

Théorie élémentaire du bouclage linéarisant par régime glissant d'un système monovisible avec et sans dynamique de zéros

Le Chapitre 1 a présenté au lecteur, à l'aide d'un exemple générique (système du deuxième ordre avec ou sans dynamique de zéro, sans retard pur et sans non-linéarités), la commande à régime glissant et à composante discontinue d'un système dynamique à commander dans les modes stabilisation et poursuite. Les principaux concepts de la commande à régime glissant ont été phénoménologiquement introduits. Une comparaison aux commandes linéaires classiques a été esquissée ; elle justifie la dénomination de structure variable par le changement de la dynamique de l'erreur du système bouclé en régime de glissement et la robustesse par la composante discontinue de la commande qui assure la réalisation de cette dynamique indépendamment de la trajectoire désirée.

La robustesse de la commande à régime glissant a été montrée pour une perturbation sur une entrée (Figs. 1.7–1.10), une surcharge inertielle (Fig. 1.12), une modélisation imparfaite du procédé (Figs. 1.13, 1.14, 1.15 et 1.16) : chaque fois, grâce à la discontinuité de la commande, l'état évolue dans l'espace des phases sur une surface de glissement de telle sorte que la tâche désirée s'exécute.

Dans ce Chapitre 2, nous allons établir, dans un formalisme mathématique simple, les différents résultats qui sont indispensables pour la compréhension des méthodologies qui seront détaillées et appliquées (en simulation et en expérimentation) dans les chapitres suivants.

2.1 Changement du comportement dynamique par des bouclages linéarisants

Considérons un système dynamique monovisible (une entrée u , une sortie y) de dimension m , représenté en boucle ouverte par le système d'équations :

$$\begin{cases} \frac{d\eta}{dt} = f(\eta, u) \\ y = h(\eta) \end{cases} \quad (2.1)$$

où η désigne l'état à m variables d'état $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)$ avec $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T$; y et u sont définies sur \mathbb{R} ; η et f sont définis sur \mathbb{R}^m .

La représentation (2.1) peut résulter de lois régissant le fonctionnement du système ou bien des résultats de modélisations issues de mesures sur le système. Les non-linéarités du procédé peuvent figurer dans les équations (2.1) : dans ce cas les équations (2.1) décrivent le fonctionnement du système étudié dans une région de l'espace d'état plus vaste que si les non linéarités sont écartées. Quand les non linéarités ne sont pas considérées, le modèle présumé linéaire du procédé, même bien « identifié » n'est valable que localement dans l'espace d'état : seuls les algorithmes de commande robuste sont capables de supporter l'approximation linéaire dans un domaine élargi autour du point de fonctionnement étudié.

Cette représentation d'état non linéaire (2.1) peut être transformée, dans le formalisme des équations implicites, au voisinage d'un point non singulier de l'espace d'état en un système de trois équations (Schaft, 1989) : la première décrit la dynamique de la partie non observable ; la deuxième représente les états observables comme fonction des entrées, des sorties et leurs dérivées ; la troisième équation décrit le comportement dynamique externe du système. En supposant que la partie observable du système (2.1) est de dimension n , sa dynamique externe peut aussi être représentée par l'équation différentielle implicite (2.2) faisant intervenir l'entrée, la sortie et leurs dérivées :

$$c(y, \dot{y}, \dots, y^{(n)}, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}) = 0 \quad (2.2)$$

(si le système est sans dynamique de zéro alors $\alpha = 0$).

Les équations (2.1) et (2.2) peuvent être étudiées par plusieurs approches spécifiques aux systèmes non-linéaires (Poincaré, 1899; Lyapunov, 1966; Andronov *et al.*, 1966; Mira, 1990; Fossard *et al.*, 1993). Les approches qui sont mises en œuvre dans l'étude des fonctionnements complexes (chaotiques) ont recours aux méthodes qualitatives de la dynamique non linéaire qui mettent en œuvre divers concepts : section de Poincaré, bifurcations, attracteurs, zone de multistabilité, etc. Une autre approche consiste à associer à ces équations des formes dites canoniques généralisées explicites qui généralisent la forme de Kalman car elles gardent un caractère à priori non-linéaire (Fliess, 1990). Ces formes canoniques sont bien adaptées à la description locale du fonctionnement du système dans l'espace d'état et conduisent facilement à l'élaboration d'un bouclage linéarisant via des correcteurs permettant d'asservir la sortie du système. Cette approche (Formes canoniques généralisées et Bouclage linéarisant) sera privilégiée dans tout ce qui suit.

La complexité théorique (feuilletage de l'espace des paramètres, fonctionnements indésirables) de la structure dynamique d'un système non-linéaire est souvent dissimulée dans les conditions de la vie courante sous les contraintes matérielles et temporelles, pour les situations initiales usuelles et les trajectoires désirées habituelles.

Il y aura lieu cependant, de se souvenir que la structure dynamique du système (en boucle ouverte et en boucle fermée) pourrait dans certains cas se

manifester pour une trajectoire désirée inhabituelle et une situation initiale particulière.

Exemple 1. Dans la deuxième partie, nous présenterons les principaux résultats de l'étude, selon les approches indiquées ci-dessus, d'un système dynamique non linéaire classique (robot SCARA) en simulation et en expérimentation, animé par des actionneurs utilisant des moteurs à courant continu (Mahout, 1994) ou des moteurs à muscles artificiels pilotés par des algorithmes à régimes glissants (Boitier, 1996 ; Caroll *et al.*, 1997).

Dans la deuxième partie, nous donnons des informations sur d'autres méthodes pour l'étude du comportement dynamique (inclusions différentielles, platitude et sorties linéarisantes).

2.2 Cas des systèmes mono-entrée mono-sortie observables sans dynamique de zéros

Considérons des systèmes mono-entrée mono-sortie, à priori non linéaires, et dont le fonctionnement ne dépend pas des dérivées de l'entrée (les systèmes mono-entrée mono-sortie non dégénérés c'est-à-dire avec dynamique de zéros sont considérés au paragraphe 2.3).

2.2.1 Dynamique généralisée en boucle ouverte et avec bouclage dans le cas d'un système à commander

En utilisant le formalisme de l'algèbre différentielle introduit en automatique par Fliess (Fliess, 1990) on peut définir une dynamique généralisée associée à (2.1) et (2.2), caractérisée par deux formes canoniques valables au moins localement. On pose :

$$x_1 = y \quad x_2 = \dot{y} \quad \dots \quad x_n = y^{(n-1)}$$

on obtient en utilisant le théorème des fonctions implicites et en supposant le système sans dynamique de zéros.

$$(\text{GOCF}) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_i = x_{i+1} \quad i = 1, \dots, (n-1) \\ \dot{x}_n = C(x_1, \dots, x_n, u) \\ y = x_1 \end{array} \right\} (\text{GCCF}) \quad (2.3)$$

La forme GOCF à $(n+1)$ équations est appelée forme canonique d'observabilité généralisée ; la forme GCCF à (n) équations est dite forme canonique de commande généralisée.

Le couple explicite (2.3) définit une dynamique généralisée associée au système (2.1) en boucle ouverte au moins localement (Messenger, 1992) : les composantes $x_i = y^{(i-1)}$ de l'état x apparaissent comme les dérivées successives de la sortie y . Cette dynamique généralise ainsi la dynamique linéaire

classique kalmanienne car la fonction $C(\dots)$ est en général non-linéaire. Cette dynamique est dite dégénérée car les dérivées de l'entrée n'interviennent pas (le cas de la dynamique non dégénérée est envisagé au paragraphe 2.3).

Si la $n^{\text{ième}}$ équation dx_n/dt est imposée par le cahier des charges alors la dynamique (2.3) caractérise aussi le système bouclé défini par :

$$\dot{x}_n = C(x_1, \dots, x_n, u) \quad (2.4)$$

L'équation (2.4) considérée par rapport à la variable u résout le problème du correcteur nécessaire pour que le système en boucle fermée ait d'une part le bouclage imposé et d'autre part pour que la sortie désirée soit réalisée (x_1, x_2, \dots, x_n correspondent alors à la trajectoire désirée).

Exemple 2. Considérons le système classique de troisième ordre représenté dans l'espace d'état (équation de type (2.1)) par :

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = \eta_1^2 + \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 = \eta_3 \\ \dot{\eta}_3 = \lambda\eta_3 + u \\ y = \eta_1 \end{cases} \quad (2.5)$$

En introduisant d'une part y et ses dérivées, d'autre part u et ses dérivées, on obtient une équation différentielle du type (2.2) :

$$\ddot{y} - (2y + \lambda)\ddot{y} - 2\dot{y}^2 + 2\lambda\dot{y}y - u = 0 \quad (2.6)$$

En considérant l'état $x = (x_1, x_2, x_3)$ et en posant :

$$y = \eta_1 = x_1 \quad x_2 = \dot{y} = \dot{x}_1 \quad x_3 = \ddot{y} = \ddot{x}_1$$

on obtient la dynamique généralisée (2.8) et l'équation de bouclage (2.7) – respectivement de la forme (2.3) et (2.4) – associées au système (2.5) et à l'équation (2.6) :

$$\dot{x}_3 = C(x_1, \dots, x_n, u) \equiv 2(x_1x_3 - x_2^2) + 2\lambda(x_3 + x_1x_2) + u \quad (2.7)$$

La dynamique généralisée (2.8) s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = 2(x_1x_3 - x_2^2) + 2\lambda(x_3 + x_1x_2) + u \\ y = x_1 \end{cases} \quad (2.8)$$

Si on impose dx_3/dt (bouclage imposé) et l'état $x(t)$ (trajectoire désirée) alors la commande $u(t)$ nécessaire générée par le correcteur est déduite de (2.7).

2.2.2 Bouclages linéarisants continus

A partir des formes canoniques généralisées explicites (2.3), Fliess a introduit des bouclages qui linéarisent la dynamique du système bouclé (Fliess, 1990).

Par exemple, considérons un bouclage linéarisant du type :

$$C(x_1, \dots, x_n, u) = \sum_{i=1}^n a_i x_i + bv \quad (2.9)$$

où a_i , b sont des coefficients et v une nouvelle entrée (consigne). S'il existe une commande $u(t)$ solution de (2.9) alors la dynamique du système bouclé est linéarisée et s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1} & i = 1, \dots, (n-1) \\ \dot{x}_n = \sum_{i=1}^n a_i x_i + bv \\ y = x_1 \end{cases} \quad (2.10)$$

Le système bouclé est donc décrit d'une part par l'équation (2.9) qui fournit la commande $u(t)$ (cette équation apparaît comme l'équation du correcteur) et d'autre part par l'équation (2.10) qui rend compte de la nouvelle dynamique du système bouclé : il y a donc changement du comportement dynamique par le bouclage linéarisant puisque la dynamique (2.3) est remplacée grâce au bouclage par la dynamique (2.10). Nous remarquons que le système bouclé présente (avec un tel bouclage linéarisant), le même ordre que le système dynamique initial en boucle ouverte.

Montrons ceci sur un exemple classique (Slotine et Li, 1991).

Exemple 3. Considérons le cas d'un système monovisible de dimension n et dégénéré (les dérivées de l'entrée n'interviennent pas dans l'équation (2.3)) avec :

$$\dot{x}_n = C(x_1, \dots, x_n, u) = f(x) + g(x)u \quad (2.11)$$

$f(x)$ et $g(x)$ peuvent être non linéaires.

Posons :

$$u = g(x)^{-1}(v(x) - f(x))$$

le couple (GCCF, GOCF) s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1} & i = 1, \dots, (n-1) \\ \dot{x}_n = v \\ y = x_1 \end{cases} \quad (2.12)$$

Le système bouclé présente maintenant la dynamique linéarisée et canonique d'ordre n décrite par (2.12), la commande u étant solution de l'équation du bouclage :

$$v(x) = f(x) + g(x)u \quad (2.13)$$

Si on pose :

$$v(x) = -k_0x_1 - k_1x_2 - \dots - k_{n-1}x_n$$

le système bouclé est d'ordre n , linéaire et libre. La stabilité est assurée si les racines du polynôme caractéristique $P(p)$:

$$P(p) = p^n + k_{n-1}p^{n-1} + \dots + k_1p + k_0$$

sont à partie réelle négative ; ceci nécessite un choix convenable des gains k_i . La transmittance du système bouclé $F(p)$ est maintenant :

$$F(p) = \frac{1}{p^n + k_{n-1}p^{n-1} + \dots + k_1p + k_0}$$

il y a eu changement de dynamique sans modification de l'ordre par le bouclage ; rappelons que la dynamique en boucle ouverte est décrite (cf. équations (2.3) (2.4) et (2.11)) par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1} & i = 1, \dots, (n-1) \\ \dot{x}_n = f(x) + g(x)u \\ y = x_1 \end{cases} \quad (2.14)$$

Plusieurs types de bouclage linéarisant sont proposés dans la littérature (Fliess *et al.*, 1991 ; Slotine et Li, 1991 ; Messenger, 1992), la nouvelle dynamique résultant de ces bouclages présente l'ordre du système à commander.

2.2.3 Bouclage linéarisant à régime glissant et à commande discontinue (structure variable)

Nous présentons un bouclage linéarisant qui conserve cette propriété de changement de dynamique mais avec un changement dans l'ordre du système bouclé par rapport à l'ordre du système à commander, grâce à l'introduction dans l'espace d'état d'une Surface dite de glissement (ou Surface de commutation encore désignée dans la littérature spécialisée sous les vocables : Hypersurface, Variété, Manifold).

La commande présente un caractère discontinue de telle sorte que, en présence d'une perturbation extérieure ou d'une erreur de modélisation, le point de fonctionnement peut être rappelé en permanence sur (ou au voisinage) de la surface de glissement et de l'origine correspondant à la tâche désirée (ce rappel étant dû à l'aspect discontinu de la commande).

Introduction d'une surface de glissement

Nous pourrions raisonner uniquement dans l'espace d'état de l'erreur ($e_1 = y - y_d, e_2, \dots, e_n = (y - y_d)^{(n-1)}$). Dans ce paragraphe nous conservons la présentation classique (Utkin, 1977 ; Utkin, 1978 ; Fliess *et al.*, 1992) dans l'espace d'état (x_1, \dots, x_n) qui est aussi l'espace des phases de la sortie $(y, dy/dt, \dots, y^{(n-1)})$ et considérons la stabilisation d'équations :

$$y_d = 0, dy_d/dt = 0, \dots, y_d^{(n-1)} = 0$$

Soit une surface définie dans l'espace des phases de la sortie par la fonction de glissement :

$$S(t) = \mathbf{C}^T \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n c_i x_i \quad (2.15)$$

où $\mathbf{C}^T = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ et $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$. On pose $c_n = 1$.

La surface d'équation $S = 0$ peut être linéaire ou non-linéaire (Mira *et al.*, 1972; Mira, 1990; Hamerlain, 1993; Nouri, 1994; Harashima *et al.*, 1985; Kaynak *et al.*, 1984; Utkin, 1992). Dans cet ouvrage on envisage le plus fréquemment des surfaces linéaires définies dans l'espace des phases de la sortie ou de l'erreur (la surface de glissement non-linéaire est envisagée dans l'Annexe B de la première partie).

Les introductions de la fonction de glissement (dans l'équation du bouclage) et de la discontinuité (dans la commande) peuvent être envisagées de plusieurs manières. Nous présentons ici l'approche dynamique utilisée par Sira-Ramirez; la fonction de glissement $S(t)$ est une solution de l'équation différentielle suivante :

$$\begin{aligned} \dot{S} + \mu S &= -\mu \Omega \text{sign}(S) \\ \text{avec } \text{sign}(S) &= \begin{cases} +1 & \text{si } S > 0 \\ 0 & \text{si } S = 0 \\ -1 & \text{si } S < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.16)$$

La première convergence de $S(t)$ vers zéro (il lui correspond le régime transitoire au cours duquel, la trajectoire $x(t)$ partant de l'état initial $x_0(t=0)$ atteint la surface de glissement $S = 0$; cf. section 1.3.2) s'effectue en un temps fini T_G qui a pour expression :

$$T_G = \mu^{-1} \ln \left(1 + \frac{|S(0)|}{\Omega} \right) \quad (2.17)$$

Ce temps T_G , appelé « reaching time », (Sira-Ramirez, 1990; Slotine et Li, 1991), temps requis pour atteindre la surface $S = 0$, correspond à la durée du régime transitoire à partir des conditions initiales jusqu'au début du glissement effectif.

La dérivée de $S(t)$ peut s'écrire :

$$\dot{S}(t) = \dot{x}_n + \sum_{i=1}^{n-1} c_i x_{i+1}$$

remplaçons la dérivée de S par son expression dans l'équation (2.16) :

$$\dot{x}_n + \sum_{i=1}^{n-1} c_i x_{i+1} = -\mu S - \mu \Omega \text{sign}(S) \quad (2.18)$$

En substituant à S son expression (2.15), on obtient pour \dot{x}_n une expression fonction du signe de S :

$$\dot{x}_n = - \sum_{i=1}^{n-1} c_i x_{i+1} - \mu \sum_{i=1}^n c_i x_i - \mu \Omega \cdot \text{sign}(S) \quad (2.19)$$

Equation de la commande assurant le régime glissant

Des équations (2.4) et (2.19), exprimant respectivement \dot{x}_n , d'une part à partir de la représentation du système, d'autre part à partir de la fonction de glissement, on déduit un bouclage linéarisant à structure variable :

$$C(\mathbf{x}, u) = - \sum_{i=1}^{n-1} c_i x_{i+1} - \mu \left[\sum_{i=1}^n c_i x_i + \Omega \text{sign}(S) \right] \quad (2.20)$$

Cette équation où u est l'inconnue, donne une commande à structure variable dite classique ou statique. L'équation (2.20) est celle d'un bouclage discontinu avec retour d'état statique (les dérivées de l'entrée u n'interviennent pas). La connaissance de la fonction $C(\mathbf{x}, u)$ qui résulte de la modélisation du système, permet la résolution de cette équation par rapport à u .

La convergence (de l'état) vers la surface vérifie $S \cdot dS/dt < 0$ (Utkin, 1972). La dynamique du système décrite en boucle ouverte par le couple (GCCF, GOCF) de l'équation (2.3), avec le bouclage linéarisant défini par l'équation (2.20) devient la dynamique du système réduit (d'ordre $n-1$) et libre (il n'y a pas de consigne ou d'entrée dans (2.21) à $(n-1)$ équations) défini dans l'espace des phases de la sortie par :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1} & i = 1, \dots, (n-2) \\ \dot{x}_{n-1} = x_n = - \sum_{i=1}^{n-1} c_i x_i \\ y = x_1 \end{cases} \quad (2.21)$$

La commande $u(t)$ solution de l'équation (2.20) est affectée par la discontinuité introduite par $\text{sign}(S)$. Ainsi, lorsque le régime glissant est atteint (après le temps T_G), le point de fonctionnement reste-t-il sur la surface d'équation $S = 0$. Le système bouclé jouit donc d'une insensibilité vis à vis des variations des paramètres du système à commander puisque le comportement est celui défini par les équations (2.21) où seuls les coefficients c_i interviennent (les équations (2.21) sont équivalentes à l'équation de la surface $S = 0$).

Exemple 4. Considérons le système de l'exemple 2 auquel on associe le couple (GCCF, GOCF) de l'équation (2.8). Déterminons un bouclage linéarisant à structure variable et le système réduit et libre équivalent lorsque le régime glissant est atteint.

Étant donné que le système à commander est du troisième ordre, la surface de glissement est définie dans l'espace des phases par :

$$S(t) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + x_3 \quad (2.22)$$

En utilisant l'équation (2.16) et en remplaçant S et sa dérivée par leurs expressions, l'équation du bouclage linéarisant (2.20) peut s'écrire :

$$2(x_1 x_3 - x_2^2) + 2\lambda(x_3 + x_1 x_2) + u \equiv (c_1 x_2 + c_2 x_3) - \mu(c_1 x_1 + c_2 x_2 + x_3) - \mu\Omega \text{sign}(S) \quad (2.23)$$

Le système réduit et libre équivalent au système bouclé est alors :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -c_1 x_1 - c_2 x_2 \\ y = x_1 \end{cases} \quad (2.24)$$

Ainsi, en régime glissant, la dynamique du système (2.5) ou (2.7) en boucle fermée est celle du second ordre (2.24), la commande $u(t)$ nécessaire est donnée par l'équation (2.23).

2.2.4 Loi de commande à structure variable classique ou statique commande effective commande équivalente

Nous présentons ici l'expression de la commande effective et de la commande équivalente dans le cas de la structure variable classique relative à un système dynamique dégénéré.

Loi de commande à structure variable classique (ou statique)

Considérons le système dynamique dégénéré d'équation (2.3). La commande effective $u(t)$ du régime glissant classique est solution de l'équation (2.20) : il y a une discontinuité sur la commande u .

Avec le concept de la commande équivalente introduite par Utkin on définit une commande équivalente (Sira-Ramirez *et al.*, 1992) calculée en supposant un régime glissant idéal ($S = 0$ et $dS/dt = 0$). L'équation (2.20) devient (avec $\text{sign}(S) = 0$ car $S = 0$) :

$$C(\mathbf{x}, u_{eq}) = - \sum_{i=1}^{n-1} c_i x_{i+1} - \mu \sum_{i=1}^n c_i x_i \quad (2.25)$$

La commande équivalente est solution de (2.25).

En posant $\Delta u = u - u_{eq}$, nous écrivons la commande u sous la forme introduite en (1.4) :

$$u = u_{eq} + \Delta u$$

où Δu est fonction de $\text{sign}(S)$ puisque u solution de (2.20) est fonction de $\text{sign}(S)$.

La composante discontinue Δu de la commande est une fonction de S ; elle permet au point $x(t)$ après l'instant $t = T_G$ de rester au voisinage (ou sur) la surface $S = 0$.

Régime glissant classique dans le cas d'un système linéaire monovariabale dégénéré – correcteur à structure variable classique

Dans la pratique de l'approximation linéaire, l'identification d'un système dynamique conduit à un modèle présumé linéaire (ordre n , degré relatif n^* avec $\alpha = n - n^*$) de la forme (Landau, 1988) :

$$\sum_{k=0}^n a_k y^{(k)} = \sum_{j=0}^{\alpha} b_j u^{(j)} \quad (2.26)$$

Dans le cas dégénéré ($\alpha = 0$), le système à commander est modélisé dans l'espace des phases de la sortie par :

$$\sum_{k=0}^n a_k y^{(k)} = bu \quad (2.27)$$

Le couple (GOCF, GCCF) associé à ce système peut être écrit sous forme explicite locale :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1} & i = 1, \dots, (n-1) \\ \dot{x}_n = \frac{1}{a_n} \left[-\sum_{k=0}^{n-1} a_k x_{k+1} + bu \right] \\ y = x_1 \end{cases} \quad (2.28)$$

L'équation du bouclage (2.20) devient :

$$bu = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x_{k+1} - a_n \sum_{i=1}^{n-1} c_i x_{i+1} - \mu a_n \left[\sum_{i=1}^n c_i x_i + \Omega \text{sign}(S) \right] \quad (2.29)$$

Le correcteur à structure variable classique et à régime glissant génère la commande :

$$u = b^{-1} a_n \left[\frac{1}{a_n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k x_{k+1} - \sum_{i=1}^{n-1} c_i x_{i+1} - \mu \left(\sum_{i=1}^n c_i x_i + \Omega \text{sign}(S) \right) \right] \quad (2.30)$$

On remarque que la commande u peut être mise sous la forme classique $u = \Delta u + u_{eq}$ avec :

$$u_{eq} = b^{-1} a_n \left[\frac{1}{a_n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k x_{k+1} - \sum_{i=1}^{n-1} c_i x_{i+1} - \mu \sum_{i=1}^n c_i x_i \right] \\ \Delta u = -b^{-1} a_n \mu \Omega \text{sign}(S) \quad (2.31)$$

Les équations (2.31) sont à rapprocher des équations (1.24).

Transposition entre les plans de phase de la sortie et de l'erreur en sortie

Dans tout ce qui précède, on a envisagé la stabilisation définie par :

$$(y_d = 0, dy_d/dt = 0, \dots, y_d^{(n-1)} = 0).$$

Pour une trajectoire désirée $(y_d, dy_d/dt, \dots, y_d^{(n-1)})$, on privilégie plutôt les erreurs $(e_1 = y - y_d, e_2 = dy/dt - dy_d/dt, \dots, e_n = (y - y_d)^{(n-1)})$.

Dans le plan de phase de l'erreur $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, on envisage une fonction de surface :

$$S(t) = \mathbf{C}^T \mathbf{e} = \sum_{i=1}^n c_i e_i \quad (2.32)$$

où $\mathbf{C}^T = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ et $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \dots, e_n)^T$. On pose $c_n = 1$.

Indiquons la transposition à faire pour passer de l'espace d'état pour la sortie à l'espace d'état pour l'erreur.

On peut introduire les erreurs e_i en écrivant $x_i = y^{(i-1)} = e_i + y_d^{(i-1)}$.

Pour \dot{x}_n l'équation transposée de (2.28) s'écrit :

$$\dot{e}_n = \frac{1}{a_n} \left[- \sum_{k=0}^{n-1} a_k x_{k+1} + bu \right] - y_d^{(n)}$$

Dynamique du système équivalent au système bouclé

Dans ce paragraphe considérons l'espace de phase de l'erreur en sortie et le cas général d'une trajectoire désirée :

$$x_d = (y_d, \dot{y}_d, \dots, y_d^{(n-1)}) \equiv (x_{d1}, x_{d2}, \dots, x_{dn})$$

avec $x_{d1} = y_d, \dots, x_{di} = y_d^{(i-1)}, \dots, x_{dn} = y_d^{(n-1)}$

L'espace des phases pour l'erreur a pour coordonnées :

$$e_i = (y^{(i-1)} - y_d^{(i-1)}) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Rappelons que le système à commander est défini en boucle ouverte par les équations (2.1) (2.2) ou (2.3) ; localement, il est défini par les formes (GOCF, GCCF) et il admet un modèle linéaire présumé de la forme (2.27) qui est à rapprocher de l'équation (1.1) du Chap. 1.

En terme d'erreur, l'équation du correcteur (2.30) s'écrit (2.33), avec la fonction de surface (2.32) :

$$u = b^{-1} a_n \left\{ \frac{1}{a_n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k (e_{k+1} + y_d^{(k)}) - \sum_{i=1}^{n-1} c_i e_{i+1} \right. \\ \left. - \mu \left[\sum_{i=1}^n c_i e_i + \Omega \text{sign}(S) \right] + y_d^{(n)} \right\} \quad (2.33)$$

L'équation (2.33) est à rapprocher des équations (1.17) et (1.18) du Chap. 1.

Pour la commande u (2.33), le point de fonctionnement reste sur la surface d'équation $S = 0$: la dynamique de l'erreur est celle du système réduit et libre, quelle que soit la trajectoire désirée :

$$\begin{cases} \dot{e}_i = e_{i+1} & i = 1, \dots, (n-2) \\ \dot{e}_{n-1} = e_n = - \sum_{i=1}^{n-1} c_i e_i \\ e_1 = y - y_d \end{cases} \quad (2.34)$$

2.3 Cas des systèmes observables non dégénérés mono-entrée mono-sortie

Dans le paragraphe 2.1, à un système dynamique monovariable (SISO) observable, en boucle ouverte, d'équations (2.1)

$$\begin{cases} \frac{d\eta}{dt} = f(\eta, u) & \eta \in R^n \quad y \in R \quad u \in R \\ y = h(\eta) \end{cases}$$

et en utilisant l'algorithme de transformation d'une représentation d'état non linéaire au voisinage d'un point non singulier de l'espace d'état en un système de trois équations (Schaft, 1989), on associe l'équation différentielle (2.2) faisant intervenir l'entrée, la sortie et leurs dérivées :

$$c(y, \dot{y}, \dots, y^{(n)}, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}) = 0$$

La dynamique (2.3) dans le formalisme des formes canoniques, s'écrit ici :

$$\text{GOCF} \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_i = x_{i+1} \quad i = 1, \dots, (n-1) \\ \dot{x}_n = C(x_1, \dots, x_n, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}) \\ y = x_1 \end{array} \right\} \text{GOCF} \quad (2.35)$$

$$\text{avec} \quad x_1 = y \quad x_2 = \dot{y} \quad \dots \quad x_n = y^{(n-1)}$$

Le couple explicite (2.35) définit une dynamique généralisée en général non-linéaire et non dégénérée. Le lecteur retrouvera tous les résultats du paragraphe 2.2 en faisant $\alpha = 0$ dans les équations des paragraphes ci-dessous.

2.3.1 Bouclage linéarisant et dynamique linéaire

A partir des formes canoniques généralisées explicites (2.3), Fliess a introduit des bouclages qui linéarisent la dynamique du système bouclé (Fliess, 1990).

Par exemple, considérons un bouclage linéarisant du type :

$$C(x_1, \dots, x_n, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}) = \sum_{i=1}^n a_i x_i + bv \quad (2.36)$$

où a_i, b sont des coefficients et v une nouvelle entrée (consigne). S'il existe une entrée $u(t)$ solution de (2.36) alors la dynamique du système bouclé est linéarisée et s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1} & i = 1, \dots, (n-1) \\ \dot{x} = \sum_{i=1}^n a_i x_i + bv \\ y = x_1 \end{cases} \quad (2.37)$$

Le système bouclé est donc décrit d'une part par l'équation (2.36) qui fournit la commande $u(t)$ (cette équation apparaît comme l'équation du correcteur) et d'autre part par l'équation (2.37) qui rend compte de la nouvelle dynamique du système bouclé : il y a donc changement de dynamique par le bouclage linéarisant. Nous remarquons, comme dans le cas dégénéré (*cf.* paragraphe 2.3.2), que le système bouclé présente le même ordre que le système dynamique initial en boucle ouverte.

Montrons ceci sur un exemple classique (Nouri, 1994).

Exemple 5. Considérons un système monovariable ayant un mode non commandable et un mode non observable et supposons une représentation d'état sous forme diagonale :

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \\ b_4 \end{bmatrix} u \\ y &= [c_1 \ 0 \ c_3 \ c_4] \xi \end{aligned} \quad (2.38)$$

L'équation différentielle associée à ce système de quatrième ordre est du troisième ordre (partie observable de dimension 3) et s'écrit :

$$\ddot{y} - (\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4)\dot{y} + (\lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4 + \lambda_3\lambda_4)\dot{y} - \lambda_1\lambda_3\lambda_4 y = A_u + B\dot{u} + C\ddot{u}$$

avec

$$\begin{aligned} A &= c_1 b_1 \lambda_3 \lambda_4 + c_4 b_4 \lambda_1 \lambda_3 \\ B &= -c_4 b_4 (\lambda_1 + \lambda_3) - c_1 b_1 (\lambda_3 + \lambda_4) \\ C &= c_1 b_1 + c_4 + b_4 \end{aligned}$$

A cette équation différentielle du troisième ordre, on associe le couple (GOCF, GCCF)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = C(x_1, x_2, x_3, u, \dot{u}, \ddot{u}) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (2.39)$$

avec

$$\begin{aligned} C(x_1, x_2, x_3, u, \dot{u}, \ddot{u}) &\equiv (\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4)x_3 \\ &- (\lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4 + \lambda_3\lambda_4)x_2 + \lambda_1\lambda_3\lambda_4x_1 + Au + B\dot{u} + C\ddot{u} \end{aligned}$$

A partir d'un système de quatrième ordre ayant un pôle non observable (λ_2) et un pôle non commandable (λ_3), on obtient un couple (GOCF, GCCF) de troisième ordre où le pôle non observable ne figure plus. Ainsi la représentation (GOCF, GCCF), comme l'équation différentielle ne prend en compte que les pôles observables (Messenger, 1992).

Considérons pour ce système de troisième ordre non dégénéré (les dérivées de l'entrée interviennent : la dynamique de zéros est d'ordre deux), le bouclage linéarisant du type

$$\dot{x}_3 \equiv C(x_1, x_2, x_3, u, \dot{u}, \ddot{u}) = -a_1x_1 - a_2x_2 - a_3x_3 + b\gamma \quad (2.40)$$

où γ est une nouvelle entrée et les a_i sont des coefficients à choisir.

Le système bouclé est d'ordre 3 et linéaire. La stabilité est assurée si les racines du polynôme caractéristique $P(p)$:

$$P(p) \equiv p^3 + a_3p^2 + a_2p + a_1$$

sont à partie réelle négative ; ceci nécessite un choix convenable des gains a_i . La transmittance du système bouclé s'écrit :

$$F(p) = \frac{b}{p^3 + a_3p^2 + a_2p + a_1}$$

L'équation du correcteur d'entrées γ et y et de sortie u est l'équation (2.40). Si on considère un autre bouclage linéarisant du type

$$\dot{x}_3 \equiv C(x_1, x_2, x_3, u, \dot{u}, \ddot{u}) = v \quad \text{avec} \quad v = -a_1x_1 - a_2x_2 - a_3x_3 \quad (2.41)$$

le système bouclé est maintenant d'ordre 3 et libre avec la même équation caractéristique, l'équation du correcteur d'entrée y et de sortie u étant (2.41).

Pour ces deux bouclages linéarisants, il y a eu changement de dynamique sans modification de l'ordre pour la dynamique en boucle ouverte décrite par les équations (2.39).

2.3.2 Bouclage linéarisant à régime glissant et à commande discontinue avec dynamique de zéros (structure variable)

Grâce à l'introduction dans l'espace d'état d'une surface de glissement (*cf.* paragraphe 2.2.3), nous obtenons un bouclage linéarisant qui conserve la

propriété de changement de dynamique mais avec un changement dans l'ordre du système bouclé par rapport à l'ordre du système à commander,

Des équations (2.19) et (2.35) exprimant respectivement \dot{x}_n d'une part à partir de la fonction de glissement S (Solution de (2.15) et d'autre part à partir de la représentation du système, on généralise l'équation (2.20)).

$$C(x_1, \dots, x_n, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}) = - \sum_{i=1}^{n-1} c_i x_{i+1} - \mu \sum_{i=1}^n c_i x_i - \mu \Omega \cdot \text{sign}(S) \quad (2.42)$$

Cette équation différentielle où u est l'inconnue donne une commande à structure variable dite généralisée ou dynamique.

La commande présente un caractère discontinu de telle sorte que théoriquement, quelle que soit la perturbation extérieure et l'erreur de modélisation, le point de fonctionnement est rappelé en permanence sur (ou au voisinage) de la surface de glissement et de l'origine (correspondant à la tâche désirée dans l'espace de phase de l'erreur en sortie).

Exemple 6. Déterminons un bouclage linéarisant à structure variable et le système réduit et libre équivalent lorsque le régime glissant est atteint.

Considérons le système de l'exemple 5 auquel on associe le couple (GCCF, GOCF) de l'équation (2.39) avec

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 = C(x_1, x_2, x_3, u, \dot{u}, \ddot{u}) &\equiv (\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4)x_3 - (\lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4 + \lambda_3\lambda_4)x_2 \\ &\quad + \lambda_1\lambda_3\lambda_4\lambda_1 + Au + B\dot{u} + C\ddot{u} \end{aligned} \quad (2.43)$$

Étant donné que le système à commander est du troisième ordre, la surface de glissement est définie dans l'espace des phases par (2.32) soit

$$S(t) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + x_3 \quad (2.44)$$

En utilisant l'équation (2.16) et en remplaçant S et sa dérivée par leurs expressions, l'équation du bouclage linéarisant (2.42) s'écrit ici

$$\begin{aligned} &(\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4)x_3 - (\lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4 + \lambda_3\lambda_4)x_2 + \lambda_1\lambda_3\lambda_4x_1 \\ &+ Au + B\dot{u} + C\ddot{u} \equiv (c_1 x_2 + c_2 x_3) - \mu(c_1 x_1 + c_2 x_2 + x_3) - \mu \Omega \text{sign}(S) \end{aligned} \quad (2.45)$$

Le système réduit et libre équivalent au système bouclé est alors

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -c_1 x_1 - c_2 x_2 \\ y = x_1 \end{cases} \quad (2.46)$$

La commande $u(t)$ nécessaire étant la solution de l'équation (2.45).

2.3.3 Loi de commande à structure variable généralisée (ou dynamique)

Nous présentons ici l'expression de la commande (commande effective et commande équivalente) dans le cas non dégénéré.

Loi de commande à structure variable généralisée (ou dynamique)

Considérons un système dynamique non dégénéré (les dérivées de l'entrée interviennent) d'équation (2.3). La commande effective $u(t)$ du régime glissant généralisé (Fliess *et al.*, 1992) est une solution de l'équation (2.42) : il y a une discontinuité sur la dérivée la plus élevée de la commande (ordre α dans l'équation (2.42)) ; ceci permet de diminuer le phénomène de « chattering » ou « broutement » dû à des commutations trop rapides (Sira-Ramirez *et al.*, 1992 ; Messenger, 1992) car la commande effective est obtenue par des intégrations successives (α intégrations).

En généralisant le concept de la commande équivalente introduite par Utkin (Utkin, 1978, 1992) on définit une commande équivalente (Sira-Ramirez *et al.*, 1992) calculée en supposant un régime glissant idéal ($S = 0$ et $dS/dt = 0$). L'équation (2.20) devient (avec $\text{sign}(S) = 0$ car $S = 0$) :

$$C(\mathbf{x}, u_{eq}, \dot{u}_{eq}, \dots, u_{eq}^{(\alpha)}) = - \sum_{i=1}^{n-1} c_i x_{i+1} - \mu \sum_{i=1}^n c_i x_i \quad (2.47)$$

et la commande équivalente est solution de (2.47) qui généralise (2.25).

Régime glissant généralisé dans le cas d'un système linéaire monovariable non dégénéré

Dans la pratique de l'approximation linéaire, l'identification d'un système dynamique conduit à un modèle présumé linéaire (ordre n , degré relatif n^* avec $\alpha = n - n^*$) de la forme (Landau, 1988) :

$$\sum_{k=0}^n a_k y^{(k)} = \sum_{j=0}^{\alpha} b_j u^{(j)} \quad (2.48)$$

On associe au système dans l'espace des phases de la sortie, sous la forme explicite locale, le couple (GOCF, GCCF) de la forme (2.3), soit :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1} & i = 1, \dots, (n-1) \\ \dot{x}_n = \frac{1}{a_n} \left[- \sum_{k=0}^{n-1} a_k x_{k+1} + \sum_{j=0}^{\alpha} b_j u^{(j)} \right] \\ y = x_1 \end{cases} \quad (2.49)$$

Pour une surface S d'équation (2.15) solution de l'équation en S (2.16), l'équation de bouclage (2.42) s'écrit :

$$\sum_{j=0}^{\alpha} b_j u^{(j)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x_{k+1} - a_n \sum_{i=1}^{n-1} c_i x_{i+1} - \mu a_n \left[\sum_{i=1}^n c_i x_i + \Omega \text{sign}(S) \right] \quad (2.50)$$

Le correcteur à structure variable généralisée a pour équation (2.50) ; une solution $u(t)$ de (2.50) résout le problème de la commande à régime glissant dynamique du système (2.48).

Remarque. La transposition entre l'espace de phase de la sortie (x_1, x_2, \dots, x_n) et l'espace de phase de l'erreur en sortie (e_1, e_2, \dots, e_n) a été présentée au paragraphe 2.3.3 de la première partie.

Commande discontinue instantanée en régime glissant pour un système non dégénéré

La commande équivalente étant solution de l'équation (2.47), la composante de commutation est de la forme (*cf.* section 2.2.4)

$$\Delta u = u - u_{eq} = F(\text{sign}(S))$$

Trois démarches permettent le calcul de l'équation différentielle dont une solution est la commande instantanée u .

Dans la démarche 1, on résout en u l'équation différentielle (2.42) obtenue à partir de la dynamique imposée à la fonction de surface S .

Dans la démarche 2, on peut déduire $u^{(\alpha)}$ d'une équation différentielle exprimant $S \cdot dS/dt < 0$ en choisissant une solution discontinue ayant une composante de la forme $-M \text{sign}(S)$.

Dans la démarche 3, on étend le raisonnement de la commande équivalente classique.

Nous appliquons ces trois démarches à un système présumé du second ordre ($n = 2$) présentant une dynamique de zéro du premier ordre ($\alpha = 1$).

Soit le système décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -a_1 x_1 - a_2 x_2 + b_1 u + b_2 \dot{u} + \varepsilon \\ y = x_1 \end{cases}$$

(ε est la perturbation telle que $|\varepsilon| \leq M$).

En considérant une trajectoire désirée $(y_d, dy_d/dt)$ et l'espace des phases de l'erreur $(e_1 = y - y_d, e_2 = d(y - y_d)/dt)$, la dynamique du système devient :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 \\ \dot{e}_2 = -a_1 e_1 - a_2 e_2 + b_1 u + b_2 \dot{u} + \varepsilon - a_1 y_d - a_2 \dot{y}_d - \ddot{y}_d \\ e_1 = x_1 - y_d \end{cases}$$

Appliquons les trois démarches classiques pour le calcul de la commande :

Démarche 1. *Considérons une fonction de glissement S du premier ordre ($S = c_1 e_1 + c_2 e_2$) solution de (2.16) :*

$$\dot{S} + \mu S = -\mu \Omega \text{sign}(S)$$

Le régime glissant devient effectif en un temps fini T_G défini par (2.17) :

$$T_G = \mu^{-1} \ln \left(1 + \frac{|S(0)|}{\Omega} \right)$$

La commande $u(t)$ est solution de l'équation différentielle (2.42) qui s'écrit dans l'exemple considéré ici (on pose $c_2 = 1$)

$$b_1 u + b_2 \dot{u} = (a_1 - \mu c_1) e_1 + (a_2 - \mu - c_1) e_2 + a_1 y_d + a_2 \dot{y}_d + \ddot{y}_d - \mu \Omega \text{sign}(S)$$

On peut en déduire l'expression \dot{u} en fonction de u et de la discontinuité en fonction de S .

On remarque que la condition nécessaire et non suffisante de glissement est automatiquement vérifiée car :

$$S\dot{S} = S(-\mu S - \mu \Omega \text{sign}(S)) = -\mu S^2 - \mu \Omega |S| \leq 0$$

Démarche 2. *On peut aussi chercher une solution discontinue à partir de $S \cdot dS/dt < 0$ qui s'écrit ici :*

$$(c_1 e_1 + e_2)(c_1 e_2 - a_1 e_1 - a_2 e_2 + b_1 u + b_2 \dot{u} - a_1 y_d - a_2 \dot{y}_d - \ddot{y}_d + \epsilon) < 0$$

Une solution discontinue de cette inéquation en u s'écrit :

$$b_1 u + b_2 \dot{u} = a_1 e_1 - (c_1 - a_2) e_2 + a_1 y_d + a_2 \dot{y}_d + \ddot{y}_d - M \text{sign}(S) \text{ avec } M \geq |\epsilon|$$

soit $\dot{u} = \frac{1}{b_2} (-b_1 u + a_1 e_1 - (c_1 - a_2) e_2 + a_1 y_d + a_2 \dot{y}_d + \ddot{y}_d - M \text{sign}(S))$.

Dans le cas de la régulation ($\dot{y}_d = 0$ et $\ddot{y}_d = 0$), l'équation devient :

$$\dot{u} = \frac{1}{b_2} (-b_1 u + a_1 e_1 - (c_1 - a_2) e_2 + a_1 y_d - M \text{sign}(S))$$

Remarque. La forme $\dot{u} = \dot{u}_e + \Delta \dot{u}$ avec $\Delta \dot{u} = \frac{M}{b_2} \text{sign}(S)$ est à rapprocher de la forme $u = u_{eq} + \Delta u$ avec $\Delta u = -k \text{sign}(S)$ rencontrée dans le cas dégénéré.

Démarche 3. *Nous proposons une autre synthèse de la commande à structure variable généralisée à partir de la commande équivalente classique.*

Considérons une nouvelle entrée $v = \dot{u}$, le système devient :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 = -a_1 e_1 - a_2 e_2 + b_1 u + b_2 v + \epsilon - a_1 y_d - a_2 \dot{y}_d - \ddot{y}_d \\ e_1 = x_1 - y_d \end{cases}$$

la commande v vérifiant :

$$v = v_{eq} - M_1 \text{sign}(S)$$

avec $M_1 \geq |\varepsilon|$ afin d'assurer un régime glissant. Le terme équivalent est déterminé pour le régime glissant idéal c'est-à-dire $\dot{S} = 0$. Soit :

$$\dot{S} = c_1 e_2 + (-a_1 e_1 - a_2 e_2 + b_1 u + b_2 v_{eq} - a_1 y_d - a_2 \dot{y}_d - \ddot{y}_d) = 0$$

d'où l'expression de la commande équivalente :

$$v_{eq} = \frac{-1}{b_2} (c_1 e_2 + (-a_1 e_1 - a_2 e_2 + b_1 u - a_1 y_d - a_2 \dot{y}_d - \ddot{y}_d))$$

et l'équation pour la commande :

$$v = \dot{u} = \frac{-1}{b_2} (c_1 e_2 + (-a_1 e_1 - a_2 e_2 + b_1 u - a_1 y_d - a_2 \dot{y}_d - \ddot{y}_d)) - M_1 \text{sign}(s)$$

En posant $M_1 = \frac{M}{b_1}$, on retrouve l'expression de \dot{u} établie dans les autres démarches.

2.4 Condition nécessaire de glissement et commandes équivalentes à partir du concept de degré relatif

Dans le formalisme classique du régime glissant avec une commande discontinue (le point x « glisse » sur une surface d'équation $S(x) = 0$ dans l'espace d'état), la condition (1.5).

$$S \cdot dS/dt < 0$$

assure que la surface d'équation $S = 0$ est attractive pour la trajectoire $x(t)$. Cette condition (nécessaire et non suffisante) de glissement est générale, théorique et globale. Elle est indépendante de la nature non linéaire ou linéaire de la surface (cette condition reste vraie pendant le régime transitoire). Elle est indépendante de la nature non linéaire ou linéaire de la surface. Elle est indépendante du caractère dégénéré ($\alpha = 0$) ou non dégénéré ($\alpha \neq 0$) du système dynamique à commander.

Dans ce paragraphe, la condition théorique « nécessaire de glissement » est exprimée à partir du concept de degré relatif r du système ayant comme entrée la commande u (ou $u^{(\alpha)}$) et comme sortie la fonction de surface S .

Remarque. Dans le cas d'un système SISO, causal, linéaire, autonome, le degré relatif du système à commander (n^*) désigne la différence entre les degrés des polynômes du dénominateur (n) et du numérateur (α) de la fonction de transfert y/u . La quantité $(n - n^*)$ désigne le nombre α de zéros du numérateur et correspond à la dynamique des zéros du système (Nouri, 1994).

2.4.1 Formes pour la condition nécessaire de glissement

Dans les commandes à régime glissant, le point x (ou l'état x) représentatif de l'évolution du système dynamique dans l'espace des phases doit être maintenu sur une surface S choisie à priori autour de $x^0 = x(t_0)$ et d'équation $S = 0$. La trajectoire d'état $x(t)$ du système bouclé en régime de glissement est alors située sur la surface S passant par x^0 quand certaines conditions (équivalentes) sont satisfaites.

Considérons le système dynamique, dont le fonctionnement est régi par un système différentiel d'équation non autonome :

$$\frac{dx}{dt} = f(u, x, t) \text{ où } f = (f_1 f_2 \cdots f_n)^T \text{ et } x = (x_1 x_2 \cdots x_n)^T \quad (2.51)$$

la variable indépendante u désigne la commande ; les dérivées de la commande qui interviennent dans le fonctionnement du système (quand la dynamique des zéros existe) n'apparaissent pas ici explicitement dans cette formalisation où la sortie y du système n'est pas précisée.

Une surface d'équation $S = 0$ sépare l'espace d'état en deux régions ($S^+ : S > 0$ et $S^- : S < 0$). Une commande u non linéaire de type discontinue :

$$u = \begin{cases} U^+(x, t) & \text{si } S(x, t) > 0 \\ U^-(x, t) & \text{si } S(x, t) < 0 \end{cases} \quad (2.52)$$

donne deux valeurs pour f :

$$f^+ = f(U^+, x, t) \quad \text{et} \quad f^- = f(U^-, x, t) \quad (2.53)$$

D'après un théorème de Filippov (Filippov, 1960) si en chaque point de S la condition :

$$f_N^- > 0 \quad \text{et} \quad f_N^+ < 0 \quad (2.54)$$

est vérifiée, la surface S est attractive pour la solution $x(t)$ puisque de chaque côté de S la vitesse est dirigée vers S : il y a donc un régime glissant limite sur la surface S .

On en déduit la condition (1.5)

$$\begin{aligned} f_N^+ < 0 &\Rightarrow S > 0 \quad \text{et} \quad \dot{S} < 0 \quad \text{soit} \quad S \dot{S} < 0 \\ \text{et } f_N^- > 0 &\Rightarrow S < 0 \quad \text{et} \quad \dot{S} > 0 \quad \text{soit} \quad S \dot{S} < 0 \end{aligned}$$

Ainsi la condition (1.5) $S \dot{S} < 0$ est-elle équivalente à la condition (2.54).

La fonction S est définie par l'équation linéaire (2.15)

$$S(t) = \mathbf{C}^T \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n c_i x_i$$

avec $x_1 = y$ $x_2 = \dot{y} \dots x_n = y^{(n-1)}$ dans l'espace des phases de la sortie.

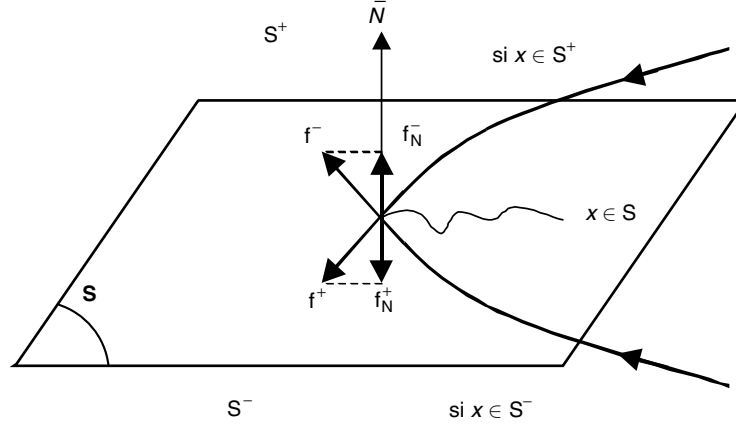


Fig. 2.1. Espace d'état de dimension 3 et surface de glissement de dimension 2 (d'après : Fraisse, 1989 ; Mitzova, 1990 ; Hamerlain, 1993)

Dans l'exemple classique correspondant à la Fig. (2.1), $n = 3$ la fonction S a pour équation :

$$S = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3$$

soit dans l'espace des phases de la sortie y la fonction S s'écrit

$$S = c_1 y + c_2 \dot{y} + c_3 \ddot{y}$$

La surface de glissement $S = 0$ est un plan ; elle est associée à un système dynamique du troisième ordre.

La condition (1.5) ou (2.54) est donc vérifiée pour tout point de la trajectoire d'état $x(t)$ située sur (ou au voisinage de) la surface S . Pour la solution de l'équation (2.51), l'état du système est plongé dans l'état du système réduit équivalent de dimension inférieure et libre défini par $S = 0$. Dans ce cas la dynamique du système bouclé en régime de glissement ne dépend que des coefficients de la surface de glissement, ce qui explique l'invariance de la structure variable par rapport aux perturbations et aux variations des paramètres du système à commander ainsi que l'applicabilité de cette méthodologie de commande aux systèmes linéaires et aux systèmes non linéaires.

Considérons pour l'équation (2.51) la forme autonome (2.55) (le temps ne figure plus explicitement) :

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + g(x)u \quad (2.55)$$

Dans le formalisme de la géométrie différentielle (Emelyanov, 1967 ; Boothby, 1975 ; Sira-Ramirez, 1988), la condition classique (2.54) exprimant que le système bouclé est en régime glissant sur la surface S autour de x^0

s'écrit, à l'aide des dérivées de Lie (Andrea–Novel, 1988 ; Sira–Ramirez, 1990 ; Slotine et Li, 1991).

$$\lim_{S \rightarrow 0^+} L_{f+g, U^+} S < 0 \quad \text{et} \quad \lim_{S \rightarrow 0^-} L_{f+g, U^-} S > 0 \quad (2.56)$$

La dérivée de Lie (ou dérivée directionnelle de la fonction scalaire σ suivant le champ de vecteur h) écrite $L_h \sigma$ a pour définition :

$$L_h \sigma = \nabla \sigma \cdot h \quad \text{avec} \quad \nabla \sigma = \text{grad} \sigma$$

Avec la notation classique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ pour le produit scalaire, la condition (2.56) s'écrit aussi :

$$\left(\lim_{S \rightarrow 0^+} \langle \nabla S, f + g \cdot U^+ \rangle \right) < 0 \quad \text{et} \quad \left(\lim_{S \rightarrow 0^-} \langle \nabla S, f + g \cdot U^- \rangle \right) > 0 \quad (2.57)$$

2.4.2 Commande équivalente dans le cas non dégénéré

Montrons que dans le contexte de la linéarité, les conditions équivalentes (1.5), (2.54), (2.56) et (2.57) peuvent être exprimées à l'aide du concept de degré relatif r du système ayant en sortie une fonction de surface S et en entrée la commande u pour le système d'équation (2.51) ou (2.55) ou encore (2.58) quand on adopte dans le formalisme de l'algèbre différentielle la forme canonique généralisée de Fliess (Fliess, 1990) autour de x^0 pour l'entrée u et la sortie y :

$$\begin{cases} \dot{x}_j = x_{j+1} & j = 1, \dots, (n-1) \\ \dot{x}_n = \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{k=0}^{\alpha} b_k u^{(k)} \\ y = x_1 \end{cases} \quad (2.58)$$

Considérons le système dynamique monovariable autonome dont la dynamique est définie par (2.55), ayant comme entrée u et comme sortie S :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x) + g(x)u \\ S = h(x) \end{cases} \quad (2.59)$$

La fonction $S = h(x)$ définit une surface S d'équation $h(x) = 0$. La notation classique $h^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R}^n / h(x) = 0\}$ désigne aussi la surface S de dimension $(n-1)$.

Soit r le degré relatif du système (2.59) au voisinage de x^0 : r est égal au nombre minimal de dérivations de $S = h(x)$ par rapport au temps pour faire apparaître explicitement la commande u (cette définition se généralise au degré relatif du système d'entrée $u(p)$ et de sortie $y(p)$).

L'équation (2.15) pour la surface et l'équation (2.48) pour la dynamique de système donnent dans le cas $\alpha = 0$, la valeur $r = 1$ pour le degré relatif du système de sortie S et d'entrée u : en effet une seule dérivée de S par rapport au temps fait apparaître la commande u .

Le degré relatif r est aussi défini par le plus petit entier r tel que, pour tout x au voisinage de x^0 :

$$L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0 \quad (2.60)$$

Pour simplifier, considérons un changement de coordonnées et la formalisation canonique de Brunovsky autour de x^0 (Isidori, 1990 ; Sira-Ramirez *et al.*, 1995).

On pose :

$$\begin{aligned} z &= \phi(x) = [\phi_1(x) \phi_2(x) \cdots \phi_{2n}(x)]^T \\ \text{avec } z_i &= \phi_i(x) = L_f^{i-1} h(x) \text{ pour } i = 1, 2, \dots, r \\ \text{et } L_g \phi_{r+j}(x) &= 0 \text{ pour } j = 1, 2, \dots, n-r \end{aligned}$$

Autour de $z^0 = \phi(x^0)$, on peut écrire :

$$\left. \begin{aligned} \dot{z}_i &= z_{i+1} \quad i = 1, 2, \dots, r-1 \\ \dot{z}_r &= v \equiv b(z) + a(z)u \end{aligned} \right\} \quad (2.61)$$

et

$$\left. \begin{aligned} \dot{z}_{r+j} &= q(z) \quad j = 1, 2, \dots, n-r \\ z_1 &= h(x) \end{aligned} \right\} \quad (2.62)$$

avec

$$b(z) = L_f^r h(\phi^{-1}(z)) \quad \text{et} \quad a(z) = L_g L_f^{r-1} h(\phi^{-1}(z)) \neq 0 \quad (2.63)$$

La commande équivalente u_{eq} qui permet le glissement idéal sur $h(x)$ autour de x^0 a pour expression :

$$u_{eq} = -\frac{L_f^r h(x)}{L_g L_f^{r-1} h(x)} \quad (2.64)$$

L'équation (2.64) généralise l'équation (2.66) qui correspond à $r = 1$ comme l'équation (2.60) généralise l'équation (2.67). La dynamique définie par (2.62) correspond à la dynamique des zéros de S/u .

Dans le cas $r \geq 2$, le glissement s'effectue autour de x^0 sous la commande équivalente définie par (2.64). On se ramène au cas dégénéré en introduisant une nouvelle surface $k(x)$ autour de x^0 et en considérant le degré relatif du système d'entrée u et de sortie $k(x)$

$$\begin{aligned} k(x) &= z_r + c_{r-2} z_{r-1} + \cdots + c_1 z_2 + c_0 z_1 \\ \text{avec } z_i &= \phi_i(x) = L_f^{i-1} h(x) \end{aligned} \quad (2.65)$$

D'après (2.61), la transmittance $k(x)/u$ présente un degré relatif égal à l'unité : un régime glissant peut exister sur la surface $k(x) = 0$ autour de x^0 .

2.4.3 Commande équivalente dans le cas dégénéré

Le glissement idéal (ni seuil, ni retard, ni hystérésis) s'effectue sous la commande équivalente u_{eq} définie par :

$$S = 0 \quad \text{et} \quad \dot{S} = 0$$

et ayant pour expression en faisant $r = 1$ dans l'équation (2.64)

$$u_{eq} = -\frac{\langle \nabla S, f \rangle}{\langle \nabla S, g \rangle} = -\frac{L_f S}{L_g S} \quad (2.66)$$

Son existence suppose satisfaite la condition de transversalité :

$$L_g S \equiv \langle \nabla S, g \rangle \neq 0 \quad (2.67)$$

On peut montrer que le glissement le long de $x(t)$ située sur $S = 0$ sous u_{eq} est tel que $L_g S < 0$ avec :

$$U^-(x) < u_{eq}(x) < U^+(x) \quad (2.68)$$

ou encore :

$$U_{\min} = \min\{U^-(x), U^+(x)\} < u_{eq}(x) < U_{\max} = \max\{U^-(x), U^+(x)\}$$

Annexe A

Formes de la fonction de glissement et nombre de surfaces de commutation

A.1 Rappel

Pour la majorité des cas traités dans les livres et les publications, en simulation et en expérimentation, il est surtout fait recours à une entité de glissement (ou de commutation) qui est un point (cas $n = 1$), une droite (cas $n = 2$), un plan (surface linéaire dans le cas $n = 3$) ou une hypersurface linéaire ($n > 3$). Ainsi, pour un système monovariable d'ordre n , dans le régime glissant conventionnel (présentant un régime transitoire puis le régime de glissement) l'entité de glissement $S \equiv 0$ (appelée aussi surface, hypersurface, variété, manifold) est définie par une fonction de glissement S (appelée aussi fonction de surface ou fonction de commutation) écrite sous forme linéaire (équation (2.15) ou équation (2.32) du Chap. 2).

Dans le cas d'un système dégénéré (le degré relatif n^* est égal à l'ordre du système ; il n'y a pas de dynamique de zéros ; les dérivées de l'entrée n'interviennent pas dans le fonctionnement), la surface de commutation S est définie par l'équation (2.15) rappelée ci-dessous :

$$S = c^T x = \sum_{i=1}^n c_i x_i = \sum_{i=1}^n c_i y^{(i-1)} \quad \text{avec} \quad c_n = 1 \quad (\text{A.1})$$

Le régime glissant est effectif, lorsque l'état x a atteint $S = 0$ (depuis x_0 jusqu'à x_G , durant le temps T_G qui caractérise le régime transitoire, la fonction S garde un signe constant) sous une commande convenable (du type $u = -K \cdot \text{sign}(S)$ ou $u = u_{\text{eq}} - k \cdot \text{sign}(S)$ avec u_{eq} solution de $S = 0$ et $dS/dt = 0$). Ce régime glissant effectif satisfait :

$$S\dot{S} < 0 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (S^2) < 0 \quad (\text{A.2})$$

$$\text{avec} \quad \lim_{S \rightarrow 0} S\dot{S} < 0 \quad (\text{A.3a})$$

$$\lim_{S \rightarrow 0} S(t) = 0 \quad (\text{A.3b})$$

La condition (A.3a) introduite par (Utkin, 1978 ; Mira, 1990) et valable pour le cas autonome est appelée aussi condition locale (voir le paragraphe 1.2 et 1.3 du Chap. 1).

Le système d'entrée u et de sortie S présente un degré relatif égal à un.

Ainsi, dans le contexte linéaire et avec une commande discontinue, la condition théorique $S \cdot dS/dt < 0$, sur une surface convenable S d'équation $S = 0$ est – elle équivalente à la condition d'égalité à l'unité du degré relatif pour le système d'entrée u et de sortie S (Chap. 2, paragraphe 2.4).

En fait, le caractère linéaire de la surface de glissement n'est pas imposée par la condition générale $S \cdot dS/dt < 0$: la surface S candidate dans l'espace des phases, d'équation $S = 0$, doit seulement être attractive pour les trajectoires $x(t)$, de telle sorte que dans les deux régions S^+ et S^- séparées par S la vitesse soit dirigée vers S (il y a alors un régime glissant limite sur la surface S quand la commande u est convenable : sa valeur moyenne dans le domaine de glissement est égale à la commande équivalente u_{eq} solution du système $S = 0$ et $\dot{S} = 0$) ; ceci conserve les propriétés d'invariance caractéristiques des systèmes à structure variable.

A.2 Régime glissant sur une surface de commutation non linéaire

Cette extension vise à améliorer les performances dynamiques du système bouclé sans altérer les propriétés d'invariance et de stabilité dues au régime glissant. La mise en régime glissant du système de commande sur une surface de commutation non linéaire permet notamment de diminuer le temps de réponse du système. Plusieurs applications ont été envisagées :

- dans la commande sous-optimale, le critère étant le temps de réponse (Mira *et al.*, 1972 ; Vernhes, 1971 ; Utkin, 1966 ; Hamerlain, 1993) ;
- dans la recherche d'un régime transitoire « raccourci » en faisant en sorte que le glissement « démarre » le plus tôt possible après l'instant initial (Harashima *et al.*, 1985 ; Gamble, 1992).

Considérons la commande par régime glissant d'un système dynamique d'équation :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, u) \\ \text{avec } f &= (f_1 f_2 \cdots f_n) \quad \text{et} \quad x = (x_1 x_2 \cdots x_n) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Le système (A.4) peut être pris sous la forme (A.5) où u n'intervient que dans dx_n/dt :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \dot{x}_j = f_j(X, x_n) & j = 1, 2, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n = f_n(X, x_n) + g_n(X, x_n) u \end{cases} \\ \text{avec } X = (x_1 x_2 \cdots x_{n-1}) \quad \text{et} \quad g_n(X, x_n) \neq 0 \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Les fonctions f_n et g_n généralement non linéaires ne sont pas exactement connues à cause des erreurs de modélisation ; on ne dispose que d'estimations f_n^* et g_n^* avec des marges Δf_n et Δg_n :

$$\begin{aligned} f_n^* - \Delta f_n < f < f_n^* + \Delta f_n \\ g_n^* - \Delta g_n < g < g_n^* + \Delta g_n \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Choisissons une surface définie par la fonction non linéaire (Hamerlain, 1993)

$$S = x_n + H(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \quad (\text{A.7})$$

où H est une fonction différentiable telle que $H(0) = 0$. On en déduit l'expression de $dS/dt = 0$ au voisinage de $S = 0$, pour les valeurs estimées f_n^* et g_n^* :

$$\begin{aligned} \dot{S} &= f_n^*(X, -H(X)) + F(x) + g_n^*(X, -H(X)) u \\ \text{avec} \quad F(x) &= \sum_{j=2}^{n-2} \frac{\partial H}{\partial x_{j-1}} x_j - \frac{\partial H}{\partial x_{n-1}} H(X) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Cette forme pour dS/dt peut induire une commande de la forme :

$$u = \Psi_F F + \Psi_{f^*} f_n^* \quad (\text{A.9})$$

On obtient en portant dans dS/dt :

$$\dot{S} = (1 + \Psi_F g_n^*) F + (1 + \Psi_{f^*} g_n^*) f_n^* \quad (\text{A.10})$$

La condition $S.dS/dt < 0$ est vérifiée (on suppose que $g_n^* < 0$) par les inégalités :

$$\begin{aligned} \Psi_F &= \begin{cases} \omega_F > \min\left(\frac{-1}{g_n^*}\right) & \text{si } FS > 0 \\ \Omega_F > \max\left(\frac{-1}{g_n^*}\right) & \text{si } FS < 0 \end{cases} \\ \Psi_{f^*} &= \begin{cases} \omega_{f^*} > \min\left(\frac{-1}{g_n^*}\right) & \text{si } f_n^* S > 0 \\ \Omega_{f^*} > \max\left(\frac{-1}{g_n^*}\right) & \text{si } f_n^* S < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

avec pour ψ_F et ψ_{f^*} les définitions suivantes :

$$\Psi_F = \begin{cases} \omega_F & \text{si } FS > 0 \\ \Omega_F & \text{si } FS < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \Psi_{f^*} = \begin{cases} \omega_{f^*} & \text{si } f_n^* S > 0 \\ \Omega_{f^*} & \text{si } f_n^* S < 0 \end{cases}$$

La commande u , définie par $S.dS/dt < 0$ et les relations (A.9) et (A.11), assure le glissement sur $x(t)$ tracée sur la surface S . La présence du terme $F(x)$ dans la commande u permet d'obtenir un décroissement plus rapide de l'erreur et une diminution du temps de réponse (donc de la durée du

régime transitoire conduisant à la surface de commutation). La trajectoire d'état $x(t)$ solution de (A.5) appartient à la surface d'équation $S = 0$ soit $x_n + H(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = 0$ avec $H(X)$ fonction différentiable et telle que $H(0) = 0$: le glissement s'effectue sur cette surface.

Dans tous les cas, la synthèse de la commande impose d'une part que l'origine de l'espace des phases soit un point d'équilibre stable, d'autre part que pour toute condition initiale, l'état $x(t)$ atteigne la surface de glissement en un temps fini T_G .

Dans le cas linéaire, le système (A.5) peut être écrit :

$$\begin{cases} \dot{x}_j = x_{j+1} & j = 1, 2, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n = -\sum_{i=1}^n a_i x_i - Ku \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

Les marges (A.6) s'écrivent ici :

$$\begin{aligned} K_{\min} &\leq K(t) \leq K_{\max} \\ a_{i,\min} &\leq a_i(t) \leq a_{i,\max} \end{aligned}$$

La fonction de surface de la forme (A.7) rappelée ci-dessous :

$$S = x_n + H(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$$

a pour dérivée dS/dt l'expression :

$$\dot{S} = -\sum_{i=1}^n a_i x_i - Ku + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial H}{\partial x_{i-1}} x_i - \frac{\partial H}{\partial x_{n-1}} H \quad (\text{A.13})$$

Posons :

$$F(x_1, \dots, x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial H}{\partial x_i} x_{i+1} - \frac{\partial H}{\partial x_{n-1}} H$$

d'où

$$\dot{S} = -\sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i + F(x_1, \dots, x_{n-1}) + a_n H - Ku \quad (\text{A.14})$$

Cette forme pour \dot{S} induit pour la commande u la forme :

$$u = \sum_{i=1}^{n-1} \psi_i x_i + \psi_H H + \psi_F F \quad (\text{A.15})$$

avec :

$$\begin{aligned} \psi_i &= \begin{cases} \omega_i & \text{si } x_i S > 0 \\ \lambda_i & \text{si } x_i S < 0 \end{cases} \\ \psi_H &= \begin{cases} \omega_H & \text{si } HS > 0 \\ \lambda_H & \text{si } HS < 0 \end{cases} \\ \psi_F &= \begin{cases} \omega_F & \text{si } FS > 0 \\ \lambda_F & \text{si } FS < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

La fonction \dot{S} s'écrit :

$$\dot{S} = - \sum_{i=1}^{n-1} (a_i + \psi_i K) x_i + (a_n - K \psi_H) H + (1 - K \psi_F) F \quad (\text{A.16})$$

On établit comme précédemment (voir les inégalités (A.11)) des conditions similaires sur ψ_i , ψ_H et ψ_F (Vernhes, 1971 ; Mira *et al.*, 1972) pour que la condition $S.dS/dt < 0$ soit vérifiée : ainsi u assure l'existence du régime glissant sur $S = 0$; la dynamique du système bouclé est celle du système réduit et libre :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1} & i = 1, 2, \dots, n-2 \\ \dot{x}_{n-1} = x_n = -H(x_1, \dots, x_{n-1}) \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

d'où l'invariance vis à vis des variations des paramètres du procédé et des perturbations.

Remarque 1. Une autre expression que celle des équations (A.8) et (A.14) a été testée pour la dérivée dS/dt :

$$\dot{S} = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial H}{\partial x_{i-1}} - a_i \right) x_i + \left(a_n - \frac{\partial H}{\partial x_{n-1}} \right) H - Ku \quad (\text{A.18})$$

Cette forme induit pour u une autre forme pour la commande :

$$u = \sum_{i=1}^{n-1} \psi_i x_i + \psi_H H \quad (\text{A.19})$$

On définit les ψ_i et ψ_H ainsi que les conditions à satisfaire pour que le glissement ait lieu ($S.dS/dt < 0$) d'une manière analogue à ce qui précède (*cf.* les inégalités (A.11)).

Remarque 2. Considérons un régime glissant sur une surface de commutation constituée de morceaux linéaires ou non linéaires (Tang et Walker, 1995) :

Si le domaine de variation des x_i est fractionné en J intervalles, la surface S est constituée de J morceaux Ω_j .

Dans l'équation (A.18), on pose pour le morceau Ω_j ($j = 1, 2, \dots, J$) :

$$\frac{\partial H}{\partial x_{i-1}} = \text{cte} = C_{i-1}^j \quad (\text{A.20})$$

La commande u^j relative à Ω_j s'écrit :

$$u^j = \sum_{i=1}^{n-1} \psi_i^j x_i + \psi_H^j H \quad (\text{A.21})$$

Nous donnons dans le paragraphe A.3 de cette annexe un exemple d'application des surfaces de glissement constituées de morceaux.

A.3 Régime glissant sur une courbe de commutation constituée de quatre morceaux pour un système du deuxième ordre

A.3.1 Introduction

Dans la commande à régime glissant conventionnelle (Fig. A.1), le régime glissant est effectif seulement, après un temps T_G correspondant à l'instant où le point x atteint la surface de glissement (une droite dans le cas du second ordre). Ainsi l'insensibilité du système bouclé aux perturbations et aux variations paramétriques n'existe pas réellement sur toute la réponse; le régime transitoire de durée T_G ne présente pas cette insensibilité qui est la propriété essentielle (avec la stabilité) de la réponse quand le glissement est effectif. Cette insensibilité et cette stabilité par les régimes glissant sont meilleures que celles fournies par les commandes à grands gains (Utkin, 1977; Itkis, 1978).

Le système classique étudié a pour équation (Harashima *et al.*, 1985) :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} f \quad \text{avec} \quad x_1 = \theta - \theta_d \quad x_2 = \dot{x}_1 \quad (\text{A.22})$$

et x_0 désigne le point initial.

A.3.2 Deux méthodes testées pour mettre la trajectoire d'état en régime de glissement depuis l'instant initial

Une méthode utilise une droite de glissement (Fig. A.2) à pente variable (Kaynak *et al.*, 1984).

Une autre méthode définit (Harashima *et al.*, 1985) une ligne de glissement en trois parties (Fig. A.3) ou quatre parties (Fig. A.4).

La courbe de glissement doit être choisie dans la zone non hachurée (Fig. A.4) afin de garantir la rapidité de la réponse en même temps que l'insensibilité aux perturbations et aux variations de paramètres.

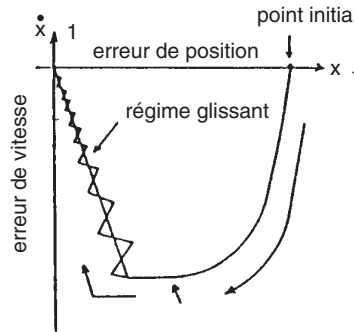


Fig. A.1. Régime glissant conventionnel (CVS)

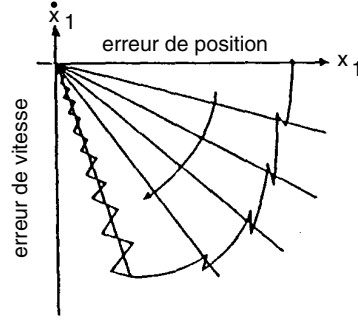


Fig. A.2. Régime glissant avec droite de glissement à pente variable

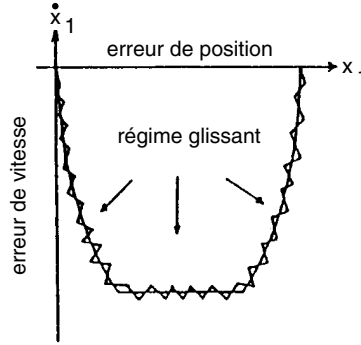


Fig. A.3. Ligne de glissement en trois parties

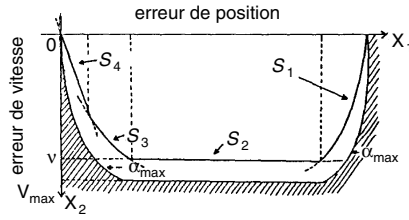


Fig. A.4. Ligne de glissement en quatre parties

Définition de la ligne courbe de glissement en quatre tronçons pour le système du deuxième ordre étudié (équation (A.22) et Fig. A.4)

Partie S_1 à accélération constante définie par

$$S_1 = \alpha x_2^2 + x_1 - x_0 \quad (\text{A.23a})$$

Partie S_2 à vitesse constante définie par

$$S_2 = x_2 - V \quad (\text{A.23b})$$

Partie S_3 à décélération constante définie par

$$S_3 = -\alpha x_2^2 + x_1 \quad (\text{A.23c})$$

Partie S_4 à régime conventionnel de glissement pour un système du deuxième ordre définie par

$$S_4 = c_1 x_1 + x_2 \quad (\text{A.23d})$$

Les équations (A.23 a, b, c et d) des quatre parties de la ligne courbe de glissement introduisent des commandes de la forme :

$$u = \psi_1 x_1 + \psi_2 x_2 + k \operatorname{sign}(S)$$

Pour chaque tronçon S_i , on pose :

$$\operatorname{sign}(S_i) = \begin{cases} +1 & \text{si } S_i > 0 \\ -1 & \text{si } S_i < 0 \end{cases}$$

et pour les gains ψ_{1i} et ψ_{2i} :

$$\psi_{1i} = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } S_i x_1 > 0 \\ \beta_i & \text{si } S_i x_1 < 0 \end{cases} \quad \psi_{2i} = \begin{cases} \gamma_i & \text{si } S_i x_2 > 0 \\ \xi_i & \text{si } S_i x_2 < 0 \end{cases}$$

La condition (3 - a)

$$\lim_{S_i \rightarrow 0} S_i \dot{S}_i < 0$$

impose aux gains α_i , β_i , γ_i , ξ_i et k des inégalités. Par exemple, on établit pour le tronçon S_1 , si $x_2 > 0$ alors :

$$\alpha_1 > 0 \quad \beta_1 < 0 \quad \gamma_1 > -\frac{b}{a} \quad \xi_1 < -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad k_1 > \frac{f + \frac{1}{2\alpha_1}}{a} \operatorname{sign}(S_1)$$

Nous remarquons que les gains du contrôleur à régime glissant n'exigent pas une connaissance exacte des paramètres du système, contrairement aux contrôleurs linéaires.

Les Figures A.5 comparent les régimes glissants et leurs commandes dans les trois méthodes :

- a) régime glissant conventionnel
- b) régime glissant avec droite à pente variable
- c) régime glissant sur ligne à quatre tronçons

La forme du régime transitoire et sa durée peuvent être imposées en choisissant une ligne de glissement convenable. Si le glissement s'effectue dès l'instant initial alors la robustesse est assurée tout le long de la trajectoire d'état.

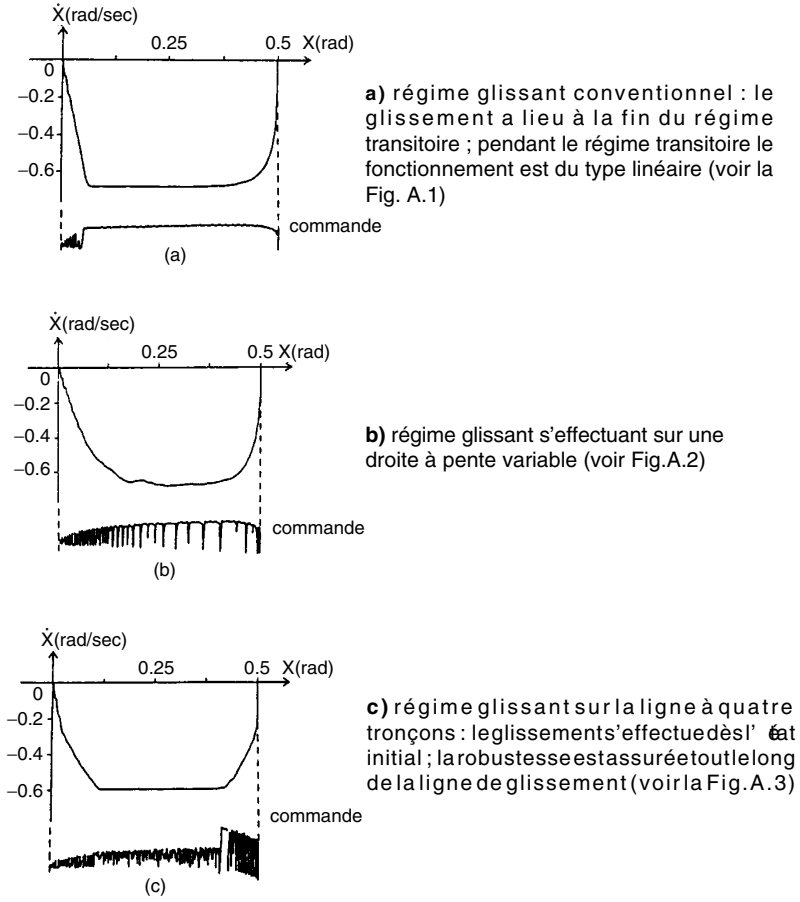


Fig. A.5. Comparaison des régimes glissants et des commandes

A.3.3 Généralisation

La méthode précédente peut être généralisée pour des ordres supérieurs à deux. Nous présentons au chap. 4 les résultats obtenus (Gamble, 1992) sur un système hydraulique du troisième ordre d'équation (4.24) rappelée ci-dessous :

$$X(n+1) = \phi X(n) + \Gamma u(n) \quad \text{avec} \quad X^T = [z \quad \dot{z}]^T$$

où z désigne la position du tiroir de l'électrovalve.

La surface de glissement dans l'espace des phases $(\varepsilon, dz/dt, d^2z/dt^2)$ avec $\varepsilon = z - z_d$ est définie par $S = C(\varepsilon, \dot{z}) - \ddot{z}$.

La Figure A.6 est un exemple de surface de glissement non linéaire permettant le régime glissant sur toute la trajectoire d'état : elle a été déterminée

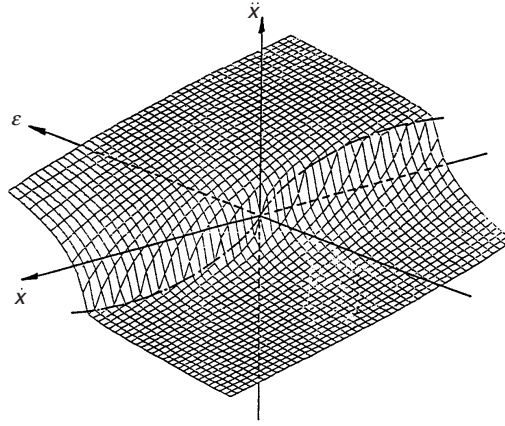


Fig. A.6. Surface de glissement dans l'espace des phases (Gamble, 1992)

pour les deux zones correspondant à (avec $x \equiv z$)

$$\ddot{x} > -\sqrt{2\alpha\dot{x}} \quad \text{et} \quad \ddot{x} < -\sqrt{2\alpha\dot{x}} \quad (\text{A.24})$$

Une telle fonction de commutation permet de rendre le système bouclé robuste dès l'instant initial vis-à-vis des variations paramétriques et des perturbations.

A.4 Algorithmes de commande à régime glissant utilisant des surfaces de glissement en cascade

Dans certaines méthodologies, l'algorithme de commande d'un système mono-variable utilise plusieurs surfaces de glissement en cascade.

A.4.1 Cas de la commande CVS des moteurs alternatifs

Pour un moteur asynchrone on a introduit (Chap. 3) trois surfaces de glissement relatives à la position (ou à la vitesse), au couple et au flux.

Pour un moteur synchrone, quatre surfaces de glissement sont nécessaires relatives au flux, au couple, à la tension rotorique et à la position (ou à la vitesse).

Le régime glissant s'établit à l'intersection des variétés de glissement.

Les structures de commande, incluant plusieurs asservissements en cascade, conduisent à la notion de « variété volumique de glissement » (Mitzova, 1994).

A.4.2 Cas de la commande CVS-MRAC-IO

On présente dans la deuxième partie au chapitre 3 une commande à régime glissant classique utilisant un modèle de référence et les entrées sorties (CVS-MRAC-IO).

On montre que pour un système du deuxième ordre ($n = 2$) et de degré relatif $n^* = 2$, les deux relais introduisent deux surfaces de glissement S_1 et S_2 en cascade. Le régime glissant s'installe quand le glissement a eu lieu sur les deux surfaces.

Plus généralement, pour un système monovariable d'ordre n et de degré relatif n^* , on introduit n^* relais soit n^* surfaces de glissement en cascade.

A.5 Autres formes pour la fonction de commutation

On peut imposer une dynamique à la fonction S . Par exemple, on peut imposer (Sira-Ramirez *et al.*, 1992) à S d'être une solution de :

$$\frac{dS}{dt} + \mu S = -\mu \Omega \cdot \text{sign}(S) \quad (\text{A.25})$$

alors la surface glissante S est atteinte en un temps :

$$T_G = \mu^{-1} \ln \left(1 + \frac{|S(0)|}{\Omega} \right)$$

On vérifie que cette dynamique pour S entraîne la satisfaction de la condition (on suppose $\mu > 0$) :

$$S\dot{S} = S(-\mu S - \mu \Omega \cdot \text{sign}(S)) = -\mu S^2 - \mu \Omega |S| \leq 0$$

Ainsi quand S vérifie (A.25), le régime glissant est effectif pour la commande u solution de l'équation (A.25) dans laquelle on remplace S et \dot{S} par leurs expressions en fonction des variables d'état x_i , de l'entrée u et de ses dérivées.

D'autres dynamiques ont été proposées pour la fonction de surface candidate S . Citons :

a) (*cf.* (Drakunov *et al.*, 1990 ; Sira-Ramirez *et al.*, 1995))

$$\dot{S} + W \cdot \text{sign}(S) = \sum_{i=1}^{n^*-1} \gamma_i \xi_{i+1} \quad (\text{A.26})$$

Cette dynamique définit dans l'espace des phases à n^* dimensions, un hypervolume glissant.

b) (*cf.* (Sira-Ramirez *et al.*, 1996))

$$\dot{S} + W \cdot \text{sign}(S) = 0 \quad (\text{A.27})$$

Comme pour la dynamique (A.25), cette dynamique entraîne la vérification de la condition (on suppose $W > 0$)

$$S\dot{S} = S(-W.\text{sign}(S)) = -W|S| \leq 0$$

- c) Dans le cas non autonome, une autre forme pour S a été proposée (Asada et Slotine 1986 ; Slotine et Li, 1991)

$$S(e, t) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^{n-1} e_1 \quad (\text{A.28})$$

où $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$

$$e_1 = y - y_d \quad e_2 = \dot{y} - \dot{y}_d \quad \dots \quad e_n = y^{(n-1)} - y_d^{(n-1)}$$

(le temps peut figurer explicitement dans $y_d(t)$)

Pour $n = 2$, on retrouve pour S la forme du premier ordre :

$$S = e_2 + \lambda e_1$$

Dans le cas non autonome, la condition :

$$S\dot{S} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} S^2 \leq -\eta |S| \quad (\text{A.29})$$

où $\eta > 0$, se substitue à la condition classique $S\dot{S} < 0$.

On en déduit par intégration entre $t = 0$ et $t = T_G$ une borne supérieure pour T_G :

$$T_G \leq \frac{|S(0)|}{\eta} \quad (\text{A.30})$$

- d) Une autre expression a été proposée pour la fonction de surface (Asada et Slotine, 1986), en introduisant la variable :

$$v = \int_0^t e_1 dt \text{ ou } \int e_1 dt$$

La surface à associer au système d'ordre n par rapport à e_1 (il devient d'ordre $n + 1$ par rapport à la variable v) est définie par :

$$S = \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^n \left(\int_0^t e_1 dt \right) \quad (\text{A.31})$$

$$\text{ou} \quad S = \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^n \left(\int e_1 dt \right) \quad (\text{A.32})$$

Pour le second ordre, on obtient :

$$S = e_2 + 2\lambda e_1 + \lambda^2 \int_0^t e_1 dt \quad (\text{A.33})$$

$$\text{ou} \quad S = e_2 + 2\lambda e_1 + \lambda^2 \int_0^t e_1 dt - e_2(0) - 2\lambda e_1(0) \quad (\text{A.34})$$

Ces formes permettent de réduire l'erreur de position en régime permanent comme il est indiqué ci-dessous.

A.6 Correction intégrale à partir de la surface de glissement

Dans le but de compenser l'erreur de position en régime permanent, on peut ajouter un terme intégral dans la fonction de glissement (Hashimoto *et al.*, 1987 ; Hsu *et al.*, 1990 ; Nouri, 1989). Ce perfectionnement (à l'instar d'autres) est introduit à priori et justifié par des essais sur des systèmes particuliers.

Démontrons la compensation théorique de l'erreur par cette technique intégrale sur un exemple classique. Considérons le modèle linéaire suivant (Hashimoto *et al.*, 1987) d'un moteur à courant continu décrit dans l'espace d'état par :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{D}{J} & -\frac{K_t}{J} \\ 0 & -\frac{K_e}{L} & -\frac{Ra}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{f}{J} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.35})$$

avec :

x_1 position, x_2 vitesse et x_3 le courant d'induit ; J inertie, D coefficient de frottement ; K_e et K_t coefficients ; Ra résistance d'induit, L inductance d'induit ; u tension d'induit et f la perturbation.

La surface de glissement choisie est définie classiquement par :

$$S = c_1 e_1 + c_2 e_2 + e_3$$

avec y la position désirée :

$$e_1 = x_1 - y_1 \quad e_2 = \dot{e}_1 \quad e_3 = -x_3$$

Le courant x_3 peut être exprimé en fonction de l'accélération dx_2/dt (Nouri, 1989) soit :

$$x_3 = -\frac{J}{Kt} \dot{x}_2 - \frac{D}{Kt} x_2 + \frac{f}{Kt} \quad (\text{A.36})$$

La commande est de type $u = -M.\text{sign}(S)$ avec M calculé afin que la condition $S.\dot{S} < 0$ soit toujours vérifiée. Déterminons l'erreur statique du système bouclé.

En régime glissant, le système bouclé se comporte comme le système réduit et libre définie par $S = 0$, soit :

$$c_1 e_1(t) + c_2 e_2(t) + e_3(t) = 0$$

C'est à dire, dans le formalisme de Laplace :

$$c_1 E_1(p) + c_2 (pE_1(p) - e_1(0)) + \frac{J}{Kt} (p^2 E_1(p) - pe_1(0) - \dot{e}_1(0)) + \frac{D}{Kt} (pE_1(p) - e_1(0)) - \frac{f}{pKt} = 0 \quad (\text{A.37})$$

On en déduit l'erreur $E_1(p)$ puis l'erreur statique :

$$e_1(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} (pE_1(p)) = \frac{f}{Kt}$$

Introduisons une correction intégrale dans la surface de glissement :

$$S = c_1 e_1 + c_2 e_2 + e_3 + c_0 \int_0^t e_1 d\tau$$

En régime permanent, on a :

$$\frac{c_0}{p} E_1(p) + c_1 E_1(p) + c_2 (pE_1(p) - e_1(0)) + \frac{J}{Kt} (p^2 E_1(p) - pe_1(0) - \dot{e}_1(0)) + \frac{D}{Kt} (pE_1(p) - e_1(0)) - \frac{f}{pKt} = 0 \quad (\text{A.38})$$

On calcule $E_1(p)$ puis la nouvelle erreur statique :

$$e_1(\infty) = \lim_{p \rightarrow \infty} (pE_1(p)) = 0$$

Ainsi, en introduisant une correction intégrale dans la surface de glissement, l'erreur statique en régime permanent s'annule. La démonstration théorique concernant l'erreur statique peut être également établie dans le cas du deuxième ordre à partir des équations (A.33) et (A.34) et aussi dans le cas général pour les équations (A.31) et (A.32).

Cette compensation est à rapprocher du concept de l'action intégrale rencontrée dans les lois classiques en commande linéaire.

A.7 Utilisation de la fonction de surface dans l'expression de la commande

La fonction S intervient par $\text{sign}(S)$ dans les expressions classiques $u = -K.\text{sign}(S)$ et $u = u_{\text{eq}} + \Delta u$ avec $\Delta u = -k.\text{sign}(S)$.

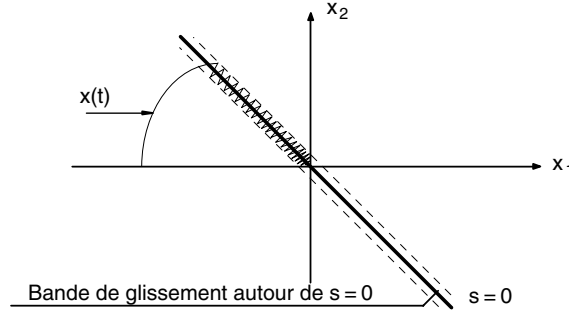


Fig. A.7. Trajectoire de phase dans le plan (x_1, x_2) dans le cas d'une droite de glissement $S = c_1 x_1 + x_2$: il y a « glissement » dans une bande autour de la surface

La fonction S intervient directement dans certaines expressions de Δu (cf. Chap. 1).

Rappelons le principe de la fonction de commutation continue par bande au voisinage de la surface de glissement.

Le phénomène de « chattering » est dû essentiellement à ce que le glissement s'effectue autour de la surface, dans un voisinage (bande, cf. Fig. A.7) de celle-ci.

Pour remédier à ce problème de « chattering », nous rappelons ci-dessous la solution proposée par Slotine qui consiste à remplacer la fonction de commutation discontinue (fonction $\text{sign}(S)$) par une fonction continue dans une bande autour de la surface. On obtient alors une loi continue autour de la surface. La discontinuité de la commande est conservée à l'extérieur de la bande formée par les deux surfaces $S^+(x)$ et $S^-(x)$ de façon à faire converger les trajectoires de phase initialement à l'extérieur de cette bande vers celle-ci. Cette bande est définie comme suit :

$$B(t) = \{x / |s(x)| \leq \Phi\} \quad \text{avec} \quad \Phi > 0 \quad (\text{A.39})$$

La bande peut être définie aussi en fonction des deux surfaces $S^+(x)$ et $S^-(x)$ par :

$$B(t) = \{x / S^+(x) < 0 \quad \text{et} \quad S^-(x) < 0\} \quad (\text{A.40})$$

avec $S^-(x) = S(x) + c\epsilon$ et $S^+(x) = S(x) - c\epsilon$ et $\Phi = c\epsilon$

On déduit de l'équation (A.40) :

$$\dot{S}(x) = \dot{S}^+(x) = \dot{S}^-(x) \quad (\text{A.41})$$

A l'extérieur de la bande, c'est à dire pour

$$x \in \{x / S^-(x) < 0 \text{ et } S^+(x) > 0\}$$

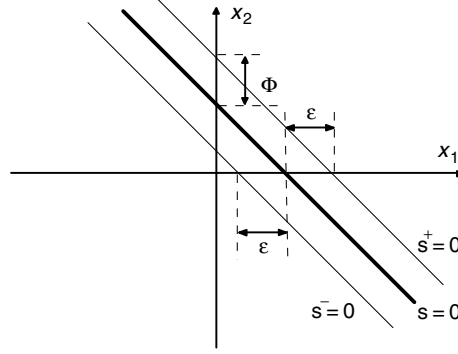


Fig. A.8. Construction de la bande $B(t)$ dans le cas d'une droite de glissement ; Φ : épaisseur de la bande, ε : largeur de la bande ; d'après (Asada et Slotine, 1986)

on choisit une commande discontinue, d'où :

$$\begin{cases} \dot{S}(x) > 0 & \text{pour } x \in \{x/S^-(x) \leq 0\} \\ \dot{S}(x) < 0 & \text{pour } x \in \{x/S^+(x) \geq 0\} \end{cases}$$

Les trajectoires initialement à l'extérieur de la bande $B(t)$ traverseront la bande et seront contraintes à rester à l'intérieur. Dès que le point de fonctionnement atteint la bande $B(t)$, la commande discontinue est remplacée par une commande continue à l'intérieur. Plusieurs formes ont été proposées pour la fonction continue dans la bande.

Forme de saturation (Slotine, 1985 ; Asada et Slotine, 1986 ; Slotine et Li, 1991)

Supposons la commande composée d'une composante de basse fréquence u_{eq} et d'une composante de haute fréquence Δu , soit (cf. Chap. 1) :

$$u = u_{eq} + \Delta u \quad \text{avec } \Delta u = -M \operatorname{sign}(S) \quad (\text{A.42})$$

La fonction « sign » est remplacée par une fonction appelée « Sat ». La composante discontinue (Δu) devient (cf. Chap. 1) :

$$\Delta u = -M \cdot \operatorname{Sat}(S) \quad \text{avec } \begin{cases} \operatorname{Sat}(S) = \frac{S}{\Phi} & \text{si } |S| \leq \Phi \\ \operatorname{Sat}(S) = \operatorname{sign} S & \text{si } |S| > \Phi \end{cases} \quad (\text{A.43})$$

Cette fonction de commutation peut être schématiquement représentée par la figure ci-dessous :

Forme continue (Harashima et al., 1986)

Une autre solution pour lisser la commande au voisinage de la surface d'équation $S = 0$, est de remplacer dans la bande $|S(t)| < \Phi$, les fonctions discontinues $\operatorname{sign}(S)$ par des fonctions continues de lissage de la forme (cf. Chap. 1)

$$\operatorname{Cont}(S) = \frac{S}{|S| + \delta} \quad \text{avec } \delta > 0 \quad (\text{A.44})$$

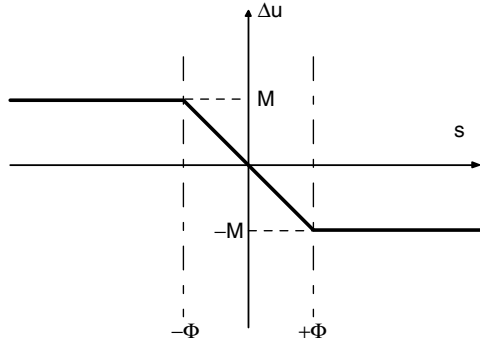


Fig. A.9. Composante Δu par bande continue et saturation au voisinage de la surface de glissement $S = 0$

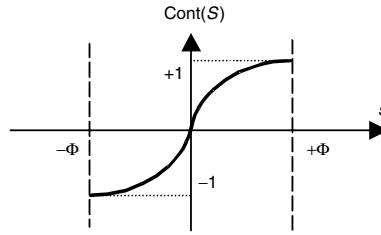


Fig. A.10. Fonction continue de lissage, d'après (Harashima *et al.*, 1986)

Dans le voisinage $|S(t)| \leq \Phi$, la commande devient :

$$u = u_{eq} - K(x, t).Cont(S) \quad (\text{A.45})$$

A l'extérieur de ce voisinage $|S(t)| > \Phi$, la commande redevient discontinue de type :

$$u = u_{eq} - K(x, t).sign(S) \quad (\text{A.46})$$

Pour améliorer le fonctionnement, le paramètre δ est proposé adaptatif par le choix

$$\eta = \begin{cases} 0 & \text{si } |S| > \Phi \\ \delta_0 + |\eta| & \text{si } |S| \leq \Phi \end{cases}$$

avec un caractère intégral portant sur S par le paramètre η défini ci-dessous

$$\eta = \begin{cases} 0 & \text{si } |S| > \Phi \\ \eta_0 \int_0^t S d\tau & \text{si } |S| \leq \Phi \end{cases}$$

En rajoutant la correction intégrale à Δu , la commande s'écrit :

$$u = u_{eq} - K(x, t).Cont(S) + \varepsilon_0 \eta \quad (\text{A.47})$$

dans un voisinage $|S(t)| \leq \Phi$ pour la surface S .

Ce type de commande avec une correction intégrale fonction de S assure une meilleure précision en régime permanent ; il est bien adapté à la poursuite de trajectoire pour les robots manipulateurs. Au voisinage de la trajectoire désirée, la commande est continue avec (A.47), c'est à dire le système suit presque parfaitement la trajectoire désirée (sans oscillations notables). Si la trajectoire désirée est modifiée brutalement, la commande à structure variable redevient discontinue de type (A.46).

La constante Φ est déterminée à partir des commutations de la surface et les constantes δ_0 , η_0 et ε_0 sont déterminées selon le système concret étudié.

Théorie élémentaire et pratique de la commande par
les régimes glissants

Lopez, P.; Nouri, A.S.

2006, XVI, 338 p. 159 ill., Softcover

ISBN: 978-3-540-31003-7