Lösungen zu den Übungsaufgaben im Kapitel 2 des Lehrbuches
Operations Research – Deterministische Modelle und Methoden
von Stephan Dempe und Heiner Schreier

Aufgabe 1: Ein Stromhandelsunternehmen hat Stromlieferverträge mit Kunden in vier Ballungszentren (B_1, B_2, B_3, B_4) und bezieht den Strom von drei Kraftwerksstandorten (K_1, K_2, K_3). Die vertraglich vereinbarten Liefermengen b_j zu den B_j, die Bezugsmengen k_i zu den K_i und die Stromdurchleitungskosten c_{ij} für eine ME Strom von K_i nach B_j sind in der folgenden Tabelle gegeben:

c_{ij}	B_1	B_2	B_3	B_4	k_i
K_1	4	3	5	11	20
K_2	10	3	2	6	30
K_3	6	11	3	7	40
b_j	16	20	14	40	

a) Bestimmen Sie einen ersten Stromlieferungsplan mit Hilfe der Approximationsmethode von Vogel! Ausgehend von diesem Plan ist ein optimaler Lieferplan zu erzeugen! Gibt es weitere optimale Pläne?
b) Durch eine Naturkatastrophe seien die Stromleitungen von K_1 nach B_2 und von K_1 nach B_3 unterbrochen. Um wieviel verteuern sich die gesamten Stromleitungskosten, wenn unter den gegebenen Bedingungen ein optimaler Stromlieferungsplan bestimmt wird?
c) Gibt es einen Stromlieferungsplan, bei dem nur vier Stromleitungen gebraucht werden?

Lösung: a) Bei Verwendung der Approximationsregel von Vogel werden die Felder $(3,3)$, $(2,2)$, $(1,1)$, $(1,4)$, $(2,4)$ und $(3,4)$ in der angegebenen Reihenfolge besetzt. Bei den letzten drei Feldern erfolgt die Besetzung zwangsweise, da nach Besetzung der ersten drei Felder nur noch die ungestrichene Spalte 4 existiert. Es ergibt sich damit der folgende Transportplan:

x_{ij}					
	16			4	20
		20		10	30
			14	26	40
	16	20	14	40	

Um den vorliegenden Transportplan auf Optimalität zu testen, werden als nächstes die Potentiale und die Optimalitätsindikatoren berechnet. In der folgenden Tabelle sind in den gerahmten Feldern die Kosten für die besetzten Felder angegeben. Aus diesen werden die Potentiale bestimmt. In allen anderen Feldern sind die Optimalitätsindikatoren eingetragen.

Δ_{ij}					u_i
	$\boxed{4}$	-5	-2	$\boxed{11}$	0
	11	$\boxed{3}$	0	$\boxed{6}$	-5
	6	7	$\boxed{3}$	$\boxed{7}$	-4
v_j	4	8	7	11	

Der vorliegende Transportplan ist wegen $\Delta_{12} = -5 < 0$ nicht optimal. Wir nehmen das Feld $(1, 2)$ in die Basis auf. Dann erhalten wir den folgenden Transportplan mit den zugehörigen Optimalitätsindikatoren:

x_{ij}					
	16	4			20
		16		14	30
			14	26	40
	16	20	14	40	

Δ_{ij}					u_i
	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$	3	5	0
	6	$\boxed{3}$	0	$\boxed{6}$	0
	1	7	$\boxed{3}$	$\boxed{7}$	1
v_j	4	3	2	6	

Da alle Optimalitätsindikatoren nichtnegativ sind, ist der vorliegende Transportplan optimal. Wegen $\Delta_{23} = 0$ ist dies jedoch nicht der einzige optimale Transportplan. Wird $(2, 3)$ in die Basis aufgenommen, so erhält man

x_{ij}					
	16	4			20
		16	14		30
			0	40	40
	16	20	14	40	

Δ_{ij}					u_i
	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$	3	5	0
	6	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$	0	0
	1	7	$\boxed{3}$	$\boxed{7}$	1
v_j	4	3	2	6	

Dies ist ebenfalls ein optimaler Transportplan. Wird nun die konvexe Linearkombination gebildet, so erhält man alle optimalen Lösungen des Transportproblems:

$$\begin{array}{llll} x_{11} = 16 & x_{12} = 4 & x_{13} = 0 & x_{14} = 0 \\ x_{21} = 0 & x_{22} = 16 & x_{23} = 14(1-t) & x_{24} = 14t \\ x_{31} = 0 & x_{32} = 0 & x_{33} = 14t & x_{44} = 40 + 14t, \quad \forall t \in [0; 1]. \end{array}$$

Die optimalen Lieferkosten betragen 432 GE.

b) Angenommen die Stromleitungen von K_1 nach B_2 und B_3 sind unterbrochen. Dann werden die Kosten $c_{12} = c_{13} = M$ gesetzt mit M hinreichend groß, z.B. $M = 11 \cdot 90 + 1$.

Wir ersetzen nun die Kosten im ersten optimalen Transportplan und überprüfen die Optimalität:

x_{ij}					
	16	4			20
		16		14	30
			14	26	40
	16	20	14	40	

Δ_{ij}					u_i
	$\boxed{4}$	$\boxed{M}$	1	$8-M$	0
	$3+M$	$\boxed{3}$	0	$\boxed{6}$	$3-M$
	$M-2$	7	$\boxed{3}$	$\boxed{7}$	$4-M$
v_j	4	M	$M-1$	$3+M$	

Wegen $\Delta_{34} = 8 - M < 0$ ist der Transportplan nicht optimal. Wir nehmen also $(3, 4)$ in die Basis auf:

x_{ij}					
	16			4	20
		20		10	30
			14	26	40
	16	20	14	40	

Δ_{ij}					u_i
	$\boxed{4}$	$M-8$	$M-7$	$\boxed{11}$	0
	11	$\boxed{3}$	0	$\boxed{6}$	-5
	6	7	$\boxed{3}$	$\boxed{7}$	-4
v_j	4	8	7	11	

Dieser Lieferplan ist optimal. Der zugehörige Zielfunktionwert beträgt 452 GE, d.h. die Stromleitungskosten verteuern sich um 20 GE.

c) Ja, es gibt einen Stromlieferplan, der nur 4 Stromleitungen benutzt:

$$x_{12} = 20, \quad x_{21} = 16, \quad x_{23} = 14 \quad \text{und} \quad x_{34} = 40.$$

Alle anderen Stromleitungen werden nicht benutzt.

Aufgabe 2: Gegeben seien die folgenden zwei Kostenmatrizen:

$$C^1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 \\ 5 & 6 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & -5 \\ 2 & -3 & 2 & -2 \\ 6 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Es seien $a = (10\ 12\ 15)^\top$ und $b = (9\ 9\ 9\ 10)^\top$. Lösen Sie mit diesen Daten das klassische Transportproblem KTP für die Kostenmatrizen $C = C^1$ und $C = C^2$, das offene Transportproblem TP$(\geq, \geq)$ für $C = C^1$ und das offene Transportproblem TP$(\leq, \leq)$ für $C = C^2$!

b) Es seien $a = (10\ 18\ 12)^\top$ und $b = (10\ 5\ 10\ 10)^\top$. Lösen Sie mit diesen Daten die offenen Transportprobleme TP$(\leq, =)$ und TP$(=, \geq)$ mit der Kostenmatrix $C = C^1$!

Lösung: a) Wir lösen zuerst das klassische Transportproblem für $C = C^1$. Als Eröffnungsverfahren verwenden wir hier die Nordwesteckenregel. Anschließend wird die Optimaliät des Transportplans überprüft.

x_{ij}					
	9	1			10
		8	4		12
			5	10	15
	9	9	9	10	

Δ_{ij}					u_i
	$\boxed{1}$	$\boxed{3}$	8	2	0
	1	$\boxed{6}$	$\boxed{2}$	0	3
	1	0	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	2
v_j	1	3	-1	0	

Da alle Optimalitätsindikatoren nichtnegativ sind, ist dieser Transportplan bereits optimal. Es existierten jedoch noch optimale Transportpläne. Der optimale Zielfunktionswert beträgt 93.

Nun lösen wir das klassische Transportproblem für $C = C^2$. Als Eröffnungsverfahren verwenden wir hier die Approximationsregel von Vogel. Anschließend wird die Optimaliät des Transportplans überprüft.

x_{ij}					
	9			1	10
		3		9	12
		6	9		15
	9	9	9	10	

Δ_{ij}					u_i
	$\boxed{-2}$	7	8	$\boxed{-5}$	0
	1	$\boxed{-3}$	4	$\boxed{-2}$	3
	3	$\boxed{-1}$	$\boxed{0}$	4	5
v_j	-2	-6	-5	-5	

Da alle Optimalitätsindikatoren positiv sind für die Nichtbasisfelder, ist dieser Transportplan bereits optimal. Ein weiterer optimaler Transportplan existiert nicht. Der optimale Zielfunktionswert beträgt -56.

Wir untersuchen nun das offene Transportproblem TP($\geq, \geq$) für $C = C^1$. Um das Problem in ein klassisches Transportproblem umzuformen, wird ein fiktiver Erzeuger A_4 mit dem Vorrat $a_4 = 9 + 9 + 9 + 10$ und ein fiktiver Verbraucher B_5 mit dem Bedarf $b_5 = 10 + 12 + 15$ eingeführt. Zur Bewertung der Felder der neuen Zeile sind die Spaltenminima zu bilden und die Zeilennummer zu notieren, in welchen sie angenommen werden. Zur Bewertung der Felder der neuen Spalte sind die Zeilenminima zu bilden und die Zeilennummer zu notieren, in welchen sie angenommen werden. Weiter wird $c_{45} = 0$ gesetzt. Dann erhalten wir die folgende Datentabelle:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	1	3	7	2	1	10
A_2	5	6	2	3	2	12
A_3	4	5	1	2	1	15
A_4	1	3	1	2	0	37
b_j	9	9	9	10	37	

Mit der Nordwesteckenregel als Eröffnungsverfahren erhalten wir nun die folgende Rechnung:

y_{ij}						
	9	1				10
		8	4			12
			5	10	0	15
					37	37
	9	9	9	10	37	

Δ_{ij}						u_i
	$\boxed{1}$	$\boxed{3}$	8	2	2	0
	1	$\boxed{6}$	$\boxed{2}$	0	0	3
	1	0	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{1}$	2
	-1	(-1)	1	1	$\boxed{0}$	1
v_j	1	3	-1	0	-1	

y_{ij}						
	9	1				10
		3	9			12
				10	5	15
		5			32	37
	9	9	9	10	37	

Δ_{ij}						u_i
	$\boxed{1}$	$\boxed{3}$	8	1	1	0
	1	$\boxed{6}$	$\boxed{2}$	-1	(-1)	3
	2	1	1	$\boxed{2}$	$\boxed{1}$	1
	0	$\boxed{3}$	2	1	$\boxed{0}$	0
v_j	1	3	-1	1	0	

y_{ij}						
	9	1				10
			9		3	12
				10	5	15
		8			29	37
	9	9	9	10	37	

Δ_{ij}						u_i
	$\boxed{1}$	$\boxed{3}$	7	1	0	0
	2	1	$\boxed{2}$	0	$\boxed{2}$	2
	2	1	0	$\boxed{2}$	$\boxed{1}$	1
	0	$\boxed{3}$	1	1	$\boxed{0}$	0
v_j	1	3	0	1	0	

Da alle Optimalitätsindikatoren nichtnegativ sind, ist der letzte Transportplan optimal. Hieraus erhält man einen optimalen Transportplan für das offene Transportproblem TP($\geq, \geq$):

x_{ij}					
	9	9			≥ 10
			12		≥ 12
			5	10	≥ 15
	≥ 9	≥ 9	≥ 9	≥ 10	

Der optimale Zielfunktionswert ist 85.

Wir untersuchen nun das offene Transportproblem TP($\leq, \leq$) für $C = C^2$. Um das Problem in ein klassisches Transportproblem umzuformen, wird ein fiktiver Erzeuger A_4 mit dem Vorrat $a_4 = 9 + 9 + 9 + 10$ und ein fiktiver Verbraucher B_5 mit dem Bedarf $b_5 = 10 + 12 + 15$ eingeführt. Die Felder in der neuen Zeile bzw. Spalte werden mit Null bewertet. Die zugehörige

Datentabelle ist:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	-2	1	3	-5	0	10
A_2	2	-3	2	-2	0	12
A_3	6	-1	0	4	0	15
A_4	0	0	0	0	0	37
b_j	9	9	9	10	37	

Es wird nun das zugeordnete klassische Transportproblem gelöst. Dabei wird die Gesamtminimumregel als Eröffnungsverfahren verwendet:

y_{ij}						
	0			10		10
		9			3	12
			9		6	15
	9				28	37
	9	9	9	10	37	

Δ_{ij}						u_i
	$\boxed{-2}$	4	5	$\boxed{-5}$	2	-2
	2	$\boxed{-3}$	2	1	$\boxed{0}$	0
	6	2	$\boxed{0}$	7	$\boxed{0}$	0
	$\boxed{0}$	3	0	3	$\boxed{0}$	0
v_j	0	-3	0	-3	0	

Dies ist also ein optimaler, aber nicht der einzige optimale Transportplan. Wir erhalten hieraus den folgenden optimalen Transportplan für das offene Transportproblem TP($\leq, \leq$):

x_{ij}					
	0			10	≤ 10
		9			≤ 12
			9		≤ 15
	≤ 9	≤ 9	≤ 9	≤ 10	

Der optimale Zielfunktionswert ist -77.

b) Wir lösen nun das offene Transportproblem TP($\leq, =$) mit $a = (10\ 18\ 12)^\top$ und $b = (10\ 5\ 10\ 10)^\top$ und der Kostenmatrix $C = C^1$. Dies bedeutet, dass die Anbieter nicht ihren gesamten Bestand verkaufen. Es verbleiben 5 Mengeneinheiten mit Kosten 0 in einem Lager. Wir erhalten somit die folgende Datentabelle für ein klassisches Transportproblem:

	B_1	B_2	B_3	B_4	Lager	a_i
A_1	1	3	7	2	0	10
A_2	5	6	2	3	0	18
A_3	4	5	1	2	0	12
b_j	10	5	10	10	5	

Mit der Spaltenminimumregel als Eröffnungsverfahren erhalten wir nun die folgende Rechnung:

y_{ij}						
	10	0				10
			3	10	5	18
		5	7			12
	10	5	10	10	5	

Δ_{ij}						u_i
	$\boxed{1}$	$\boxed{3}$	8	2	3	0
	1	0	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{0}$	3
	1	$\boxed{5}$	$\boxed{1}$	0	1	2
v_j	1	3	-1	0	-3	

Dieser Transportplan ist optimal. wir erhalten somit den folgenden optimalen Transportplan für das offene Transportproblem:

x_{ij}					
	10	0			≤ 10
			3	10	≤ 18
		5	7		≤ 12
	10	5	10	10	

Der optimale Zielfunktionswert ist 78.

Wir lösen nun das offene Transportproblem TP$(=, \geq)$ mit $a = (10\ 18\ 12)^\top$ und $b = (10\ 5\ 10\ 10)^\top$ und der Kostenmatrix $C = C^1$. Dies bedeutet, dass die Anbieter die nicht benötigten 5 Mengeneinheiten jeweils an den Kunden mit den kleinsten Kosten liefern. Wir erhalten somit die folgende Datentabelle für ein klassisches Transportproblem:

	B_1	B_2	B_3	B_4	Zusatz	a_i
A_1	1	3	7	2	1	10
A_2	5	6	2	3	2	18
A_3	4	5	1	2	1	12
b_j	10	5	10	10	5	

Mit der Spaltenminimumregel als Eröffnungsverfahren erhalten wir nun die folgende Rechnung:

y_{ij}						
	10	0				10
			3	10	5	18
		5	7			12
	10	5	10	10	5	

Δ_{ij}						u_i
	$\boxed{1}$	$\boxed{3}$	8	2	2	0
	1	0	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{0}$	3
	1	$\boxed{5}$	$\boxed{1}$	0	0	2
v_j	1	3	-1	0	-1	

Dieser Transportplan ist optimal. wir erhalten somit den folgenden optimalen

Transportplan für das offene Transportproblem $TP(=, \geq)$:

x_{ij}					
	10	0			10
			8	10	18
		5	7		12
	≥ 10	≥ 5	≥ 10	≥ 10	

Der optimale Zielfunktionswert ist 88.

http://www.springer.com/978-3-519-00448-6

Operations Research
Deterministische Modelle und Methoden
Dempe, S.; Schreier, H.
2006, 383 S. Mit Online-Extras., Softcover
ISBN: 978-3-519-00448-6