Lösungen zu den Übungsaufgaben im Kapitel 3 des Lehrbuches
Operations Research – Deterministische Modelle und Methoden
von Stephan Dempe und Heiner Schreier

Aufgabe 1: Die folgenden (gemischt) ganzzahligen linearen Optimierungsaufgaben und ihre stetigen Relaxationen sind mit Hilfe der graphischen Darstellung zu lösen:

(a)
$$\begin{array}{rcl} z = & x_2 & \to \max \\ \frac{1}{2} \leq & x_1 & \leq s \\ 0 \leq & x_2 & \\ & x_1 & \text{ganzzahlig} \\ & x_2 & \text{ganzzahlig} \end{array} \qquad \text{für } s = \tfrac{3}{4} \text{ und } s = \tfrac{3}{2}$$

(b)
$$\begin{array}{rcrcrcrl} z & = & x_1 & + & x_2 & \to & \max & \\ & & \sqrt{2}\,x_1 & - & x_2 & = & 0 & \\ & & & & x_1 & \geq & 0 & \text{ganzzahlig} \\ & & & & x_2 & \geq & 0 & \text{ganzzahlig} \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{rcrcrcrl} z & = & & & x_2 & \to & \max & \\ & & 2x_1 & + & 2x_2 & \geq & 3 & \\ & & 6x_1 & + & 10x_2 & \leq & 15 & \\ & & & & x_1 & \geq & 0 & \\ & & & & x_2 & \geq & \frac{1}{2} & \text{ganzzahlig} \end{array}$$

anschließend auch noch x_1 ganzzahlig

(d)
$$\begin{array}{rcrcrcrl} z = & - & \sqrt{2}\,x_1 & + & x_2 & \to & \max & \\ & - & \sqrt{2}\,x_1 & + & x_2 & \leq & 0 & \\ & & & & x_1 & \geq & 1 & \text{ganzzahlig} \\ & & & & x_2 & \geq & 0 & \text{ganzzahlig} \end{array}$$

Welche Schlussfolgerungen können aus der Lösbarkeit bzw. Unlösbarkeit der stetigen Relaxation über die Lösbarkeit bzw. Unlösbarkeit der (gemischt) ganzzahligen linearen Optimierungsaufgaben gezogen werden? Welche Probleme treten bei (gemischt) ganzzahligen linearen Optimierungsaufgaben mit irrationalen Daten auf? Dem letzen Beispiel ist besondere Aufmerksamkeit zu widmen!

Lösung: Es sei eine (gemischt) ganzzahlige lineare Optimierungsaufgabe gegeben mit einem zulässigem Bereich S_G, einem optimalen Zielfunktionswert

$$z_G^* := \sup\{c^\top x : \; x \in S_G\}$$

und der Menge der optimalen Lösungen Ψ_G. Für die zugehörige stetige Relaxation seien S_R der zulässige Bereich,

$$z_R^* := \sup\{c^\top x : \ x \in S_R\}$$

der optimale Zielfunktionswert und Ψ_R die Menge der optimalen Lösungen.

Aus der Theorie der linearen Optimierungsaufgaben kennen wir die folgenden Lösbarkeitsfälle für die stetige Relaxation:

1. $S_R = \emptyset$...Der zulässige Bereich ist leer.
2. $\Psi_R = \emptyset$, $z_R^* = \infty$...Die Funktion ist unbeschränkt über dem zulässigen Bereich.
3. $S_R \neq \emptyset$, $\Psi_R \neq \emptyset$...Der optimale Zielfunktionswert ist endlich. Es existiert eine optimale Lösung.

Es sollen in den Beispielen die Lösungsfälle für (gemischt) ganzzahlige Optimierungsaufgaben aufgezeigt werden und ihr Zusammenhang zur Lösbarkeit ihrer stetigen Relaxation.

Offensichtlich gelten die folgenden trivialen Aussagen:

1. $S_G \subseteq S_R$. Wenn also $S_R = \emptyset$ gilt, so ist auch S_G eine leere Menge. Die umgekehrte Aussage gilt jedoch nicht (siehe Beispiel a)).
2. Es ist stets $z_R^* \geq z_G^*$. Wenn also z_R^* endlich ist, so ist entweder z_G^* ebenfalls endlich oder $S_G = \emptyset$.

Beispiele: a) Wir betrachten die Aufgabe

$$\begin{array}{rcccl} z = & & x_2 & \rightarrow & \max \\ & \frac{1}{2} \leq & x_1 & \leq & s \\ & 0 \leq & x_2 & & \\ & & x_1 & \text{ganzzahlig} & \\ & & x_2 & \text{ganzzahlig} & \end{array} \qquad \text{für } s = \tfrac{3}{4} \text{ und } s = \tfrac{3}{2}.$$

Für $s = 0.75$ ist $S_G = \emptyset$. Im Gegensatz dazu ist der zulässige Bereich der stetigen Relaxation nicht leer. Dennoch existiert auch bei der stetigen Relaxation keine Lösung, da die Zielfunktion unbeschränkt ist über dem zulässigen Bereich, d.h. $z_R^* = \infty$, siehe Abbildung 1.

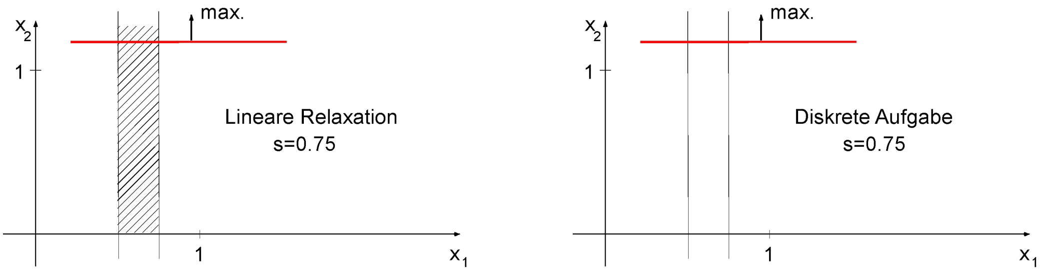

Abbildung 1: Graphische Lösung der Übungsaufgabe 1 a) für $s = 0.75$.

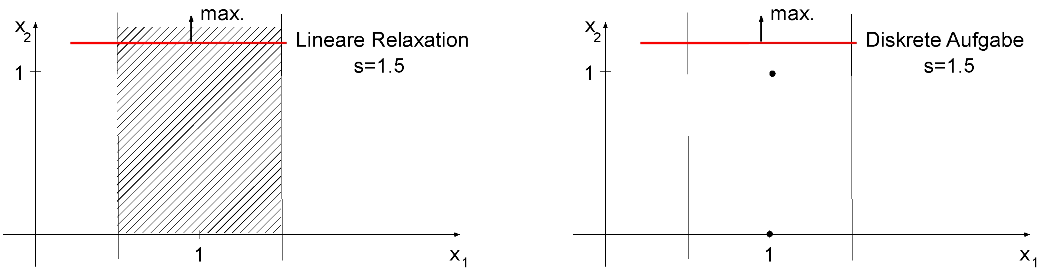

Abbildung 2: Graphische Lösung der Übungsaufgabe 1 a) für $s = 0.75$.

Für $s = 1.5$ gilt sowohl $S_G \neq \emptyset$ als auch $S_R \neq \emptyset$. Für beide Aufgaben ist die Zielfunktion unbeschränkt über dem zulässigen Bereich, d.h. $\Psi_G = \emptyset = \Psi_R$, $z_R^* = \infty$ und $z_G = \infty$, siehe Abbildung 2.

b) Wir betrachten die Aufgabe

$$
\begin{array}{rcrcrcll}
z & = & x_1 & + & x_2 & \rightarrow & \max & \\
 & & \sqrt{2}\, x_1 & - & x_2 & = & 0 & \\
 & & & & x_1 & \geq & 0 & \text{ganzzahlig} \\
 & & & & x_2 & \geq & 0 & \text{ganzzahlig.}
\end{array}
$$

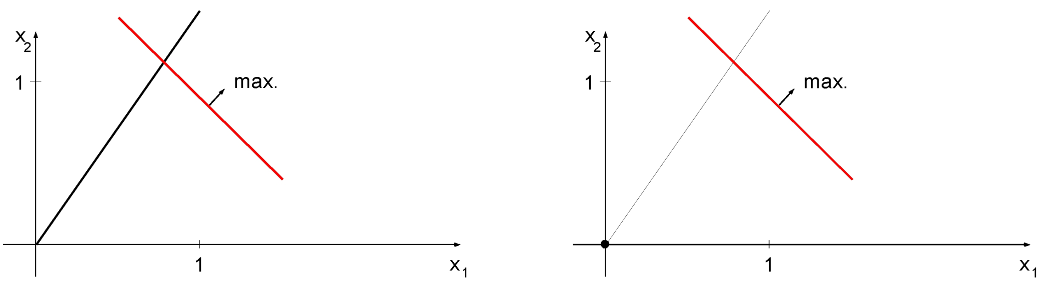

Abbildung 3: Graphische Lösung der Übungsaufgabe 1 b).

In dieser Aufgabe gilt $S_G = \{(0,0)^\top\}$ und somit $\Psi_G = \{(0,0)^\top\}$, $z_G^* = 0$. Im Gegensatz hierzu ist bei der stetigen Relaxation die Zielfunktion unbeschränkt über dem zulässigen Bereich, d.h. $\Psi_R = \emptyset$, $z_G < z_R = \infty$, siehe Abbildung 3.

Ist also bei der stetigen Relaxation die Zielfunktion unbeschränkt über dem zulässigen Bereich, so kann daraus keine Schlussfolgerung über die Lösbarkeit der Ausgangsaufgabe gezogen werden.

c) Wir betrachten die Aufgabe

$$
\begin{array}{rrcrcll}
z & = & & x_2 & \to & \max & \\
 & 2x_1 & + & 2x_2 & \geq & 3 & \\
 & 6x_1 & + & 10x_2 & \leq & 15 & \\
 & & & x_1 & \geq & 0 & \\
 & & & x_2 & \geq & \frac{1}{2} & \text{ganzzahlig.}
\end{array}
$$

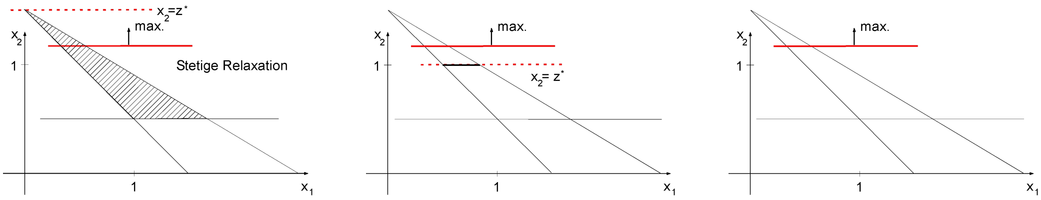

Abbildung 4: Graphische Lösung der Übungsaufgabe 1 c).

Es ist $S_R \neq \emptyset$, $\Psi_R = \{(0, 1.5)^\top\}$ und $z_R^* = 1.5$. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

1.) Sei nur x_2 ganzzahlig. Dann ist $S_D \neq \emptyset$, $z_G^* = 1 < z_R^*$ und

$$\Psi_G = \{(x_1, x_2)^\top : \; 1/2 \leq x_1 \leq 5/6, \; x_2 = 1\}.$$

2.) Sind x_1 und x_2 ganzzahlig, so gilt $S_G = \emptyset$.

d) Wir betrachten nun die Aufgabe

$$
\begin{array}{rrrcrcll}
z = & - & \sqrt{2}\,x_1 & + & x_2 & \to & \max & \\
 & - & \sqrt{2}\,x_1 & + & x_2 & \leq & 0 & \\
 & & & & x_1 & \geq & 1 & \text{ganzzahlig} \\
 & & & & x_2 & \geq & 0 & \text{ganzzahlig.}
\end{array}
$$

Es gilt $\Psi_R = \{(x_1, x_2)^\top : \; x_1 \geq 1, \; x_2 = \sqrt{2}x_1\}$ und $z_R^* = 0$. Weiter gilt offensichtlich $S_G \neq \emptyset$. Es soll nun gezeigt werden, dass $z_G^* = 0$ und $\Psi_G = \emptyset$ gilt.

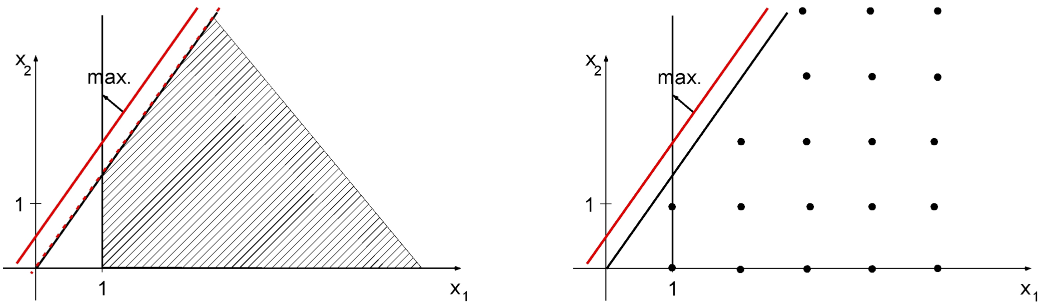

Abbildung 5: Graphische Lösung der Übungsaufgabe 1 c).

Es existiert also keine optimale Lösung, obwohl die Zielfunktions beschränkt ist.

Beweisidee: Da die Zahl $\sqrt{2}$ irrational und $x_1 \neq 0$ ist, gilt $-\sqrt{2}x_1 + x_2 < 0$ für alle Punkte aus dem zulässigem Bereich. Wenn also $z_G = 0$ ist, so ist $\Psi_G = \emptyset$ offensichtlich.

Wir konstruieren nun eine Folge von Punkten $\{(x_1^k, x_2^k)^\top\}_{k=1}^\infty$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. $x_1^k \geq 1$, $x_2^k \geq 1$ für alle k
2. $\lim_{k\to\infty} x_1^k = \infty$
3. $0 < \sqrt{2} - x_2^k/x_1^k \leq (1/x_1^k)^2$ für alle k.

Die Folge wird rekursiv wie folgt konstruiert:

$$x_1^1 = 5, \quad x_2^1 = 7, \quad x_1^{k+1} = 3x_1^k + 2x_2^k \quad \text{und} \quad x_2^{k+1} = 4x_1^k + 3x_2^k.$$

Es ist offensichtlich, dass die Folge die ersten beiden Eigenschaften besitzt. Der Nachweis der dritten Eigenschaft beruht auf der Darstellung von $\sqrt{2}$ als Kettenbruch. Dies kann in verschiedenen Büchern zur Zahlentheorie nachgelesen werden, z.B. in

H.M. Stark, An introduction to number theory*, Markham Publishing Company, Chicaco, 1970, pp. 194*

Aus der 3. Eigenschaft folgt, dass alle so konstruierten Punkte im zulässigen Bereich der Ausgangsaufgabe liegen. Weiter folgt zusammen mit der zweiten Eigenschaft, dass

$$z_G^* = \lim_{k\to\infty} -\sqrt{2}x_1^k + x_2^k = 0$$

gilt.

Aufgabe 2: Für das Rucksackproblem

$$\begin{aligned} z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j &\rightarrow \max \\ \sum_{j=1}^{n} g_j x_j &\leq G \\ x_j &\in \{0;1\}, \quad j = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

ist ein exaktes Lösungsverfahren mit Hilfe des Verzweigungsprinzips zu konstruieren!

Lösung: Bei dieser Aufgabe geht es darum, den Algorithmus aus Kapitel 3.3 für das Knapsackproblem zu konkretisieren. Dabei ist zu beachten, dass hier eine Maximierungsaufgabe vorliegt. Es sind somit folgende Fragen zu beantworten:

1. Wie sollen die Teilaufgaben $(P_{\nu l})$ konstruiert werden?
2. Wie werden die unteren und oberen Schranken berechnet?
3. Wie wird die zu verzweigende Teilaufgabe ausgewählt?
4. Es ist eine Verzweigungsvorschrift für die jeweils gewählte Teilaufgabe anzugeben!

Zur Beantwortung dieser Fragen gibt es verschiedene Möglichkeiten. Üblich ist jedoch meist die Verwendung des stetigen Knapsack-Problems (3.23). Dies ist eine stetige Relaxation des Knapsackproblems. Seine Lösungen können mit Hilfe von Satz 3.8 direkt angegeben werden.

(1.) Konstruktion der Teilaufgaben $(P_{\nu l})$:

Für die Teilaufgaben $(P_{\nu l})$ werden die folgenden Bezeichnungen vereinbart:
$R^0_{\nu l}$ ...Indizes der auf 0 fixierten Variablen
$R^1_{\nu l}$ ...Indizes der auf 1 fixierten Variablen
$R^{-1}_{\nu l}$...Indizes der freien Variablen

Die Teilmengen $S_{\nu l}$ werden wie folgt festgelegt:

$$\begin{aligned} S_{\nu l} := \{x \in \{0;1\}^n \quad : \quad & \sum_{j \in R^{-1}_{\nu l}} g_j x_j \leq G - \sum_{j \in R^1_{\nu l}} g_j, \\ & x_j = 1 \quad \forall j \in R^1_{\nu l}, \quad x_j = 0 \quad \forall j \in R^0_{\nu l}\} \end{aligned}$$

Durch die Fixierung besitzen die Zielfunktionen über $S_{\nu l}$ die folgende Gestalt:

$$f(x) := \sum_{j \in R_{\nu l}^{-1}} (-c_j)x_j + \sum_{j \in R_{\nu l}^{1}} (-c_j)$$

Für die erste Teilaufgabe (P_{11}) wird $R_{11}^0 = R_{11}^1 = \emptyset$ und $R_{11}^{-1} = \{1, \ldots, n\}$ gesetzt. Für die aktuelle rechte Seite der Ungleichung wird die Abkürzung

$$g_{\nu l} := G - \sum_{j \in R_{\nu l}^1} g_j$$

verwendet. Jede Teilaufgabe $(P_{\nu l})$ wird nach Erzeugung folgender Fixierung unterworfen:

$$j_0 \in R_{\nu l}^{-1} \text{ und } g_{j_0} > g_{\nu l} \quad \Rightarrow \quad R_{\nu l}^{-1} := R_{\nu l}^{-1} \backslash \{j_0\},\ R_{\nu l}^0 := R_{\nu l}^0 \cup \{j_0\}.$$

Es wird also getestet, ob zusätzliche Fixierungen der Form $x_{j_0} = 0$ vorgenommen werden können.

(2.) Berechnung der Schranken:

Berechnung der unteren Schranken:
Zu jeder Teilaufgabe $(P_{\nu l})$ gehört eine stetige Relaxation $(\tilde{P}_{\nu l})$ mit der Zielfunktion $f(x)$ und dem zulässigen Bereich

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{\nu l} := \{x \in [0;1]^n \quad : \quad & \sum_{j \in R_{\nu l}^{-1}} g_j x_j \leq G - \sum_{j \in R_{\nu l}^1} g_j, \\ & x_j = 1 \quad \forall j \in R_{\nu l}^1, \quad x_j = 0 \quad \forall j \in R_{\nu l}^0\}. \end{aligned}$$

Als untere Schranken wählen wir

$$f_{\nu l}(x) \equiv b_{\nu l} := \min_{x \in \tilde{S}_{\nu l}} f(x).$$

Diese können mit Satz 3.8 leicht berechnet werden.

Berechnung von oberen Schranken:
Ohne Aufwand erhält man eine erste zulässige Lösung wie folgt:
Wähle eine Indexmenge $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $\sum_{j \in J} g_j \leq G$ und setze $\bar{x}_j := 1$ für alle $j \in J$ und $\bar{x}_j := 0$ für alle $j \notin J$. Damit kann $m_0 := \sum_{j \in J}(-c_j)$ als erste obere Schranke gewählt werden.

(3.) Auswahl der zu verzweigenden Teilaufgabe:

Die Auswahl der zu verzweigenden Teilaufgabe $(P_{\mu t})$ kann zum Beispiel nach der Minimumsstrategie erfolgen:

$$b_{\mu t} = \min_{(\nu,l)\in\Gamma_q} b_{\nu l}$$

(4.) Verzweigungsvorschrift:

Für das zu verzweigende Teilproblem $(P_{\mu t})$ gegeben. Weiter sei x^* die mit Satz 3.8 berechnete Lösung der stetigen Relaxation $(\tilde{P}_{\mu t})$. Dann unterscheiden wir die folgenden Fälle:

1. Fall: x^* ist ganzzahlig. Dann ist x^* auch eine optimale Lösung für das Problem $(P_{\mu t})$. Die Teilaufgabe $(P_{\mu t})$ wird nun nicht mehr verzweigt. Gilt $m_0 > b_{\mu t}$, so wird wird die obere Schranke durch $m_0 := b_{\mu t}$ aktualisiert.

2. Fall: x^* ist nicht ganzzahlig. Da x^* mit Satz 3.8 berechnet wird, existiert dann genau ein Index $j_{\mu t}$ mit $x_{j_{\mu t}} \notin \{0;1\}$. Die Aufgabe $(P_{\mu t})$ wird nun in 2 Teilaufgaben zerlegt mit

$$\begin{array}{rcl} S_{\nu 1} & := & \{x \in S_{\mu t} : \; x_{j_{\mu t}} = 0\}, \\ S_{\nu 2} & := & \{x \in S_{\mu t} : \; x_{j_{\mu t}} = 1\}, \quad \nu > \mu. \end{array}$$

Damit sind folgende Indexmengen festzulegen:

$$\begin{array}{ll} (P_{\nu 1}): & R^0_{\nu 1} := R^0_{\mu t} \cup \{j_{\mu t}\}, \quad R^1_{\nu 1} := R^1_{\mu t}, \quad R^{-1}_{\nu 1} := R^{-1}_{\mu t} \backslash \{j_{\mu t}\}, \\ (P_{\nu 2}): & R^0_{\nu 2} := R^0_{\mu t}, \quad R^1_{\nu 2} := R^1_{\mu t} \cup \{j_{\mu t}\}, \quad R^{-1}_{\nu 2} := R^{-1}_{\mu t} \backslash \{j_{\mu t}\}. \end{array}$$

Bemerkungen: Mit $\hat{b}_{\nu l} := \lceil b_{\nu l} \rceil$ hat man bei ganzzahligen Daten eine Schrankenverschärfung. Sucht man nur eine Optimallösung, so können die Teilprobleme, bei denen eine optimale Lösung gefunden wurde, inaktiv gesetzt werden.

Aufgabe 3: Für das flexible Rucksackproblem (FRSP)

$$\begin{array}{rcl} z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + d_1 y_1 - d_2 y_2 & \rightarrow & \max \\ \sum_{j=1}^{n} g_j x_j + y_1 - y_2 & \leq & G \\ x_j & \in & \{0;1\}, \quad j = 1, \ldots, n \\ y_1, y_2 & \geq & 0 \end{array}$$

sind Näherungsverfahren zu konzipieren!

Lösungsvorschlag: Wir setzen $c_i, g_i, d_1, d_2 > 0$ und $0 < G < \sum_{j=1}^n g_j$ voraus. Dann gelten die folgenden Behauptungen:

1. Es existiert genau dann eine optimale Lösung für das Problem (FRSP), wenn $d_1 \leq d_2$ gilt.

2. Für alle Optimallösungen (x, y) von (FRSP) gilt $\sum\limits_{j=1}^n g_j x_j + y_1 - y_2 = G$.

3. Sei $d_1 \leq d_2$,
$$\begin{array}{rcl} J_1 & := & \{j \in \{1, \dots, n\} : \dfrac{c_j}{g_j} \leq d_1\} \quad \text{und} \\ J_2 & := & \{j \in \{1, \dots, n\} : \dfrac{c_j}{g_j} \geq d_2\}. \end{array}$$
Dann existiert eine optimale Lösung (x, y) von (FRSP) mit $x_j = 0$ für alle $j \in J_1$, $x_j = 0$ für alle $j \in J_2$ und mit $y_1 y_2 = 0$.

Es werden also $d_1 \leq d_2$ geprüft und zunächst alle möglichen Variablenfixierungen durchgeführt. Anschließend kann wegen Behauptung 3) eine Fallunterscheidung gemacht werden:

1. Fall: Sei $\boxed{y_1 = 0}$. Dann kann y_2 wegen der 2. Behauptung durch $y_2 = \sum_{j=1}^n g_j x_j - G$ ersetzt werden. Somit erhalten wir die folgende Ersatzaufgabe

$$\begin{array}{rcl} z = \sum\limits_{j=1}^n (c_j - d_2 g_j) x_j + d_2 G & \rightarrow & \max \\ \sum\limits_{j=1}^n g_j x_j & \geq & G \\ x_j & \in & \{0; 1\}, \quad j = 1, \dots, n. \end{array}$$

Als nächstes substituieren wir $\bar{x}_i := 1 - x_i$ für alle i. Hierdurch erhalten wir das klassische Rucksackproblem

$$\begin{array}{ll} & z = \sum\limits_{j=1}^n (d_2 g_j - c_j) \bar{x}_j + d_2 G + \sum\limits_{j=1}^n (d_2 g_j - c_j) \rightarrow \max \\ (RSP_1) & \sum\limits_{j=1}^n g_j \bar{x}_j \leq G - \sum\limits_{j=1}^n g_j \\ & \bar{x}_j \in \{0; 1\}, \quad j = 1, \dots, n. \end{array}$$

2. Fall: Sei $\boxed{y_2 = 0}$. Dann kann y_1 wegen der 2. Behauptung durch $y_1 = G - \sum_{j=1}^{n} g_j x_j$ ersetzt werden. Somit erhalten wir das folgende klassische Rucksackproblem

$$
(RSP_2) \qquad
\begin{aligned}
& z = \sum_{j=1}^{n} (c_j - d_1 g_j) x_j + d_1 G \rightarrow \max \\
& \sum_{j=1}^{n} g_j x_j \leq G \\
& x_j \in \{0; 1\}, \quad j = 1, \ldots, n.
\end{aligned}
$$

Auf die beiden Ersatzprobleme (RSP_1) und (RSP_2) können die bekannten Näherungsverfahren angewendet werden. Anschließend wird die beste Näherungslösung von (RSP_1) bzw. (RSP_2) verwendet und zurücktransformiert, um eine Näherungslösung von (FRSP) zu erhalten.

Springer

http://www.springer.com/978-3-519-00448-6

Operations Research
Deterministische Modelle und Methoden
Dempe, S.; Schreier, H.
2006, 383 S. Mit Online-Extras., Softcover
ISBN: 978-3-519-00448-6