

Name:	Matrikelnummer:
-------	-----------------

Aufgabe 1: [6 Punkte]

Richtige Ergebnisse ergeben nur bei erkenntlichem Lösungsweg Punkte!

- a) Berechnen Sie den Wert der geometrischen Reihe $\sum_{i=0}^4 \left(\frac{1}{3}\right)^i$ über die **Summenformel** der geometrischen Reihe (4 Nachkommastellen). [3 P.]

Lösung:

$$\sum_{i=0}^4 \left(\frac{1}{3}\right)^i = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^5}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^5}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^5\right) = 1,4938$$

- b) Lösen Sie nach x auf! [3 P.]

$$4 \cdot \ln(3x - 2) = 16$$

Lösung:

$$\begin{aligned} 4 \cdot \ln(3x - 2) = 16 &\Leftrightarrow \ln(3x - 2) = 4 \Leftrightarrow e^4 = 3x - 2 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{e^4 + 2}{3} = 18,86 \end{aligned}$$

Name:	Matrikelnummer:
-------	-----------------

Aufgabe 2: [7 Punkte]

- a) Bei welchem Zinssatz würden 4.000 € bei stetiger Verzinsung in 2 Jahren auf 4.290,03 € anwachsen? (Rundung auf eine Nachkommastelle bei Prozentschreibweise!) [3 P.]
- b) Vergleichen Sie den Endwert aus a) mit einer Verzinsung mit monatlichen Zinszahlungsterminen. Der in a) errechnete Zinssatz gibt den zu verwendenden Jahreszinssatz an!

Welcher finanzielle Unterschied ergibt sich? [4 P.]

(Wenn Sie a) nicht gelöst haben, setzen Sie für Teil b) den Zinssatz $i=5\%$ p.a. an! Berechnen Sie dann sowohl den Endwert bei monatlicher als auch bei stetiger Verzinsung sowie den sich ergebenden Unterschied!)

Lösung:

- a) Bei stetiger Verzinsung gilt $K_n = K_0 \cdot e^{i \cdot n}$, d.h. $4290,03 \text{ €} = 4000 \text{ €} \cdot e^{i \cdot 2}$.

$$\text{Auflösen nach } i \text{ ergibt } i = \frac{\ln\left(\frac{4290,03 \text{ €}}{4000 \text{ €}}\right)}{2} = 0,035.$$

Bei einem Zinssatz von 3,5% p.a. würden bei stetiger Verzinsung 4.000 € in 2 Jahren auf 4.290,03 € anwachsen.

- b) Bei monatlichen Zinsterminen errechnet sich der Endwert zu

$$4000 \text{ €} \cdot \left(1 + \frac{0,035}{12}\right)^{2 \cdot 12} = 4289,59 \text{ €}$$

Es ergibt sich ein Unterschied von nur $4290,03 \text{ €} - 4289,59 \text{ €} = 0,44 \text{ €}$, d.h. von nur 44 Cent!

Name:	Matrikelnummer:
-------	-----------------

Aufgabe 3: [9 Punkte]

- a) Entscheiden Sie ohne zu rechnen, welche Investition sich am wenigsten lohnt sowie welche Investition bei einem Zinssatz $i > 0$ die rentabelste ist! Begründen Sie Ihre jeweilige Entscheidung! [4 Punkte]

	t=0	t=1	t=2	t=3
A	-100 €	10 €	20 €	120 €
B	-100 €	40 €	10 €	110 €
C	-100 €	20 €	20 €	120 €

Lösung:

Investition A lohnt im Vergleich mit Investition C weniger, da im Zeitpunkt $t=1$ der Rückfluss geringer ist als bei Investition C und die sonstigen Rückflüsse gleich hoch sind. Da sich Investition B mehr lohnt als Investition C (s.u.), lohnt sich daher A am wenigsten.

Am meisten lohnt sich Investition B, da früher höhere Rückflüsse stattfinden als bei C (man kann von den 40 € in $t=1$ 20 € anlegen, und in $t=2$ sowie $t=3$ jeweils 10 € abheben. Man hat dann in $t=2$ ebenfalls 20 € und in $t=3$ 120 € zur Verfügung, aber hat zusätzlich noch Zinsen erwirtschaftet.)

- b) Welche Amortisationsdauer hat die folgende Investition bei einem Zinssatz von 5% p.a.? Begründen Sie Ihr Ergebnis! [5 Punkte]

t=0	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5
-200 €	100 €	50 €	60 €	20 €	150 €

Lösung:

Nach 3 Jahren beträgt der Nettobarwert der Investition -7,58 €.
Nach 4 Jahren beträgt der Nettobarwert der Investition 8,87 €.

Die Investition hat sich nach 3 Jahren noch nicht amortisiert, nach 4 Jahren hat sie sich amortisiert. Die Amortisationsdauer beträgt demnach 4 Jahre.

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 4: [8 Punkte]

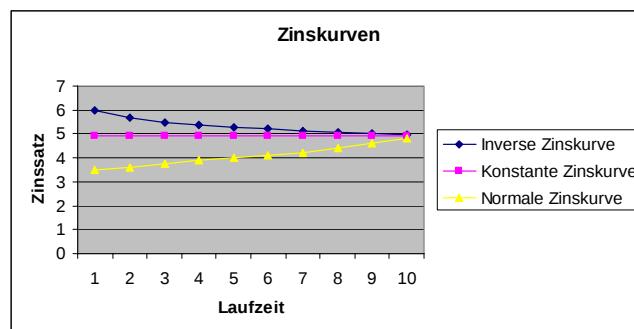
a) Was ist eine inverse Zinsstruktur?

Erklären Sie den Begriff verbal in einem oder zwei Sätzen [2.P.]
und zeichnen (skizzieren) Sie eine inverse Zinsstrukturkurve [2.P.].

Lösung:

Finanzprodukte mit höheren Laufzeiten tragen niedrigere Zinsen als Finanzprodukte mit geringeren Laufzeiten.

Skizze (blaue Kurve):



b) Aus Spekulationsmotiven haben Sie einen Cap mit einem Capzinssatz von 4,2% über 100.000 € mit Zinsfestsetzungsterminen am 15.1. jeden Jahres (Referenzzinssatz: 12-Monats-Euribor) gekauft.

Wann bekommen Sie welche Zahlungen, wenn

- Am 15.1. 2007 der 12-Monats-Euribor 4,6% beträgt [2 P.]

Lösung:

Am 14.1.2008 bekommt man 400 €.

- Am 15.1. 2008 der 12-Monats-Euribor 3,9% beträgt [2 P.]

Lösung:

Am 14.1.2009 bekommt man keine Ausgleichszahlung.

Name:	Matrikelnummer:
-------	-----------------

Aufgabe 5: [8 Punkte]

Sie führen eine Altersvorsorgeberatung für einen Freund durch. Ihr Freund ist momentan 22 Jahre alt und möchte mit 65 Jahren in Rente gehen. Dann möchte er für 20 Jahre zusätzlich zur staatlichen Rente 500 € pro Monat aus seiner privaten Rentenvorsorge erhalten. Es reicht ihm, das Geld jeweils am Ende des Jahres in einem Betrag zu erhalten.

Welchen Betrag muss er bis zum Eintritt ins Rentenalter jährlich nachschüssig einzahlen, wenn der Zinssatz für die gesamte Zeit mit 4% p.a. angesetzt werden kann?

Lösung:

In der Aufgabe treten zwei „Renten“ in Erscheinung. Die Altersrente, die über 20 Jahre bezogen werden soll und die „Rente“, d.h. der Zahlungsstrom periodischer Einzahlungen über 43 Jahre, zum Aufbau des zu verrentenden Vermögens.

1. Schritt: Während der 20 Jahre ab dem 65. Geburtstag sollen pro Jahr $500 \text{ €} \cdot 12 = 6.000 \text{ €}$ nachschüssig ausgezahlt werden. Dazu muss am 65. Geburtstag der Barwert von

$$B = 6.000 \frac{1}{1,04^{20}} \frac{1,04^{20} - 1}{0,04} = 81.541,96 \text{ €}$$

zur Verfügung stehen.

2. Der Barwert der Altersrente entspricht dem Endwert der 43 Jahre lang einzuzahlenden Rente. Diese ist nach R aufzulösen!

$$S = R \frac{1,04^{43} - 1}{0,04} = 81.541,96 \Rightarrow R = 81.541,96 \frac{0,04}{1,04^{43} - 1} = 741,21.$$

Ihr Freund muss also bis zu seinem 65. Geburtstag jährlich 741,21 € einzahlen.

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 6: [7 Punkte]

Müllers nehmen zur Finanzierung einer Eigentumswohnung für 10 Jahre ein Annuitätendarlehen über 120.000 € auf, das am Ende des zehnten Jahres getilgt sein soll! Sie erhalten einen Zinssatz von 4,5% p.a.!

Berechnen Sie den Tilgungsplan für das erste Jahr (nachschüssige jährliche Zahlungsweise)!

(Wenn Sie die Annuität nicht ermitteln können, rechnen Sie mit einer Annuität von 10.000 €).

Jahr	Schuld zu Beginn des Jahres	Zinsen	Tilgung	Annuität	Schuld am Ende des Jahres
1	120.000 €	5.400 €	9.765,46 €	15.165,46 €	110.234,54 €

Lösung:

Zunächst ist die Annuität auszurechnen

$$A = K_0 \cdot q^n \frac{q-1}{q^n-1} = 120.000 \text{ €} \cdot 1,045^{10} \frac{0,045}{1,045^{10}-1} = 15.165,46 \text{ €}.$$

Die Zinsen im ersten Jahr ergeben sich zu

$$Z = K_0 \cdot i = 120.000 \text{ €} \cdot 0,045 = 5.400,00 \text{ €}.$$

Damit ergibt sich für die Tilgung im ersten Jahr

$$T = A - Z = 15.165,46 \text{ €} - 5.400,00 \text{ €} = 9.765,46 \text{ €}.$$

Die Restschuld am Ende des Jahres errechnet sich aus der Restschuld zu Beginn des Jahres abzüglich der Tilgung, d.h.

$$RS_{\text{Ende}} = 120.000 \text{ €} - 9.765,46 \text{ €} = 110.234,54 \text{ €}.$$

Finanzmathematik

Vom klassischen Sparbuch zum modernen Zinsderivat

Wüst, K.

2006, XVIII, 209 S., Softcover

ISBN: 978-3-8349-0270-2