für den Umgang mit Itô-Integralen essenziell; Beweise findet man etwa in [Ba2]. Wir werden natürlich auch Grundlagen der Analysis verwenden, wie sie im ersten Studienjahr üblicherweise vermittelt werden (z.B. Grenzwerte, Begriff des metrischen Raumes, Existenz- und Eindeutigkeit für lineare Differentialgleichungen etc., vgl. [Fo, Wa]). Dasselbe gilt für elementare Begriffe der linearen Algebra (komplexe Zahlen, Vektorräume, etc., vgl. [Ko]). Die (wenigen) Hilfsmittel aus der Funktionalanalysis werden im Text eingeführt, und die erforderlichen Lemmas dazu bewiesen. Neben den Voraussetzungen für den Haupttext werden wir in den Anwendungskapiteln (naturgemäß) auch Aussagen aus dem Anwendungsgebiet benutzen. Ein Beispiel hierfür ist der Gleichverteilungssatz der statistischen Mechanik im Abschnitt über physikalische Brownsche Bewegungen.



<http://www.springer.com/978-3-540-25392-1>

Der Itô-Kalkül
Einführung und Anwendungen
Deck, Th.
2006, VIII, 248 S., Softcover
ISBN: 978-3-540-25392-1