

Comportement dynamique des systèmes en boucle ouverte et en boucle fermée avec régime glissant

Dans le contexte de la théorie des régimes glissants, on cherche à :

- définir une loi de commutation de telle sorte que la trajectoire d'état rejoigne une surface S (dite de glissement ou de commutation) et reste sur cette surface ou au voisinage, surface définie par une fonction S et d'équation $S = 0$.
- définir le comportement dynamique du système sur la surface S ou au voisinage (cette dynamique n'est pas à priori définie lors de la donnée du système).

La dynamique sur la surface S , appelée dynamique glissante est définie selon plusieurs approches et selon le type du système étudié. Dans le cas où le système est défini par la donnée d'une famille finie de champ de vecteurs, la dynamique glissante est définie, en tout point de S , selon l'approche de Filippov comme étant l'intersection entre l'espace tangent à la surface de commutation en ce point et l'enveloppe convexe de la famille de champ de vecteurs. Dans le cas où le système est continu pour lequel on a défini un retour d'état discontinu, la dynamique glissante est donnée selon l'approche du contrôle équivalent ou de Utkin. Cette théorie a été largement développée par les soviétiques. Elle a été reprise en utilisant la terminologie et les concepts de la géométrie différentielle notamment dans les travaux de M. Fliess et H. Sira-Ramirez.

Nous présentons dans ce chapitre le comportement dynamique des systèmes non linéaires en boucle ouverte, le changement de comportement dynamique par le bouclage et la commande à structure variable et à régime glissant. Nous donnerons la dynamique glissante en utilisant l'approche de Filippov et l'approche Utkin.

5.1 Comportement des systèmes dynamiques en boucle ouverte

L'Analyse du comportement dynamique des systèmes non linéaires en boucle ouverte peut utiliser plusieurs approches : l'approche par le formalisme de

Poincaré, l'approche par les formes canoniques généralisées de Fliess, l'approche par des inclusions différentielles et l'approche par la platitude.

5.1.1 Approche par le formalisme classique

Représentons en boucle ouverte un système dynamique multivariable (m entrées u, p sorties y) par le système d'équations (5.1) ci-dessous (qui généralise le système d'équations (2.1) du Chap.2 de la première partie pour un système dynamique monovariable) :

$$\begin{cases} \frac{d\eta}{dt} = f(\eta, u) \\ y = h(\eta) \end{cases} \quad y \in R^p \quad u \in R^m \quad (5.1)$$

Cette représentation d'état non linéaire (5.1) peut être transformée au voisinage d'un point non singulier de l'espace d'état en trois sous-systèmes d'équations implicites (Schaft, 1989) : le premier décrit la dynamique de la partie non observable ; le deuxième représente le reste des états comme fonction des entrées, des sorties et leurs dérivées ; le troisième sous-système d'équations décrit le comportement externe du système. En supposant que la partie observable est de dimension n , la dynamique externe peut être représentée par p équations différentielles implicites faisant intervenir les entrées, les sorties et leurs dérivées de la forme :

$$c(y, \dot{y}, \dots, y^{(n)}, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}) = 0 \quad (5.2)$$

On suppose ici une dynamique de zéro d'ordre α ; en faisant $p = 1, m = 1$, le système dynamique à commander devient monovariable et on retrouve les équations (2.1) et (2.2) du Chap.2 de la Partie I.

Les équations (5.1) et (5.2) peuvent être étudiées par les approches spécifiques aux systèmes non linéaires (Poincaré, 1899 ; Lyapunov, 1966 ; Andronov *et al.*, 1966 ; Mira, 1990 ; Fossard, 1993), notamment celles qui sont mises en œuvre dans l'étude classique des fonctionnements complexes (chaotiques) par les méthodes qualitatives de la dynamique non linéaire qui mettent en œuvre divers concepts : section de Poincaré, bifurcations, attracteurs, zone de multistabilité, etc.

Exemple 1. On a montré (Mahout, 1994 ; Ravishankar et Ashitava, 1997) qu'un système mécanique articulé (et tout particulièrement un robot) est un système dynamique répondant aux conditions nécessaires (mais non suffisantes) pour engendrer des fonctionnements complexes (y compris des fonctionnements chaotiques) : le nombre M de degré de liberté (ddl) doit être supérieur ou égal à deux (dans le cas autonome), supérieur ou égal à un (dans le cas non autonome, la dimension effective du système est alors $M + 1$). Des travaux ont été effectués dans le laboratoire selon cette approche classique sur un robot SCARA (en simulation et en expérimentation).

L'approche Analyse et Synthèse selon le formalisme de Poincaré – Lyapunov – Andronov – Mira a porté sur ce robot SCARA actionné par des moteurs électriques à courant continu (Mahout, 1994). Ce système dynamique non linéaire présente une dimension dans l'espace des phases égale à quatre $(\theta_1, d\theta_1/dt, \theta_2, d\theta_2/dt)$ dans le cas autonome et de cinq $(\theta_1, d\theta_1/dt, \theta_2, d\theta_2/dt, t)$ dans le cas non autonome (lorsque l'excitation extérieure est non indépendante du temps). Les frottements ont été considérés : frottements visqueux, frottements secs ou de Coulomb, frottements statiques ou de départ.

Cette approche d'Analyse et de Synthèse, si elle est longue pour la mise en œuvre rapide d'une loi de commande, conduit cependant à une bonne connaissance de la structure dynamique non linéaire du système. Cette connaissance est une aide pour le choix des paramètres réglables du système en boucle ouverte et en boucle fermée : paramètres géométriques et dynamiques au niveau du design (donc du point de vue de la conception du système) ; paramètres de réglage des lois de commande (donc du point de vue robustesse globale du système avec élimination des fonctionnements indésirables).

5.1.2 Approche par les formes canoniques généralisées

En utilisant le formalisme de l'algèbre différentielle nous avons défini une dynamique généralisée, associée à (5.1) supposé monovariable observable et à (5.2), caractérisée par les deux formes canoniques valables au moins localement (*cf.* Chap. 6 de cette deuxième partie). On a posé :

$$x_1 = y \quad x_2 = \dot{y} \dots x_n = y^{(n-1)}$$

et on a obtenu en utilisant le théorème des fonctions implicites :

$$(\text{GOCF}) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_i = x_{i+1} \quad i = 1, \dots, (n-1) \\ \dot{x}_n = C(x_1, \dots, x_n, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}) \\ y = x_1 \end{array} \right\} (\text{GCCF}) \quad (5.3)$$

Le couple explicite (5.3) définit une dynamique généralisée pouvant être associée au système (5.1) supposé observable en boucle ouverte au moins localement (Messager, 1992). Cette dynamique est dite non dégénérée quand les dérivées de l'entrée interviennent.

Cette approche consiste à associer au système les formes (5.3) qui généralisent la forme de Kalman car elles gardent un caractère à priori non linéaire (Fliess, 1990). Ces formes canoniques sont bien adaptées à la description locale du fonctionnement du système dans l'espace d'état et conduisent facilement à l'élaboration d'un bouclage linéarisant via des correcteurs permettant d'assurer la sortie du système. C'est cette approche (Formes canoniques généralisées et Bouclage linéarisant) que nous avons privilégié dans tout cet ouvrage.

Si la $n^{\text{ième}}$ équation est considérée comme l'équation de bouclage (dx_n/dt est imposée par le cahier des charges) alors cette dynamique caractérise aussi le système bouclé et l'équation :

$$\dot{x}_n = C(x_1, \dots, x_n, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}) \quad (5.4)$$

considérée comme une équation différentielle par rapport à la variable u correspond au correcteur nécessaire pour que le système bouclé ait le bouclage imposé et pour que la sortie désirée soit réalisée (x_1, x_2, \dots, x_n correspondent alors à la trajectoire désirée).

Exemple 2. Considérons le système classique de troisième ordre représenté dans l'espace d'état par l'équation de type (5.1) (Messenger, 1992) :

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = \eta_1^2 + \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 = \eta_3 + u \\ \dot{\eta}_3 = \lambda \eta_3 \\ y = \eta_1 \end{cases} \quad (5.5)$$

En introduisant d'une part y et ses dérivées, d'autre part u et ses dérivées, on obtient une équation différentielle du type (5.2) :

$$\ddot{y} - (2y + \lambda)\ddot{y} - 2\lambda y\dot{y} - 2\dot{y}^2 + \lambda u - \dot{u} = 0 \quad (5.6)$$

En considérant l'état $x = (x_1, x_2, x_3)$ et en posant :

$$y = \eta_1 = x_1 \quad x_2 = \dot{y} = \dot{x}_1 \quad x_3 = \ddot{y} = \ddot{x}_1$$

on obtient la dynamique généralisée (5.8) définie par le couple (GOCF, GCCF) associé au système (5.5) et à l'équation (5.6) avec l'équation (5.4) qui devient ici :

$$\dot{x}_3 = C(x_1, \dots, x_n, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}) \equiv 2(x_1 x_3 + x_2^2) + \lambda(x_3 - 2x_1 x_2 - u) + \dot{u} \quad (5.7)$$

Ici, l'équation (5.3) devient :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = 2(x_1 x_3 + x_2^2) + \lambda(x_3 - 2x_1 x_2 - u) + \dot{u} \\ y = x_1 \end{cases} \quad (5.8)$$

Si on fixe dx_3/dt (bouclage imposé) et l'état $x(t)$ (trajectoire désirée) alors la commande $u(t)$ nécessaire est solution de (5.7) considérée comme équation différentielle par rapport à la variable u .

Remarque. L'approche selon le formalisme des Formes Canoniques Généralisées et des Bouclages Linéarisants (Fliess, 1990; Sira-Ramirez *et al.*, 1992; Nouri *et al.*, 1993). a été appliquée à un robot SCARA actionné par des moteurs à muscles artificiels (Tondou et Lopez, 1995; Boitier 1996; Carroll *et al.*, 1997).

5.1.3 Approche par les inclusions différentielles

Une inclusion différentielle (Aubin et Cellina, 1984) est définie par une fonction F telle que :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \quad t \in [a, b] \\ \dot{x}(t) &\in F(t, x(t)) \quad \text{avec } t \in [a, b] \end{aligned} \quad (5.9)$$

Une solution $x(\cdot)$ de (5.9) est une fonction continue de t sur $[a, b]$ dans \mathbb{R}^n et dx/dt est sa dérivée par rapport au temps.

Quand on introduit la commande $u(t)$, le concept d'inclusion différentielle devient :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x(t), u(t)) \\ \text{où } f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^n, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^m \\ \text{et } F(t, x) &\equiv f(t, x, U) \end{aligned} \quad (5.10)$$

D'après un lemme de Fillipov, une solution x satisfait (5.9), si et seulement si, il existe une fonction $u(\cdot)$ mesurable dont les valeurs appartiennent à U et telle que (5.10) soit vérifiée.

Dans le cas où $F(t, x) = \{f(t, x)\}$, on a le cas classique d'équation différentielle ordinaire (ODE). Dans le cas des ODE :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \quad (5.11)$$

Les propriétés de la fonction f jouent un rôle important.

Théorème. *Supposons que f est continue et soit $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$; on a les hypothèses suivantes :*

- a) *il existe une solution de (5.11) sur l'intervalle $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ pour $\delta > 0$ satisfaisant $x(t_0) = x_0$*
- b) *il existe $\gamma \geq 0, c \geq 0$ tel que $\|f(t, x(t))\| \leq \gamma\|x\| + c \quad \forall (t, x) \Rightarrow \exists$ une solution de (5.11) sur $]-\infty, +\infty[$ telle que $x(t_0) = x_0$*
- c) *si en plus f est localement de Lipschitz, alors il existe une solution unique de (5.11) sur $]-\infty, +\infty[$ telle que $x(t_0) = x_0$*

En étudiant la théorie des inclusions différentielles, deux propriétés de F sont particulièrement importantes : la semi continuité supérieure et la condition de Lipschitz. Les hypothèses standard sur F sont exposées ci-dessous.

Hypothèses sur F .

- a) pour tout (t, x) l'inclusion $F(x, t)$ est un compact convexe non vide,
- b) F est semi continue supérieure en x si pour un $\varepsilon > 0$ donné, il existe $\delta > 0$, tel que : $\|x - x'\| < \delta \Rightarrow F(x') \subset F(x) + \varepsilon B$
- c) pour $\gamma \geq 0, c \geq 0$ et pour tout $(t, x), v \in F(x, t) \rightarrow \|v\| \leq \gamma\|x\| + c$

Les hypothèses b) et c) sont similaires aux hypothèses de continuité, de linéarité et de croissance (linear growth) considérées dans le cas des équations différentielles classiques pour les solutions bornées a priori. Nous donnons ici une condition similaire appelée lemme de Gronwall.

Proposition. Soit x une trajectoire définie sur $[a, b]$ satisfaisant la condition suivante

$$\|\dot{x}(t)\| \leq \gamma \|x(t)\| + c(t) \quad \forall (t, x)$$

où $\gamma \geq 0$ et $c(\cdot)$ est une fonction continue et dérivable sur $[a, b]$, alors pour tout t appartenant à $[a, b]$, on a :

$$\|x(t) - x(a)\| \leq (e^{\gamma(t-a)} - 1)\|x(a)\| + \int_a^t e^{\gamma(t-s)} c(s) ds$$

Si la fonction $c(\cdot)$ est constante et $\gamma > 0$, on a alors

$$\|x(t) - x(a)\| \leq (e^{\gamma(t-a)} - 1)(\|x(a)\| + c/\gamma)$$

Une trajectoire solution d'une équation différentielle ordinaire peut être trouvée en utilisant les méthodes de calcul (solutions d'Euler). Mais pour trouver une solution de l'inclusion différentielle (5.9), il faut tout d'abord trouver une sélection f de F c'est à dire une fonction f telle que $f(t, x) \in F(t, x)$ pour tout (t, x) . Une solution de (5.11) sera une solution de (5.9).

Inclusions différentielles et commande à structure variable (Zolezzi, 1999)

Le problème essentiel de la commande à structure variable est le suivant. Soit un système dynamique décrit par une équation différentielle ordinaire avec une condition initiale connue :

$$\dot{x} = f(t, x, u) \quad x(0) = a$$

où la dynamique est définie par une fonction donnée $f : [0, +\infty[\times \Omega \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$, la condition initiale fixée $a \in \Omega$ qui est un ouvert de \mathbb{R}^n , U est un ensemble fermé de \mathbb{R}^m avec m la dimension de la commande u ($u \in \mathbb{R}^m$). L'état x de dimension n doit satisfaire la condition $S(x(t)) = 0$ pour tout t , avec $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ un champ de vecteurs définissant l'hypersurface de glissement $S(x) = 0$.

Tout le problème se résume à la sélection d'une commande $u = u(t, x)$ telle que l'état x issu de l'état initial a à l'instant 0 converge vers un point $x(t^*)$ en un temps fini satisfaisant $S(x(t)) = 0$ et que l'état x se maintienne dans l'hypersurface de glissement pour tout $t \geq t^*$.

Considérons maintenant une commande discontinue fonction de l'état x notée u^* . En insérant la commande dans l'équation différentielle, on a

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u^*(t, x(t)))$$

La dynamique du système est décrite par

$$g(t, x) = f(t, x(t), u^*(t, x(t)))$$

discontinue par rapport à x . En utilisant le concept des inclusions différentielles, on a :

$$\dot{x} = g(t, x) \quad x(0) = a$$

Exemple 3. (Bartolini et Zolezzi, 1985). Il n'y a pas de solution à l'équation différentielle scalaire suivante

$$\dot{x} = -\text{sign}(x) \quad x(0) = 0 \quad \text{avec } \text{sign}(x) = x/|x| \quad \text{pour } x \neq 0$$

Cet exemple montre qu'en général, une équation différentielle discontinue n'admet pas de solution. Pour trouver une solution à ce problème l'idée est d'élargir le côté droit en 0. Pour cela considérons une multifonction $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $G(x) = \{g(x)\} = \{-\text{sign}(x)\}$ si $x \neq 0$ et $G(0) = \{-1, 1\}$ et une inclusion différentielle :

$$\dot{y}(t) \in G(y(t)) \quad y(0) = 0$$

ayant une solution constante $y(t) = 0$.

L'ensemble des valeurs de la fonction G est le singleton $g(x)$ quand g est continue. En 0, $G(0)$ est obtenue en prenant l'ensemble des valeurs de $g(x)$ lorsque la valeur absolue de x est suffisamment petite, soit $\{-1, 1\}$.

5.1.4 Approche par la platitude

Cette approche (Fliess *et al.*, 1995) est l'une des méthodes de la linéarisation par bouclage : étant donné un système :

$$\dot{x} = f(x, u) \quad x \in R^n \quad u \in R^m \quad (5.12)$$

est-il possible de trouver un bouclage

$$\begin{aligned} u &= \alpha(x, z, v) \\ \dot{z} &= a(x, z, v) \end{aligned} \quad (5.13)$$

qui transforme le système bouclé

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, \alpha(x, z, v)) \\ \dot{z} &= a(x, z, v) \end{aligned}$$

en un système linéaire commandable ?

La linéarisation d'un système par bouclage est développée dans le paragraphe 5.2.

Dans le cadre des systèmes linéaires de dimensions quelconques, on peut construire un contrôleur lorsque le système est commandable. Dans ce cadre, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- le système est commandable ;
- on peut placer les pôles du système ;
- il existe une sortie de Brunovsky qui permet de paramétrer les trajectoires.

Dans le cadre non linéaire, on peut également donner un sens à ces propriétés mais elles ne sont pas équivalentes. Pour construire le contrôleur, on propose de se ramener à la même forme mais par des changements non linéaires de coordonnées et des bouclages.

La notion de système plat

Nous introduisons ici la notion de système différentiellement plat (Fliess *et al.*, 1995) (ou plus simplement plat). On dira que le système (5.12) est plat si on peut trouver une application

$$y = h(x, u, \dot{u}, \dots, u^{(k)})$$

appelée sortie plate, dépendant de l'état x et d'un nombre fini de dérivées de la commande u (les composantes de y étant différentiellement indépendantes) telle qu'on puisse exprimer x et u en fonction de y et d'un nombre fini de ses dérivées :

$$\begin{aligned} x &= A(y, \dot{y}, \dots, y^{(l)}) \\ u &= B(y, \dot{y}, \dots, y^{(l)}) \end{aligned}$$

On peut ainsi calculer les trajectoires $(x(t), u(t))$ du système (5.12) à partir de y sans intégrer d'équation différentielles ; comme les composantes de y sont libres, n'importe quel choix de $y = y(t)$ détermine une trajectoire. Cette propriété, évidente pour les systèmes linéaires commandables est due à l'existence de la forme canonique de Brunovsky.

Exemple 4. Considérons le système à une entrée de commande :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 - x_2 u \\ \dot{x}_2 = -x_2 + u \\ \dot{x}_3 = x_2 - x_1 + 2x_2(u - x_2) \end{cases}$$

Posons :

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + \frac{x_2^2}{2} \\ y_2 &= \dot{y}_1 = (x_3 - x_2 u) + x_2(u - x_2) = x_3 - x_2^2 \\ y_3 &= \dot{y}_2 = \ddot{y}_1 = x_2 - x_1 + 2x_2(u - x_2) - 2x_2(u - x_2) = -x_1 + x_2 \\ v &= \dot{y}_3 = y_1^{(3)} = -x_3 + x_2 u - x_2 + u = -x_2 - x_3 + u(1 + x_2) \end{aligned}$$

où la commande u apparaît à la troisième dérivation de y_1 . Il vient alors :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v$$

y_1 joue le rôle d'une sortie de Brunovsky mais dans un cadre non linéaire, on dit que c'est une sortie plate. Elle permet de paramétrer toutes les trajectoires d'état du système : autrement dit x_1, x_2, x_3 et u s'expriment seulement en fonction de $y_1, dy_1/dt, d^2y_1/dt^2$ et d^3y_1/dt^3 :

Pour calculer x_1 , on résout :

$$(x_1)^2 + 2(1 + \ddot{y}_1)x_1 + \ddot{y}_1^2 - 2y_1 = 0$$

Le discriminant est positif si et seulement si :

$$1 + 2(y_1 + \ddot{y}_1) > 0$$

Les deux solutions sont :

$$x_1 = -(1 + \ddot{y}_1) - \sqrt{1 + 2(y_1 + \ddot{y}_1)}, \quad x_1 = -(1 + \ddot{y}_1) + \sqrt{1 + 2(y_1 + \ddot{y}_1)}$$

On choisira la solution correspondant à différents arguments : continuité de la grandeur x_1 , sens physique, etc.

Pour la solution :

$$x_1 = -(1 + \ddot{y}_1) + \sqrt{1 + 2(y_1 + \ddot{y}_1)}$$

on a :

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + \ddot{y}_1 & x_3 &= \dot{y}_1 + \ddot{y}_1^2 + 2x_1\ddot{y}_1 + x_1^2 \\ u &= \frac{y_1^3 + \ddot{y}_1^2 + \ddot{y}_1 + \dot{y}_1 + x_1 + 2x_1\ddot{y}_1 + x_1^2}{1 + x_1 + \ddot{y}_1} \end{aligned}$$

Définition. On dit que le système défini par

$$\dot{x} = f(x, u), x \in R^n, u \in R^m$$

est plat s'il existe trois applications h , Φ et Ψ :

$$h : R^n x (R^m)^{r+1} \rightarrow R^m \quad \Phi : (R^m)^r \rightarrow R^n \quad \Psi : (R^m)^{r+1} \rightarrow R^m$$

telles qu'on puisse écrire

$$\begin{aligned} y &= h(x, u, \dot{u}, \dots, u^{(r)}) \\ x &= \Phi(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)}, y^{(r)}) \\ u &= \Psi(y, \dot{y}, \dots, y^{r-1}, y^{(r)}) \end{aligned}$$

Cela revient à dire que le comportement dynamique du système est résumé par le comportement de sa sortie plate : toutes les trajectoires sont de la forme :

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(y(t), (\dot{y})(t), \dots, y^{(r)}(t)) \\ u(t) &= \Psi(y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(r+1)}(t)) \end{aligned}$$

où r est un entier. Cette idée, nouvelle en théorie de la commande, de décrire toutes les solutions sans intégrer est en fait un concept introduit par Hilbert en 1912. Il est à noter que :

- la dimension de la sortie plate est égale au nombre de commandes du système ;
- il n'y a pas d'unicité de sorties plates (autrement dit le paramétrage n'est pas unique) ;
- on peut souvent trouver des sorties plates possédant une interprétation physique.

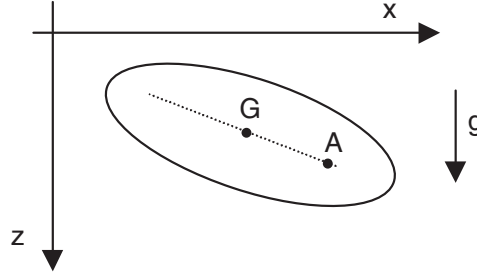


Fig. 5.1. Solide dans un plan vertical

Exemple 5. On considère un solide de masse m dans un plan vertical dont on sait commander les accélérations en un point \mathbf{A} distinct du centre d'inertie \mathbf{G} .

Soit θ l'angle entre (\mathbf{AG}) et la verticale, x et z désignant les coordonnées de \mathbf{A} , il vient :

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= u \\ \ddot{z} &= v \\ a\ddot{\theta} &= g \sin \theta + u \cos \theta + v \sin \theta\end{aligned}$$

avec $a = I/(m.d)$, où $d = AG$ et I est le moment d'inertie du solide en \mathbf{G} .

Une sortie plate correspond aux coordonnées $(x - a \sin \theta, z + a \cos \theta)$ du point situé sur la droite (\mathbf{AG}) à une distance a de \mathbf{A} . Ce point remarquable est connu des mécaniciens depuis Huygens sous le nom de centre d'oscillation.

Commande en boucle ouverte de trajectoires

Pour la planification de trajectoires en boucle ouverte, la platitude fournit une paramétrisation explicite de toutes ces trajectoires définies comme suit : étant donné un état initial $x = p$ et un état final $x = q$ et un temps T , trouver les trajectoires du système et les commandes en boucle ouverte, $([0, T] \ni t \rightarrow x_c(t)$ et $[0, T] \ni t \rightarrow u_c(t)$ avec $\forall t \in [0, T]$, $\dot{x}_c(t) = f(x_c(t), u_c(t))$, allant de l'état $x_c(0) = p$ à $x_c(T) = q$.

De manière générale, il n'est pas facile de trouver des trajectoires d'un système donné. En effet une application quelconque $t \rightarrow (x(t), u(t))$ n'est pas en général solution de $\dot{x} = f(x, u)$

En revanche pour un système dont on connaît une sortie plate y toutes les trajectoires sont de la forme :

$$\begin{aligned}x(t) &= \Phi(y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(r)}(t)) \\ u(t) &= \Psi(y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(r+1)}(t))\end{aligned}$$

où r est un entier différent suivant les cas. N'importe quelle fonction du temps $t \in [0, T] \rightarrow y(t)$ fournit une trajectoire du système $t \in [0, T] \rightarrow (x(t); u(t))$. On dit qu'il y a une correspondance bi-univoque entre les trajectoires du système et celles exprimées à partir des sorties plates.

L'intérêt de la platitude pour la planification de trajectoires se résume ainsi : supposons $\dot{x} = f(x, u)$ plat

$$\text{avec } x = A(y, \dots, y^{(\alpha)}), u = B(y, \dots, y^{(\alpha+1)})$$

où y est une sortie plate.

La condition initiale $x(0) = p$ donne des relations sur les dérivées de y jusqu'à l'ordre α en $t = 0$:

$$q = A(y(0), \dots, y^{(\alpha)}(0))$$

En général plusieurs choix pour $(y(0), \dots, y^{(\alpha)}(0))$ sont possibles car A est une surjection (c'est une bijection si le système est linéarisable par bouclage statique).

De même, en $t = T$, on a

$$p = A(y(T), \dots, y^{(\alpha)}(T))$$

Ainsi il suffit de trouver une courbe dans l'espace des y , telle que $p = A(y(0), \dots, y^{(\alpha)}(0))$ et $q = A(y(T), \dots, y^{(\alpha)}(T))$. On peut utiliser la structure et la physique du système pour définir des courbes interpolatrices adaptées au problème; les courbes de Bézier ou les B-splines sont particulièrement utiles.

La commande en boucle ouverte, $t \rightarrow u(t)$, qui amène le système de l'état p en $t = 0$ à l'état q en $t = T$ est donnée sans intégration explicitement par

$$[0, T] \ni t \rightarrow u(t) = B(y(t), \dots, y^{(\alpha+1)}(t))$$

Suite l'exemple 4. On cherche à amener le système d'un point stationnaire $(x_1 = a ; x_2 = a ; x_3 = a^2 ; u = a)$ à un autre point stationnaire $(x_1 = b ; x_2 = b ; x_3 = b^2 ; u = b)$ dans l'intervalle $[0 ; T]$. Transposons ces conditions sur la sortie plate y_1 . Il vient :

$$y_1(0) = a + \frac{a^2}{2} \quad (5.14)$$

$$\dot{y}_1(0) = a^2 - a^2 = 0 \quad (5.15)$$

$$\ddot{y}_1(0) = -a + a = 0 \quad (5.16)$$

$$\ddot{\ddot{y}}_1(0) = -a - a^2 + a(1 + a) = 0 \quad (5.17)$$

$$y_1(T) = a + \frac{b^2}{2} \quad (5.18)$$

$$\dot{y}_1(T) = b^2 - b^2 = 0 \quad (5.19)$$

$$\ddot{y}_1(T) = -b + b = 0 \quad (5.20)$$

$$\ddot{\ddot{y}}_1(T) = -b - b^2 + b(1 + b) = 0 \quad (5.21)$$

N'importe quelle courbe $t \in [0, T] \rightarrow y(t)$ satisfaisant les conditions (5.14) à (5.21) fournit une trajectoire pour le système. On veillera de plus à respecter la condition déjà mentionnée :

$$1 + 2(y_1 + \ddot{y}_1) > 0$$

Remarque. Nous donnons dans l'annexe F une liste non exhaustive de systèmes physiques différentiellement plats, de systèmes non différentiellement plats et citons des systèmes pour lesquels nous ne savons pas s'ils sont plats.

5.2 Changement du comportement dynamique par le bouclage et la commande

L'étude en boucle fermée d'un système permet d'étudier le système dans des conditions classiques de fonctionnement en présence d'un correcteur. Cette étude est liée au choix de la loi de commande assurant le bouclage du système et au calcul des gains du correcteur donnant à la boucle fermée les performances imposées.

Du point de vue des fonctionnements complexes, le bouclage doit aussi permettre d'éliminer les fonctionnements indésirables.

Le problème général à résoudre, en boucle fermée, est le suivi de trajectoire : étant donné une trajectoire de référence du système, $(x_r(t), u_r(t))$, comment contruire un bouclage de façon à obtenir une erreur, $e = x - x_r(t)$, en boucle fermée, qui diminue lorsque t augmente.

5.2.1 Bouclage par les techniques stabilisantes cas des systèmes non plats

Dans l'élimination des fonctionnements indésirables, voire l'utilisation du régime chaotique (Chen, 1992) deux méthodes principales semblent se dégager :

La première méthode (qui s'inscrit dans l'optique de l'Ecole d'Andronov) consiste à analyser le système (en boucle ouverte ou en boucle fermée) dans les espaces de phases et de paramètres, à établir des « cartes » des modes de fonctionnements et à choisir des paramètres en fonction de cette étude (Feng et Goldenberg, 1993).

La seconde méthode est généralement plus couramment employée et consiste à « modifier » le système par l'introduction d'une commande « stabilisante » (chaque système étant particulier, une méthode concerne uniquement le système étudié).

Citons (Mahout, 1994) :

- l'élimination d'une bifurcation fourche en introduisant un bouclage présentant un terme cubique (cas d'un pendule inverse et d'un double pendule inversé)

- l'introduction d'une loi de commande dite « loi miroir » sur un robot jongleur.
- l'utilisation d'un filtrage passe-haut pour supprimer les modes indésirables dans les régions de l'espace d'état où le fonctionnement nominal se situe.
- l'utilisation d'une loi de commande de faible amplitude stabilisant au moins localement le système sur une orbite périodique située dans le bassin d'attraction de la singularité.

Pour les systèmes non plats présentons une méthode de commande stabilisante par haute fréquence.

Un système non plat est un système pour lequel aucune sortie ne permet de résumer l'état et l'entrée par des relations statiques. Il reste donc nécessairement des relations différentielles entre l'état et la sortie, et, entre l'entrée et la sortie (le défaut d'un système est défini comme le nombre minimum de telles relations différentielles pour tout choix de la sortie). La méthode haute fréquence proposée consiste à introduire un terme oscillant rapidement dans la commande. Cela nous permet de considérer le système moyenné qui contient des commandes supplémentaires et qui devient plat. Par exemple, dans le cas du pendule inversé de Kapitza, la position est « stabilisée » lorsque la position du point de suspension oscille rapidement dans un plan vertical. En posant la commande $u = u_1 + u_2 \cos(t/\epsilon)$, u_1 et u_2 étant des commandes auxiliaires, le système moyenné admet deux commandes, u_1 et u_2 alors que le système physique en admet une seule.

5.2.2 Bouclage linéarisant

La linéarisation d'un système par bouclage est un problème ouvert dans le cas général.

L'importance pratique de la linéarisation par bouclage est très grande et réside dans le fait qu'on peut transporter des propriétés d'un système linéaire à un système non linéaire, ce qui permet de proposer une solution simple à l'un des problèmes de fond de l'automatique, à savoir la stabilisation autour d'une trajectoire quelconque. Ce problème qui est extrêmement compliqué en général est très simple pour un système linéaire, la stabilisation autour d'une trajectoire se ramenant à la stabilisation autour d'un point d'équilibre.

Mentionnons les principaux résultats connus : on sait déterminer si un système est linéarisable par un bouclage statique (Jakubczyk et Respondek, 1980 ; Hunt *et al.*, 1983) ; un système à une seule commande est linéarisable par bouclage dynamique, si et seulement si, il est linéarisable par un bouclage statique (Charlet *et al.*, 1991) ; enfin un système linéaire par rapport à la commande avec m commandes et $m + 1$ variables d'états est linéarisable par bouclage, si et seulement si, il est commandable (Charlet *et al.*, 1991).

La notion de platitude est liée à la linéarisation par bouclage de la manière suivante : si y est une sortie plate, on peut construire un bouclage

linéarisant et un difféomorphisme qui transforme le système bouclé en des chaînes d'intégrateurs purs formées à partir de y . Le bouclage linéarisant ainsi construit présente une particularité ; on peut exprimer son état z et sa commande v en fonction de x et d'un nombre fini de dérivées de u (cf. (5.12) et (5.13)).

$$\begin{aligned} z &= C(x, u, \dot{u}, \dots, u^{(l)}) \\ v &= D(x, u, \dot{u}, \dots, u^{(l)}) \end{aligned}$$

Un bouclage possédant cette propriété est dit endogène. Un système plat est donc linéarisable par bouclage endogène. Réciproquement un système linéarisable par bouclage endogène est plat ; pour plus d'informations concernant cette équivalence et sur les systèmes plats en général le lecteur peut se référer à la thèse de (Martin Philippe, 1992) et à l'Annexe F.

Suivi de trajectoire

Jusqu'à présent la platitude sert à calculer pour le système en boucle ouverte les commandes correspondant aux trajectoires du système. Si le système est naturellement stable, il va suivre la trajectoire de référence. Pour les systèmes instables, ou les systèmes stables dont on veut accélérer la convergence, il faut rajouter à cette commande en boucle ouverte un petit terme de correction de boucle fermée pour assurer le suivi de la trajectoire.

Calcul de bouclage linéarisant

Si $\dot{x} = f(x, u)$ $x \in R^n$ $u \in R^m$ admet comme sortie plate $y = h(x, u, \dots, u^{(\beta)})$, les techniques de découplage par bouclage dynamique ou quasi-statique permettent de calculer un compensateur dynamique du type

$$\dot{\xi} = a(x, \xi, v), \quad u = b(x, \xi, v)$$

qui linéarise la dynamique sur y :

$$y_j^{(\beta_j+1)} = v_j, \quad j = 1, \dots, \dim u$$

où les $\beta_j \geq 0$ sont bien choisis (un tel bouclage linéarisant peut être obtenu à partir de l'algorithme d'inversion et d'une extension dynamique s'en déduisant).

La connaissance de la fonction $x = A(y, \dots, y^{(\beta)})$ et le théorème du rang constant permettent de calculer un tel bouclage linéarisant.

Le suivi asymptotique d'une trajectoire de référence $t \rightarrow y_r(t)$ est obtenue classiquement par un bouclage sur v du type

$$v_j = y_j^{(\beta_j+1)} - \sum_{k=1}^{\beta_j} \sigma_j^k (y_j^{(k)} - y_j^{(k)})$$

où pour chaque j , les $\sigma_j^{(k)}$ correspondent aux fonctions symétriques des pôles de « tracking » pour la sortie y_j . Dans ce bouclage les $y_j^{(k)}$ s'expriment comme des fonctions de l'état x du système et de l'état ξ du compensateur dynamique. Nous avons ainsi linéarisé complètement la dynamique de l'erreur $y - y_r$ en lui imposant une équation linéaire stationnaire et stable.

Les pôles de « tracking » sont choisis de façon à respecter la dynamique propre du système sans exciter les hautes fréquences : les constantes de temps sont alors comparables à celles du système en boucle ouverte $\dot{x} = f(x, u)$.

Dans tous les cas, l'état ξ du compensateur dynamique ne fait intervenir que y et un nombre fini de ses dérivées, donc x et un nombre fini de dérivées de u ; il s'agit d'un bouclage dynamique endogène car aucune variable exogène n'est utilisée et la condition initiale du compensateur dynamique se trouve dans la condition initiale sur x et un nombre fini de dérivées de la commande u (les bouclages faisant intervenir explicitement des variables externes au système, comme le temps par exemple, sont dits exogènes).

Suite de l'exemple 4. Reprenons les équations

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 - x_2 u \\ \dot{x}_2 = -x_2 + u \\ \dot{x}_3 = x_2 - x_1 + 2x_2(u - x_2) \end{cases}$$

que nous avons mises sous forme contrôleur :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v$$

On choisit :

$$v = \dot{y}_{3r} + a_1(y_1 - y_{1r}) + a_2(y_2 - y_{2r}) + a_3(y_3 - y_{3r})$$

Il vient alors :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 - y_{1r} \\ y_2 - y_{2r} \\ y_3 - y_{3r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_{31} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 - y_{1r} \\ y_2 - y_{2r} \\ y_3 - y_{3r} \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de cette matrice est $\lambda^3 - a_3\lambda^2 + a_2\lambda - a_1$. On choisit alors (a_1, a_2, a_3) pour que les racines de ce polynôme soient toutes à parties réelles négatives.

On cherche maintenant la commande u correspondant à v .

$$u = \frac{v + x_2 + x_3}{1 + x_2} \quad (5.22)$$

Cette expression est définie si x_2 est tenu éloigné de -1 . C'est le cas si a (le point vers lequel tend x_2) n'est pas trop proche de -1 (valeur pour laquelle

le système n'est d'ailleurs pas commandable), si de plus en boucle ouverte d^2y/dt^2 n'est pas trop grand, et en boucle fermée si le système n'est pas trop perturbé.

On développe les calculs pour obtenir :

$$u = \frac{\dot{y}_{3r} + a_1(y_1 - y_{1r}) + a_2(y_2 - y_{2r}) + a_3(y_3 - y_{3r}) + x_2 + x_3}{1 + x_2}$$

soit

$$u = \frac{\dot{y}_{3r} + a_1(x_1 + \frac{x_2^2}{2} - y_{1r}) + a_2(x_3 - x_2^2 - y_{2r}) + a_3(-x_1 + x_2 - y_{3r}) + x_2 + x_3}{1 + x_2}$$

Le bouclage (5.22) est un bouclage linéarisant, c'est un bouclage statique. Avec deux commandes on aurait pu avoir besoin d'un bouclage dynamique.

Lorsque le système est plat, on sait construire un bouclage linéarisant (qui peut être dynamique ou statique selon les cas). D'un point de vue pratique, c'est la platitude qui va nous servir à calculer les bouclages linéarisants.

Une fois ramené à une écriture du type

$$y^{(p)} = w$$

on stabilisera le système autour d'une trajectoire en stabilisant la sortie plate autour de la trajectoire correspondante par :

$$w = y_r^{(p)} - k_0(y - y_r) - k_1(\dot{y} - \dot{y}_r) - \dots - k_{p-1}(y^{(p-1)} - y_r^{(p-1)})$$

où on choisira $k_0, k_1 \dots k_{p-1}$ de telle manière que le polynôme $s^p + k_{p-1}s^{p-1} + \dots + k_1s + k_0$ ait toutes ses racines à parties réelles strictement négatives.

Enfin on exprimera w au moyen des grandeurs du système (états, commandes).

L'algorithme d'extension dynamique

Pour simplifier on présente l'algorithme pour 2 sorties plates c'est à dire 2 commandes. La méthode est parfaitement générale.

On veut savoir si un couple (y_1, y_2) de sorties est un couple de sorties plates d'un système possédant un état de dimension n . Au cours du test nous obtiendrons les bouclages linéarisants correspondants :

- dériver y_1 jusqu'à faire apparaître une combinaison des commandes ;
- on note n_1 le nombre de dérivations nécessaires, $y^{(n_1)} = w_1$;
- dériver y_2 jusqu'à faire apparaître une autre combinaison des commandes ;
- on note n_2 le nombre de dérivations nécessaires, $y^{(n_2)} = w_2$.

Puis

- si $n_1 + n_2 = n$, le système admet $(y_1; y_2)$ pour sorties plates. Le bouclage linéarisant nous est donné par $(w_1; w_2)$;
- sinon $(y_1; y_2)$ n'est pas un couple de sorties plates pour le système.

On peut également commencer par y_2 puis dériver y_1 , on obtient généralement un autre bouclage, mais le test $n_1 + n_2 = n$ est le même dans les deux cas.

Exemple 6. Application à un bouclage dynamique

Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 + x_3^2 + u_2 \\ \dot{x}_2 = u_2 + x_2 x_3 \\ \dot{x}_3 = u_1 \end{cases}$$

Ce système est plat avec pour sorties plates $y_1 = x_1 - x_3$ et $y_2 = x_2$. Pour le montrer, appliquons l'algorithme d'extension dynamique.

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_3 \\ \dot{y}_1 = x_3^2 + u_2 \end{cases}$$

Une première combinaison des commandes apparaît, on s'arrête là et on pose

$$w_1 = x_3^2 + u_2 \quad n_1 = 1$$

Puis

$$\begin{aligned} y_2 &= x_2 \\ \dot{y}_2 &= u_2 + x_2 x_3 = w_1 - x_3^2 + x_2 x_3 \end{aligned}$$

Cette combinaison des commandes n'est pas indépendante de la première w_1 , on continue à dériver :

$$\begin{aligned} \ddot{y}_2 &= \dot{w}_1 - 2x_3 u_1 + (u_2 + x_2 x_3)x_3 + x_2 u_1 \\ &= \dot{w}_1 + u_1(x_2 - x_3) + u_2 x_3 + x_2 x_3^2 = w_2 \end{aligned}$$

On a le deuxième bouclage w_2 et $n_2 = 2$. On vérifie $n_1 + n_2 = 3$ donc $(y_1; y_2)$ est un couple de sorties plates. Nous sommes donc ramenés à la dynamique :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = w_1 \\ \dot{y}_2 = w_2 \end{cases}$$

par le bouclage :

$$\begin{cases} u_1 = w_1 - x_3^2 \\ u_2 = \frac{w_2 - x_2 x_3^2 - \dot{w}_1 - x_3(w_1 - x_3^2)}{x_2 - 2x_3} \end{cases}$$

De l'extérieur, on veut maintenant piloter le système par w_1 et w_2 . Mais pour calculer les commandes u_1 et u_2 il va falloir dériver w_1 . Pour éviter que les bruits engendrent une grande imprécision sur la dérivation numérique qui peut déstabiliser le système, une astuce consiste à augmenter la dimension du contrôleur pour en faire un contrôleur dynamique.

5.2.3 Bouclage par les régimes glissants

Dans ce paragraphe, on s'intéresse aux comportements du système bouclé quand la commande choisie est à structure variable et à régime glissant.

Nous considérons d'abord, dans le cas des systèmes monovariables sans dynamique de zéro, la commande à structure variable classique et la commande glissante d'ordre supérieur.

Le cas des systèmes multivariables discrets et hybrides est envisagé dans le Chap. 6.

Le cas de la commande à structure variable dynamique pour les systèmes avec dynamique de zéro a été envisagé dans le Chap. 2 de la première partie.

Cas d'une commande à structure variable classique (ou statique)

Les régimes glissants constituent le cadre naturel pour traiter les systèmes discontinus ou à structure variable. Soit :

Une surface d'équation $S = 0$ est définie dans \mathbf{R}^n . Elle divise l'espace en deux régions $S > 0$ et $S < 0$.

Un système dont le comportement est défini par la commutation entre deux champs de vecteurs différents f^+ pour $S > 0$ et f^- pour $S < 0$, les deux champs f^+ et f^- pointant vers la surface S . De cette façon toute trajectoire commençant son mouvement hors de S , va la rejoindre (Nouri, 1994; Mira, 1990; Hamerlain, 1993).

Le système tel qu'il a été décrit est bien défini en dehors de la surface S (par l'un des deux champs f^+ ou f^-); par contre sur S elle même le comportement n'est pas défini et peut donc être imposé.

On cherche à définir l'équation du système quand l'état évolue sur la surface S selon un sens que l'on précisera dans la suite. Ceci constitue le problème fondamental de la théorie des équations différentielles à second membre discontinu dont la théorie du contrôle d'un système par des régimes glissants constitue un champ d'application. Dans la théorie du contrôle, les systèmes discontinus peuvent apparaître sous deux formes différentes.

Considérons d'abord le cas d'un système continu définie par l'équation différentielle de type $\dot{x} = f(x, u)$ où la commande est $u \in U$, l'ensemble U étant un ensemble connexe de \mathbf{R}^m . On définit une loi de commande sous forme de retour d'état possédant des discontinuités sur une ou des surfaces données dans l'espace d'état. Prenons par exemple le cas d'un système monovariante où $u \in [u^- u^+]$ et d'une surface S (ensemble de l'espace d'état défini par l'équation $S(x) = 0$) de codimension un. Le retour d'état est défini par $u = u^+$ si $S > 0$ et $u = u^-$ si $S < 0$ avec $u^+ \neq u^-$.

Dans le deuxième contexte, le système est discontinu par nature. Il est défini par la donnée d'une famille finie de champs de vecteurs sur lesquels le système commute selon la position de l'état dans l'espace. C'est le cas des circuits électriques à commutations où les commandes (les interrupteurs) prennent les valeurs 0 ou 1.

Dans les deux cas de discontinuités (naturelles ou causées par un choix de commande discontinue), le système est défini par une équation différentielle à second membre discontinu. Le système est bien défini en dehors de la (des) surface(s) de discontinuité, les solutions pouvant être obtenues à partir de la théorie classique des équations différentielles. Par contre sur la (les) surface(s) de discontinuité où le système n'est pas défini à priori, le comportement du système est à définir selon un sens donné (on note que la théorie classique des équations différentielles cesse d'être valable, car le système en question ne vérifie plus les conditions classiques d'existence du théorème de Cauchy-Lipschitz à cause de la discontinuité du vecteur d'état sur la (les) surface(s) de commutation).

Dans la théorie des régimes glissants, la surface ou les surfaces sont définies comme étant celles qui utilisent la sortie du système commandé comme composante de l'état du système. Le comportement dynamique que l'on cherche à définir sur la surface de commutation (de discontinuité, de glissement) peut être considéré comme étant la dynamique interne du système commandé correspondant au comportement du système en boucle fermée.

La dynamique sur la surface de glissement S , appelée dynamique glissante, est définie selon plusieurs approches et selon le type de systèmes étudiés.

Dans le cas où le système est naturellement discontinu, il est défini par la donnée d'une famille finie de champ de vecteurs \mathbf{F} . La dynamique glissante est définie, en un point x de S , au sens de Filippov comme étant l'intersection entre l'espace tangent à la surface en x et l'enveloppe convexe de \mathbf{F} .

Dans le cas où le système discontinu provient d'un système continu pour lequel on a défini un retour d'état discontinu, la dynamique glissante est donnée au sens de la commande équivalente ou de Utkin. La commande équivalente est définie comme étant la valeur de la commande u qui rend la surface invariante sous l'action du champ $f(x, u)$. Cette théorie a été largement développée par Utkin (Utkin, 1976, 1977, 1983) et Filippov (Filippov, 1960). Elle a été reprise sous une forme plus moderne en utilisant la terminologie et les concepts de la géométrie différentielle (Sira-Ramirez, 1988, 1987, 1990 et Decarlo *et al.*, 1988).

Nous exposons dans la suite la détermination de la dynamique glissante au sens de Filippov et de Utkin pour un système scalaire (le cas des systèmes multivariables sera traité dans le chap. 6).

Pour fixer les idées, on considère l'exemple classique suivant (Decarlo *et al.*, 1988) qui illustre bien les principes, les problèmes des modes glissants et leur caractère local.

Exemple 7. Soit le système défini par :

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases} \quad \text{où } |u| \leq 1$$

Ce système décrit le mouvement d'un point matériel de masse unitaire soumis à une force u . Les trajectoires correspondant aux valeurs 1 et -1 de

la commande, sont des paraboles comme indiqué sur la Fig. 5.1. En effet, une simple intégration donne les trajectoires :

$$\begin{cases} x_2^2 - 2x_1 = C_1 & \text{dans le cas où } u = +1 \\ x_2^2 + 3x_1 = C_1 & \text{dans le cas où } u = -1 \end{cases}$$

Considérons une surface de glissement S définie par $S \equiv \{x \in \mathbf{R}^2 : S(x) \equiv c_1 x_1 + x_2 = 0\}$. La loi de commande est $u = -\text{sign}S(x)$ où $\text{sign}S(x) = 1$ si $S > 0$ et $\text{sign}S(x) = -1$ si $S < 0$.

En appliquant cette loi de commande, les trajectoires rejoignent toujours S c'est à dire la droite d'équation $S = 0$, mais on remarque que la trajectoire ne reste collée à S que dans le cas où les trajectoires coupent la droite à un point où $|x_2| < 1/c_1$, pour laquelle S est tangente à la parabole. Par contre pour les valeurs de $|x_2| \geq 1/c_1$, l'état tourne en spirale avant d'atteindre la région où il glisse sur S (cf. Figs. 5.2 et 5.3). On dit alors que le système est en régime glissant si $|x_2| < 1/c_1$. Ceci met en évidence le caractère local du phénomène de glissement et le fait qu'il ne peut exister partout sur la surface.

Si les paramètres du système changent en gardant le même comportement qualitatif (les trajectoires restent pointées sur S), le mouvement sur la droite $S = 0$ (telle qu'elle a été définie) est indépendant de ces changements ; ceci justifie l'utilisation des régimes glissants pour la synthèse de commande robuste. On remarque aussi que l'ordre de l'équation sur la surface est réduit d'une unité (le système en boucle fermée a le comportement correspondant à l'équation $S = 0$). En résumé, un système implique un mode glissant sur une surface (localement), si les vecteurs vitesses de l'état pointent vers la surface des deux côtés. Les problèmes suivants se posent alors :

- trouver le domaine d'existence du mode glissant sur la surface ;
- étudier le comportement du système sur la surface de glissement, c'est à dire définir la dynamique du système sur la surface S .

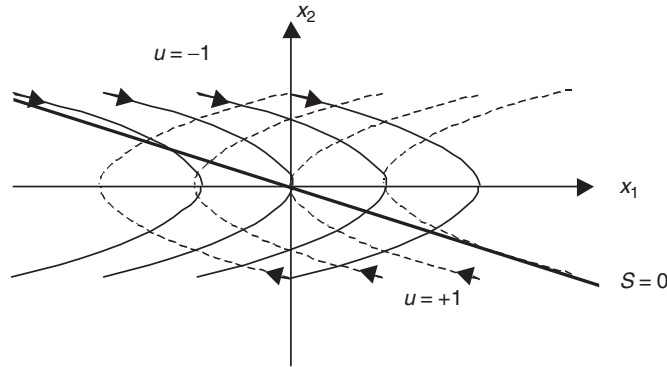


Fig. 5.2. Plan de phase

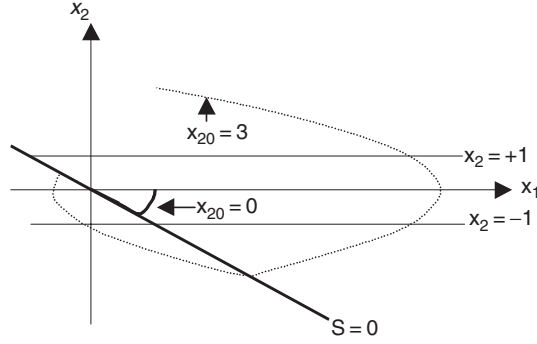


Fig. 5.3. Trajectoire de phase pour $x_{20} = 3$ et $x_{20} = 0$: Il y a glissement sur $S = 0$ si $|x_2| < 1/c_1$, avec $c_1 = 1$ (cas $x_{20} = 0$), sinon l'état tourne autour de $S = 0$ avant de glisser dessus (cas $x_{20} = 3$)

Supposons que le système étudié évolue dans une variété de dimension n de \mathbf{R}^n . Soit :

- S l'ensemble des points (qu'on appelle variété de glissement, surface de discontinuité, surface de commutation), définis par $S = \{x \in \mathbf{R}^n : S(x) = 0\}$. Soit x_0 un point tel que $S(x_0) = 0$ où $\partial S / \partial x$ est de rang un en x_0 . Il existe un voisinage X de x_0 tel que $S \cup X$ est une variété différentiable (de codimension un ; S divise X en deux régions caractérisées par les points x tels que $S(x) > 0$ et $S(x) < 0$).
- le système dynamique commandé défini par les équations suivantes :

$$\dot{x} = \tilde{f} = \begin{cases} f^+(x) & \text{si } S(x) > 0 \\ f^-(x) & \text{si } S(x) < 0 \end{cases}$$

Les champs f^+ et f^- sont bien définis.

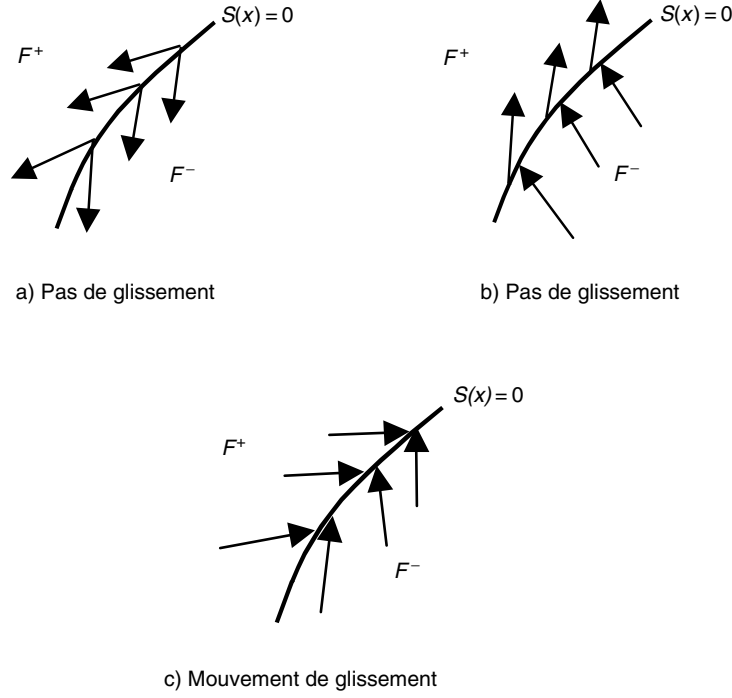
Supposons que $L_{f^+}S(x_0) < 0$ et $L_{f^-}S(x_0) > 0$, il existe un voisinage de x_0 dans X où les inégalités restent valides. Supposons que ce voisinage est égal à X (par simplification).

Définition. (Sira-Ramirez, 1990 ; Slotine et Li, 1991 ; Hassan, 1993) Etant donné la surface et le système précédents considérons $x \in X$. Si sous l'action de ces champs de vecteurs, l'état vérifie les inégalités suivantes :

$$x \in X \text{ on a } \begin{cases} L_{f^+}S < 0 \\ L_{f^-}S > 0 \end{cases}$$

alors un mode (ou régime) glissant existe sur S (localement).

La figure 5.4 montre les différentes configurations envisageables, et précise celle qui correspond à un régime glissant sur S (Hassan, 1993).

**Fig. 5.4.** Principe du régime glissant

Dans la littérature, la définition précédente est présentée sous plusieurs formes :

- Un régime glissant existe sur S si la projection du segment engendré par $f^+(x)$ et $f^-(x)$ ($x \in S$) sur une droite traversant la surface (parallèlement à l'espace tangent) au point où le régime glissant existe, contient 0 à son intérieur.
- Dans le cas des systèmes continus (discontinuité due à la nature de la commande), un régime glissant existe sur S si le système possède en $x \in S \cup X$ un degré relatif égal à un (Sira-Ramirez, 1990).
- Un régime glissant existe sur S si on a localement :

$$S\dot{S} < 0$$

sous l'action de la loi de commutation, ce qui revient à dire que la variété S est attractive.

La dynamique sur la surface S n'étant pas déterminée, le problème est de définir le comportement de l'état une fois que la surface est atteinte.

La théorie des équations différentielles ordinaires cesse d'être valide à cause de la discontinuité du second membre (les hypothèses du théorème d'existence de Cauchy-Lipschitz ne sont pas remplies). Dans la littérature, beaucoup de chercheurs se sont intéressés à ce problème de continuité de la

solution des équations différentielles (Utkin, 1976 ; Filippov, 1960 ; Filippov, 1988) pour en déduire l'équation qui décrit le comportement dynamique de l'état sur la surface de discontinuité. Nous nous intéressons ici à deux approches essentiellement, l'approche de Filippov et l'approche de Utkin.

Approche de Filippov

Soit F une famille de champs de vecteurs. Le système est défini par une politique de commutation d'éléments de F , de façon qu'une variété S devienne attractive et une telle politique de commutation implique un régime glissant sur S .

Selon cette approche l'équation dynamique glissante qui résulte de l'application d'une telle famille de champs de vecteurs, est donnée par le champ de vecteur appartenant à l'intersection de l'espace tangent à la variété glissante avec l'enveloppe convexe engendrée par la famille $F = \{f_i(x) : i \in I\}$.

La dynamique glissante en $x \in S$, est donnée, au sens de Filippov, par l'intersection :

$$\overline{\text{conv}}(F)_x \cap T_x S$$

où $\text{Conv}(F)_x$ est l'espace engendré par f^+ et f^- en x , $\overline{\text{Conv}}()$ sa fermeture, $T_x S$ l'espace tangent à S en x .

La dynamique glissante est donnée (Filippov, 1960 ; Hassan, 1993) alors par :

$$\begin{cases} x \in S \\ f^* = \lambda f^+ + (1 - \lambda) f^- = f^- + \lambda(f^+ - f^-) \end{cases}$$

et λ prend la valeur suivante :

$$\lambda = \frac{\langle \partial S, f^- \rangle}{\langle \partial S, (f^- - f^+) \rangle} \text{ où } \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ produit scalaire.}$$

Approche de Utkin

Dans cette approche (Utkin, 1976 ; Hamerlain, 1993 ; Hassan, 1993), on considère des systèmes où la discontinuité est due à la nature de la commande. Le système est de type :

$$\dot{x} = f(x, u) \quad \text{avec} \quad u(x) \text{ discontinue en } x$$

La dynamique glissante est la dynamique qui résulte en remplaçant u par la valeur qui rend la surface glissante invariante sous l'action du champ dit équivalent.

Soit le système défini par les équations :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \quad u \in U \subset \mathbb{R} \\ u(x) &= \begin{cases} u^+(x) & \text{si } S(x) > 0 \\ u^-(x) & \text{si } S(x) < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Le système ainsi défini, présente un comportement glissant. La dynamique glissante est donnée par :

$$f^* = f_{eq}(x) = f(x, u_{eq})$$

où u_{eq} est la commande équivalente qui rend la surface invariante. Elle vérifie l'inégalité :

$$\min(u^-(x), u^+(x)) < u_{eq} < \max(u^-(x), u^+(x)) \text{ pour } x \in S$$

Remarques.

- Les dynamiques de Filippov et de Utkin sont généralement différentes comme le montre la Fig.5.5; elles peuvent même ne pas être « colinéaires ». En effet chacune correspond à une situation différente selon qu'on a affaire à un système discontinu par nature (Filippov), ou un système qui a été rendu discontinu par le choix d'un retour d'état discontinu autour de S (Utkin). Par contre on montre qu'elles sont équivalentes dans le cas des systèmes linéaires en entrée.
- Il existe d'autres approches pour définir la dynamique sur la surface de discontinuité. Une de ces approches, approche convexifiante, consiste à dire que la dynamique glissante appartient à l'intersection entre l'espace tangent et le plus petit espace convexe fermé contenant les champs de vecteurs $f(x, u)$ pour $u \in U$ l'ensemble des contrôles admissibles (Bartolini et Zolezzi, 1985).
- Les trois approches de Filippov, Utkin et l'approche convexifiante sont identiques dans le cas des systèmes linéaires en entrée.

Exemple 7. (suite) Reprenons l'exemple précédent et déterminons la dynamique glissante.

Dans cet exemple, on a un système linéaire en entrée, la dynamique glissante est alors donnée par l'approche de Utkin, c'est à dire à partir de la

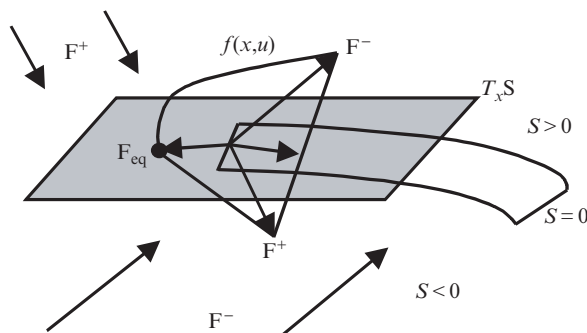


Fig. 5.5. Champ de Filippov et champ de Utkin ou équivalent (d'après (Hassan, 1993))

commande équivalente. La commande équivalente est donnée par :

$$\dot{S} = 0 \Rightarrow u_{eq}(x) = -c_1 x_2 \quad x \in S$$

Le domaine d'existence est déterminé en utilisant l'inégalité sur u_{eq} , d'où la condition :

$$\min(u^-(x), u^+(x)) < u_{eq}(x) < \max(u^-(x), u^+(x)) \Rightarrow -1 < c_1 x_2 < 1$$

Soit : $-\frac{1}{c_1} < x_2 < \frac{1}{c_1}$

Dans ce domaine la dynamique glissante est donnée aussi par :

$$\begin{cases} x \in S \\ \dot{x}_2 + c_1 x_2 = 0 \end{cases}$$

Cas d'une commande à régime glissant d'ordre supérieur

L'inconvénient majeur de la commande à structure variable réside dans les oscillations appelées phénomène de «broutement» ou «chattering». Plusieurs solutions ont été exposées dans la première partie pour remédier à ces oscillations. Nous donnons ici une autre méthodologie pour éliminer ce phénomène de chattering en appliquant la discontinuité sur des dérivées de la commande (Levant, 1993) (méthodologie à comparer à la commande à structure variable généralisée développée au Chap. 2 de la première partie, voir remarque page 202).

Considérons un système dynamique décrit par :

$$\dot{x} = f(t, x, u)$$

x variable d'état, $x \in X$ une variété, t le temps et $u \in \mathbf{R}^m$ la commande.

L'objectif est la synthèse d'une commande u telle que la contrainte (ou surface) $\sigma(t, x) = 0$ soit vérifiée (σ est une application de $\mathbf{R} \times X$ dans \mathbf{R}^p , f et σ sont deux champs de vecteurs réguliers).

Quelques choix de contraintes ont été discutés par (Emelyanov *et al.*, 1970 ; Utkin, 1971–1981 ; Dorling et Zinober, 1986 ; Decarlo *et al.*, 1988).

Cette approche présente l'avantage de réduire le système (au point de vue de son ordre). En plus, le système réduit est insensible à certaines variations du système. Les approches existantes pour la solution de ce type de problème ne maintiennent pas dans la pratique la contrainte exactement (le glissement ne s'effectue pas sur la surface mais dans un voisinage de celle-ci). La qualité de la commande est étroitement liée à la qualité du glissement : glissement idéal ou dans un voisinage de la surface pour le glissement réel.

A - Glissement réel

Nous appelons «un glissement idéal» tout mouvement se faisant sur la variété $\sigma = 0$. Le glissement est dit «réel» si le mouvement s'effectue dans un voisinage de la variété $\sigma = 0$ (Utkin, 1978 ; Slotine et Li 1991 ; Nouri, 1994).

L'existence du glissement est dû essentiellement à une fréquence infinie de commutation de la commande. Or vu les imperfections, la fréquence est finie. Donc le mode glissant doit être considéré comme une limite lorsque les imperfections disparaissent et lorsque la fréquence de commutation tend vers l'infini (Filippov 1960, 1988).

Définition 1. Soit $(t, x(t, \varepsilon))$ une famille de trajectoires indexée par $\varepsilon \in \mathbf{R}^l$ ayant la même condition initiale $(t_0, x(t_0))$ et soit $t \geq t_0$ ($t \in [t_0, T]$). Supposons qu'il existe $t_1 \geq t_0$ ($t_1 \in [t_0, T]$) tel que pour tout segment $[t', t'']$ avec $t' \geq t_1$ (ou $t' \in [t_1, T]$) la fonction $\sigma(t, x(t, \varepsilon))$ tend uniformément vers 0 quand ε tend vers 0. Dans ce cas, cette famille de trajectoires s'appelle une famille de glissements réels sur la contrainte $\sigma = 0$. Le mouvement sur l'intervalle $[t_0, t_1]$ s'appelle le régime (glissant) transitoire et le mouvement sur $[t_1, \infty[$ ou $[t_0, T]$ le régime (glissant) permanent. Nous appelons aussi algorithme de commande, une commande à mode glissant idéal sur $\sigma = 0$ produisant un glissement idéal pour toute condition initiale en un temps fini.

Un algorithme de commande dépendant de $\varepsilon \in \mathbf{R}^l$ est appelé un algorithme de commande à régime glissant sur $\sigma = 0$ si, quand ε tend vers 0, il génère une famille de glissements réels pour toute condition initiale.

Définition 2. Soit $\gamma(\varepsilon)$ une fonction réelle telle que $\gamma(\varepsilon)$ tend vers 0 si ε tend vers 0. Un algorithme à régime glissant réel sur $\sigma = 0$ est dit d'ordre r ($r > 0$) par rapport à $\gamma(\varepsilon)$, si pour tout ensemble compact des conditions initiales et pour tout intervalle $[T_1, T_2]$, il existe une constante C , telle que l'état x en régime permanent satisfait :

$$|\sigma(t, x(t, \varepsilon))| \leq C|\gamma(\varepsilon)|^r \quad t \in [T_1, T_2]$$

Si $\gamma(\varepsilon)$ est le plus petit intervalle de temps de la commande alors le terme « par rapport à $\gamma(\varepsilon)$ » est omis.

Soit $(t, x(t, \varepsilon))$ une famille de glissements réels avec ε tendant vers 0, t appartenant à un intervalle borné. Soit $\sigma(t, x)$ une contrainte et $r > 0$ l'ordre du glissement réel par rapport à $\tau(\varepsilon)$, où $\tau(\varepsilon)$ est le plus petit intervalle de temps sur lequel la fonction $x(t, \varepsilon)$ a des valeurs régulières.

Proposition 1. Soit l un nombre entier inférieur à r . Si la $l^{\text{ème}}$ dérivée $\sigma^{(l)} = (d/dt)^l \sigma(t, x(t, \varepsilon))$ est uniformément bornée par τ et pour le régime permanent de $x(t, \varepsilon)$, alors il existe des coefficients C_1, C_2, \dots, C_{l-1} constantes positives telles que, en régime permanent, on a les inégalités suivantes :

$$\|\dot{\sigma}\| \leq C_1 \tau^{l-1}, \|\ddot{\sigma}\| \leq C_2 \tau^{l-2}, \dots, \|\sigma^{(l-1)}\| \leq C_{l-1} \tau$$

Proposition 2. Soit $\delta > 0$ et $p > 0$ des entiers et soit $\{\varepsilon_i\}$ une séquence avec ε_i tendant vers 0. Supposons que pour chaque ε_i il existe un intervalle de temps sur lequel, le régime permanent de l'état est régulier et pour chaque intervalle la $p^{\text{ème}}$ dérivée de σ satisfait :

$$\|\sigma^{(p)}\| \geq \delta$$

sur l'ensemble de l'intervalle, alors l'ordre du glissement réel satisfait $r \leq p$.

A partir de ces propositions, l'ordre r du glissement réel satisfait :

$$\sigma = \dot{\sigma} = \ddot{\sigma} = \dots = \sigma^{(r-1)} = 0$$

pour le glissement idéal (pour les régulateurs à structure variable classique, seul le premier ordre est vérifié avec commutation discrète).

B - Glissement idéal

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$\begin{aligned} \dot{y} &= v(y) \quad y \in \mathbb{R}^m \\ v : \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

v est un vecteur de fonction bornée et mesurable localement.

Cette équation a été étudiée au sens de Filippov (Filippov, 1960, 1988). Elle est remplacée par une inclusion différentielle équivalente :

$$\dot{y} \in V(y)$$

Dans le cas particulier où v est un champ de vecteur continu à peu près partout, l'ensemble $V(y_0)$ est la partie convexe fermée de l'ensemble de toutes les limites possibles de $v(y_\alpha)$ avec y_α tendant vers y_0 . La solution est définie comme une fonction continue $y(t)$, vérifiant l'inclusion différentielle partout.

Définition 3. Soit Γ un ensemble régulier, Γ est appelée ensemble de points de glissement de premier ordre. L'ensemble de points de glissement du second ordre est défini par l'ensemble des points $y \in \Gamma$ tel que $V(y)$ appartient à l'espace tangent (noté $T_y\Gamma$) à l'espace Γ au point y .

Un glissement du premier ordre (second ordre) existe sur Γ au voisinage du point de glissement du premier ordre (second ordre) y_0 , si au voisinage de ce point, l'ensemble de glissement du premier ordre (second ordre) est un ensemble de solutions au sens de Filippov.

Cette définition peut-être étendue pour le cas des équations différentielles non autonomes.

Un régime glissant régulier satisfait la condition pour laquelle l'ensemble des vitesses V n'est pas inclus dans l'espace tangent $T_y\Gamma$ mais dans l'espace $V(y) \cap T_y\Gamma \neq \emptyset$; et il existe une trajectoire d'état dans Γ avec un vecteur de vitesse appartenant $T_y\Gamma$. Ce mode de glissement est l'opération essentielle dans les systèmes à structure variable (Emelyanov *et al.*, 1970; Utkin, 1972, 1983, 1992; Itkis, 1978; Ryan *et al.*, 1984; Decarlo *et al.*, 1988) et en utilisant la définition précédente, il s'agit d'un glissement du premier ordre. Dans ce cas, s'il y a une erreur de commutation, la trajectoire quitte la variété de glissement avec un certain angle. Dans le cas du glissement du second ordre, toutes les vitesses possibles sont dans l'espace tangent à Γ ($T_y\Gamma$) et même s'il y a une erreur de commutation, la trajectoire est tangente à la variété de commutation Γ au moment où elle quitte cette dernière.

Si la variété de glissement Γ est donnée par la contrainte $w(x) = 0$; le glissement du second ordre est donné par les équations :

$$w(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall v \in V(y) \quad w'_y v = 0$$

Un glissement sur la variété $w = 0$ d'ordre r est défini par (Levantovsky, 1987).

Considérons un système en boucle fermée défini par :

$$\dot{x} = f(t, x, u) \quad (5.23)$$

$$u = U(t, x, \xi) \quad (5.24)$$

$$\dot{\xi} = \Psi(t, x, \xi) \quad (5.25)$$

où U est un opérateur de bouclage (boucle fermée), ξ paramètre auxiliaire. La valeur initiale de ξ est donnée par une fonction $\xi(t_0) = \xi_0(t_0, x_0)$ arbitraire.

Les équations (5.24) et (5.25) constituent une commande binaire (Emelyanov et Korovin, 1981 ; Emelyanov, 1986).

Soit $\sigma(t, x) = 0$ la variété considérée (la contrainte) et dérivable

$$\sigma \in C^1 \quad \frac{\partial \sigma}{\partial x} \neq 0$$

Définition 4. Les équations (5.23) et (5.24) désignent un algorithme de glissement du premier ordre (second ordre) sur la contrainte $\sigma = 0$ si un régime glissant du premier (du second ordre) s'exécute sur la variété $\sigma = 0$, à partir de toute condition initiale (t_0, x_0) l'état x convergeant vers $\sigma = 0$ en un temps fini.

Les algorithmes à régime glissant, utilisés dans la commande à structure variable classique, sont du premier ordre : ils sont caractérisés par des fonctions continues par morceaux U avec $\psi = 0$. Le glissement du second ordre défini par Levantovsky (Levantovsky, 1985, 1986, 1987 ; Emelyanov *et al.*, 1986, 1990) est donné par une fonction continue U et une fonction discontinue bornée ψ . Le système est décrit par :

$$\dot{x} = f(t, x, u_{eq}(t, x)) \quad (5.26)$$

où u_{eq} est la commande équivalente selon Utkin (Utkin, 1977) déterminée à partir de l'équation :

$$\dot{\sigma} = \sigma'_x(t, x) + \sigma'_x(t, x)f(t, x, u_{eq}) = 0$$

dont la solution est supposée unique.

Avec certaines hypothèses, l'équation (5.26) peut être satisfaite approximativement avec des commutations (glissement du premier ordre) ou avec un glissement réel du second ordre. Pour le glissement du premier ordre, le résultat est prouvé par Utkin (Utkin, 1978) dans le cas où le processus est linéairement dépendant de la commande ; ce résultat a été généralisé par (Bartolini et Zolezzi, 1986).

C - Exemples de glissement d'ordre supérieur

Nous donnons ci-dessous quelques exemples de glissement idéal et réel de second ordre. Nous commençons d'abord par formuler les conditions sous lesquelles un tel problème peut être résolu. Pour simplifier le problème étudié, nous considérons le cas d'une contrainte $\sigma \in \mathbf{R}$, et d'une commande $u \in \mathbf{R}$: le but est de forcer la contrainte à être vérifiée ($\sigma = 0$).

Imposons maintenant les conditions suivantes :

1. Concernant la fonction contrainte σ et le système d'équation (5.23), nous supposons que $|u| \leq K$, constante strictement supérieure à 1 ; la fonction f (cf. équation (5.23)) est une fonction continue de classe C^1 : la contrainte σ est de classe C^2 ; l'état est dans une variété X de dimension finie. Chaque solution de l'équation (5.23) est définie pour une commande $u(t)$ continue satisfaisant $|u(t)| \leq K$ pour tout t .
2. Supposons qu'il existe u_1 dans $(0,1)$ telle que pour toute fonction continue $u(t)$ avec $|u(t)| > u_1$ quel que soit t , alors on a $\dot{\sigma}(t)u(t) > 0$ pour un ensemble fini du temps t .
3. Il existe des constantes positives σ_0, K_m, K_M, u_0 avec $u_0 < 1$ telles que :

$$\text{si } |\sigma(t, x)| < \sigma_0 \text{ alors } 0 < K_m \leq \frac{\partial \sigma}{\partial u} \leq K_M \quad \forall u$$

$$|u| > u_0 \Rightarrow \dot{\sigma}u > 0$$

L'ensemble $\{t, x, u : |\sigma(t, x)| < \sigma_0\}$ est appelé région linéaire.

4. Supposons que la dérivée seconde de la contrainte σ est bornée pour toute commande fixée au préalable. Dans la région linéaire $\{t, x, u : |\sigma(t, x)| < \sigma_0\}$ on a l'inégalité $L_u L_u \sigma(t, x) < C_0$ vérifiée.

Remarque. La dérivée de Lie, L_u par rapport à la variable u , est définie par :

$$L_u(.) = \frac{\partial}{\partial t}(\cdot) + \frac{\partial}{\partial x}(\cdot)f(t, x, u)$$

$$\dot{\sigma}(t, x, u) = L_u \sigma(t, x) = \sigma'_t(t, x) + \sigma'_x(t, x)f(t, x, u)$$

La théorie de la commande à structure variable s'est intéressée au système linéairement dépendant de la commande :

$$\dot{x} = a(t, x) + b(t, x)u \quad x \in \mathbf{R}^n$$

Avec les hypothèses classiques, la tâche de maintenir $\sigma = 0$ est réduite à la tâche décrite ci-dessus. Une nouvelle commande μ et une nouvelle fonction de contrainte ϕ sont définies par la transformation $u = \mu k \phi(x)$ avec $\phi(x) = \sigma(t, x)/\Phi(x)$ où $\Phi(x)$ est définie par :

$$\Phi(x) = (x^T D x + h)^{1/2} \quad \text{avec } h > 0, k > 0$$

D est une matrice symétrique non négative (Levantovsky, 1985; Emelyanov *et al.*, 1986).

Dans le cas où le système est décrit par :

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u \quad \sigma = \langle c(t), x \rangle + \xi(t)$$

toutes les conditions sont réduites à ce que les grandeurs $c, \dot{c}, \ddot{c}, \dot{\xi}, \ddot{\xi}, A, \dot{A}, b, \dot{b}$ soient bornées et à la quantité $\langle c, b \rangle$ supérieure ou égale à une constante strictement positive.

L'algorithme considéré avec :

$$u = \begin{cases} -\text{sign}(\sigma) & \text{si } |K\sigma| > 1 \\ -K\sigma & \text{si } |K\sigma| \leq 1 \end{cases}$$

constitue un algorithme de glissement réel du premier ordre par rapport à K^{-1} si K tend vers l'infini.

L'algorithme

$$u = -\text{sign}(\sigma) \quad (5.27)$$

est l'algorithme classique de commande à structure variable, il est du premier ordre. Si la contrainte σ est mesurée à des instants discrets $t_0, t_1, \dots, t_i - t_{i-1} = \Delta t > 0$, on obtient un algorithme de glissement réel du premier ordre, la commande est $u(t) = -\text{sign}\sigma(t_i)$ avec $t_{i-1} \leq t \leq t_i$.

L'algorithme dit Aμ (Emelyanov et Korovin, 1981; Emelyanov, 1986) défini par :

$$\dot{u} = \begin{cases} -u & \text{si } |u| > 1 \\ -\alpha \text{sign}(\sigma) & \text{si } |u| \leq 1 \end{cases} \quad (5.28)$$

constitue, avec α tendant vers l'infini, un algorithme de glissement réel du premier ordre par rapport à α^{-1} (cet algorithme Aμ ne fait pas converger la trajectoire d'état vers le glissement idéal).

Avec les hypothèses formulées précédemment, il existe une fonction unique $u_{eq}(t, x)$ satisfaisant dans la région linéaire

$$\dot{\sigma}(t, x, u_{eq}(t, x)) = 0$$

L'ensemble des glissements du second ordre correspondant à $\sigma = 0$ et $u = u_{eq}(t, x)$ est non vide.

Théorème. *Considérons les hypothèses 1, 3 et 4 satisfaites et supposons que la commande est donnée par*

$$\dot{u} = \psi(t, x, u) \quad (5.29)$$

avec ψ une fonction bornée mesurable (fonction de Lebesgue). Supposons aussi que pour chaque point M de l'ensemble de glissement du second ordre et pour

tout voisinage $V(M)$ de ce point on a :

$$\begin{aligned}\mu(V(M) \cap \psi^{-1}(]-\infty, -C_0/K_m])) &> 0 \\ \mu(V(M) \cap \psi^{-1}([C_0/K_m, +\infty[)) &> 0\end{aligned}$$

où μ est une mesure (distance) de Lebesgue. Alors il existe un glissement du deuxième ordre sur la contrainte $\sigma = 0$ et le mouvement est décrit par :

$$\dot{x} = f(t, x, u_{eq}(t, x))$$

D'après ce théorème, un glissement du second ordre existe pour le système (5.23) avec une loi de commande de type $A\mu$ pour α suffisamment grand; ce glissement est généralement non stable.

Nous trouvons dans (Levantovsky, 1985; Emelyanov et al., 1986) quelques exemples d'algorithme assurant un glissement du second ordre pour le système d'équation (5.23) : citons l'algorithme « Twisting algorithm » :

$$\dot{u} = \begin{cases} -u & \text{si } |u| > 1 \\ -\alpha_m \text{sign}(\sigma) & \text{si } \sigma\dot{\sigma} \leq 0 \text{ et } |u| \leq 1 \\ -\alpha_M \text{sign}(\sigma) & \text{si } \sigma\dot{\sigma} > 0 \text{ et } |u| \leq 1 \end{cases}$$

où $\alpha_M > 0$ et $\alpha_m > 0$ et on suppose :

$$\alpha_m > 4K_m/\sigma_0, \alpha_m > C_0/K_m, \text{ et } K_m\alpha_M - C_0 > K_M\alpha_m + C_0$$

Ces algorithmes utilisent la dérivée de la contrainte σ ou sa variation $\Delta\sigma$ donc utilisent les équations du système (ces algorithmes avec commutation de $\Delta\sigma$ font converger la trajectoire d'état vers le glissement idéal).

Donnons ci-dessous un autre algorithme assurant un glissement du second ordre sans utiliser les équations du système (Emelyanov et al., 1990) :

$$\begin{aligned}u &= u_1 + u_2 \\ \dot{u}_1 &= \begin{cases} -u & \text{si } |u| > 1 \\ -\alpha \text{sign}(\sigma) & \text{si } |u| \leq 1 \end{cases} \\ \dot{u}_2 &= \begin{cases} -\lambda|\sigma|^\rho \text{sign}(\sigma) & \text{si } |\sigma| > \sigma_0 \\ -\lambda|\sigma|^\rho \text{sign}(\sigma) & \text{si } |\sigma| \leq \sigma_0 \end{cases}\end{aligned}$$

où α, λ sont strictement positifs avec $\rho \in [0, 1]$, la condition initiale $u_1(t_0)$ est choisie telle que

$$|u| = |u_1(t_0) + u_2(t_0, x_0)| \leq K$$

Exemple. (Levant, 1993) Considérons pour le système d'équation

$$\left. \begin{aligned}\dot{x}_1 &= -5x_1 + 10x_2 + 4x_3 + x_1 \sin t + (u^2 - 1)(x_1 - x_2) \\ \dot{x}_2 &= 6x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 3(x_1 + x_2 + x_3) \cos t \\ \dot{x}_3 &= \dot{x}_1 + 3x_3 + 4x_2 \cos 5t + 4 \sin 5t + 10(1 + 0.5 \cos 10t)\mu(u)\phi(x)\end{aligned} \right\}$$

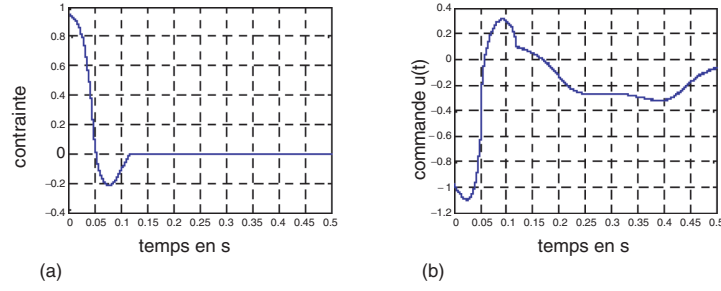


Fig. 5.6. Cas de l'algorithme de type «Twisting algorithm» a) Evolution de la contrainte $\sigma(t)$; b) Evolution de la commande $u(t)$

un glissement du second ordre de type «Twisting algorithm» avec

$$\left. \begin{aligned} \mu(u) &= 3u - \cos 30t \sin u - u^2/4 \\ \phi(x) &= [x_1^2 + x_2^2 + x_3^2]^{1/2} \end{aligned} \right\}$$

La contrainte $\sigma(t)$ est définie par :

$$\sigma = \frac{x_3}{\phi(x)}$$

Il est facile de vérifier ici toutes les hypothèses.

Nous avons simulé cet exemple. Les résultats de la simulation représentent la contrainte $\sigma(t)$ (Fig. 5.6a) et la commande $u(t)$ (Fig. 5.6b).

Remarque. Dans les deux régimes glissants, la discontinuité est appliquée à la dérivée de la commande.

- Pour la commande en un temps fini d'ordre supérieur (d'ordre r), on a $S = \dot{S} = \dots = S^{(r-1)} = 0$. Le point de fonctionnement reste sur la surface et la convergence est en un temps fini.
- Pour la commande asymptotique correspondant au régime glissant généralisée, on a $S\dot{S} < 0$ et une convergence asymptotique.

Annexe G

Evaluation des ordres et degrés d'un système observable à l'aide de glissement sur des surfaces linéaires d'ordre croissant

G.1 Système réduit équivalent à un système linéaire commandé par un algorithme à régime glissant

Considérons un système dynamique et son modèle présumé linéaire issu de l'identification de la forme (2.48) rappelée ci-dessous (*cf.* Chap. 2 de la première partie).

$$\sum_{k=0}^n a_k y^{(k)} = \sum_{j=0}^{\alpha} b_j u^{(j)} \quad a_n = 1 \quad (\text{G.1})$$

Il lui correspond la transmittance :

$$\frac{y}{u} = \frac{b_0 + b_1 p + \dots + b_{\alpha} p^{\alpha}}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}$$

L'ordre du système est n , la dynamique des zéros est d'ordre α et le degré relatif $n^* = n - \alpha$. On lui associe une fonction de glissement définie au Chap. 2 de la première partie par (2.15) rappelée ci-dessous en (G.2) :

$$S = \sum_{i=1}^n c_i x_i = \sum_{i=1}^n c_i y^{(i-1)} \quad \text{avec} \quad c_n = 1 \quad (\text{G.2})$$

Le système bouclé est équivalent au système réduit d'ordre $(n - 1)$ de transmittance :

$$\frac{y}{S} = \frac{1}{p^{n-1} + c_{n-1} p^{n-2} + \dots + c_2 p + c_1}$$

Puisque $S = 0$, le système réduit équivalent est libre en régime glissant établi. L'observation de l'évolution de $S(t)$ et celle de $x(t)$ dans l'espace des phases montre que $\lim S(t) = 0$ quand t tend vers l'infini avec $x(t)$ qui reste sur ou au voisinage de la surface $S = 0$, pour une commande $u(t)$ convenable, solution de (2.50) et correspondant à une commutation sur $u^{(\alpha)}$ (*cf.* Chap. 2 de la première partie).

G.2 Fonction de surface généralisée et degré relatif

On présente ci-dessous une évaluation des ordres et degrés du système à commander (n, n^*, α) à partir du glissement sur des surfaces d'ordre croissant par observation des évolutions de $S(t)$ et de $u(t)$; des expérimentations ont confirmé les simulations et la théorie (Nouri, 1994; Sira-Ramirez *et al.*, 1995).

Confirmons un résultat fondamental, démontré au paragraphe 2.4 du Chap. 2 de la première partie, sur l'existence d'un régime glissant, c'est à dire la condition $S \cdot dS/dt < 0$ exprimée en fonction du degré relatif du système ayant comme entrée la commande discontinue u et comme sortie la fonction de surface S .

Considérons une surface de glissement linéaire par rapport aux variables d'état, définie dans l'espace des phases, par la fonction de surface généralisée d'indice β ci-après :

$$S_\beta(t) = \sum_{k=1}^{\beta} c_k y^{(k-1)} \quad \text{avec} \quad c_\beta = 1 \quad (\text{G.3})$$

le vecteur $x = (y, dy/dt, \dots, y^{(n-1)})$ concerne le système d'entrée u , de degré relatif n^* ($n^* = n - \alpha$; n est l'ordre du système et α l'ordre de la dynamique des zéros; β est pris entier voisin de n^*).

Théorème. *Un régime glissant existe sur la surface définie par $S_\beta(t) = 0$ si le degré relatif r du système ayant comme entrée la commande discontinue u et comme sortie $S_\beta(t)$ est égal à n .*

Montrons que l'ordre β de la surface est alors égal au degré relatif n^* du système étudié, l'équation (G.1) s'écrivant dans le formalisme de Laplace :

$$\sum_{i=0}^n a_i p^i y(p) = \sum_{j=0}^{\alpha} b_j p^j u(p) \quad (\text{G.4})$$

La fonction de surface $S_\beta(p)$ a pour expression dans le formalisme de Laplace :

$$S_\beta(p) = \sum_{k=1}^{\beta} c_k p^{k-1} y(p)$$

On en déduit :

$$\frac{S_\beta(p)}{u(p)} = \frac{\sum_{j=0}^{\alpha} b_j p^j \sum_{k=1}^{\beta} c_k p^{k-1}}{\sum_{i=0}^n a_i p^i}$$

Le degré relatif r est égal à :

$$r = n - (\alpha + \beta - 1) = (n - \alpha) - \beta + 1 \quad \text{avec} \quad n - \alpha = n^* \Rightarrow r = n^* - \beta + 1$$

Si le régime glissant existe sur $S_\beta = 0$ alors $r = 1$ soit $\beta = n^*$. La dynamique du système bouclé est celle du système réduit de transmittance :

$$\frac{y(p)}{S_{n^*}(p)} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n^*} c_k p^{k-1}} \quad \text{avec} \quad c_{n^*} = 1 \quad (\text{G.5})$$

En régime glissant établi ($S_{n^*}(p) = 0$), le système bouclé est équivalent au système réduit et libre ayant la transmittance (G.5). Une méthodologie de détermination du degré relatif n^* du système découle de ce qui précède (cf. ci-dessous le paragraphe G4 et l'exemple 2).

Etablissons un corollaire pour le théorème précédent, permettant d'évaluer l'ordre n du système (degré de son équation caractéristique) et le degré α de la dynamique des zéros (lorsqu'elle existe $\alpha \neq 0$).

Corollaire. *Considérons le système d'équation (G.4) et une commande à régime glissant pour la fonction de surface d'équation (G.2) :*

$$S_n(p) = \sum_{k=1}^n c_k p^{k-1} y(p)$$

la commande u nécessaire étant une solution de l'équation (2.50) de la première partie et correspondant à une commutation pour $v = u^{(\alpha)}$, le degré relatif R du système d'entrée $v(p)$ et de sortie $S_n(p)$ est égal à n .

La transmittance s'écrit :

$$\frac{S_n(p)}{v(p)} = \frac{\sum_{j=0}^{\alpha} b_j p^j \sum_{k=1}^n c_k p^{k-1}}{p^\alpha \sum_{i=0}^n a_i p^i}$$

On obtient pour le degré relatif :

$$R = (n + \alpha) - (n - 1) - \alpha = 1$$

On retrouve bien le résultat du théorème concernant le degré relatif égal à n pour le système ayant comme entrée la commande discontinue $v = u^{(\alpha)}$ et comme sortie $S_n(t)$. Il lui correspond le régime glissant sur la surface $S_n(t) = 0$ pour le système de degrés (n, α) . Une procédure permettant de confirmer les ordres n_p et α_p du modèle présumé obtenu par identification découle de ce résultat (cf. ci-dessous paragraphe G3 et l'exemple 1).

G.3 Méthodologie de confirmation des ordres du modèle présumé par glissement sur des surfaces linéaires d'ordre croissant

Méthodologie :

Le modèle présumé présente n_p et α_p les ordres. On essaie des surfaces correspondant à β voisin de n_p ($\beta = n_p - 1, n_p, n_p + 1$) avec des commandes du type $u^{(\alpha)} = -K \text{sign}(S)$ où α voisin de α_p :

- $\beta = n_p - 1$: **Si** $S(t)$ ne tend pas vers zéro rapidement et oscille comme $u(t)$ à une faible fréquence de commutation ($y(t)$ n'est pas la réponse d'un système réduit; $x(t)$ n'évolue pas sur ou autour de la surface d'équation $S(t) = 0$) **alors** $n > n_p - 1$ (S_{n_p-1} est dite « diminuée ») ;
- $\beta = n_p$: **Si** $S(t)$ tend vers zéro rapidement et $u(t)$ a une grande fréquence de commutation ($y(t)$ est la réponse d'un système réduit; $x(t)$ évolue sur ou autour de la surface d'équation $S(t) = 0$) **alors** $n = n_p$ (S_{n_p} est dite « normale ») ;
- $\beta = n_p + 1$: **Si** $S(t)$, $u(t)$, $y(t)$ et $x(t)$ ont des allures comparables à celles du cas $\beta = n_p - 1$ **alors** $n < n_p + 1$ (S_{n_p+1} est dite « augmentée »).

Remarque importante

Si en « augmentant faiblement » la surface (pour $\beta = n_p + 1$, on prend $c_\beta \ll 1$) on obtient un meilleur glissement que pour $\beta = n_p$, (vis-à-vis de $S(t)$, $u(t)$, $y(t)$ et $x(t)$) alors le système est dit d'ordre n_p dominant c'est à dire que son ordre n est supérieur à n_p (il présente donc un pôle très à gauche dans le plan de Laplace); on observe alors une diminution du « *chattering* » par « augmentation » de la surface ;

La trajectoire $x(t)$ évolue sur ou autour de la surface correspondant à $\beta = n$ (pour $\beta \neq n$, $x(t)$ s'écarte de la surface $S_n(t) = 0$) : ceci constitue un bon critère pour déterminer l'ordre n .

Dans le cas $\alpha = 0$ ($n = n^*$), la commande à utiliser est du type $u = -K \text{sign}(S)$. Pour $\alpha \neq 0$ ($n \neq n^*$), la commande à utiliser est de type $u^{(\alpha)} = -K \text{sign}(S)$, la bonne valeur pour α est celle donnant le meilleur glissement.

Exemple 1. On vise la confirmation des ordres n_p et α_p du modèle présumé d'un moteur à courant continu. Le modèle présumé choisi est tel que $\alpha_p = 0$ et $n_p = n^* = 2$ (Figs. G.1, G.2, G.3, et G.4).

En conclusion, le système peut être considéré comme un second ordre ou second ordre dominant.

On trouvera dans (Nouri, 1994) un autre exemple de confirmation des ordres n_p et α_p du modèle présumé associé à un procédé : il s'agit d'un moteur à muscles artificiels ; le modèle présumé obtenu par identification est tel que $\alpha_p = 0$ et $n_p = n^* = 2$ ou 2 dominant ou 3. Cette méthodologie montre que le système est sans doute du deuxième ordre dominant avec $\alpha \neq 0$ (ceci est confirmé avec la détermination du degré relatif cf. paragraphe G4).

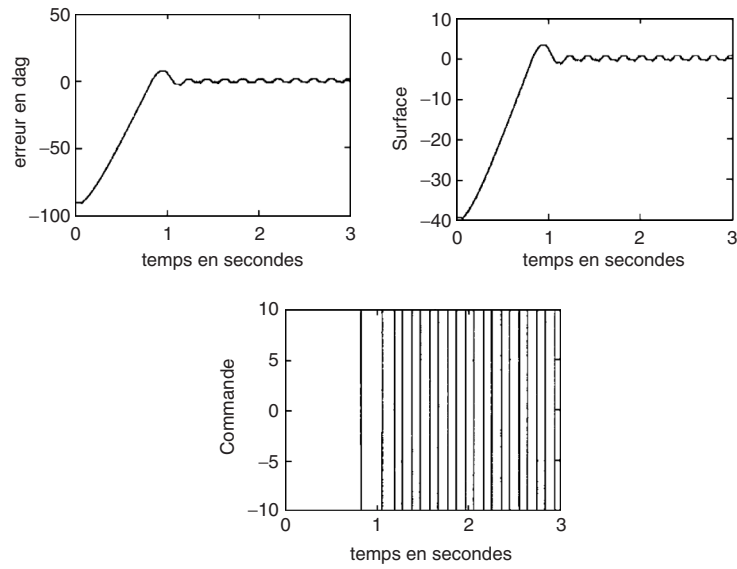


Fig. G.1. $\beta = n_p - 1 = 1$ (surface « diminuée »). Les évolutions de $S(t) u(t)$ et $e(t)$ ne correspondent pas à celles d'un régime glissant : donc $n > 1$ (le système n'est pas du premier ordre)

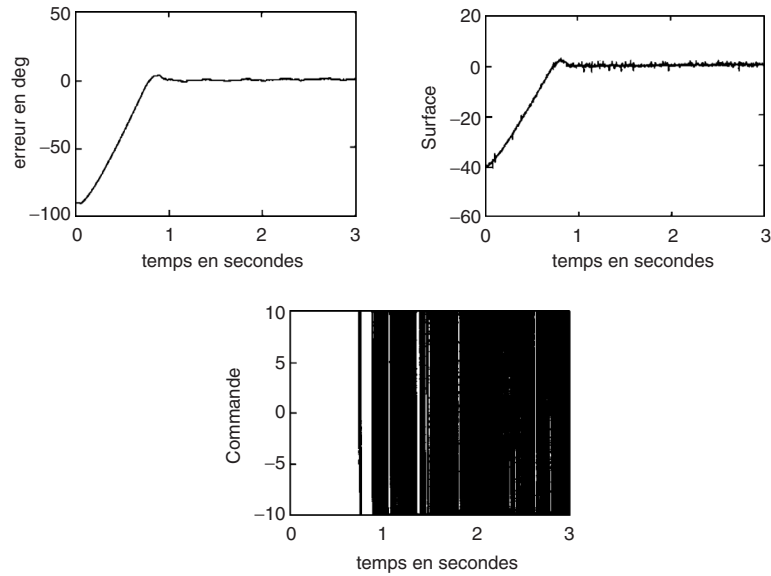


Fig. G.2. $\beta = n_p = 2$ (surface « normale »). $S(t) u(t)$ et $e(t)$ correspondent à un régime glissant bien qu'il ait des oscillations sur $e(t)$: donc $n \geq 2$ (le système est donc du second ordre au moins)

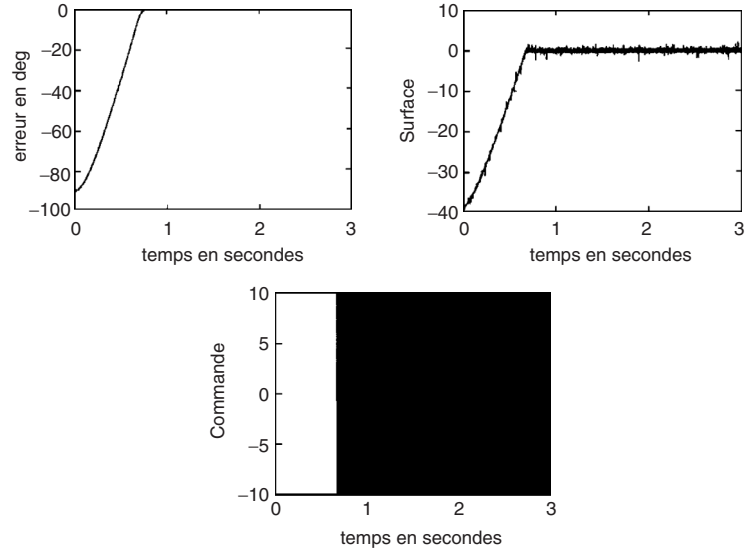


Fig. G.3. $\beta = n_p = 3$ (surface « faiblement augmentée » $c_3 = 0, 1$). On augmente la fréquence de commutation et on élimine les erreurs de position : le système serait donc un second ordre dominant

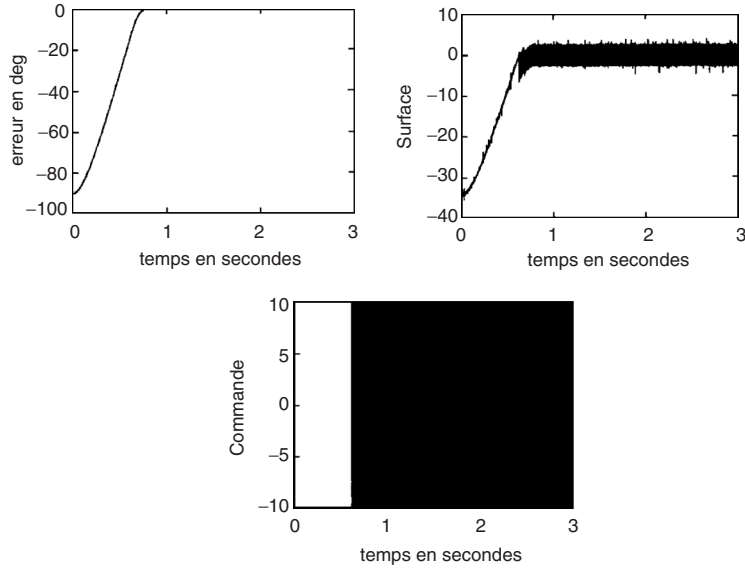


Fig. G.4. $\beta = n_p = 3$ (surface « fortement augmentée » $c_3 = 1$). Seule $S(t)$ est dégradée ; $u(t)$ et $e(t)$ conservent des allures satisfaisantes comme dans le cas de la surface normale et de la surface faiblement augmentée ; tout se passe ici comme si le régime glissant changeait de nature (Sira-Ramirez *et al.*, 1996)

G.4 Méthodologie de détermination du degré relatif d'un système sans affectation d'un modèle présumé, par glissement sur des surfaces linéaires d'ordre croissant

La méthodologie de détermination du degré relatif n^* découle de ce qui précède :

Méthodologie :

- 1) se placer dans l'essai de lâcher ($y_d = 0$) ou de régulation ($dy_d/dt = \text{cte}$) ; préciser les conditions initiales ; un modèle présumé et une identification ne sont plus nécessaires ;
- 2) choisir une entrée u de la forme $-K \text{sign}(S_\beta)$;
- 3) programmer une fonction de surface :

$$S_\beta(p) = \sum_{k=1}^{\beta} c_k y^{(k-1)} \quad \text{avec} \quad c_\beta = 1$$

- 4) faire des essais avec β croissant ($\beta = 1$ puis 2, etc.) ; observer $S_\beta(t)$ et $u(t)$; arrêter lorsque le régime glissant est de qualité. Alors $\beta = n^*$ ($= n - \alpha$).

Remarque. Pour évaluer n et α (après évaluation de n^*) il est possible soit de présumer un modèle lors d'une identification (on déduit alors n et α selon le paragraphe 2) soit de reprendre ce qui précède en adoptant $u^{(\alpha)} = -K \text{sign}(S_\beta)$ avec $\alpha = 0, 1, 2, \dots$ (la valeur de α donnant la meilleure qualité pour $S_\beta(t)$ et $u(t)$ permet de déduire $n = n^* + \alpha$).

Exemple 2. On ne présuppose pas un modèle présumé obtenu par identification et on vise la détermination du degré relatif.

Déterminons le degré relatif d'un axe de robot motorisé par un moteur à muscles artificiels (Figs. G5, G6 et G7).

En conclusion, le degré relatif est 2. Pour le modèle présumé on a $n = 3$, on adoptera : $\alpha = 1$ et $n = 3$ pour $n^* = 2$.

Nous trouvons dans (Nouri, 1994), la détermination du degré relatif d'un axe de robot motorisé par un moteur à courant continu : l'application de la méthodologie montre que le degré relatif est certainement 2 ; le modèle présumé correspondant à $n = 2$, on adoptera $\alpha = 0$ et $n = n^* = 2$.

G.5 Conclusion

La technique des régimes glissants permet d'évaluer les ordres et degrés d'un système dynamique pour lequel on présume un modèle linéaire d'ordre n , de degré relatif n^* et d'ordre $\alpha = n - n^*$ pour la dynamique de zéro.

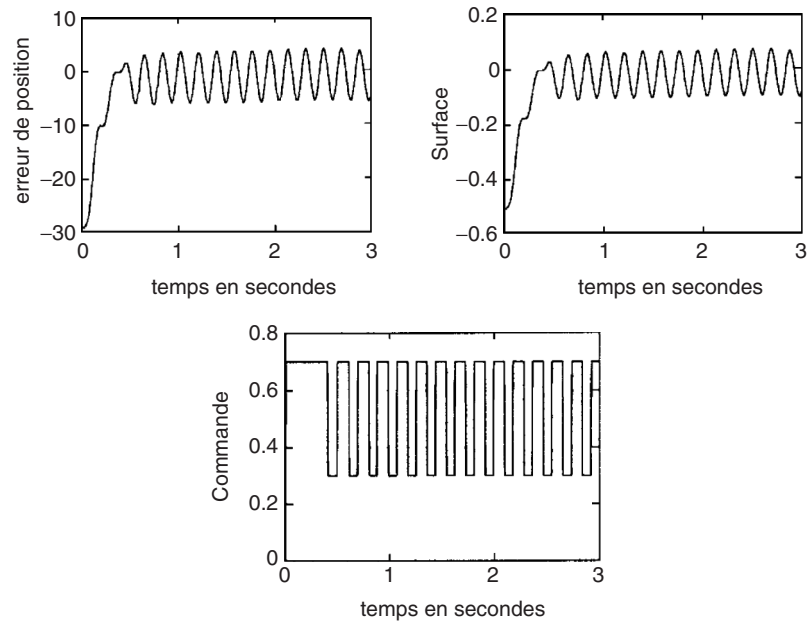


Fig. G.5. $\beta = 1$: $S(t)$, $u(t)$ et $e(t)$ n'ont pas les allures d'un régime glissant : on a donc $n^* > 1$

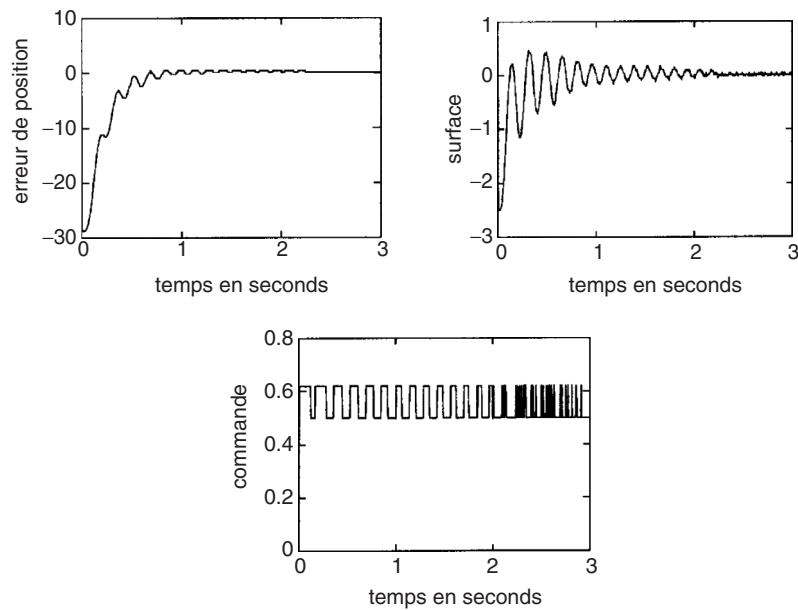


Fig. G.6. $\beta = 2$: $S(t)$, $u(t)$ et $e(t)$ ont davantage les allures d'un régime glissant : on a donc $n^* \geq 2$

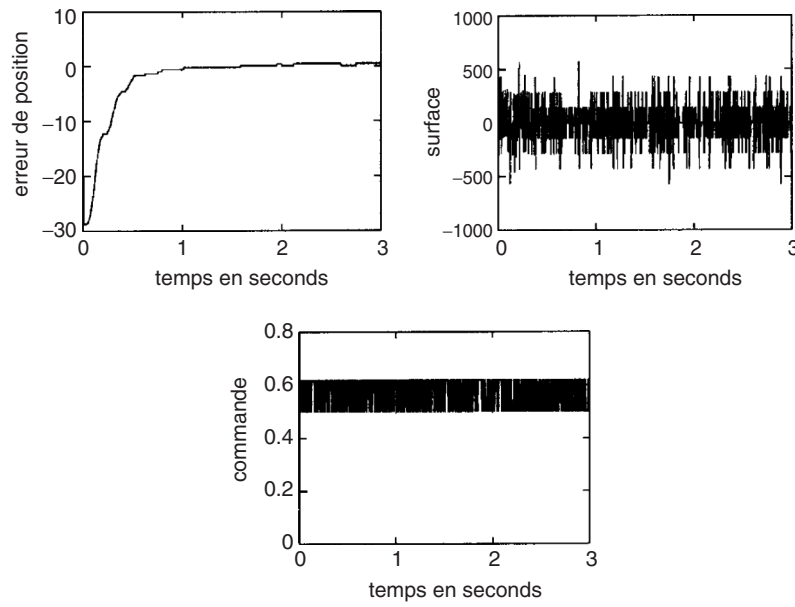


Fig. G.7. $\beta = 3$: $e(t)$ et $u(t)$ ont les allures d'un régime glissant, $S(t)$ a l'allure du point de vue fréquence des commutations seulement : on a donc $n^* \leq 3$

On rappelle que le degré relatif dans le formalisme de Laplace correspond au nombre minimal de dérivations de « y » pour faire apparaître « u » explicitement.

Théorie élémentaire et pratique de la commande par
les régimes glissants

Lopez, P.; Nouri, A.S.

2006, XVI, 338 p. 159 ill., Softcover

ISBN: 978-3-540-31003-7