Lösungen zu den Übungsaufgaben im Kapitel 4 des Lehrbuches
Operations Research – Deterministische Modelle und Methoden
von Stephan Dempe und Heiner Schreier

Aufgabe 1: Berechnen Sie für den in Abbildung 1 gegebenen Graphen den

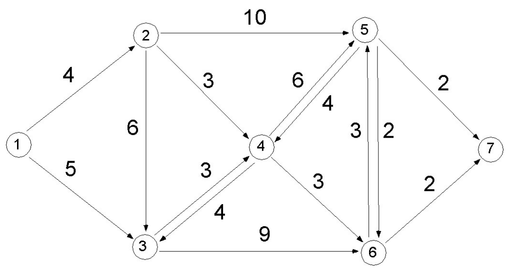

Abbildung 1: Graph für Flussproblem in Übungsaufgabe 1

kürzesten Weg vom Knoten 1 zum Knoten 7 !

Lösung: Für die Berechnung des kürzesten Weges verwenden wir den Algorithmus von Dijkstra. Hierbei erhalten wir die folgende Tabelle:

	$l(1)$	$p(1)$	$l(2)$	$p(2)$	$l(3)$	$p(3)$	$l(4)$	$p(4)$	$l(5)$	$p(5)$	$l(6)$	$p(6)$	$l(7)$	$p(7)$
0.	0	–	∞	–	∞	–	∞	–	∞	–	∞	–	∞	–
1.	(0)	(–)	4	1	5	1	∞	–	∞	–	∞	–	∞	–
2.			(4)	(1)	5	1	7	2	14	2	∞	–	∞	–
3.					(5)	(1)	7	2	14	2	14	3	∞	–
4.							(7)	(2)	13	4	10	4	∞	–
5.									13	4	(10)	(4)	12	6
6.									13	4			(12)	(6)
7.									(13)	(4)				

In dieser Tabelle wurden jeweils in der i–ten Iterations die Elemente $l(w)$ und $p(w)$ eingeklammert, wenn w zur Menge R hinzugefügt wurde. Da sich die Zahlen $l(w)$ bzw. $p(w)$ anschließend nicht mehr ändern, wurden sie aus Übersichtsgründen weggelassen.

Wir können nun einen kürzesten Weg von 1 nach 7 in der Tabelle ablesen:

Wegen $l(7) = 12$ besitzt der kürzeste Weg die Länge 12. Dabei ist $p(7) = 6$ der Vorgänger von 7. Der Vorgänger von 6 ist $p(6) = 4$ und so weiter. Wir erhalten den kürzesten Weg durch die Knoten 1,2,4,6,7.

Aufgabe 2: Ein Fuhrunternehmen hat 4 Fahrzeuge (F_1, F_2, F_3, F_4) im Einsatz, die an verschiedenen Standorten untergebracht sind. Es liegen 4 Aufträge vor. Das Fahrzeug F_2 ist nicht für den Auftrag A_2 und das Fahrzeug F_3

nicht für den Auftrag A_4 geeignet. Die Entfernungen der Fahrzeuge zu den Auftragsorten sind in der folgenden Tabelle gegeben:

	A_1	A_2	A_3	A_4
F_1	70	40	20	55
F_2	65	60	45	90
F_3	30	45	50	75
F_4	25	30	55	40

Wie sollte der Fuhrunternehmer die Fahrzeuge zu den Auftragsorten schicken, damit die Summe der Leerfahrten minimal ausfällt? Ist die Einsatzplanung eindeutig?

(*Hinweis:* Modellierung als Matchingproblem im paaren Graphen oder als lineares Zuordnungsproblem möglich.)

Lösung: Für die Modellierung der Aufgabe werden wir die folgenden Variablen verwenden:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Fahrzeug } F_i \text{ wird für Auftrag } A_j \text{ benutzt} \\ 0 & \text{Fahrzeug } F_i \text{ wird nicht für Auftrag } A_j \text{ benutzt} \end{cases}$$

Weiter bezeichne c_{ij} die Entfernung des Fahrzeugs F_i zum Auftragsort A_j mit Ausnahme von $c_{12} := \infty$ und $c_{34} := \infty$. Dann entspricht die Aufgabe einem linearen Zuordnungsproblem (siehe Kapitel 2.2). Dieses kann als klassisches Transportproblem mit der angegebenen Datentabelle gelöst werden.

	A_1	A_2	A_3	A_4	
F_1	70	∞	20	55	1
F_2	65	60	45	90	1
F_3	30	45	50	∞	1
F_4	25	30	55	40	1
	1	1	1	1	

Optimaler Transportplan:

x_{ij}					
			1		1
		1	0		1
	1				1
	0	0		1	1
	1	1	1	1	

Wird die Approximationsmethode von Vogel als Eröffnungsverfahren gewählt, so erhält man hier sofort den angegebenen optimalen Transportplan. Wir erhalten also die folgende Zuordnung zu den Fahrzeugen:

$$F_1 \to A_3, \quad F_2 \to A_2, \quad F_3 \to A_1 \quad \text{und} \quad F_4 \to A_4.$$

Eine andere Möglichkeit zur Berechnung einer optimalen Lösung besteht in der Verwendung der ungarischen Methode aus Kapitel 4.5. Dabei ist V_1 die

Menge der Fahrzeuge, V_2 die Menge der Aufträge und E die Menge aller erlaubten Zuordnungen. Da hier ein Matching minimalen Gewichts gesucht ist, ist zu beachten, dass als Kantenbewertung von G_M

$$\begin{aligned} c'(w,u) &:= -c(u,w) \quad \text{für alle } (u,w) \in M \quad \text{und} \\ c'(u,w) &:= c(u,w) \quad \text{für alle } (u,w) \notin M \end{aligned}$$

zu setzen ist. Während der ersten drei Iterationen des Algorithmus wird das Matching $M = \{(F_1, A_3), (F_3, A_2), (F_4, A_1)\}$ berechnet. Bei der 4. Iteration erhält man den folgenden Graphen G_M mit $V_{1M} = \{F_2\}$ und $V_{2M} = \{A_4\}$.

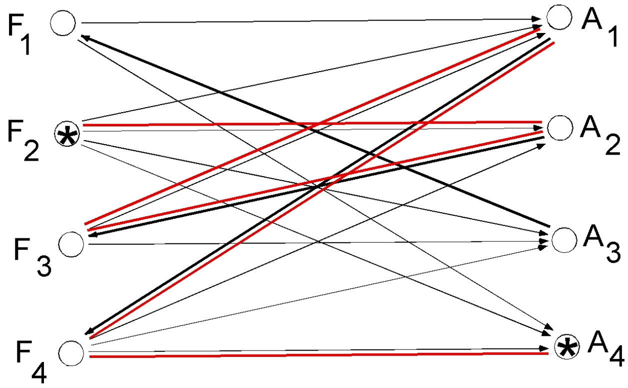

Abbildung 2: Hilfsgraph im ungarischen Algorithmus zur Lösung von Übungsaufgabe 2.

Dann ist $S = ((F_2, A_2)(A_2, F_3)(F_3, A_1)(A_1, F_4)(F_4, A_4))$ der kürzeste Weg von F_2 nach A_4. Als neues Matching erhält man somit

$$M = \{(F_1, A_3), (F_2, A_2), (F_3, A_1), (F_4, A_4)\}.$$

Dies entspricht dem Ergebnis der Berechnung mittels klassischem Transportproblem. Hiermit endet der Algorithmus.

Aufgabe 3: Gegeben ist der Graph in Abbildung 3, wobei die Pfeilbewertung $(c(e), a(e))$ die Kosten $c(e)$ für einen Fluss der Stärke 1 entlang des Pfeiles und die Kapazität $a(e)$ des Pfeiles darstellen.

1. Gesucht ist ein kostenminimaler Fluss der Stärke 4 vom Knoten 1 zum Knoten 4.

2. Ändert sich der kostenminimale Fluss, wenn die Kosten des Pfeiles $e = (2,4)$ verändert werden ? Wenn ja, bei welchen Kosten und welcher kostenminimale Fluss ergibt sich dann ?

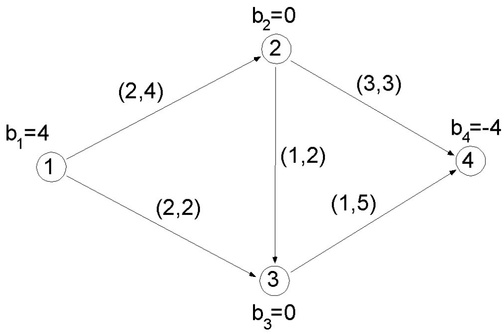

Abbildung 3: Graph für Flussproblem in Übungsaufgabe 3

Lösung: (a) Zuerst bestimmen wir einen 4-Fluss in dem gegebenen Graphen:

$$f((1,2)) = 3, \quad f(2,4) = 3, \quad f((1,3)) = 1 \quad \text{und} \quad f((3,4)) = 1.$$

Anschließend wird für diesen 4-Fluss der residuale Multigraph G_r konstruiert. Der Fluss und der residuale Multigraph sind in Abbildung 4 dargestellt.

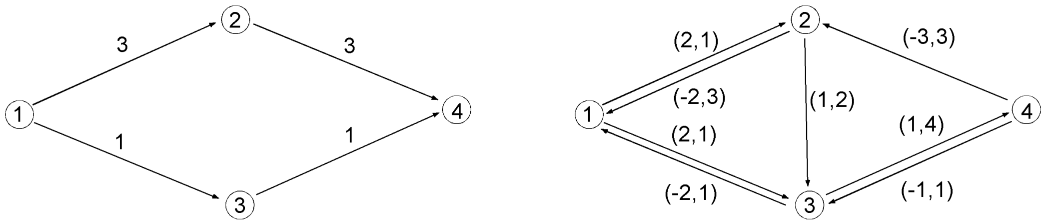

Abbildung 4: Aktueller Fluss und residualer Graph in der ersten Iteration

Dieser Graph enthält offenbar einen 4-vergrößernden Kreis T mit den Kanten $(1,3)$, $(3,4)$, $(4,2)$ und $(2,1)$. Dabei ist $r(T) = 1$. Mit diesem Kreis erhalten wir einen neuen 4-Fluss

$$f((1,2)) = 2, \quad f(2,4) = 2, \quad f((1,3)) = 2 \quad \text{und} \quad f((3,4)) = 2.$$

Für diesen 4-Fluss bestimmen wir wieder den residualen Multigraph. Der Fluss und der residuale Multigraph sind in Abbildung 5 dargestellt.

Dieser Graph besitzt den 4-vergrößernden Kreis $(2,3), (3,4), (4,2)$ mit $r(T) = 2$. Es ergibt sich dann der neue 4-Fluss

$$f((1,2)) = 2, \quad f(2,3) = 2, \quad f((1,3)) = 2 \quad \text{und} \quad f((3,4)) = 4.$$

Wie man leicht sieht, ist der berechnete 4-Fluss kostenminimal.

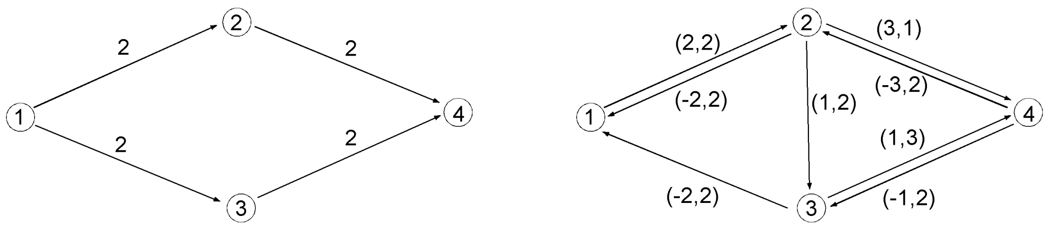

Abbildung 5: Aktueller Fluss und residualer Graph in der zweiten Iteration

(b) Wir überprüfen nun, für welche Werte $c((2,4))$ der berechnete 4-Fluss kostenminimal ist. Dazu verwenden wir die Optimalitätsbedingungen aus Satz 4.22.

Optimale Lösung der dualen Aufgabe ist

$$y(1) = 0, \quad y(2) = -2, \quad y(3) = -3, \quad y(4) = -4,$$

$$z((1,2)) = z((2,4)) = z((2,3)) = z((3,4)) = 0, \quad z((1,3)) = 1.$$

Das Paar der primalen und dualen optimalen Lösungen bleibt optimal für $y(2) - y(4) - z((2,4)) - c((2,4)) \geq 0$ oder $c((2,4)) \geq 2$.

Ist $1 \leq c((2,4)) < 2$, so ist der Fluss

$$f((1,2)) = 2, \quad f(2,3) = 2, \quad f((1,3)) = 2 \quad \text{und} \quad f((3,4)) = 4$$

einziger optimaler Fluss.

Für $c((2,4)) < 1$ wird der Fluss

$$f((1,2)) = 3, \quad f(2,4) = 3, \quad f((1,3)) = 1 \quad \text{und} \quad f((3,4)) = 1$$

einziger optimaler Fluss.

Aufgabe 4: Gegeben sei ein ungerichteter vollständiger Graph mit 6 Knoten durch die folgende Matrix der Kantenbewertungen:

$$C = \begin{pmatrix} - & 2 & 3 & 5 & 4 & 7 \\ 2 & - & 5 & 3 & 6 & 4 \\ 3 & 5 & - & 1 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 1 & - & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 5 & 2 & - & 5 \\ 7 & 4 & 3 & 3 & 5 & - \end{pmatrix}$$

Zu bestimmen sind Hamiltonkreise möglichst kurzer Länge mit den im Abschnitt 4.7 beschriebenen Näherungsalgorithmen.

Lösung:

1. Methode des besten Nachfolgers: Bei der Methode des besten Nachfolgers wird zunächst ein beliebiger Startknoten gewählt. Danach wird immer zum nächstbesten, noch nicht besuchten Knoten übergegangen. Dabei kann man, für unterschiedliche Startknoten auch unterschiedliche Hamiltonkreise erhalten:

Startknoten 1 $\Longrightarrow$ Hamiltonkreis $(1, 2, 4, 3, 6, 5, 1)$ mit der Länge 18
Startknoten 2 $\Longrightarrow$ Hamiltonkreis $(2, 1, 3, 4, 5, 6, 2)$ mit der Länge 17

2. Baumalgorithmus: Zunächst wird ein Minimalgerüst bestimmt (siehe Abschnitt 4.3). Dazu verwenden wir den Algorithmus von Kruskal. Hierdurch erhalten wir die Kantenmenge $E' = \{(3, 4), (1, 2), (4, 5), (1, 3), (3, 6)\}$.

Bemerkung: Wenn die Kanten mit der Kantenbewertung in einer anderen Reihenfolge angeordnet werden, so erhält man evtl. ein anderes Minimalgerüst (siehe dazu Abbildung 8).

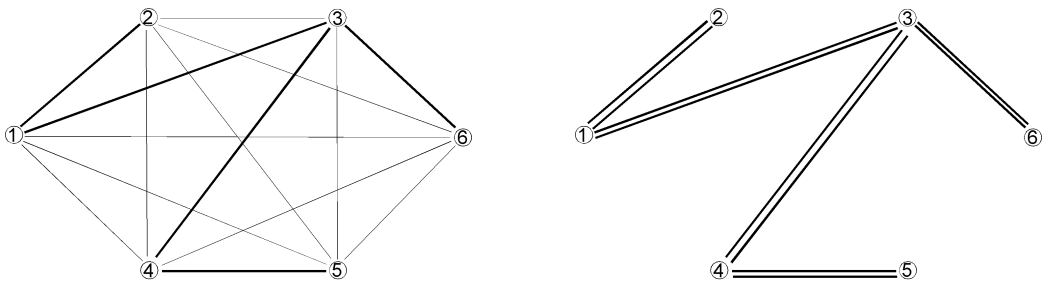

Abbildung 6: Minimalgerüst im Graphen G und entsprechender Multigraph $\widehat{G}$ im Baumalgorithmus zur Lösung der Übungsaufgabe 4

Als nächstes wird ein Eulerkreis im Multigraphen $\widehat{G} = (V, \widehat{E})$ konstruiert: $C_E = (1, 2, 1, 3, 4, 5, 4, 3, 6, 3, 1)$

Hieraus können wir nun einen Hamiltonkreis konstruieren, wobei die Knoten einfach in der Reihenfolge ihres Auftretens im Eulerkreis aufgeschrieben werden: $C_H = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 1)$ mit Länge 22

Der berechnete Hamiltonkreis hängt stark davon ab, wie ein Eulerkreis aufgeschrieben wird. Wird zum Beispiel der obige Eulerkreis in der umgekehrten Reihenfolge $C_E = (1, 3, 6, 3, 4, 5, 5, 4, 3, 1, 2, 1)$ aufgeschrieben, so erhalten wir einen Hamiltonkreis $C_H = (1, 3, 6, 4, 5, 2, 1)$ mit der Länge 19.

3. Algorithmus von Christofides: Wie beim Baumalgorithmus wird zunächst ein Minimalgerüst bestimmt: $E' = \{(3, 4), (1, 2), (4, 5), (1, 3), (3, 6)\}$.

Die Menge der Knoten ungeraden Grades ist somit $V' = \{2, 3, 5, 6\}$. Für den vollständigen Teilgraph mit der Knotenmenge V' wird dann ein minimales Matching berechnet, z.B. $\widehat{E} = \{(2, 6), (3, 5)\}$. Anschließend wird im Graph $\widehat{G} = (V, E' \cup \widehat{E})$ ein Eulerkreis gesucht: $C_E = (1, 2, 6, 3, 4, 5, 3, 1)$ (siehe dazu Abbildung 7)

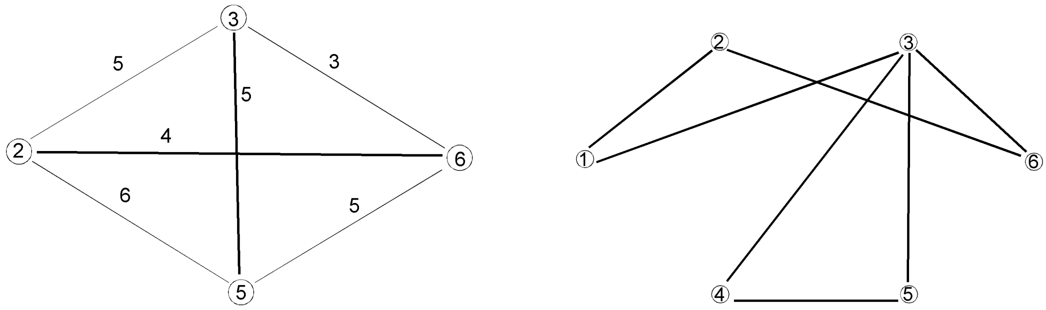

Abbildung 7: Minimales Matching und Eulergraph im Algorithmus von Christofides zur Lösung der Übungsaufgabe 4

Analog zum Baumalgorithmus erhalten wir aus diesem Eulerkreis einen Hamiltonkreis $C_H = (1, 2, 6, 3, 4, 5, 1)$ mit der Länge 16.

4. Sukzessive Einbeziehung von Knoten: Als erstes wählen wir die Knoten 1 und 6 aus, d.h. $V_1 = \{1, 6\}$ und $M = \{(1, 6), (6, 1)\}$. Dann ist

$$\max_{u \notin V_1} \min_{s \in V_1} c(u, v) = c(1, 5),$$

d.h. es wird $V_1 = \{1, 5, 6\}$ gesetzt und die Kante $(6, 1)$ durch die Kanten $(6, 5)$ und $(5, 1)$ in M ersetzt.

Als nächstes wird der Knoten 3 zu V_1 hinzugefügt. Dann erhalten wir wegen

$$c(1, 3) + c(3, 6) - c(1, 6) = \min_{(p,q) \in M} c(p, 3) + c(3, q) - c(p, q)$$

die Menge $M = \{(1, 3), (3, 6), (6, 5), (5, 1)\}$.

Anschließend wird Knoten 2 zu V_1 hinzugefügt. Dann wird in M die Kante $(5, 1)$ durch $(5, 2)$ und $(2, 1)$ ersetzt. Wir haben also nun

$$M = \{(1, 3), (3, 6), (6, 5), (5, 2), (2, 1)\}.$$

Abschließend wird noch der Knoten 4 hinzugefügt. Dabei wird die Kante $(5, 2)$ durch die Kanten $(5, 4)$ und $(4, 2)$ ersetzt.

Wir erhalten somit den Hamiltonkreis $(1, 3, 6, 5, 4, 2, 1)$ mit der Länge 18.

Bemerkung: Das vorliegende Rundreiseproblem ist nicht metrisch, da zum Beispiel $c(1, 4) > c(1, 3)+c(3, 4)$ ist. Somit können die Näherungsalgorithmen zwar verwendet, aber die Güte der Lösungen nicht abgeschätzt werden.

Teilweise kann man auf die oben berechneten Hamiltonkreise noch Verbesserungsverfahren anwenden. Sei z.B. der Hamiltonkreis $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 1)$ gegeben mit Länge 22 (siehe Baumalgorithmus). Dann können mit 2-opt die Kanten $(1, 6)$ und $(2, 3)$ durch die Kanten $(1, 3)$ und $(2, 6)$ ersetzt werden. Wir erhalten den Hamiltonkreis $(1, 2, 6, 5, 4, 3, 1, 2)$ mit der Länge 17.

Außerdem kann auf den Kreis $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 1)$ das Verfahren 3-opt angewendet werden. Dabei werden die Kanten $(5, 6)$, $(6, 1)$ und $(2, 3)$ durch die Kanten $(5, 1)$, $(2, 6)$ und $(6, 3)$ ersetzt. Man erhält den Hamiltonkreis $(1, 2, 6, 3, 4, 5, 1)$ mit der Länge 16.

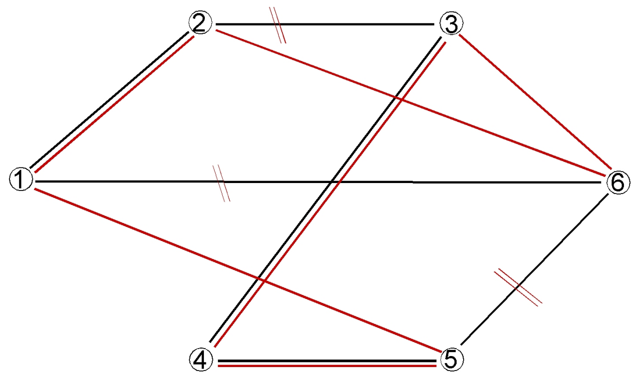

Abbildung 8: Algorithmus 3-opt zur Lösung der Übungsaufgabe 4. Aus dem mit schwarzen Strichen gezeichneten Hamiltonkreis wird nach Streichen von 3 Kanten und Einfügung von drei neuen Kanten der mit den roten Strichen gezeichnete Hamiltonkreis.

Springer

http://www.springer.com/978-3-519-00448-6

Operations Research
Deterministische Modelle und Methoden
Dempe, S.; Schreier, H.
2006, 383 S. Mit Online-Extras., Softcover
ISBN: 978-3-519-00448-6