Lösungen zu den Übungsaufgaben im Kapitel 1 des Lehrbuches
Operations Research – Deterministische Modelle und Methoden
von Stephan Dempe und Heiner Schreier

1. Lösen Sie die folgende lineare Optimierungsaufgabe sowohl mit dem primalen Simplexalgorithmus als auch graphisch:

$$\begin{array}{rcrcl} -x_1 & + & 2x_2 & \to & \max \\ -3x_1 & + & 4x_2 & \leq & 8 \\ x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

Lösung mit dem Simplexalgorithmus:

		-1	2	0	0		
BV	c_B	x_1	x_2	u_1	u_2	b	θ
u_1	0	-3	4	1	0	8	$2 \leftarrow$
u_2	0	1	2	0	1	4	2
		1	$-2 \uparrow$	0	0	0	
x_2	2	$-3/4$	1	$1/4$	0	2	$-$
u_2	0	$5/2$	0	$-1/2$	1	0	$0 \leftarrow$
		$-1/2 \uparrow$	0	$1/2$	0	4	
x_2	2	0	1	$1/10$	$3/10$	2	$-$
x_1	-1	1	0	$-1/5$	$2/5$	0	$0 \leftarrow$
		0	0	$2/5$	$1/5$	4	

Die optimale Lösung ist $x_1 = 0,\ x_2 = 1$, mit dem optimalen Zielfunktionswert $z^* = 4$. Die Lösung ist entartet, sie wurde bei der ersten Berechnung nicht als optimal erkannt.

Graphische Lösung:

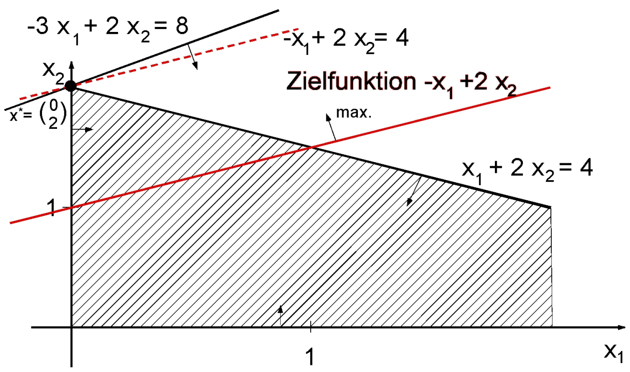

Abbildung 1: Graphische Lösung der ersten Übungsaufgabe

2. Bestimmen Sie mit Hilfe des Zwei-Phasen-Algorithmus und auch graphisch die Menge aller optimalen Lösungen der folgenden Aufgabe:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & \to & \max \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & \leq & 18 \\ -x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & \geq & 5 \\ & & x_1, & x_2, & x_3 & \geq & 0. \end{array}$$

Hinweis: Für eine graphische Lösung kann die erste Nebenbedingung nach einer Variablen aufgelöst und das Ergebnis in die Zielfunktion und die anderen Nebenbedingungen eingesetzt werden.

Lösung mit dem Simplexalgorithmus:

Die Aufgabe der ersten Phase lautet

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcl} & & & & & & & & & - & v_1 & - & v_2 & \to & \max \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & + & v_1 & & & = & 5 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & + & u_1 & & & & & & & = & 18 \\ -x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & & & - & u_2 & & & + & v_2 & = & 5 \\ & & & & & & & & \multicolumn{5}{r}{x_1, x_2, x_3, u_1, u_2, v_1, v_2} & \geq & 0. \end{array}$$

Somit erhält man die folgende Simplextabelle für die Aufgabe der ersten Phase:

							-1	-1			
BV	c_B	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	v_1	v_2	b	θ	
v_1	-1	1	1	1	0	0	1	0	5	5	
u_1	0	3	4	2	1	0	0	0	18	9	
v_2	-1	-1	4	(1)	0	-1	0	1	5	5	$\leftarrow$
		0	-5	$-2\uparrow$	0	1	0	0	-10		
v_1	-1	2	-3	0	0	(1)	1		0	0	$\leftarrow$
u_1	0	5	-4	0	1	2	0		8	4	
x_3	0	-1	4	1	0	-1	0		5	$-$	
		-2	3	0	0	$-1\uparrow$	0		0		
u_2	0	2	-3	0	0	1			0		
u_1	0	1	2	0	1	0			8		
x_3	0	1	1	1	0	0			5		
		0	0	0	0	0			0		

Somit haben wir eine zulässige Lösung der Ausgangsaufgabe gefunden.

Die Simplextabelle für die Aufgabe der 2. Phase lautet nun wie folgt:

		2	3	1					
BV	c_B	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	b	θ	
u_2	0	2	-3	0	0	1	0	–	
u_1	0	1	(2)	0	1	0	8	4	$\leftarrow$
x_3	1	1	1	1	0	0	5	5	
		-1	$-2\uparrow$	0	0	0	5		
u_2	0	7/2	0	0	3/2	1	12		
x_2	3	1/2	1	0	1/2	0	4		
x_3	1	1/2	0	1	$-1/2$	0	1		
		0	0	0	1	0	13		

Somit wurde bei $x_1 = 0$, $x_2 = 4$ und $x_3 = 1$ eine optimale Basislösung mit dem Zielfunktionswert 13 gefunden. Wird nochmals nach der 1. Spalte entwickelt, so findet man eine weitere optimale Basislösung $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ und $x_3 = 1$. Die Menge aller optimalen Lösungen lässt sich als konvexe Linearkombination dieser optimalen Basislösungen darstellen:

$$M_{opt} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + (1-\lambda) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \,:\; \lambda \in [0;1] \right\}.$$

Graphische Lösung:

Wird die Variable x_3 in der Ausgangsaufgabe durch $5 - x_1 - x_2$ ersetzt, so erhält man die Ersatzaufgabe

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & 2x_2 & \to & \max \\ x_1 & + & 2x_2 & \leq & 8 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & \leq & 0 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

Dabei entspricht die Ungleichung $x_1 + x_2 \leq 5$ der Ungleichung $x_3 \geq 0$. Durch Ablesen aus der Graphik in Abbildung 2 erhält man folgende Lösung der Ersatzaufgabe:

$$L_E = \{(x_1, x_2) :\; x_1 \in [0;2],\; x_2 = 4 - x_1/2\}.$$

Durch Hinzufügen von $x_3 = 5 - x_1 - x_2$ erhält man die Lösungsmenge der Ausgangsaufgabe

$$M_{opt} = \{(x_1, x_2, x_3) :\; x_1 \in [0;2],\; x_2 = 4 - x_1/2,\; x_3 = 1 - x_1/2\}.$$

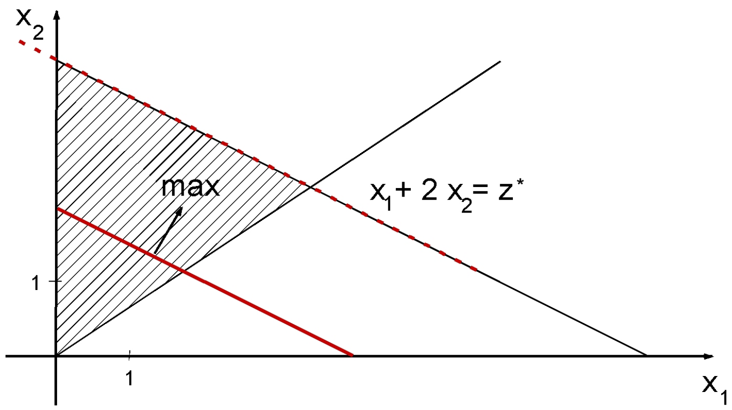

Abbildung 2: Graphische Lösung der 2. Übungsaufgabe

Man kann leicht nachweisen, dass diese Menge mit der durch das Simplexverfahren erhaltenen Lösungsmenge übereinstimmt.

3. Lösen Sie die nachfolgende Aufgabe mit dem dualen Simplexalgorithmus:

$$\begin{array}{rcrcrcl} -x_1 & - & 4x_2 & - & 2x_3 & \rightarrow & \max \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & -2 \\ -2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & \leq & -4 \\ & & x_1, & x_2, & x_3 & \geq & 0. \end{array}$$

Lösung: Die Simplextabelle für die Aufgabe lautet wie folgt:

		-1	-4	-2				
BV	c_B	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	b	
u_1	0	(-1)	1	1	1	0	-2	$\leftarrow$
u_2	0	-2	-1	-1	0	1	-4	
		1	4	2	0	0	0	
		$-1 \uparrow$	–	–	–	–		
x_1	-1	1	-1	-1	-1	0	2	
u_2	0	0	-3	-3	-2	1	0	
		0	5	3	1	0	-2	

Somit ist $x_1 = 2$, $x_2 = 0$ eine eindeutige optimale Lösung mit optimalem Zielfunktionswert -2.

4. Es wird eine Zweiprodukt-Unternehmung betrachtet. Produkt 1 beansprucht in der Abteilung I genau 5 Zeiteinheiten je Stück. In der Abtei-

lung II kann die Intensität des Aggregates variiert werden und das Produkt benötigt entweder 5, 4 oder 3 Zeiteinheiten je Stück. Die variablen Kosten je Stück betragen 20, 70 oder 160 Geldeinheiten, je nachdem, ob das Produkt mit der niedrigsten, mittleren oder höchsten Intensität gefertigt wird. Der Verkaufspreis beträgt grundsätzlich p Geldeinheiten. Für das Produkt 2 bestehen die Möglichkeiten der Fertigung einer Normalausführung oder einer Luxusvariante. Dafür benötigt man je Stück 2 beziehungsweise 3 Zeiteinheiten in Abteilung I und 3 beziehungsweise 4 Zeiteinheiten in Abteilung II. Der Gewinn beträgt 40 beziehungsweise 60 Geldeinheiten je Stück. Insgesamt sollen vom Produkt 2 genau 20000 Stück produziert werden. Die Kapazitäten der Abteilungen betragen für die betrachtete Periode 70000 Zeiteinheiten in Abteilung I beziehungsweise 82000 Zeiteinheiten in Abteilung II.
Bestimmen Sie in Abhängigkeit vom variablen Verkaufspreis p die optimale Produktion der Unternehmung, wenn der Gewinn maximiert werden soll!

Modellierung Wir verwenden die folgenden Variablen:

x_1 ... Produktionsmenge von Produkt 1 bei niedriger Intensität
x_2 ... Produktionsmenge von Produkt 1 bei mittlerer Intensität
x_3 ... Produktionsmenge von Produkt 1 bei hoher Intensität

y_1 ... Produktionsmenge von Produkt 2 in Normalausführung
y_2 ... Produktionsmenge von Produkt 2 in Luxusausführung.

Wir erhalten somit die Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 5x_1 & + & 5x_2 & + & 5x_3 & + & 2y_1 & + & 3y_2 & \leq & 70000 \\ 5x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & + & 3y_1 & + & 4y_2 & \leq & 82000 \\ & & & & & & y_1 & + & y_2 & = & 20000 \\ & & & & \multicolumn{5}{r}{x_1, x_2, x_3, y_1, y_2} & \geq & 0. \end{array}$$

Die Zielfunktion entspricht dem Gesamtgewinn. Sie lautet

$$z(p) = (p-20)x_1 + (p-70)x_2 + (p-160)x_3 + 40y_1 + 60y_2 \rightarrow \max .$$

Wir ersetzen nun die Variable y_2 in den Ungleichungen durch $y_2 = 20000 - y_1$. Dann erhalten wir die folgende Aufgabe:

$$(p-20)x_1 + (p-70)x_2 + (p-160)x_3 + 40y_1 + 60y_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 5x_1 & + & 5x_2 & + & 5x_3 & - & y_1 & & & \leq & 10000 \\ 5x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & - & y_1 & & & \leq & 2000 \\ & & & & & & y_1 & + & y_2 & = & 20000 \\ & & & & \multicolumn{5}{r}{x_1, x_2, x_3, y_1, y_2} & \geq & 0. \end{array}$$

Für die Berechnung der optimalen Lösungen führen wir zwei Schlupfvariablen u_1, u_2 ein und betrachten das folgende Simplextableau:

				-20	-70	-160	40	60	0	0	
				1	1	1	0	0	0	0	
	BV	c_B	$\hat{c}_B$	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	u_1	u_2	b
1.	u_1	0	0	5	5	5	-1	0	1	0	10000
	u_2	0	0	(5)	4	3	-1	0	0	1	2000
	y_2	60	0	0	0	0	1	1	0	0	20000
				20	70	160	20	0	0	0	1200000
				-1	-1	-1	0	0	0	0	0
2.	u_1	0	0	0	1	2	0	0	1	-1	8000
	x_1	-20	1	1	$4/5$	$3/5$	$-1/5$	0	0	$1/5$	400
	y_2	60	0	0	0	0	(1)	1	0	0	20000
				0	54	148	24	0	0	-4	1192000
				0	$-1/5$	$-2/5$	$-1/5$	0	0	$1/5$	400
3.	u_1	0	0	0	1	2	0	0	1	-1	8000
	x_1	-20	1	1	$(4/5)$	$3/5$	0	$1/5$	0	$1/5$	4400
	y_1	40	0	0	0	0	1	1	0	0	20000
				0	54	148	0	24	0	-4	712000
				0	$-1/5$	$-2/5$	0	$1/5$	0	$1/5$	4400
4.	u_1	0	0	$-5/4$	0	$(5/4)$	0	$-1/4$	1	$-5/4$	2500
	x_2	-70	1	$5/4$	1	$3/4$	0	$1/4$	0	$1/4$	5500
	y_1	40	0	0	0	0	1	1	0	0	20000
				-67.5	0	107.5	0	-37.5	0	-17.5	415000
				0.25	0	-0.25	0	0.25	0	0.25	5500
5.	x_3	-160	1	-1	0	1	0	$-1/5$	$4/5$	-1	2000
	x_2	-70	1	2	1	0	0	$2/5$	$-3/5$	1	4000
	y_1	40	0	0	0	0	1	1	0	0	20000
				40	0	0	0	-16	-86	90	200000
				0	0	0	0	$1/5$	$1/5$	0	6000

Man kann nun ablesen, für welche Preise p die einzelnen Basislösungen optimal sind. Die optimale Produktion der Unternehmung ist also wie folgt:

ST	p	$x_1(p)$	$x_2(p)$	$x_3(p)$	$y_1(p)$	$y_2(p)$	$z_{max}(p)$
1.	$[0;20]$	0	0	0	0	20000	1200000
2.	$[20;120]$	400	0	0	0	20000	$1192000+400p$
3.	$[120;270]$	4400	0	0	20000	0	$712000+4400p$
4.	$[270;430]$	0	5500	0	20000	0	$415000+5500p$
5.	$[430;\infty)$	0	4000	2000	20000	0	$200000+6000p$

Bemerkungen:

(a) Für $p < 20$ wird Produkt 1 nicht produziert. Bei Produkt 2 wird nur die Luxusvariante produziert. Die Kapazitäten sind nicht ausgelastet.

(b) Für $p \in [20;120]$ wird Produkt 1 bei niedriger Intensität rentabel. Die Kapazität von Abteilung II schränkt die Produktion ein.

(c) Ab $p \geq 120$ ist es rentabel, die erforderlichen 20000 Stück des Produktes 2 durch die weniger Zeit benötigende Normalausführung aufzubringen. Die freiwerdende Kapazität wird nun für die Kostengünstigere Produktion von Produkt 1 genutzt.

(d) Eine Erhöhung der Intensität in Abteilung II auf die mittlere Stufe ist erst ab einem Preis von 270 GE zu empfehlen.

(e) Erst ab einem Preis von 430 GE ist z.T. die höchste Intensität rentabel. Das volle Umsteigen auf Variante 3 ist durch Kapazitätsauslastung in Abteilung I nicht möglich.

5. Gegeben ist die einparametrische lineare Optimierungsaufgabe

$$\begin{array}{rccccc} z = & 2x_1 & + & x_2 & \to & \max \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & t \\ & 0 & \leq & x_1 & \leq & 1 \\ & 0 & \leq & x_2 & \leq & 1 \end{array}$$

mit dem Parameter $t \in \mathbb{R}$.
Begründen Sie, weshalb die Optimierungsaufgabe für $t < 0$ unlösbar ist!
Bestimmen Sie mit Hilfe der graphischen Darstellung die Optimalmengen für $t \geq 0$!
Skizzieren Sie anschließend die Optimalwertfunktion!
Welche Ergebnisse erhält man, wenn die Zielfunktion z zu minimieren ist?

Lösung: Da

$$t \geq \underbrace{x_1}_{\geq 0} + \underbrace{x_2}_{\geq 0} \geq 0$$

gilt für alle zulässigen Punkte, ist für $t < 0$ der zulässige Bereich leer. Somit ist in diesem Fall die Optimierungsaufgabe unlösbar.

Sei also im folgenden $t \geq 0$. Dann erhalten wir für die Fälle $t \in [0; 1]$, $t \in [1; 2]$ und $t \geq 2$ die Skizzen in den Abbildungen 3, 4, 5.

Aus den graphischen Darstellungen können nun die Optimalmengen abgelesen werden:

$$\Psi(t) = \begin{cases} \{(t; 0)\} & \text{für } t \in [0; 1] \\ \{(1; 1-t)\} & \text{für } t \in [1; 2] \\ \{(1; 1)\} & \text{für } t \geq 2. \end{cases}$$

Die optimalen Lösungen sind für $t \geq 0$ also stets eindeutig. Die zugehörige Optimalwertfunktion ist

$$\varphi(t) = \begin{cases} 2t & \text{für } t \in [0; 1] \\ 1 + t & \text{für } t \in [1; 2] \\ 3 & \text{für } t \geq 2. \end{cases}$$

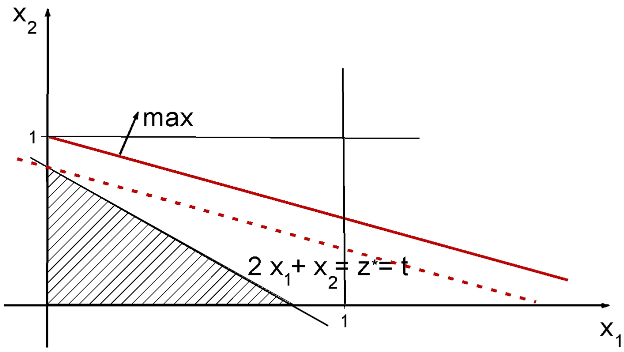

Abbildung 3: Graphische Lösung der Übungsaufgabe 5 für $t \in [0; 1]$.

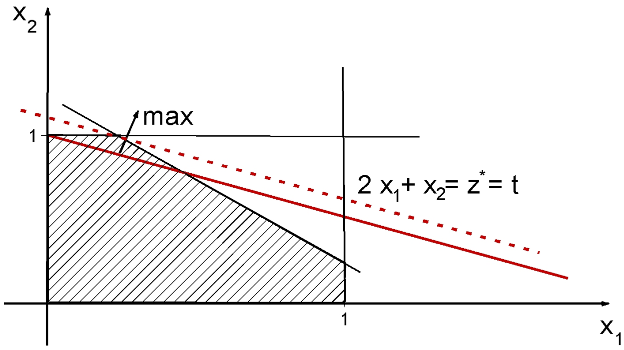

Abbildung 4: Graphische Lösung der Übungsaufgabe 5 für $t \in [1; 2]$.

Diese ist in Abbildung 6 graphisch dargestellt.

Es ist $z = \underbrace{2x_1}_{\geq 0} + \underbrace{x_2}_{\geq 0} \geq 0$ für alle zulässigen Punkte. Somit ist $x_1 = x_2 = 0$ mit $z_{min}(t) = 0$ die eindeutige optimale Lösung für alle $t \geq 0$, wenn die Zielfunktion minimiert wird. Dies kann natürlich auch mit einer Simplextabelle gezeigt werden.

6. Berechnen Sie alle Pareto-optimalen Lösungen der Aufgabe

$$\begin{array}{rcrcrcl}
2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & \rightarrow & \text{„max“} \\
x_1 & - & 4x_2 & - & x_3 & \rightarrow & \text{„max“} \\
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 5 \\
3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & \leq & 18 \\
-x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & \geq & 5 \\
 & & x_1, & & x_2, \quad x_3 & \geq & 0.
\end{array}$$

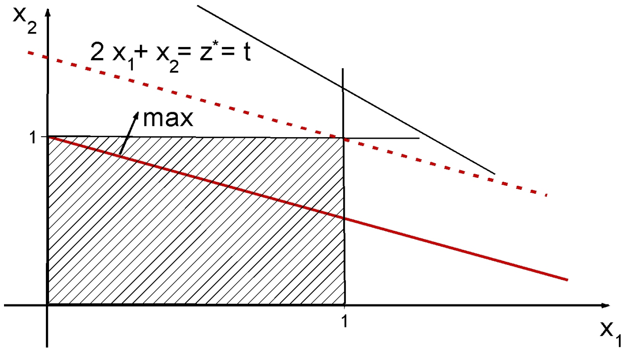

Abbildung 5: Graphische Lösung der Übungsaufgabe 5 für $t \geq 2$.

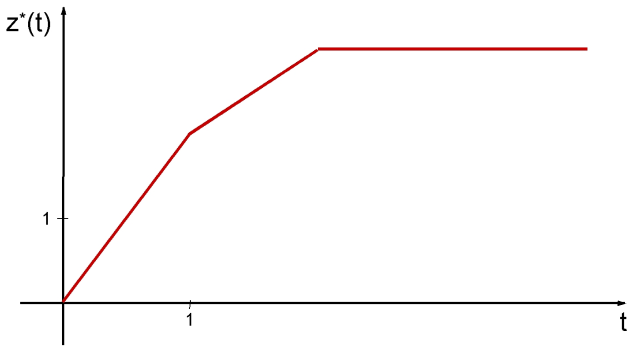

Abbildung 6: Graphische Darstellung des optimalen Zielfunktionswertes.

Lösungen: Zunächst wird eine zulässige Basislösung berechnet.
1. Phase:

$$\begin{array}{rcrcrrrrrcc}
 & & & & & & & -v_1 & -v_2 & \rightarrow & \max \\
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & +v_1 & & = & 5 \\
3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & +u_1 & & & & = & 18 \\
-x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & & -u_2 & & +v_2 & = & 5 \\
 & & & & & \multicolumn{4}{r}{x_1, x_2, x_3, u_1, u_2, v_1, v_2} & \geq & 0
\end{array}$$

		0	0	0	0	0	−1	−1		
BV	c_B	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	v_1	v_2	b	θ
v_1	−1	1	1	1	0	0	1	0	5	5
u_1	0	3	4	2	1	0	0	0	18	4.5
v_2	−1	−1	(4)	1	0	−1	0	1	5	1.25
		0	−5 ↑	−2	0	1	0	0	−10	
v_1	−1	(5/4)	0	3/4	0	1/4		0	15/4	3
u_1	0	4	0	1	1	1		0	13	3.25
x_2	0	−1/4	1	1/4	0	−1/4		1	5/4	−
		−5/4 ↑	0	−3/4	0	−1/4		0	−3.75	
x_1	0	1	0	3/5	0	1/5			3	
u_1	0	0	0	−7/5	1	1/5			1	
x_2	0	0	1	2/5	0	−1/5			2	
		0	0	0	0	0			0	

Um alle Pareto-optimalen Lösungen zu bestimmen, wird die Aufgabe mit der Ersatzzielfunktion

$$z(t) = t(2x_1 + 3x_2 + x_3) + (1 - t)(x_1 - 4x_2 - x_3)$$

für alle $t \in [0; 1]$ gelöst.

$1.ZF$				2	3	1	0	0		
$2.ZF$				1	−4	−1	0	0		
	BV	c_B		x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	b	θ
1.	x_1	2	−1	1	0	3/5	0	1/5	3	15
	u_1	0	0	0	0	−7/5	1	(1/5)	1	5
	x_2	3	−4	0	1	2/5	0	−1/5	2	−
				0	0	7/5	0	−1/5	12	
				0	0	0	0	1 ↑	−5	
2.	x_1	2	−1	1	0	2	−1	0	2	
	u_2	0	0	0	0	−7	5	1	5	
	x_2	3	−4	0	1	−1	1	0	3	
				0	0	0	1	0	13	
				0	0	7	−5	0	−10	

Die erste Basislösung $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$ ist optimal für $t \in [0; 5/6]$ wegen $-0.2t + 1(1 - t) \geq 0$.

Die zweite Basislösung $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 0$ ist optimal für $t \in [5/6; 1]$ wegen $1t - 5(1-t) \geq 0$.

Wird im 1. oder 2. Tableau die Variable x_3 in die Basis aufgenommen, so erhält man weitere optimale Basislösungen für die Fälle $t = 0$ bzw. $t = 1$. Diese Lösungen sind jedoch nicht Pareto-optimal.

Die Menge aller Pareto-optimalen Lösungen ist somit:

$$\Psi_{eff} = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + (1-\lambda) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} : \ \lambda \in [0; 1] \}.$$

Bemerkung: Die Pareto-optimalen Lösungen können auch graphisch ermittelt werden, indem man die durch Ersetzen von $x_3 = 5 - x_1 - x_2$ entstehende Vektoroptimierungsaufgabe löst.

http://www.springer.com/978-3-519-00448-6

Operations Research
Deterministische Modelle und Methoden
Dempe, S.; Schreier, H.
2006, 383 S. Mit Online-Extras., Softcover
ISBN: 978-3-519-00448-6