Lösungen zu den Übungsaufgaben im Kapitel 5 des Lehrbuches
Operations Research – Deterministische Modelle und Methoden
von Stephan Dempe und Heiner Schreier

Aufgabe 1: Ein Unternehmen vertreibt durch zwei Vertreter seine Produkte. Für Dienstag sind vier Termine an vier verschiedenen Orten vereinbart worden. Beide Vertreter beginnen ihre Rundreise im Unternehmen und sollen dort nach getaner Arbeit Meldung machen. Der Graph in Abbildung 1 stellt die vier Orte $(1, \ldots, 4)$ sowie das Unternehmen (0) und alle bestehenden Verbindungen mit den Entfernungen (Kantenbewertung) dar. Modellieren Sie das Problem der kürzesten Rundreise für den Fall, dass beide Vertreter eingesetzt werden! Lösen Sie das Problem (näherungsweise)!

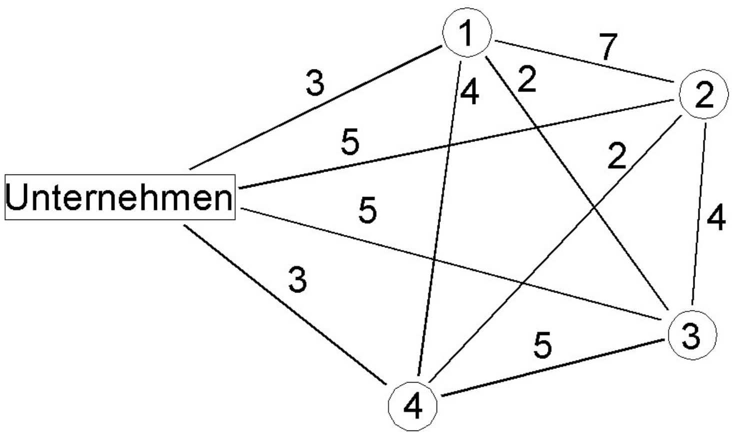


Abbildung 1: Graph zu Übungsaufgabe 1

Lösung: Das Problem wird mit dem Verfahren aus Abschnitt 5.1.2 gelöst. Dazu wird der Knoten (0) verdoppelt. Der resultierende Graph wird mit $\widehat{G}$ bezeichnet (vgl. Abbildung 2). Weiter erhält die Kante $(0_1, 0_2)$ das Gewicht ∞, damit wir ein Ergebnis erhalten, bei dem tatsächlich beide Vertreter eingesetzt werden (und nicht einer im Innendienst verbleibt).

Wir suchen nun im Graph $\widehat{G}$ einen Hamiltonkreis. Dazu können die bekannten Näherungsverfahren aus Abschnitt 4.7 verwendet werden. Hier werden wir jedoch eine weitere Möglichkeit demonstrieren:

Sei folgendes Problem gegeben: *Es ist eine kostenminimale Überdeckung des Graphen $\widehat{G}$ durch Kreise gesucht, wobei Kreise der Länge 2 zugelassen sind.*

Besteht eine solche kostenminimale Überdeckung aus einem einzigen Kreis, so haben wir einen kostenminimalen Hamiltonkreis gefunden. Sonst erhalten wir eine untere Schranke für das minimale Gewicht eines Hamiltonkreises.

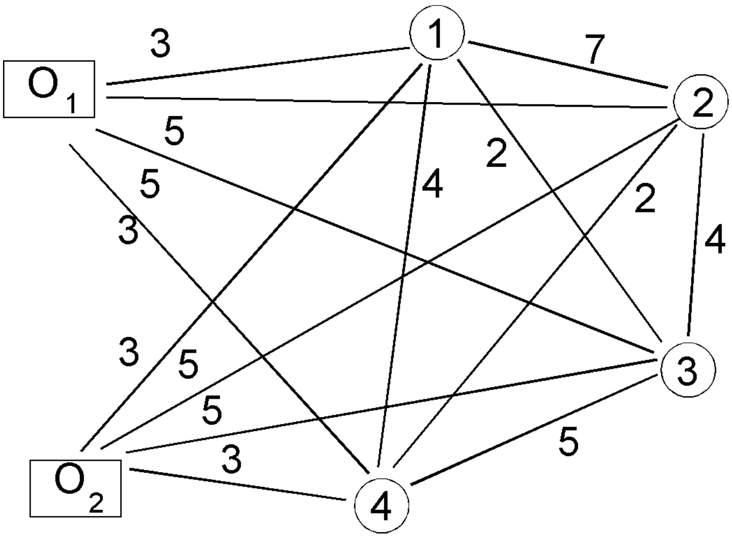


Abbildung 2: Graph zu Übungsaufgabe 1 nach der Einfügung der Kopie des Depots

Dieses Problem wird als klassisches Transportproblem mit der folgenden Datentabelle gelöst:

	0_1	0_2	1	2	3	4	
0_1	∞	∞	3	5	5	3	1
0_2	∞	∞	3	5	5	3	1
1	3	3	∞	7	2	4	1
2	5	5	7	∞	4	2	1
3	5	5	2	4	∞	5	1
4	3	3	4	2	5	∞	1
	1	1	1	1	1	1	

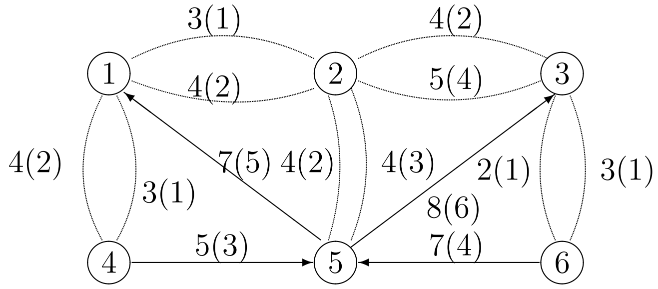
Verwendet man das Eröffnungsverfahren von Vogel, so kann man die folgende optimale Lösung

	0_1	0_2	1	2	3	4	
0_1			1				1
0_2						1	1
1	0				1		1
2	1					0	1
3	0	1	0				1
4	0			1			1
	1	1	1	1	1	1	

erhalten. Es wird also $0_1 \rightarrow 1$, $1 \rightarrow 3$, $3 \rightarrow 0_2$ u.s.w. zugeordnet. Dies entspricht einem kostenminimalem Hamiltonkreis $(0_1, 1, 3, 0_2, 4, 2, 0_1)$ im Graph

$\widehat{G}$. Wir erhalten somit die Rundreisen $(0,1,3,0)$ und $(0,4,2,0)$ für die beiden Vertreter mit der Gesamtlänge 20.

Aufgabe 2: Eine Reinigungsfirma ist für die Säuberung von Häusern eines bestimmten Wohngebietes zuständig. Die betreffenden Straßenseiten sind im Graphen in Abbildung ...dargestellt (Rechtsverkehr).



Die erste Bewertung entspricht der für die Reinigung erforderlichen Zeit. Die zweite Bewertung (in Klammern) gibt die Durchfahrzeit ohne Säuberung an. Geben Sie den vollständigen Lösungsweg zur Ermittlung eines kostenminimalen geschlossenen Weges an!

Lösung: Als erstes bestimmen wir die Ein- und Ausgangsgrade der Knoten:

	1	2	3	4	5	6
$deg^+(v)$	2	3	2	2	3	2
$deg^-(v)$	3	3	3	1	3	1

Es wird nun der Graph $\widehat{G} = (\widehat{V}, \widehat{E})$ betrachtet mit $\widehat{V} = \{1,3,4,6\}$ und $\widehat{E} = \{(1,4),(1,6),(3,4),(3,6)\}$. Die Gewichte für die Kanten aus $\widehat{E}$ werden durch die kürzesten Wege im Ausgangsgraphen bestimmt (z.B. mit dem Algorithmus von Dijkstra). Dabei sind die Gewichte für die Leerfahrten zu verwenden:

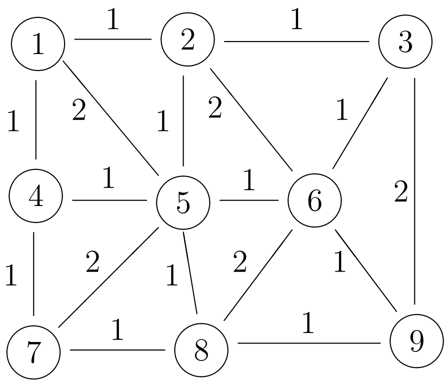
Kante	Gewicht	zugehöriger kürzester Weg
$(1,4)$	$d(1,4) = 2$	1-4
$(1,6)$	$d(1,6) = 7$	1-2-3-6
$(3,4)$	$d(3,4) = 5$	3-2-1-4
$(3,6)$	$d(3,6) = 1$	3-6

Weiter ist $a(1) = 1 = a(3)$ und $b(4) = 1 = b(6)$. Es ist hier also eine optimale Zuordnung gesucht. Dies ist offenbar $1 \to 4$, $3 \to 6$. Wir fügen also die Wege $(1,4)$ und $(3,6)$ zum Graphen hinzu. Der entstehende Graph sei $\bar{G}$. In diesem Graph wird nun ein Eulerkreis gesucht. Ein solcher ist z.B.

$$C_E = (1,2,5,3,6,3,2,3,6,5,1,4,5,2,1,4,1).$$

Dieser kostenminimale geschlossenen Weg besitzt die Länge 66.

Aufgabe 3: Die Polizei möchte eine wichtige Suchmeldung an alle Einwohner eines Ortes in möglichst kurzer Zeit weitergeben und dazu mit ihrem einzigen Lautsprecherwagen durch alle Straßen des Ortes fahren. Der Wagen fährt mit konstanter Geschwindigkeit. Folgendes Straßennetz liegt vor:



Wie sollte der Wagen fahren?

Lösung: Das angegebene Problem entspricht einem Postbotenproblem im ungerichteten Graph. Wir bestimmen also als erstes alle Knoten von G mit ungeradem Grad. Wir erhalten offensichtlich die Knotenmenge $\widehat{V} = \{1,3,4,6,7,8\}$. Die Kantenmenge $\widehat{E}$ entspricht allen Kanten zwischen diesen Knoten, wobei das Gewicht der Kanten (u,v) in $\widehat{G}$ der Länge eines kürzesten Weges von u nach v in G entspricht.

Es wird nun ein minimales Matching in $\widehat{G}$ gesucht. Jedes Matching in $\widehat{G}$ enthält offenbar eine Kante zwischen den Mengen $\{1,4,7\}$ und $\{3,6,9\}$. Da in G jedoch offensichtlich kein Weg der Länge 1 zwischen diesen Knotenmengen existiert, besitzt jedes Matching in $\widehat{G}$ eine Kante mit einem Gewicht ≥ 2. Zu jedem Matching gehören genau 3 Kanten. Jede Kante besitzt mindestens das Gewicht 1. Also besitzt jedes Matching in $\widehat{G}$ ein Gewicht ≥ 4. Wenn also ein Matching mit dem Gewicht 4 existiert, so ist es minimal.

Kante in $\widehat{G}$	Gewicht der Kante	zugehöriger kürzester Weg
(1,4)	1	1-4
(7,9)	2	7-8-9
(3,6)	1	3-6

Dies ist also ein Matching in $\widehat{G}$ mit minimalem Gewicht. Die Kanten der kürzesten Wege werden nun zum Graph G hinzugefügt. Wir erhalten einen Multigraph $\widetilde{G}$. In diesem wird nun ein Eulerkreis bestimmt. Dies ist zum

Beispiel

$$C_E = (1, 2, 6, 3, 9, 8, 7, 4, 1, 5, 7, 8, 5, 2, 6, 3, 9, 8, 6, 5, 4, 1).$$

Entlang dieses Weges sollte also der Lautsprecherwagen fahren.

Aufgabe 4: Betrachtet werde das kapazitierte Standortproblem (5.12).

a) Unter welchen Voraussetzungen ist es lösbar?

b) Kann o.B.d.A. $c_{ij} \geq 0,\ i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n$ angenommen werden?

c) Diskutieren Sie den Fall $f_i \leq 0,\ i = 1, \dots, m$!

d) Wie kann die stetige Relaxation des kapazitierten Standortproblems gelöst werden?

e) Wie kann man exakte Lösungsverfahren bzw. Näherungsverfahren für das kapazitierte Standortproblem konzipieren?

f) Welchen Einfluss hat die Struktur der Kostenmatrix C mit $c_{ij} = p_i q_j$, $i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n$, für die Konstruktion von Lösungsverfahren?

g) Der Bedarf $b_j(t) = b_{0j} + b_{1j}t,\ j = 1, \dots, n$, hänge linear von einem reellen Parameter t ab. Welche Eigenschaften besitzt die zugehörig Optimalwertfunktion?

h) Bestimmen Sie für das folgende parametrische kapazitierte Standortproblem in Abhängigkeit von t (oder für $t \in \{-3; -1; 0; 1; 4\}$) eine Optimallösung!

$$\begin{array}{rcl} m = 3,\ n = 4, & & \\ a & = & (10; 12; 15)^\top, \\ b(t) & = & (6 + 2t; 6 - t; 6; 6)^\top, \\ f & = & (60; 60; 60)^\top, \end{array} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung: a) Beim Problem (5.12) kann $a_i \geq 0$ für alle i vorausgesetzt werden, da für alle i mit $a_i < 0$ wegen $0 \leq \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq y_i a_i$ stets $y_i = 0$ für alle zulässigen Lösungen gilt, d.h. das Warenhaus i wird nie benutzt.

Das Problem (5.12) ist genau dann lösbar, wenn es eine zulässige Lösung besitzt. Wir nehmen also zunächst an, dass eine zulässige Lösung existiert.

Dann gilt $0 \leq \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j$ für alle $j = 1, \ldots, n$ und

$$\sum_{j=1}^n b_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_{ij} \leq \sum_{i=1}^m y_i a_i \leq \sum_{i=1}^m a_i.$$

Umgekehrt, sei $b_j \geq 0$ für alle $j = 1, \ldots, n$ und $\sum_{j=1}^n b_j \leq \sum_{i=1}^m a_i$. Wir setzen nun $y_i = 1$ für alle $i = 1, \ldots, m$. Dann entspricht (5.12) einem offenem Transportproblem $TP(\leq, =)$. Dieses ist unter den gegebenen Bedingungen lösbar (siehe (2.34) und Satz 2.13).

b) Antwort: Ja. Sonst werden die äquivalenten Kosten $c'_{ij} := c_{ij} - v_j$ für alle $i = 1, \ldots, m$, $j = 1 \ldots, n$ bei der Berechnung verwendet mit

$$v_j := \min_{i=1,\ldots,m} c_{ij}.$$

Die so erhaltenen Ersatzkosten sind nichtnegativ wegen der Konstruktion der v_j. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} z' &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c'_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^m f_i y_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (c_{ij} - v_j) x_{ij} + \sum_{i=1}^m f_i y_i \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^m f_i y_i - \sum_{j=1}^n v_j \sum_{i=1}^m x_{ij} \\ &= z - \sum_{j=1}^n v_j b_j. \end{aligned}$$

Die Zielfunktionswerte werden also durch die Verwendung der Ersatzkosten um eine Konstante verschoben.

c) Angenommen es gilt $f_i \leq 0$ für alle $i = 1, \ldots, m$, d.h. die Errichtung von Warenhäusern wird subventioniert. Dann ist es am kostengünstigsten, zunächst alle Warenhäuser zu errichten – unabhängig davon, ob sie später auch verwendet werden. Es wird also $y_i = 1$ gesetzt für alle $i = 1, \ldots, m$. Das Problem (5.12) entspricht dann einem offenen Transportproblem $TP(\leq, =)$.

d) Sei $f_i \geq 0$ und $a_i > 0$ für alle $i = 1, \ldots, m$. Weiter sollen die Bedingungen aus a) gelten. Bei der stetigen Relaxation des kapazitierten Standortproblems werden die Bedingungen $y_i \in \{0, 1\}$ durch die Bedingungen $0 \leq y_i \leq 1$ für alle $i = 1, \ldots, m$ ersetzt. Dann existiert stets eine optimale Lösung, bei welcher $\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i y_i$ gilt für alle $i = 1, \ldots, m$. Für alle $i = 1, \ldots, m$ können wir nun die Variablen

$$y_i = \frac{1}{a_i} \sum_{j=1}^n x_{ij}$$

ersetzen und die Nebenbedingung $a_i \geq \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$ wegen $y_i \leq 1$ hinzufügen. Auf diese Weise erhalten wir die äquivalente Optimierungsaufgabe

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}(c_{ij} + \frac{f_i}{a_i})x_{ij} \to \min \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} \leq a_i, \quad j = 1, \ldots, n \\ \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = b_j, \quad i = 1, \ldots, m \\ x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, n \end{cases}$$

Dies ist ein offenes Transportproblem $TP(\leq, =)$. Es kann mit den Verfahren aus Abschnitt 2.3 gelöst werden.

e) Als exaktes Verfahren zum Lösen der Aufgabe (5.12) kann z.B. das Verfahren **Branch & Bound** verwendet werden. Dabei werden Teilprobleme $P(I^0, I^1)$ betrachtet, bei welchen die Variablen

$$y_i := 0 \ \ \forall i \in I^0 \quad \text{ und } \quad y_i := 1 \ \ \forall i \in I^1$$

fixiert und alle $y_i \in \{0, 1\}$ mit $i \notin I^0 \cap I^1$ frei sind. Die Lösung der zugehörigen stetigen Relaxation $(\bar{x}, \bar{y})$ liefert eine untere Schranke. Mit $\bar{x}$ kann eine obere Schranke berechnet werden. Ist $\bar{y} \in \{0, 1\}^m$, so wird die Teilaufgabe nicht mehr verzweigt. Existiert ein Index p mit $0 < y_p < 1$, so wird das Teilproblem verzweigt, indem $p \in I^0$ oder $p \in I^1$ fixiert wird.

Ein weiteres exaktes Verfahren ist die sogenannte **vollständige Enumeration**. Dabei werden Indexmengen $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ erzeugt mit $\sum_{i \in I} a_i \geq \sum_{j=1}^{n} b_j$. Dann werden

$$y_i := 1 \ \ \forall i \in I \quad \text{ und } \quad y_i := 0 \ \ \forall i \notin I,$$

fixiert und das daraus resultierende Restproblem $TP(\leq, =)$ gelöst.

Die am häufigsten verwendeten Näherungsverfahren für das Problem (5.12) sind die Verfahren ADD und DROP. Dies sind beides unvollständige Enumerationsverfahren. Genauer:

Sei $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ und $y_i = 1$ für alle $i \in I$ bzw. $y_i = 0$ für alle $i \notin I$. Dadurch wird das Problem (5.12) auf das folgende offene Transportproblem reduziert:

$$(TP_I) \begin{cases} \sum\limits_{i \in I}\sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i \in I} f_i \to \min \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij} \leq a_i, \quad i \in I \\ \sum\limits_{i \in I} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \ldots, n \\ x_{ij} \geq 0, \qquad\quad i \in I, \ j = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Bei ADD wird mit $I = \emptyset$ begonnen. Dann werden sukzessive Indizes i zu I hinzugefügt, bis das zugehörige offene Transportproblem (TP_I) lösbar ist. Danach werden sukzessive Indizes i hinzugefügt, wenn die Kosten dadurch verringert werden. Existiert ein solcher Index nicht mehr, so bricht der Algorithmus ab.

Bei DROP wird mit $I = \{1, \ldots, n\}$ begonnen. Dann werden sukzessive Indizes i aus I entfernt, wenn das neue Problem $(TP_{I \setminus \{i\}})$ noch lösbar ist und die Kosten dadurch verringert werden. Existiert ein solcher Index nicht mehr, so bricht der Algorithmus ab.

Für die Auswahl von geeigneten Indizes gibt es verschiedene Möglichkeiten. Das Ziel dabei ist es, einen Index zu finden, für welchen die Kostenverringerung möglichst groß ist. Entsprechende Strategien und Rechenbeispiele hierzu können z.B. im folgenden Buch gefunden werden:

W. Domschke, A. Drexl: „Logistik: Standorte“, R. Oldenbourg Verlag, München, 1996

f) O.B.d.A. sei $p_1 \geq \ldots \geq p_m$ und $q_1 \leq \ldots, q_n$. Dann ist die Matrix C mit $c_i j = p_i q_j$ biproportional und somit eine Monge-Matrix (siehe Abschnitt 2.1). Somit ist auch die Matrix $D = (C, \mathbf{0})$ eine Monge-Matrix (siehe Definition 2.4). Somit liefert die Nordwesteckenregel sofort optimale Lösungen für die offenen Transportprobleme $TP(\leq, =)$, welche bei Fixierung der Variablen y_i entstehen.

g) Der Bedarf $b_j(t) = b_{0j} + b_{1j}t$, $j = 1, \ldots, n$, hänge linear von einem reellen Parameter t ab. Dann sei die Lösbarkeitsmenge L die Menge aller Parameter t, für welche der zulässige Bereich nicht leer ist:

$$L = \{t \in \mathbb{R} : \sum_{i=1}^{m} a_i \geq \sum_{j=1}^{n} (b_{0j} + b_{1j}t), \quad b_{0j} + b_{1j}t \geq 0 \;\; \forall j\}.$$

Weiter sei L_I die Lösbarkeitsmenge bei Fixierung der Variablen $y_i = 1$ für alle $i \in I$ und $y_i = 0$ für alle $i \notin I$:

$$L_I = L \cap \{t \in \mathbb{R} : \sum_{i \in I} a_i \geq \sum_{j=1}^{n} (b_{0j} + b_{1j}t)\}.$$

Weiter bezeichnen wir mit $\phi : L \to \mathbb{R}$ die Optimalwertfunktion zu (5.12) und mit $\phi_I : L_I \to \mathbb{R}$ die Optimalwertfunktion zu (5.12) bei Fixierung der Indexmenge I.

Aus der Theorie der linearen parametrischen Optimierung folgt nun, dass die Funktion $\phi_I(t)$ stückweise linear und konvex ist (siehe Abschnitt 1.5.2).

Weiter gilt $\phi(t) = \min\{\phi_I(t) : \ t \in L_I\}$ für alle $t \in L$. Somit ist die Funktion $\phi(t)$ stückweise linear mit endlich vielen Sprungstellen.

h) Für das angegebene Beispiel gilt

$$\begin{aligned} L = L_{\{1,2,3\}} = [-3; 6], \qquad L_{\{1,3\}} = [-3; 1], \qquad L_{\{2,3\}} = [-3; 3], \\ L_{\{1,2\}} = [-3; -2], \qquad L_{\{1\}} = L_{\{2\}} = L_{\{3\}} = \emptyset. \end{aligned}$$

Für die Berechnung der Optimallösungen für alle $t \in L$ führen wir eine vollständige Enumeration durch für alle I mit $L_I \neq \emptyset$. Für diese Indexmengen lauten die optimalen Transportpläne für die zugeordneten offenen Transportprobleme wie folgt:

$\boxed{I = \{1, 2\} \qquad L_I = [\,-3\,;\,-2\,]}$

x_{ij}	1	2	3	4	5	a_i
1			6	$6+t$	$-2-t$	10
2	$6+2t$	$6-t$		$-t$		12
b_j	$6+2t$	$6-t$	6	6	$-2-t$	

$t \in [\,-3\,;\,-2\,]$

$z_I(t) = 138 + 3t$

$\boxed{I = \{1, 3\} \qquad L_I = [\,-3\,;\,1\,]}$

x_{ij}	1	2	3	4	5	a_i
1		$6-t$	$4+t$			10
3	$6+2t$		$2-t$	6	$1-t$	15
b_j	$6+2t$	$6-t$	6	6	$1-t$	

$t \in [\,-3\,;\,1\,]$

$z_I(t) = 128 - 2t$

$\boxed{I = \{2, 3\} \qquad L_I = [\,-3\,;\,3\,]}$

x_{ij}	1	2	3	4	5	a_i
2		$6-t$			$6+t$	12
3	$6+2t$		6	6	$-3-2t$	15
b_j	$6+2t$	$6-t$	6	6	$3-t$	

$t \in [\,-3\,;\,-\frac{3}{2}\,]$

$z_I(t) = 126$

x_{ij}	1	2	3	4	5	a_i
2	$3+2t$	$6-t$			$3-t$	12
3	3		6	6		15
b_j	$6+2t$	$6-t$	6	6	$3-t$	

$t \in [\,-\frac{3}{2}\,;\,3\,]$

$z_I(t) = 129 + 2t$

$\boxed{I = \{1, 2, 3\} \qquad L_I = [\,-3\,;\,6\,]}$

x_{ij}	1	2	3	4	5	a_i
1			6		4	10
2		$6-t$			$6+t$	12
3	$6+2t$			6	$3-2t$	15
b_j	$6+2t$	$6-t$	6	6	$13-t$	

$t \in [\,-3\,;\,\frac{3}{2}\,]$

$z_I(t) = 180$

x_{ij}	1	2	3	4	5	a_i
1			6		4	10
2	$-3+2t$	$6-t$			$9-t$	12
3	9			6		15
b_j	$6+2t$	$6-t$	6	6	$13-t$	

$t \in [\,\frac{3}{2}\,;\,6\,]$

$z_I(t) = 177 + 2t$

Somit erhalten wir mit $\phi(t) = \min\{\phi_I(t) : \; t \in L_I\}$ die folgende Optimalwertfunktion:

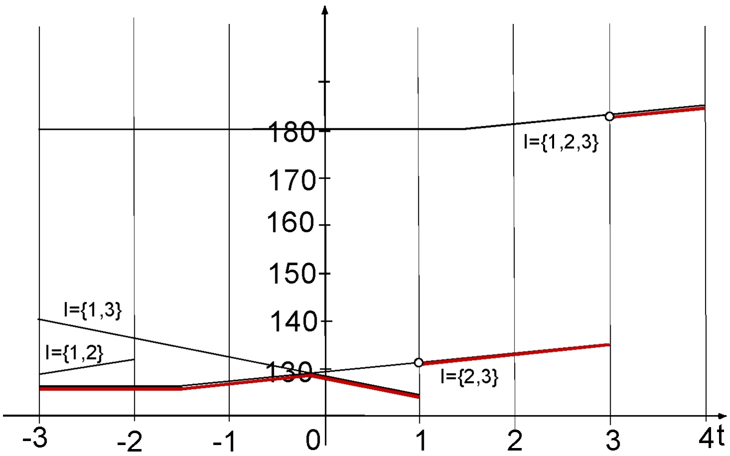


Abbildung 3: Optimalwertfunktion zur Übungsaufgabe 4h. Angegeben sind die Optimalwertfunktionen der Teilaufgaben mit der jeweiligen Indexmenge und (in roter Farbe) die sich daraus durch Minimumbildung ergebende stückweise lineare, stückweise konvexe Optimalwertfunktion der Gesamtaufgabe.

Es ist also

$$\phi(t) = \begin{cases} \phi_{\{2,3\}}(t) & \text{für } t \in [-3; -1/4] \\ \phi_{\{1,3\}}(t) & \text{für } t \in (-1/4; 1] \\ \phi_{\{2,3\}}(t) & \text{für } t \in (1; 3] \\ \phi_{\{1,2,3\}}(t) & \text{für } t \in (3; 6] \end{cases} = \begin{cases} 126 & \text{für } t \in [-3; -1.5] \\ 129 + 2t & \text{für } t \in (-1.5; -1/4] \\ 128 - 2t & \text{für } t \in (-1/4; 1] \\ 129 + 2t & \text{für } t \in (1; 3] \\ 177 + 2t & \text{für } t \in (3; 6]. \end{cases}$$

Mit Kenntnis dieser Optimalwertfunktion kann man nun die einzelnen Optimallösungen zu den gegebenen Parametern in den obigen Tabellen ablesen.

http://www.springer.com/978-3-519-00448-6

Operations Research
Deterministische Modelle und Methoden
Dempe, S.; Schreier, H.
2006, 383 S. Mit Online-Extras., Softcover
ISBN: 978-3-519-00448-6