Lösungen zu den Übungsaufgaben im Kapitel 6 des Lehrbuches
Operations Research – Deterministische Modelle und Methoden
von Stephan Dempe und Heiner Schreier

Aufgabe: Betrachtet werde die folgende Optimierungsaufgabe:

$$\left.\begin{array}{rcl} x^2 + y^2 & \rightarrow & \min \\ x^2 - 16y & \leq & 0 \\ 1.6 - y(x - 1.6) & \leq & 0 \\ -3.5x^2 + 19.5x - y - 21 & \leq & 0 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Ist die Zielfunktion der Aufgabe (1) konvex?

Betrachtet werden die zwei Punkte $(x_1, y_1) = (2, 4)$ und $(x_2, y_2) = (4, 1)$. Sind in diesen Punkten Regularitätsbedingungen erfüllt?

Stellen Sie die Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen für diese Aufgabe auf und überprüfen Sie, ob die angegebenen Punkte stationär sind!

Überprüfen Sie die beiden Punkte auf Optimalität! Ergibt sich ein Widerspruch zu Satz 6.17 ?

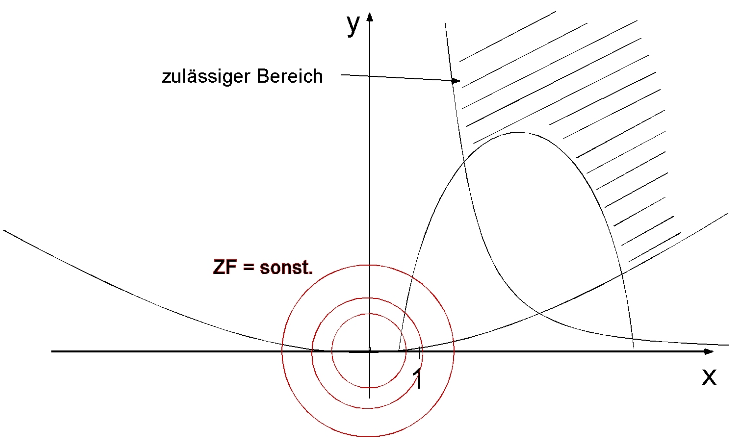

Abbildung 1: Graphische Lösung der Aufgabe.

Lösung: Eine Skizze der graphischen Lösung der Aufgabe ist in Abbildung 1 angegeben.

a) Die Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ ist zweimal stetig differenzierbar. Somit können wir Satz 6.7 nutzen und die Konvexität der Funktion mit Hilfe der Hessematrix zeigen. Die Hessematrix der Funktion ist

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist positiv semidefinit wegen $d^\top \nabla^2 f(x,y) d = 2d_1^2 + 2d_2^2 \geq 0$ für alle $d = (d_1, d_2)^\top \in \mathbb{R}^2$. Also ist die Funktion $f(x,y)$ konvex.
Darüber hinaus ist die Hessematrix sogar positiv definit wegen

$$d^\top \nabla^2 f(x,y) d = 2d_1^2 + 2d_2^2 > 0 \qquad \text{für alle } d = (d_1, d_2)^\top \in \mathbb{R}^2 \backslash \{\mathbf{0}\}.$$

Somit ist die Funktion $f(x,y)$ auch streng konvex.

b) Es ist

$$\nabla g_1(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -16 \end{pmatrix},\ \nabla g_2(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ 1.6 - x \end{pmatrix},\ \nabla g_3(x,y) = \begin{pmatrix} -7x + 19.5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Es müssen nun die aktiven Nebenbedingungen $I(x_1, y_1) = \{i :\ g_i(x_1, y_2) = 0\}$ bzw. $I(x_2, y_2) = \{i :\ g_i(x_2, y_2) = 0\}$ bestimmt werden:

$$\begin{array}{c} g_1(2,4) = -60 < 0, \quad g_2(2,4) = 0 \quad \text{und} \quad g_3(2,4) = 0 \\ g_1(4,1) = 0, \quad g_2(4,1) = -0.8 < 0 \quad \text{und} \quad g_3(4,1) = 0. \end{array}$$

Somit ist $I(x_1, y_1) = \{2, 3\}$ und $I(x_2, y_2) = \{1, 3\}$.

Als erstes überprüfen wir die Regularitätsbedingung (LICQ).

Punkt $(2,4)$: Es ist $\nabla g_2(2,4) = (-4, -0.4)^\top$ und $\nabla g_3(2,4) = (5.5, -1)^\top$. Diese Vektoren sind linear unabhängig wegen

$$\det \begin{pmatrix} -4 & 5.5 \\ -0.4 & -1 \end{pmatrix} = 6.2 \neq 0.$$

Also gilt die Bedingung (LICQ).

Punkt $(4,1)$: Es ist $\nabla g_1(4,1) = (8, -16)^\top$ und $\nabla g_3(4,1) = (-8.5, -1)^\top$. Diese Vektoren sind linear unabhängig wegen

$$\det \begin{pmatrix} 8 & -8.5 \\ -16 & -1 \end{pmatrix} = -144 \neq 0.$$

Also gilt die Bedingung (LICQ).

Da (LICQ) eine hinreichende Bedingung für (6.8) ist, gilt (6.8) für beide Punkte. Da (6.8) zur Mangasarian-Fromowitz-Bedingung äquivalent ist, gilt auch diese. Die Mangasarian-Fromowitz-Bedingung (MFCQ) kann natürlich auch direkt gezeigt werden, denn für beide Punkte erfüllt z.B. der Vektor $d = (0, 1)^\top$ die Ungleichungen.

Die Slater-Bedingung kann in diesem Beispiel nicht angewendet werden, da die Funktion $g_3(x,y) = -3.5x^2 + 18.5x - y - 21$ nicht konvex und somit auch die Aufgabe nicht konvex ist.

Da in den angegebenen Punkten Regularitätsbedingungen erfüllt sind, genügt es die Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen zu untersuchen, um die Stationarität der Punkte zu überprüfen.

c) Die Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen für die gegebene Aufgabe lauten wie folgt:

$$\boxed{\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc}
2x & + & 2\lambda_1 x & - & \lambda_2 y & + & \lambda_3(-7x+19.5) & = & 0 \\
2y & - & 16\lambda_1 & - & \lambda_2(x-1.6) & - & \lambda_3 & = & 0
\end{array} \\[1em]
\begin{array}{rrr}
x^2 - 16y \le 0 & 1.6 - y(x-1.6) \le 0 & -3.5x^2 + 19.5x - y - 21 \le 0 \\
\lambda_1 \le 0 & \lambda_2 \le 0 & \lambda_3 \le 0 \\
(x^2 - 16y)\lambda_1 = 0 & (1.6 - y(x-1.6))\lambda_2 = 0 & (-3.5x^2 + 19.5x - y - 21)\lambda_3 = 0
\end{array}
\end{array}}$$

Wird in diese Bedingungen der Punkt $(2,4)$ eingesetzt, so erhalten wir die folgenden Bedingungen für die Lagrange-Multiplikatoren:

$$\begin{array}{ccccccccc}
4 & + & 4\lambda_1 & - & 4\lambda_2 & + & 5.5\lambda_3 & = & 0 \\
8 & - & 16\lambda_1 & - & 0.4\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0
\end{array}$$

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 \ge 0, \quad \lambda_3 \ge 0$$

Wir erhalten hieraus die Lagrange-Multiplikatoren $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \frac{240}{31}$ und $\lambda_3 = \frac{152}{31}$, d.h. der Punkt $(2,4)$ ist stationär.

Setzen wir in die Kuhn-Tucker-Bedingungen den Punkt $(2,4)$ ein, so erhalten wir die folgenden Bedingungen für die Lagrange-Multiplikatoren:

$$\begin{array}{ccccccccc}
8 & + & 8\lambda_1 & - & \lambda_2 & - & 8.5\lambda_3 & = & 0 \\
2 & - & 16\lambda_1 & - & 2.4\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0
\end{array}$$

$$\lambda_1 \ge 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 \ge 0$$

Wir erhalten hieraus die Lagrange-Multiplikatoren $\lambda_1 = \frac{1}{16}$, $\lambda_2 = 0$ und $\lambda_3 = 1$, d.h. der Punkt $(4,1)$ ist ebenfalls stationär.

d) Zur Überprüfung der Optimalität verwenden wir Satz 6.25. Zunächst bestimmen wir für die beiden Punkte alle Vektoren $d = (d_1, d_2)^\top \in \mathbb{R}^2$, welche die Ungleichungen (6.10) erfüllen. Dabei ist $\nabla f(x,y) = (2x, 2y)^\top$.

Für den Punkt $(2,4)$ war die Menge der aktiven Nebenbedingungen $I(2,4) = \{2,3\}$. Wir haben also das Ungleichungssystem

$$\begin{aligned} 4d_1 + 8d_2 &\leq 0 \\ -4d_1 - 0.4d_2 &\leq 0 \\ 5.5d_1 - d_2 &\leq 0 \end{aligned}$$

zu lösen. Addieren wir die ersten beiden Ungleichungen, so erhalten wir $7.6d_2 \leq 0$, d.h. $d_2 \leq 0$. Addieren wir das 5.5-fache der 2. Ungleichung mit dem 4-fachen der 3. Ungleichung, so erhalten wir $-6.2d_2 \leq 0$. Also ist $d_2 = 0$. Aus den ersten beiden Ungleichungen folgt nun offensichtlich $d_1 = 0$. Somit existiert kein $d \in \mathbb{R}^2 \backslash \{\mathbf{0}\}$, welches die Ungleichungen (6.10) erfüllt. Somit sind die hinreichenden Optimalitätsbedingungen von Satz 6.25 erfüllt, d.h. der Punkt $(2,4)$ ist ein lokales Minimum.

Für den Punkt $(4,1)$ war die Menge der aktiven Nebenbedingungen $I(4,1) = \{1,3\}$. Wir haben also das Ungleichungssystem

$$\begin{aligned} 8d_1 + 2d_2 &\leq 0 \\ 8d_1 - 16d_2 &\leq 0 \\ -8.5d_1 - d_2 &\leq 0 \end{aligned}$$

zu lösen. Addieren wir das 8-fache der ersten Ungleichung mit der zweiten Ungleichung, so erhalten wir $72d_1 \leq 0$, d.h. $d_1 \leq 0$. Addieren wir das doppelte der 3. Ungleichung mit der ersten Ungleichung, so erhalten wir $-9d_1 \leq 0$. Also ist $d_1 = 0$. Aus den ersten beiden Ungleichungen folgt nun offensichtlich $d_2 = 0$. Somit existiert kein $d \in \mathbb{R}^2 \backslash \{\mathbf{0}\}$, welches die Ungleichungen (6.10) erfüllt. Somit sind die hinreichenden Optimalitätsbedingungen von Satz 6.25 erfüllt, d.h. der Punkt $(4,1)$ ist ebenfalls ein lokales Minimum.

Wir haben also zwei lokale Minima gefunden mit $f(2,4) = 20 > f(4,1) = 17$. Dies ist kein Widerspruch zum Satz 6.17, da die Aufgabe nicht konvex ist.

Springer

http://www.springer.com/978-3-519-00448-6

Operations Research
Deterministische Modelle und Methoden
Dempe, S.; Schreier, H.
2006, 383 S. Mit Online-Extras., Softcover
ISBN: 978-3-519-00448-6