Lösungen zu den Übungsaufgaben im Kapitel 7 des Lehrbuches
Operations Research – Deterministische Modelle und Methoden
von Stephan Dempe und Heiner Schreier

Aufgabe 1: Betrachtet werde das Matrixspiel mit der Auszahlungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & a \end{pmatrix}.$$

1. Für welche Werte von a gibt es ein Nash'sches Gleichgewicht?
2. Berechnen Sie für $a = 0.5$ die optimalen gemischten Strategien!

Lösung: a) Wir verwenden Satz 7.6 mit $S_1 = S_2 = \{1, 2, 3\}$ und $f(i, j) = a_{ij}$, wobei $A = (a_{ij})$ sei. Es existiert somit ein Nash-Gleichgewicht genau dann, wenn

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$$

gilt. Um dies zu überprüfen, verwenden wir die folgende Fallunterscheidung:

$\boxed{a < -1:}$

$$\begin{aligned} \max_i \min_j a_{ij} &= \max\{a, -1, \min\{a, -2\}\} = -1 \\ \min_j \max_i a_{ij} &= \min\{1, -1, 1\} = -1 \end{aligned}$$

Es gilt Gleichheit, d.h. für $a < -1$ existiert ein Nash-Gleichgewicht.

$\boxed{-1 \le a \le 0:}$

$$\begin{aligned} \max_i \min_j a_{ij} &= \max\{a, -1, -2\} = a \\ \min_j \max_i a_{ij} &= \min\{1, a, 1\} = a \end{aligned}$$

Es gilt Gleichheit, d.h. auch für $a \in [-1; 0]$ existiert ein Nash-Gleichgewicht.

$\boxed{a > 0:}$

$$\begin{aligned} \max_i \min_j a_{ij} &= \max\{\, 0, -1, -2\} = 0 \\ \min_j \max_i a_{ij} &= \min\{\, 1, \underbrace{a}_{>0}, \underbrace{\max\{1, a\}}_{>0}\} > 0 \end{aligned}$$

Es gilt hier keine Gleichheit, d.h. für $a > 0$ existiert kein Nash-Gleichgewicht.

Wir haben somit das folgende Ergebnis erhalten: Ein Nash-Gleichgewicht existiert genau dann, wenn $a \leq 0$ ist.

b) Werden gemischte Strategien verwendet, so existiert bei Matrixspielen stets ein Nash-Gleichgewicht. Dies gilt, da alle Voraussetzungen von Satz 7.4 erfüllt sind.

Für die Berechnung der gemischten Strategien verwenden wir die Aufgabe (7.3). Die Aufgabe des 2. Spielers lautet somit

$$
\begin{array}{rcrcrcl}
 & & & & z = \alpha \rightarrow \min & & \\
y_1 & + & 0.5y_2 & & & \leq & \alpha \\
-y_1 & - & y_2 & + & y_3 & \leq & \alpha \\
-2y_1 & - & 2y_2 & + & 0.5y_3 & \leq & \alpha \\
y_1 & + & y_2 & + & y_3 & = & 1 \\
 & & & & y_1, y_2, y_3 & \geq & 0.
\end{array}
$$

Für alle zulässigen Lösungen dieser Aufgabe gilt $\alpha > 0$.

Begründung: Aufgrund der 1. Ungleichung gilt nun $\alpha \geq 0$ für alle zulässigen Lösungen. Angenommen es ist $\alpha = 0$. Wegen der ersten Ungleichung ist dann $y_1 = y_2 = 0$. Somit ist also $y_3 = 1$. Dies ist aber ein Widerspruch zur zweiten Ungleichung.

Wegen $\alpha > 0$ können wir sofort die folgende Transformation durchführen:

$$
y'_1 := y_1/\alpha, \quad y'_2 := y_2/\alpha, \quad y'_3 := y_3/\alpha, \quad z' := 1/\alpha = y'_1 + y'_2 + y'_3.
$$

Somit erhalten wir die folgende lineare Optimierungsaufgabe (siehe (7.6)):

$$
\begin{array}{rcrcrcl}
 & & & & z' = y'_1 + y'_2 + y'_3 \rightarrow \max & & \\
y'_1 & + & 0.5y'_2 & & & \leq & 1 \\
-y'_1 & - & y'_2 & + & y'_3 & \leq & 1 \\
-2y'_1 & - & 2y'_2 & + & 0.5y'_3 & \leq & 1 \\
 & & & & y'_1, y'_2, y'_3 & \geq & 0.
\end{array}
$$

Diese Aufgabe wird nun mittels Simplexmethode gelöst.

		y_1'	y_2'	y_3'	u_1	u_2	u_3		
		1	1	1	0	0	0		θ
u_1	0	1	(0.5)	0	1	0	0	1	2
u_2	0	-1	-1	1	0	1	0	1	$-$
u_3	0	-2	-2	0.5	0	0	1	1	$-$
		-1	(-1)	-1	0	0	0	0	
y_1'	1	2	1	0	2	0	0	2	$-$
u_2	0	1	0	(1)	2	1	0	3	3
u_3	0	2	0	0.5	4	0	1	5	10
		1	0	(-1)	2	0	0	2	
y_1'	1	2	1	0	2	0	0	2	
y_2'	1	1	0	1	2	1	0	3	
u_3	0	1.5	0	0	3	-0.5	1	3.5	
		2	0	0	4	1	0	5	

Wir erhalten also als optimale Lösung $z' = 5$, $y_1' = 2$, $y_2' = 3$ und $y_3' = 0$. Wir müssen nun die Rücktransformation durchführen. Es ist also $\alpha = 1/z' = 0.2$, $y_1 = y_1'\alpha = 0.4$, $y_2 = y_2'\alpha = 0.6$ und $y_3 = y_3'\alpha = 0$.

Die optimale Strategie des zweiten Spielers lautet also wie folgt:
Er wählt die 1. Spalte mit Wahrscheinlichkeit 2/5 und die 2. Spalte mit Wahrscheinlichkeit 3/5.

Die optimale Strategie des ersten Spielers kann aus den Optimalitätsindikatoren der Schlupfvariablen abgelesen werden. Es ist $x_1' = \delta(u_1) = 4$, $x_2' = \delta(u_2) = 1$ und $x_3' = \delta(u_3) = 0$. Mit der Rücktransformation erhalten wir die optimale Strategie des ersten Spielers

$$x_1 = x_1'\alpha = 4/5, \quad x_2 = x_2'\alpha = 1/5 \quad \text{und} \quad x_3 = x_3'\alpha = 0,$$

d.h. die erste Zeile wird mit der Wahrscheinlichkeit 4/5 und die 2. Zeile mit der Wahrscheinlichkeit 1/5 gespielt. Der Erwartungswert für den Gewinn des ersten Spielers ist $\alpha = 0.2$.

Aufgabe 2: Es sei das folgende Zweipersonenspiel betrachtet: Die Spieler P_1 und P_2 wählen je eine natürliche Zahl i_1 bzw. i_2 aus dem Bereich $1, \ldots, n$. P_1 gewinnt, falls $i_1 = i_2 + 1$ oder $i_1 = 1$ und $i_2 = n$ gilt. P_2 gewinnt, falls $i_2 = i_1 + 1$ oder $i_2 = 1$ und $i_1 = n$ gilt. In allen anderen Fällen geht das Spiel unentschieden aus. Falls ein Spieler gewinnt, so erhält er 1 GE vom Gegenspieler, und bei einem Unentschieden finden keine Zahlungen statt. Man weise nach, dass bei ungeradem n die Gleichgewichts-Lösung (in gemischten Strategien) eindeutig ist, und dass dies bei geradem n nicht der Fall ist.

Lösung: Es sei $n \geq 3$ vorausgesetzt. Die Auszahlungsmatrix des Spiels ist

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & \ddots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist offensichtlich schiefsymmetrisch, d.h. es gilt $A = -A^\top$. Bei Matrixspielen bedeutet dies, dass die beiden Spieler die gleichen Gewinnchancen haben. Der Wert des Spieles ist also Null, d.h. die Aufgaben (7.3) bzw. (7.4) besitzen optimale Lösungen (y^*, α^*) bzw. (x^*, β^*) mit $\alpha^* = \beta^* = 0$. Die optimalen Strategien y^* von Spieler 2 (analog von Spieler 1) ergeben sich aus (7.3) wie folgt:

$$Ay^* \leq 0, \quad e^\top y^* = 1, \quad y^* \geq 0.$$

Wegen $0 = e^\top Ay^* \leq 0$ folgt weiter $Ay^* = 0$. Es ist somit zu zeigen, dass das Ungleichungs-/Geichungssystem

$$(*) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} Ay^* & = & 0 \\ e^\top y^* & = & 1 \\ y^* & \geq & 0 \end{array} \right.$$

für ungerades n genau eine und für gerades n mehrere Lösungen hat.

Aus den Gleichungen 2 bis n des Gleichungssystems $Ay^* = 0$ erhalten wir

$$\begin{array}{rcll} y_k^* & = & y_1^* & \quad \text{für alle ungeraden k,} \\ y_k^* & = & y_2^* & \quad \text{für alle geraden k.} \end{array}$$

Ist n ungerade, so erhalten wir mit der ersten Gleichung $y_2^* = y_n^*$ die Gleichheit $y_1^* = y_2^* = \ldots = y_n^*$. Aus $e^\top y^* = 1$ erhalten wir dann die eindeutige optimale Strategie

$$y_1^* = y_2^* = \ldots = y_n^* = 1/n.$$

Ist n gerade, so erhalten wir mit der ersten Gleichung $y_2^* = y_n^*$ keine weitere Einschränkung des Ergebnisses. Aus $e^\top y^* = 1$ erhalten wir also

$$1 = \sum_{k\ ungerade} y_k^* + \sum_{k\ gerade} y_k^* = \frac{n}{2} y_1^* + \frac{n}{2} y_2^*.$$

Sei $y_1^* := a$. Dann ist also $y_2^* = 2/n - a \geq 0$. Die Menge der optimalen Strategien ist somit

$$\{y^* : \ y_k^* = a \text{ für k ungerade}, y_k^* = n/2 - a \text{ für k gerade mit } a \in [0; n/2]\}.$$

Ist also n gerade, so besitzt der Spieler 2 unendlich viele optimale Strategien. Die optimalen Strategien des Spielers 1 entsprechen den optimalen Strategien des Spielers 2.

Aufgabe 3: Beim Nim-Spiel sind k Reihen mit n_j, $j = 1, \ldots, k$, Streichhölzern vorhanden. Zwei Spieler nehmen abwechselnd Streichhölzer aus einer der Reihen weg. Wie viele sie nehmen spielt keine Rolle; es muss jedoch mindestens ein Streichholz sein und es dürfen bei einem Zug nur Streichhölzer einer einzigen Reihe genommen werden. Derjenige Spieler, der den letzten Zug macht, also die letzten Streichhölzer wegnimmt, gewinnt.

Für den Fall $k = 3$ und $n = (2, 2, 1)$ stelle man das Spiel in extensiver Form (Spielbaum) dar. Welcher Spieler besitzt eine Gewinnstrategie?

Anschließend betrachte man den allgemeinen Fall und untersuche in Abhängigkeit von k und $(n_j)_{j=1,\ldots,k}$ welcher der beiden Spieler eine Gewinnstrategie besitzt.

Lösung: Als erstes betrachten wir den Fall $k = 3$ und $n = (2, 2, 1)$ und versuchen eine Gewinnstrategie des ersten Spielers zu finden.

Als erstes sollte der 1. Spieler das Streichholz der 3. Reihe entfernen. Der 2. Spieler hat dann die folgenden Möglichkeiten:

1.) Er entfernt die 2 Streichhölzer der ersten oder zweiten Reihe. Dann kann der erste Spieler die verbliebenen Streichhölzer entfernen und gewinnt das Spiel.

2.) Er entfernt nur ein Streichholz. Dann entfernt der 1. Spieler ein Streichholz der anderen Reihe. Wir haben dann die Situation (1,1,0). Der 2. Spieler muss nun die erste oder zweite Reihe leeren. Der 1. Spieler kann nun das verbliebene Streichholz entfernen und gewinnt somit auch hier.

Wir haben also für $n = (2, 2, 1)$ eine Gewinnstrategie des ersten Spielers gefunden.

Seien nun k und $n = (n_1, \ldots, n_k)$ beliebig. Wie können wir nun Gewinnstrategien der beiden Spieler beschreiben?

Seien $d^i := (\ldots, d_2^i, d_1^i, d_0^i)$ die Dualdarstellungen der Zahlen n_i, $i = 1, \ldots, k$. Es sei also $n_i = \sum_j d_j^i 2^j$ mit $d_j^i \in \{0, 1\}$ für alle i und j. Weiter sei $s =$

$(\ldots, s_2, s_1, s_0)$ gegeben durch

$$s_i := d_i^1 + d_i^2 + \ldots + d_i^k (\bmod 2).$$

s_i entspricht also dem Rest von $d_i^1 + d_i^2 + \ldots + d_i^k$ bei Division durch 2.

Wie ändern sich nun die d^i und s bei einem regulären Zug eines Spielers? Bei einem regulären Zug eines Spieler wird genau ein n_l verändert. Die neue Dualdarstellung sei $\tilde{d}^l$ und es sei $I := \{i : \tilde{d}_i^l \neq d_i^l\}$ die Menge aller Indizes, in welchen die Dualdarstellungen nicht übereinstimmen. Weiter sei i_0 der größte Index in der Indexmenge I. Da n_l verkleinert wird, gilt $d_{i_0}^l = 1$ und $\tilde{d}_{i_0}^l = 0$. Im neuen Vektor $\tilde{s}$ gilt $\tilde{s}_i = s_i$ für alle $i \notin I$ und $\tilde{s}_i = s_i + 1 (\bmod 2)$ für alle $i \in I$.

Wir unterscheiden nun die Fälle $s = \mathbf{0}$ und $s \neq \mathbf{0}$.

Angenommen s ist ein Nullvektor. Führt nun ein Spieler einen regulären Zug durch mit einer Indexmenge I, so gilt für den neuen Vektor $\tilde{s}$ aufgrund der obigen Ausführungen $\tilde{s}_i \neq 0$ für alle $i \in I$, d.h. $\tilde{s} \neq \mathbf{0}$.

Angenommen es ist $s \neq \mathbf{0}$. Dann existiert eine nichtleere Indexmenge $J = \{i : s_i \neq 0\}$. Sei i_0 der größte Index mit $i_0 \in J$. Dann existiert ein $l \in \{1, \ldots, k\}$ mit $d_{i_0}^l = 1$. Wir berechnen nun die Dualdarstellung $\tilde{d}^l$ einer Zahl $\tilde{n}_l$ mit $\tilde{d}_i^l := d_i^l$ für alle $i \notin J$ und $\tilde{d}_i^l := d_i^l + 1 (\bmod 2)$ für alle $i \in J$. Wegen $d_{i_0}^l = 1$ gilt dann $\tilde{n}_l < n_l$. Dies entspricht also einem regulären Zug eines Spielers, wobei $\tilde{s} = \mathbf{0}$ gilt.

Da für $n = (0, 0, \ldots, 0)$ die Gleichung $s = \mathbf{0}$ gilt, besitzt der erste Spieler bei $n = (n_1, \ldots, n_k)$ genau dann eine Gewinnstrategie, wenn $s \neq \mathbf{0}$ gilt.

Wir demonstrieren dies zum besseren Verständnis an einigen Beispielen:

Spieler	n	d^1	d^2	d^3	s	l	$I \rightarrow \tilde{n}$
1	$(1,2,3)$	$(0,0,1)$	$(0,1,0)$	$(0,1,1)$	$(0,0,0)$	3	$\{1\} \rightarrow (1,2,1)$
2	$(1,2,1)$	$(0,0,1)$	$(0,1,0)$	$(0,0,1)$	$(0,1,0)$	2	$\{1\} \rightarrow (1,0,1)$
1	$(1,0,1)$	$(0,0,1)$	$(0,0,0)$	$(0,0,1)$	$(0,0,0)$	1	$\{0\} \rightarrow (0,0,1)$
2	$(0,0,1)$	$(0,0,0)$	$(0,0,0)$	$(0,0,1)$	$(1,0,0)$	3	$\{0\} \rightarrow (0,0,0)$

Gilt $n = (1, 2, 3)$, so besitzt der zweite Spieler eine Gewinnstrategie. Gilt $n = (4, 6, 3, 5)$, so ist $d^1 = (0, 1, 0, 0)$, $d^2 = (0, 1, 1, 0)$, $d^3 = (0, 0, 1, 1)$ und $d^4 = (0, 1, 0, 1)$. Also ist $s = (0, 1, 0, 0)$. Der erste Spieler wird also z.B. $l = 2$ und $I = 2$ wählen, d.h. er entnimmt der 2. Reihe 4 Streichhölzer. Wenn er an der vorgeschlagenen Gewinnstrategie festhält, so kann der zweite Spieler nicht gewinnen.

Aufgabe 4: Betrachtet sei die folgende Funktion $v(K)$:

K	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v(K)$	0	9	5	3	22	16	12	25

1. Überprüfen Sie, ob die Funktion $v(K)$ eine charakteristische Funktion ist!
2. Bestimmen Sie den Kern dieses Spiels!
3. Bestimmen Sie den Shapley-Vektor!

Lösung: a) Es lässt sich leicht mit Definition 7.12 überprüfen, dass $v(K)$ eine charakteristische Funktion ist.

b) Der Kern des Spiels ist aufgrund des Satzes 7.13 wie folgt gegeben:

$$x_1 \geq 9,\ x_2 \geq 5,\ x_3 \geq 3,\ x_1 + x_2 + x_3 = 25$$
$$x_1 + x_2 \geq 22,\ x_1 + x_3 \geq 16,\ x_2 + x_3 \geq 12$$

Es wird nun x_3 durch $x_3 = 25 - x_1 - x_2$ ersetzt. Dann erhalten wir

$$x_1 \in [9, 13], \quad x_2 \in [5, 9], \quad x_1 + x_2 = 22.$$

Aus $22 = \underbrace{x_1}_{\leq 13} + \underbrace{x_2}_{\leq 9} \leq 22$ folgt nun $x_1 = 13$, $x_2 = 9$ und $x_3 = 3$, d.h. der Kern des Spiels besteht aus einem einzigen Punkt

$$\mathcal{K} = \{x_1 = 13,\ x_2 = 9,\ x_3 = 3\}.$$

c) Die Berechnung des Shapley-Vektors erfolgt mit Hilfe des Satzes 7.17:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(v) &= \frac{0!2!}{3!}(v(\{1\}) - v(\emptyset)) + \frac{1!1!}{3!}(v(\{1,2\}) - v(\{2\})) \\
&\quad + \frac{1!1!}{3!}(v(\{1,3\}) - v(\{3\})) + \frac{2!0!}{3!}(v(\{1,2,3\}) - v(\{2,3\})) \\
&= \frac{2}{6}9 + \frac{1}{6}17 + \frac{1}{6}13 + \frac{2}{6}13 = \frac{37}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_2(v) &= \frac{0!2!}{3!}(v(\{2\}) - v(\emptyset)) + \frac{1!1!}{3!}(v(\{1,2\}) - v(\{1\})) \\
&\quad + \frac{1!1!}{3!}(v(\{2,3\}) - v(\{3\})) + \frac{2!0!}{3!}(v(\{1,2,3\}) - v(\{1,3\})) \\
&= \frac{2}{6}5 + \frac{1}{6}13 + \frac{1}{6}9 + \frac{2}{6}9 = \frac{25}{3}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\varphi_3(v) &= \frac{0!2!}{3!}(v(\{3\})-v(\emptyset))+\frac{1!1!}{3!}(v(\{1,3\})-v(\{1\})) \\
&\quad +\frac{1!1!}{3!}(v(\{2,3\})-v(\{2\}))+\frac{2!0!}{3!}(v(\{1,2,3\})-v(\{1,2\})) \\
&= \frac{2}{6}3+\frac{1}{6}7+\frac{1}{6}7+\frac{2}{6}3=\frac{13}{3}
\end{aligned}
$$

Probe: $\varphi_1(v)+\varphi_2(v)+\varphi_3(v)=25=v(\{1,2,3\})$.

Aufgabe 5: Für die Aufteilung eines Kuchens mittels einfacher Mehrheit auf drei Personen, zeige man, dass

$$
M=\left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 0\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}\right\}
$$

eine Neumann-Morgenstern-Lösung ist.

Lösung: Zu der angegebenen Aufgabe gehört die folgende charakteristische Funktion:

K	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v(K)$	0	0	0	0	1	1	1	1

Demzufolge besitzt jede Zuteilung $x\in\mathbb{R}^3$ die folgenden Eigenschaften (siehe Definition 7.13):

$$
x_1\geq 0,\quad x_2\geq 0,\quad x_3\geq 0,\quad x_1+x_2+x_3=1.
$$

Für den Nachweis der Behauptung verwenden wir nun Definition 7.20 und Definition 7.17.

1. Eigenschaft: Angenommen es existieren $y^1,y^2\in M$ und eine Koalition K mit $y^1\succ_K y^2$. Dann gilt $v(K)>0$ und $y_i^1>y_i^2$ für alle $i\in K$. Aus $v(K)>0$ folgt aber $|K|\geq 2$. Wegen $y^2\in M$ existiert somit ein $i\in K$ mit $y_i^1>y_i^2=1/2$. Dies ist ein Widerspruch zu $y^1\in M$.

Die erste Eigenschaft gilt also.

2. Eigenschaft: Sei $x\notin M$ ein Zuteilung. Dann existieren zwei Indizes i,j, $i\neq j$, mit $x_i<1/2$ und $x_j<1/2$. Dann existiert jedoch offensichtlich ein $y\in M$ mit $y_i=y_j=1/2$. Bezüglich der Koalition $K=\{i,j\}$ gilt also $x\succ_K y$, d.h. die zweite Eigenschaft gilt ebenfalls.

Die Menge M ist somit eine Neumann-Morgenstern-Lösung.

Aufgabe 6: Der aktuelle Bundestag besteht aus 614 Mitgliedern, die sich wie folgt auf die Parteien verteilen:

Union	SPD	FDP	Die Grünen	Die Linke
226	222	61	51	54

Man berechne für Abstimmungen mit einfacher Mehrheit (308 Stimmen) die Werte der Shapley-Funktion der fünf Parteien.

Lösung: Wir gehen wie im Beispiel 7.13 vor. Somit soll die charakteristische Funktion wieder den Wert 1 für alle Gewinnerkoalitionen und den Wert 0 für alle Verliererkoalitionen haben.

Seien die Parteien in der angegebenen Reihenfolge durchnummeriert. Dann gibt es die folgenden Gewinnerkoalitionen:

$$\begin{aligned}\{1,2\},\ \{1,2,3\},\ \{1,2,4\},\ \{1,2,5\},\ \{1,2,3,4\},\ \{1,2,3,5\},\ \{1,2,4,5\},\\ \{1,3,4\},\ \{1,4,5\},\ \{1,3,5\},\ \{1,3,4,5\},\\ \{2,3,4\},\ \{2,4,5\},\ \{2,3,5\},\ \{2,3,4,5\},\ \{1,2,3,4,5\}\end{aligned}$$

Wenn die erste Partei die Koalition verlässt, werden aus den Koalitionen $\{1,2\}$, $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,2,5\}, \{1,3,4\}$, $\{1,4,5\}$, $\{1,3,5\}$, $\{1,3,4,5\}$ Verliererkoalitionen. Demzufolge ist

$$\varphi_1(v) = \frac{1!3!}{5!} + 6\frac{2!2!}{5!} + \frac{3!1!}{5!} = 0.3.$$

Weiter gilt offensichtlich $\varphi_2(v) = \varphi_1(v) = 0.3$. Wenn die dritte Partei die Koalition verlässt, werden aus den Koalitionen $\{1,3,4\}$, $\{1,3,5\}$, $\{2,3,4\}$ und $\{2,3,5\}$ Verliererkoalitionen. Also ist

$$\varphi_3(v) = 4\frac{2!2!}{5!} = \frac{2}{15}.$$

Da die Parteien 3, 4, 5 rechnerisch gesehen als Koalitionspartner gleichwertig sind, gilt $\varphi_3(v) = \varphi_4(v) = \varphi_5(v) = 2/15$.

http://www.springer.com/978-3-519-00448-6

Operations Research
Deterministische Modelle und Methoden
Dempe, S.; Schreier, H.
2006, 383 S. Mit Online-Extras., Softcover
ISBN: 978-3-519-00448-6