

Curve e superfici di M. Abate e F. Tovena

Errata e addenda per la seconda edizione (2008)

Ulteriori correzioni e suggerimenti sono benvenuti e possono essere inviati per e-mail a uno qualsiasi degli autori (abate@dm.unipi.it o tovena@mat.uniroma2.it).

Pag. 5, riga -9: “e $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ un’applicazione” al posto di “e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione”.

Pag. 5, riga -6: “ $F(p_0) = O$ e $\det \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(p_0) \right)_{i,j=1,\dots,n} \neq 0$.” al posto di “ $f(p_0) = O$ e $\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(p_0) \right)_{i,j=1,\dots,n} \neq 0$.”.

Pag. 5, riga -4: “ $F(p) = O$ ” al posto di “ $f(p) = O$ ”.

Pag. 6, riga 3: “di p_0 ” al posto di “di p ”.

Pag. 6, riga 5: “ p_0 ” al posto di “ p ”.

Pag. 6, riga 6: “ p_0 ” al posto di “ p ”.

Pag. 6, riga 7: “ p_0 ” al posto di “ p ”.

Pag. 6, riga 8: “ p_0 ” al posto di “ p ”.

Pag. 6, riga 15: aggiungere la seguente osservazione: “Più in generale, si può dimostrare che ogni sottoinsieme di \mathbb{R}^2 che sia localmente un grafico è *globalmente* il sostegno di una curva parametrizzata; vedi il Teorema 1.6.8.”

Pag. 8, riga -1: togliere la virgola dopo “parametrizzazione”.

Pag. 9, riga 12: “2.8” al posto di “2.5”.

Pag. 10, riga -10: “ $< t_k = b$ ” al posto di “ $< t_n = b$ ”.

Pag. 10, riga -5: togliere la virgola alla fine della formula.

Pag. 12, riga 11: “dominio” al posto di “sostegno”.

Pag. 13, riga 12: “ $\tilde{\sigma} = \sigma \circ s^{-1}: \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ” al posto di “ $\tilde{\sigma} = \sigma \circ s^{-1}: \tilde{I} \rightarrow I$ ”.

Pag. 13, riga 17: “ $\tilde{\sigma}$ ” al posto di “ $\tilde{\sigma}_1$ ”.

Pag. 13, riga 19: “ $\tilde{\sigma}$ ” al posto di “ $\tilde{\sigma}_1$ ”.

Pag. 13, riga 23: “ammette” al posto di “ammetta”.

Pag. 17, riga -11: “**Proposizione 1.3.10**” al posto di “**Lemma 1.3.10**”.

Pag. 18, riga 9: “1.3.8” al posto di “1.3.12”.

Pag. 18, riga 10: aggiungere “e $\sigma''(t) = (a \cos t, -b \sin t)$ ” prima di “per cui”.

Pag. 19, riga 5: “dell’applicazione” al posto di “della funzione”.

Pag. 19, riga 8: “fosse” al posto di “forse”.

Pag. 19, riga -7: aggiungere “di una curva piana” dopo “orientata”.

Pag. 21, riga -3: “applicazione” al posto di “funzione”.

Pag. 22, riga -14: “ H ” al posto di “ π ”.

Pag. 27, riga 6: “ $\langle \sigma' \wedge \sigma'', \sigma''' \rangle$ ” al posto di “ $\langle \sigma' \wedge \sigma'', \sigma''' \rangle$ ”.

Pag. 29, riga 11: inserire un “-” prima di “ $\lim_{t \rightarrow \pi/2^+}$ ”.

Pag. 29, riga -9: “ $\pi - \arcsin e^{-s} \in [\pi/2, \pi)$ ” al posto di “ $\arcsin e^{-s} \in [\pi/2, \pi)$ ”.

Pag. 29, riga -7: inserire “usando la formula $\tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ si vede che” prima di “la riparametrizzazione”.

Pag. 29, riga -6: mettere “ $(e^{-s}, -s - \sqrt{1 - e^{-2s}} - \log(1 - \sqrt{1 - e^{-2s}}))$ ” al posto di “ $(e^{-s}, s - \sqrt{1 - e^{-2s}} + \log(1 + \sqrt{1 - e^{-2s}}))$ ”.

Pag. 29, riga -5: mettere “ $(e^s, s + \sqrt{1 - e^{2s}} - \log(1 + \sqrt{1 - e^{2s}}))$ ” al posto di “ $(e^s, -s + \sqrt{1 - e^{2s}} + \log(1 - \sqrt{1 - e^{2s}}))$ ”.

Pag. 29, riga -1: l'espressione corretta di $\dot{\sigma}_1(s)$ è

$$\dot{\sigma}_1(s) = \begin{cases} \left(-e^{-s}, -\frac{1 - e^{-2s} - \sqrt{1 - e^{-2s}}}{1 - \sqrt{1 - e^{-2s}}} \right) & \text{se } s > 0, \\ \left(e^s, \frac{1 - e^{2s} + \sqrt{1 - e^{2s}}}{1 + \sqrt{1 - e^{2s}}} \right) & \text{se } s < 0. \end{cases}$$

Pag. 31, riga 1: inserire (due volte) “ a^{2t} ” prima di “ e^{2bt} ”.

Pag. 31, riga 3: “ ae^{bt} ” al posto di “ e^{2bt} ”.

Pag. 31, riga 11: “ e^{bt} ” al posto di “ E^{bt} ”.

Pag. 31, riga 14: “ $a = 1/2$ ” al posto di “ $a = (1/2)^t$ ”, e “ $(1 - e^{-t})/\sqrt{2}$ ” al posto di “ $1 - e^{-t}$ ”.

Pag. 31, riga 15: inserire “prima del Problema 1.1” dopo “richiamate”.

Pag. 31, riga 18: “ e^{bt} ” al posto di “ e^{bt} ”.

Pag. 36, riga -3: inserire il seguente esercizio: “Dimostra che il supporto della curva dell'Esempio 1.2.4 non può essere il sostegno di una curva regolare (per cui, in particolare, non è una 1-sottovarietà di \mathbb{R}^2 ; vedi la Sezione 1.6).”

Pag. 40, riga 11: “ $(t, 0, e^{1/t})$ ” invece di “ $(t, 0, e^{-1/t})$ ”.

Pag. 40, riga 13: inserire “e per $t = \pm 1/2$ ” dopo “nell'origine”.

Pag. 40, riga -10: “ \mathbb{R}^3 ” invece di “ R^3 ”.

Pag. 40, riga -9: “ $\kappa \equiv \pm \tau$ ” invece di “ $\kappa \equiv \tau$ ”.

Pag. 41, riga 9: “supporto” invece di “suporto”.

Pag. 41, riga 11: “linearmente” al posto di “lineamente”.

Pag. 41, riga 23: alla fine dell'esercizio inserire “Dimostra che se σ è biregolare allora il piano osculatore in $\sigma(t_0)$ è il piano passante per $\sigma(t_0)$ e parallelo a $\sigma'(t_0)$ e $\sigma''(t_0)$, per cui l'equazione del piano osculatore è $\langle \sigma'(t_0) \wedge \sigma''(t_0), p - \sigma(t_0) \rangle = 0$.”

Pag. 42, riga 10: inserire il seguente esercizio: “Indichiamo con $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ la curva $\sigma(t) = (t, At^2, Bt^n)$, dove $A, B > 0$ sono numeri reali e $n \geq 1$ è un numero naturale. Se $\eta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ è tale che $\eta(t)$ sia il punto di intersezione fra la retta tangente affine a σ in $\sigma(t)$ e il piano $z = 0$, trova condizioni su A, B ed n in modo che η sia una curva regolare.”

Pag. 42, riga 16: “ C^k ” al posto di “ C^∞ ”.

Pag. 42, riga 18: aggiungere “di classe C^{k+2} ” all'inizio della riga.

Pag. 42, riga -1: alla fine dell'esercizio inserire “[Suggerimento: se $\tau/\kappa \equiv c$ è costante, scrivi $c = \cos \alpha / \sin \alpha$ e $\mathbf{v}_0(s) = \cos \alpha \mathbf{t}(s) + \sin \alpha \mathbf{n}(s)$ e dimostra che \mathbf{v}_0 è costante.]”

Pag. 44, riga 3: inserire il seguente esercizio: “**Il vettore di Darboux.** Sia $\sigma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva biregolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco. L'applicazione $\mathbf{d}: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da $\mathbf{d}(s) = \tau(s)\mathbf{t}(s) + \kappa(s)\mathbf{b}(s)$ è detta *vettore di Darboux* di σ . Dimostra che $\dot{\mathbf{t}} = \mathbf{d} \wedge \mathbf{t}$, $\dot{\mathbf{n}} = \mathbf{d} \wedge \mathbf{n}$ e $\dot{\mathbf{b}} = \mathbf{d} \wedge \mathbf{b}$.”

Pag. 44, riga 10: “ $\mathbf{n}^\varepsilon \equiv \mathbf{n}$ ” al posto di “ $\mathbf{n}^\varepsilon = \mathbf{n}$ ”.

Pag. 44, riga -17: riscrivere il punto (iv) come segue: “Dimostra che se σ e σ_1 sono curve di Bertrand biregolari con torsione mai nulla allora esistono costanti $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}^*$ tali che $\kappa + a\tau \equiv b$, dove κ e τ sono la curvatura e la torsione di σ .”

Pag. 45, riga 18: “ $\sigma(t)$ ” al posto di “ $\sigma(s)$ ”.

Pag. 45, riga -7: “una curva biregolare $\sigma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ” al posto di “una curva piana regolare $\sigma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ con curvatura mai nulla,”.

Pag. 45, riga -6: “La curva $\beta: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ” al posto di “La curva piana $\beta: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ”.

Pag. 45, riga -3: “curva $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ” al posto di “curva piana $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ”.

Pag. 45, riga -1: alla fine della frase inserire “Infine, un’involuta di σ è una curva $\tilde{\sigma}: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, non necessariamente parametrizzata rispetto alla lunghezza d’arco, tale che $\dot{\sigma}(s)$ sia parallela a $\tilde{\sigma}(s) - \sigma(s)$ e ortogonale a $\tilde{\sigma}'(s)$ per ogni $s \in I$.”

Pag. 46, riga 7: inserire il seguente esercizio: “Determina l’evolvente della catenaria $\sigma(t) = (t, \cosh t)$ e della circonferenza $\sigma_1(t) = (r \cos t, r \sin t)$.”

Pag. 46, riga 8: cancellare “la”.

Pag. 46, riga 10: inserire il seguente esercizio: “Dimostra che ogni curva piana biregolare è un’involuta della sua evoluta, e che ogni coppia di involute di σ forma una coppia di curve di Bertrand (vedi l’Esercizio 1.59).”

Pag. 46, riga 10: inserire il seguente esercizio: “Sia $\sigma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d’arco. Dato $c \in \mathbb{R}$, sia $\sigma_c: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da $\sigma_c(s) = \sigma(s) + (c - s)\dot{\sigma}(s)$ per ogni $s \in I$.

- (i) Dimostra che una curva $\tilde{\sigma}: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ è un’involuta di σ se e solo se $\tilde{\sigma} = \sigma_c$ per qualche $c \in \mathbb{R}$.
- (ii) Dimostra che se σ è biregolare allora σ_c è biregolare in $I \setminus \{c\}$. Dimostra inoltre che il versore tangente di σ_c in $\sigma_c(s)$ è parallelo al versore normale di σ in $\sigma(s)$ e che, in generale, σ_c non è parametrizzata rispetto alla lunghezza d’arco.
- (iii) Dimostra che se σ è biregolare allora la curvatura di un’involuta σ_c è data da $\sqrt{\kappa^2 + \tau^2} / |(c - s)\kappa|$, dove κ e τ sono la curvatura e la torsione di σ .
- (iv) Dimostra che ogni involuta di un’elica circolare (vedi l’Esempio 1.2.15) è una curva piana.”

Pag. 46, riga 10: sostituire l’Esercizio 1.70 con il seguente: “**1.70.** Sia $\sigma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva biregolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d’arco, e poniamo $\hat{\sigma} = \sigma - \kappa^{-1}\mathbf{n}$, dove \mathbf{n} è il versore normale di σ . Dimostra che se σ è un’involuta di $\hat{\sigma}$ allora σ è una curva piana.”

Pag. 46, riga -6: “circonferenza allora (a meno di movimenti rigidi di \mathbb{R}^3) la curva è un’elica circolare.” al posto di “circonferenza, allora la curva è un’elica.”

Pag. 49, riga -3: alla fine inserire “[Suggerimento: supponi che σ sia parametrizzata rispetto alla lunghezza d’arco. L’equazione del piano osculatore in $\sigma(s)$ è $\langle \mathbf{b}(s), p - \sigma(s) \rangle = 0$. Se $p_0 \in \mathbb{R}^3$ appartiene a tutti i piani osculatori allora $\langle \mathbf{b}(s), p_0 - \sigma(s) \rangle \equiv 0$ e derivando si ottiene parte della tesi.]”

Pag. 49, riga -2: “biregolare” al posto di “di classe C^∞ .”

Pag. 50, riga 6: inserire il seguente esercizio: “Sia $\sigma_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ l’elica circolare di raggio $r > 0$ e passo $a \neq 0$, parametrizzata rispetto alla lunghezza d’arco come nell’Esempio 1.2.15, e sia $\beta_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da $\beta_a = \sigma_a + \kappa^{-1}\mathbf{n}$, dove κ e \mathbf{n} sono la curvatura e il versore normale di σ_a . Dimostra che anche β_a è un’elica

circolare, e determina per quali valori di a e r le curve σ_a e β_a sono contenute in uno stesso cilindro.”

Pag. 51, riga 15: “ \mathbb{R}^k ” al posto di “ R^k ”.

Pag. 51, riga –17: “ t_1, t_2 ” al posto di “ t'_1, t''_2 ”.

Pag. 51, riga –15: “ t_{r-1} ” al posto di “ t_{r-1}^{r-1} ”.

Pag. 51, riga –13: inserire il seguente esercizio: “**La sfera osculatrice.** Sia $\sigma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva biregolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d’arco, e sia $s_0 \in I$ tale che $\tau(s_0) \neq 0$, dove τ è la torsione di σ . Dimostra che esiste un’unica sfera, detta *sfera osculatrice* a σ in $\sigma(s_0)$, che abbia ordine di contatto 4 con σ in $\sigma(s_0)$, e mostra che il suo centro è $\sigma(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)}\mathbf{n}(s_0) - \frac{\dot{\kappa}(s_0)}{\kappa(s_0)^2\tau(s_0)}\mathbf{b}(s_0)$.”

Pag. 54, riga –18: “omeomorfismi” al posto di “omeomorfismo”.

Pag. 56, riga 3: “1.2” al posto di “1.2.(d)”.

Pag. 59, riga –5: cancellare l’Esercizio 1.95.

Pag. 64, riga 11: “una curva” al posto di “un arco”.

Pag. 67, riga 16: “ $\pi|_{(x+2(k-1)\pi, x+2k\pi)}: (x+2(k-1)\pi, x+2k\pi)$ ” al posto di “ $\pi|_{(x, x+2k\pi)}: (x, x+2k\pi)$ ”.

Pag. 70, riga 17: “dal basso verso l’alto” al posto di “dall’alto verso il basso”.

Pag. 71, riga –11: “ $\phi(a)$ ” al posto di “ $\phi(0)$ ”.

Pag. 76, riga 6: “Inoltre, $\sigma(U_{t_0})$ è un aperto di C perché il suo complementare $\sigma([a, b] \setminus U_{t_0})$ è un compatto (e quindi chiuso) contenuto in C .” al posto di “Inoltre, siccome F ristretta a $U_{t_0} \times (-\varepsilon_{t_0}, \varepsilon_{t_0})$ è iniettiva e ha immagine aperta, otteniamo che $\sigma(U_{t_0}) = F(U_{t_0} \times (-\varepsilon_{t_0}, \varepsilon_{t_0})) \cap C$ è un aperto di C .”

Pag. 76, riga 19: “ U_{t_r} ” al posto di “ I_{t_r} ”.

Pag. 78, riga 4: inserire “chiusa” fra “semplice” e “di classe C^2 ”.

Pag. 79, riga –4: “ p ” al posto di “ p_0 ”.

Pag. 81, riga 7: “e per $0 \leq \delta < \varepsilon$ poniamo $p_{\pm\delta} = \sigma(t_0) \pm \delta\tilde{\mathbf{n}}(t_0)$. Chiaramente, $p_\delta \in T_+$ and $p_{-\delta} \in T_-$; quindi, essendo T_\pm connessi, il valore di $\iota_{p_{\pm\delta}}(\sigma)$ non dipende da δ (Lemma 2.3.2).” al posto di “e per $0 \leq \delta < \varepsilon$ poniamo $p_\delta = \sigma(t_0) + \delta\tilde{\mathbf{n}}(t_0)$. Chiaramente, $p_\delta \in T_+$ (rispettivamente, $p_\delta \in T_-$) se $\delta > 0$ (rispettivamente, $\delta < 0$); quindi, essendo T_\pm connessi, il valore di $\iota_{p_\delta}(\sigma)$ dipende solo dal segno di σ (Lemma 2.3.2).”

Pag. 83, riga 14: “5.11” al posto di “5.5”.

Pag. 91, riga –4: aggiungere in fondo la seguente frase: “In particolare, se σ è una curva di Jordan orientata positivamente allora $\int_a^b \tilde{\kappa}(t) dt = 2\pi$.”

Pag. 91, riga –1: aggiungere in fondo la seguente frase: “In particolare, l’ultima affermazione segue dal Teorema 2.4.7 e dall’Osservazione 2.4.9.”

Pag. 95, riga 15: “ $s_1 + s$ ” al posto di “ $s_1 + \varepsilon$ ”.

Pag. 97, riga 8: “ s_ν ” al posto di “ t_ν ”.

Pag. 98, riga 6: “ $[a, b]$ è” al posto di “ $[a, b]$ è”.

Pag. 98, riga 9: cancellare l’Esercizio 2.22.

Pag. 99, riga 2: “ $\|x - p\|$ ” al posto di “ $|x - p|$ ”.

Pag. 106, riga –8: “la semiretta orizzontale destra uscente da” al posto di “la retta orizzontale passante per”.

Pag. 106, riga –6: cancellare “a destra di p ”.

Pag. 106, riga –5: cancellare “a destra”.

Pag. 106, riga –4: “di una semiretta destra” al posto di “di p di una retta”.

- Pag. 107, riga 2: “semiretta” al posto di “retta”.
- Pag. 107, riga 19: inserire “segmento” dopo “scegliamo un”.
- Pag. 108, riga 5: aggiungere “(c) X è dato dall’unione dei supporti degli archi di Jordan in $E_X(G)$.”
- Pag. 109, riga 4: “ $\{v_1, v_4\}$, $\{v_2, v_5\}$ e $\{v_3, v_6\}$ ” al posto di “ $\{x_1, x_4\}$, $\{x_2, x_5\}$ e $\{x_3, x_6\}$ ”.
- Pag. 109, riga –15: “un arco di Jordan ℓ_6 contenuto in $\text{est}(C)$ congiungente un punto interno di ℓ_4 con un punto interno di ℓ_5 .” al posto di “un arco poligonale semplice ℓ_6 da ℓ_4 a ℓ_5 in $\text{est}(C)$.”
- Pag. 110, riga –4: “sia X_{j+1} ,” al posto di “sia X_j ,”.
- Pag. 112, riga 15: “ $\{p_i\}$ ” al posto di “ $\{q_i\}$ ”.
- Pag. 112, riga 16: “ L_{i2} ” al posto di “ P_{i2} ”.
- Pag. 112, riga 17: “ L_{i2} ” al posto di “ $L_{i,2}$ ”.
- Pag. 112, riga 18: “ L_{i2} ” al posto di “ $L_{i,2}$ ”, e “ L_{i1} ” al posto di “ $L_{i,1}$ ”.
- Pag. 112, riga –13: cancellare “poligonali”.
- Pag. 112, riga –11: “ C , $C_1 \cup P$ e $C_2 \cup P$.” al posto di “ C , $P_1 \cup P$ e $P_2 \cup P$.”
- Pag. 112, riga –2: “curva” al posto di “poligonale”.
- Pag. 114, riga 6: “(v) $X'_n \setminus S^1$ ” al posto di “(iv) $X'_n \setminus S^1$ ”.
- Pag. 114, riga 8: “(i)–(v)” al posto di “(i)–(iv)”.
- Pag. 114, riga –9: “Siccome” al posto di “Sicome”.
- Pag. 115, riga 4: “ Y_n ” al posto di “ H_n ”.
- Pag. 117, riga –1: “nello” al posto di “dello”.
- Pag. 119, riga –9: “ $\varphi(x) = G(x, 0)$ per ogni $x \in U_1$, per cui φ ” al posto di “ $\varphi|_{U_1} = G|_{U_1 \times \{0\}}$, in quanto restrizione di un omeomorfismo,”.
- Pag. 121, riga 6: “esista” al posto di “esiste”.
- Pag. 127, riga –6: “un aperto” al posto di “una apert”.
- Pag. 129, riga –8: “il Problema 3.4” al posto di “l’Esercizio 3.4”.
- Pag. 130, riga 9: “ $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ ” al posto di “ $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ ”.
- Pag. 130, riga 10: inserire “qualsiasi” all’inizio della riga.
- Pag. 130, riga 11: “ $\partial\psi_h$ ” al posto di “ $\partial\varphi_h$ ”.
- Pag. 130, riga 12: “ (ψ_1, ψ_2) ” al posto di “ (φ_1, φ_2) ”.
- Pag. 130, riga 14: “ ψ_3 ” al posto di “ φ_3 ”.
- Pag. 130, riga 15: “ ψ ” al posto di “ φ ”.
- Pag. 130, riga 16: “ $\varphi = \psi \circ F^{-1}$ ” al posto di “ $\varphi \circ F^{-1}$ ”.
- Pag. 131, riga 12: “ $(\pi|_{S \cap W_0})^{-1}$ ” al posto di “ $(\pi|_S)^{-1}$ ”.
- Pag. 131, riga 21: “ $(u, v) = \pi(q)$ ” al posto di “ $\pi(q) = (u, v)$ ”.
- Pag. 140, riga –4: cancellare “e $p \in S_1$.”
- Pag. 145, riga 8: “(3.3)” al posto di “(3.4)”.
- Pag. 145, riga –5: “Definizione 3.4.21 ne” al posto di “Definizione 3.4.21ne”.
- Pag. 147, riga 5: “ $\frac{\partial \hat{F}_1}{\partial x_j}(O)\hat{\partial}_1 + \frac{\partial \hat{F}}{\partial x_j}(O)\hat{\partial}_2$ ” al posto di “ $\frac{\partial \hat{F}_1}{\partial x_j}(0)\hat{\partial}_1 + \frac{\partial \hat{F}}{\partial x_j}(0)\hat{\partial}_2$ ”.
- Pag. 147, riga 16: “ $\frac{\partial \hat{F}_1}{\partial x_j}(O)$ ” al posto di “ $\frac{\partial \hat{F}_1}{\partial x_j}(0)$ ”.
- Pag. 149, riga 8: “globale” al posto di “regolare”.
- Pag. 150, riga 10: “ $v = \frac{\langle p, \mathbf{w} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}$ e $t = \sigma^{-1}(p - v\mathbf{v})$, dove \mathbf{w} è un versore ortogonale a H , e $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \neq 0$ perché \mathbf{v} è trasversale ad H .” al posto di “ $v = \langle p, \mathbf{v} \rangle$ e $t = \sigma^{-1}(p - \langle p, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v})$.”

- Pag. 150, riga -2: cancellare “e”.
- Pag. 151, riga 2: “ $\log \sqrt{a^2 + b^2}$ ” al posto di “ $\sqrt{a^2 + b^2}$ ”.
- Pag. 157, riga 8: “almeno 1” al posto di “ ≥ 1 ”.
- Pag. 157, riga 10: “almeno 1” al posto di “ ≥ 1 ”.
- Pag. 157, riga 12: inserire il seguente esercizio: “Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto, $f \in C^\infty(\Omega)$ con 0 come valore regolare, e S una componente connessa di $f^{-1}(0)$. Dato $p_0 \in S$, sia $\sigma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva con $\sigma(0) = p_0$. Dimostra che $\sigma'(0) \in T_p(S_0)$ se e solo se f e σ hanno un contatto di ordine almeno 1 nel senso della definizione data prima dell'Esercizio 1.89.”
- Pag. 158, riga 6: aggiungere “i sostegni di” prima di “due curve”.
- Pag. 158, riga 9: aggiungere “sostegni di” prima di “curve regolari”.
- Pag. 160, riga 13: “sopra, ma usando” al posto di “nella dimostrazione del lemma precedente, usando”.
- Pag. 161, riga 12: “ricorpimento” al posto di “ricorpimento”.
- Pag. 170, riga 3: inserire “in” fra “locale” e “ $p \in S_1$ ”.
- Pag. 171, riga 4: “ $T_q S$ ” al posto di “ $T_q S_1$ ”.
- Pag. 172, riga -12: “vedi gli Esercizi 4.59 e 4.60.” al posto di “vedi l'Esercizio 4.59.”
- Pag. 173, riga -12: “interno \dot{R} e con” al posto di “interno e con”.
- Pag. 174, riga -7: cancellare “per ogni”.
- Pag. 182, riga 7: “detta” al posto di “detto”.
- Pag. 183, riga 18: “Teorema 4.8.6” al posto di “Proposizione 4.8.6”.
- Pag. 183, riga -10: “generatrici” al posto di “generatrice”.
- Pag. 187, riga 10: “ $dN_p(T_p \Gamma_h)$ ” al posto di “ $dN_p(T_p \Gamma_f)$ ”, e “ $p \in \Gamma_h$ ” al posto di “ $p \in \Gamma_f$ ”.
- Pag. 187, riga -5: “ $\begin{vmatrix} -\cos y \\ -\sin y \\ \sinh x \end{vmatrix}$ ” al posto di “ $\begin{vmatrix} \cos y \\ \sin y \\ -\sinh x \end{vmatrix}$ ”.
- Pag. 187, riga -2: “ $-\frac{w_1}{a \cosh^2 x_0} \partial_1 - \frac{w_2}{a \cosh^2 x_0} \partial_2$ ” al posto di “ $-\frac{w_1}{a \cosh^2 x_0} \partial_1 + \frac{w_2}{a \cosh^2 x_0} \partial_2$ ”.
- Pag. 190, riga 3: “ $-\frac{E(x_0, y_0)}{a \cosh^2 x_0} w_1^2 + \frac{G(x_0, y_0)}{a \cosh^2 x_0} w_2^2$ ” al posto di “ $\frac{E(x_0, y_0)}{a \cosh^2 x_0} w_1^2 - \frac{G(x_0, y_0)}{a \cosh^2 x_0} w_2^2$ ”, e “ $-aw_1^2 + aw_2^2$ ” al posto di “ $aw_1^2 - aw_2^2$ ”.
- Pag. 192, riga -15: “.” al posto di “,” alla fine della formula.
- Pag. 196, riga -14: “ $EG - F^2$ ” al posto di “ $EF - F^2$ ”.
- Pag. 199, riga 3: “esempi” al posto di “esempio”.
- Pag. 199, riga 22: “necessaria” al posto di “sufficiente”.
- Pag. 200, riga 6: “ $dN_p(\partial_i)$, le” al posto di “ $dN_p(\partial_i)$, le”.
- Pag. 201, riga 13: “ $1 - x^2 - y^2$ ” al posto di “ $2(1 - x^2 - y^2)$ ”.
- Pag. 203, riga -1: “(Proposizione 5.5.1 e Corollario 5.5.6)” al posto di “(Proposizione 5.5.1)”.
- Pag. 205, riga 4: “Bonnet) che” al posto di “Bonnet)che”.
- Pag. 207, riga 11: “ $-4v^2/(1 + v^4 + 4u^2v^2)$ ” al posto di “ $-4/(4u^2 + 4v^2 + 1)$ ”.
- Pag. 208, riga -2: “ $(4u^2 + 4v^2 + 1)^2$ ” al posto di “ $(4u^2 + 4v^2 + 1)^{3/2}$ ”.
- Pag. 210, riga 3: “ p_0 ” al posto di “ p ”.
- Pag. 210, riga -20: cancellare la frase “e mostra che, in tal caso, le curvature principali sono e/E e g/G .”
- Pag. 210, riga -12: cancellare la frase “e l'ultima affermazione segue dall'Osservazione 4.5.15.”

Pag. 215, riga -1: “ $1+u^8v^4+u^4v^8-u^2v^4-u^6v^6-u^4v^2$ ” al posto di “ $1+u^6v^{10}+u^{10}v^6-u^6v^4-u^4v^6-u^8v^8$ ”.

Pag. 217, riga 2: “intorno” al posto di “inotrno”.

Pag. 217, riga -20: “è definita positiva (o negativa).” al posto di “ha segno costante in un intorno bucato dell’origine.”

Pag. 217, riga -15: “è indefinita.” al posto di “cambia segno in qualsiasi intorno dell’origine.”

Pag. 217, riga -9: “sia” al posto di “Sia”.

Pag. 217, riga -7: inserire “che” fra “tale” e “S”.

Pag. 217, riga -5: inserire un punto alla fine della frase.

Pag. 218, riga 3: “ $+\frac{1}{2}$ ” al posto di “ $=+\frac{1}{2}$ ”.

Pag. 219, riga 8: “non è iniettivo” al posto di “si annulla”.

Pag. 220, riga 3: “**ISOMETRIE E SIMILITUDINI**” al posto di “**ISOMETRIE**”.

Pag. 220, riga 13: inserire il seguente esercizio: “Sia $H: S \rightarrow \tilde{S}$ una similitudine di scala $r > 0$. Data una parametrizzazione locale $\varphi: U \rightarrow S$ poniamo $\tilde{\varphi} = H \circ \varphi$ e siano E, F, G (rispettivamente, $\tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{G}$) i coefficienti metrici rispetto a φ (rispettivamente, $\tilde{\varphi}$). Dimostra che $\tilde{E} = r^2E$, $\tilde{F} = r^2F$ e $\tilde{G} = r^2G$.”

Pag. 220, riga 14: “traiettorie” al posto di “traiettoire”.

Pag. 222, riga -15: “ $x > 0$ ” al posto di “ $x \neq 0$ ”.

Pag. 223, riga -9: “(ii)” al posto di “(i)”.

Pag. 223, riga -7: “(iii)” al posto di “(ii)”.

Pag. 223, riga -5: “(iv)” al posto di “(iii)”.

Pag. 223, riga -4: “(v)” al posto di “(iv)”.

Pag. 224, riga 8: “ $\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) & \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_1}(p) & v^1 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(p) & \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_2}(p) & v_2 \\ \frac{\partial f}{\partial x_3}(p) & \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_3}(p) & v_3 \end{vmatrix}$ ” al posto di “ $\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x^1}(p) & \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^1}(p) & v^1 \\ \frac{\partial f}{\partial x^2}(p) & \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^2}(p) & v_2 \\ \frac{\partial f}{\partial x^3}(p) & \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^3}(p) & v_3 \end{vmatrix}$ ”.

Pag. 225, riga 9: “segmenti distinti” al posto di “rette distinte”.

Pag. 226, riga 6: “rette” al posto di “retta”.

Pag. 226, riga 19: inserire il seguente punto: “(iv) Determina quali quadriche hanno solo punti iperbolici, e quali quadriche hanno solo punti ellittici.”

Pag. 226, riga -9: “Christoffel” al posto di “Chrstoffel”.

Pag. 228, riga 11: “ \mathbb{R}^3 ” al posto di “ \mathbb{R} ”.

Pag. 230, riga 2: “è una” al posto di “una”.

Pag. 231, riga -1: “ \mathbb{R}^2 ” al posto di “ \mathbb{R}^3 ”.

Pag. 234, riga -19: “Ma il Lemma 4.7.4 (applicato a $U = \Omega_0$) e il Teorema 1.6.8 implicano che \overline{C} , essendo obbligato a intersecare S^1 in un solo punto, è il supporto di una curva chiusa,” al posto di “Ma il Lemma 4.7.4 ci dice che \overline{C} è una linea compatta,”.

Pag. 237, riga -5: cancellare la frase “e scegli una sua parametrizzazione locale.”

Pag. 241, riga -3: “ $f(p_0)$ ” al posto di “ $h(p_0)$ ”.

Pag. 243, riga -7: “ $G_{hs} \equiv$ ” al posto di “ $G_{js} \equiv$ ”, e “ G_{hr} ” al posto di “ G_{jr} ” in fondo alla formula.

Pag. 245, riga 6: “ $G_{hr}(z, x, F(z, x))$ ” al posto di “ $G_{jr}(z, x, F(z, x))$ ”.

- Pag. 245, riga 8: " $G_{hr}(z, x, F(z, x))$ " al posto di " $G_{jr}(z, x, F(z, x))$ ".
- Pag. 245, riga 10: " $G_{hr}(z, x, F(z, x))$ " al posto di " $G_{jr}(z, x, F(z, x))$ ".
- Pag. 245, riga 12: " $G_{hr}(z, x, F(z, x))$ " al posto di " $G_{jr}(z, x, F(z, x))$ ".
- Pag. 245, riga -8: " ∂G_{hr} " al posto di " ∂G_{jr} ".
- Pag. 246, riga -4: " f_{33} " al posto di " $f_{3,3}$ ".
- Pag. 247, riga 14: "indipendenti" al posto di "dipendenti".
- Pag. 249, riga -8: "sembra non" al posto di "non sembra".
- Pag. 253, riga -2: cancellare "è".
- Pag. 255, riga 13: " S " al posto di " S_1 ".
- Pag. 255, riga 18: cancellare il primo "la base".
- Pag. 257, riga 10: " ∂x_j " al posto di " ∂x_k ".
- Pag. 257, riga 19: cancellare la frase "parametrizzata rispetto a un multiplo della lunghezza d'arco".
- Pag. 258, riga 8: inserire " θ' è una costante non nulla e" fra "se" e " t_0 ".
- Pag. 259, riga 1: " $\tau' = t'(\partial/\partial t) + \theta'(\partial/\partial \theta)$ " al posto di " $\dot{\tau} = \dot{t}(\partial/\partial t) + \dot{\theta}(\partial/\partial \theta)$ ".
- Pag. 259, riga -11: " $\ddot{\sigma} = \frac{1}{\|\sigma'\|^2}(\sigma'' - (\log \|\sigma'\|)' \sigma')$ " al posto di " $\ddot{\sigma} = \frac{\sigma''}{\|\sigma'\|^2} + (\log \|\sigma'\|)' \sigma'$ ".
- Pag. 259, riga -3: " $|\langle \sigma'', N \circ \sigma \rangle|$ " al posto di " $|\langle \sigma'', N \circ \sigma \rangle|$ ".
- Pag. 260, riga -4: " $\partial_j / \|\partial_j\|$ " al posto di " $\partial_j / \|\partial_j\|$ ".
- Pag. 264, riga -18: " $\pi: S \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ " al posto di " $\pi: S \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ ".
- Pag. 267, riga -7: cancellare " $= O$ " alla fine della formula.
- Pag. 274, riga 1: "Teorema 5.1.9" al posto di "Teorema 5.3.16".
- Pag. 276, riga 11: " $\begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \end{vmatrix}$ " al posto di " $\begin{vmatrix} a^1 \\ a^2 \end{vmatrix}$ ".
- Pag. 278, riga -9: "nell'Osservazione 4.6.3" al posto di "nelle Osservazioni 4.5.15 e 4.6.3".
- Pag. 279, riga 14: "indipendenti" al posto di "indipendente".
- Pag. 279, riga -16: "principali" al posto di "caratteristiche".
- Pag. 280, riga 5: "parallelo" al posto di "paralelo".
- Pag. 280, riga -7: "più precisamente, l'insieme $\{s \in I \mid t'(s) = 0\}$ deve avere parte interna vuota, in quanto altrimenti σ sarebbe un parallelo (perché?). Quindi per un insieme denso di valori del parametro possiamo dividere la formula precedente per t' , e per continuità ricaviamo la prima equazione in (5.6)." al posto di "inoltre, la relazione di Clairaut implica (perché?) che σ non può essere tangente a un parallelo solo in punti isolati, per cui dividendo per t' la formula appena ottenuta ricaviamo la prima equazione in (5.6)."
- Pag. 280, riga -2: "tangente" al posto di "tangete".
- Pag. 280, riga -1: cancellare il secondo "in".
- Pag. 281, riga 4: " $(\frac{dt}{d\theta})^2$ " al posto di " $(\frac{dt}{d\theta})$ ".
- Pag. 281, riga 16: aggiungere "volte" dopo "infinite".
- Pag. 281, riga -9: " $= \frac{1}{t_0}(-\cos \theta)$ " al posto di " $= (-\cos \theta)$ ".
- Pag. 281, riga -6: " $t_0 \sqrt{1 + 4t_0^2}$ " al posto di " $\sqrt{1 + 4t_0^2}$ ".
- Pag. 284, riga -17: " $S \cap H$ " al posto di " $S \cap P$ ".
- Pag. 285, riga -19: " $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ " al posto di " (x, y, z) ".
- Pag. 286, riga 6: " \mathbb{R}^3 " al posto di " R^3 ".
- Pag. 287, riga -6: " $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ " al posto di " (x, y, z) ".

- Pag. 289, riga -14: inserire la seguente frase: “(Suggerimento: data $f \in C^\infty(S)$, poni $g(t, q) = f(\theta_{-t}(q)) - f(q)$ e dimostra che esiste $h: (-\varepsilon, \varepsilon) \times V \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $g \equiv th$).”.
- Pag. 289, riga -1: “[X_1, X_2]” al posto di “[X_1, X_1]”.
- Pag. 290, riga -11: fra “ $p, q \in S$.” e “Siano” aggiungere la frase “Inoltre, due punti in S possono sempre essere collegati da una curva di classe C^∞ (Corollario 4.7.11), per cui $d_S(p, q) < +\infty$ sempre.”
- Pag. 293, riga -6: aggiungere un punto alla fine della frase.
- Pag. 294, riga 18: “in $[0, t]$ ” al posto di “in t ”.
- Pag. 297, riga -12: “ $\overline{B_S(p_0, R/2)}$ ” al posto di “ $\overline{B_S(p_0, R)}$ ”.
- Pag. 300, riga 13: “ $\cos \theta w_2 =$ ” al posto di “ $\cos \theta w_2) w_2 =$ ”.
- Pag. 300, riga -7: “ $(d(\exp_p)_{tv}(w))$;” al posto di “ $(d(\exp_p)_{tv}(w)) \Big|_t$;”.
- Pag. 301, riga 11: “ $\circ \Sigma$ ” al posto di “ $\circ \sigma$ ”.
- Pag. 301, riga 12: “ $\circ \Sigma$ ” al posto di “ $\circ \sigma$ ”.
- Pag. 301, riga -4: “ $\exp_p(v) \in B_\delta^*(p)$ ” al posto di “ $\exp_p^*(v) \in B_\delta(p)$ ”.
- Pag. 307, riga 13: “ $\sigma'(s) = d\varphi_{\sigma_o(s)}(\sigma'_o(s))$ ” al posto di “ $\dot{\sigma}(s) = d\varphi_{\sigma_o(s)}(\dot{\sigma}_o(s))$ ”.
- Pag. 309, riga -4: aggiungere “ ds ” alla fine dell’integrale.
- Pag. 311, riga -10: inserire “distinti” fra “vertici” e “dei triangoli”.
- Pag. 311, riga -9: inserire “distinti” fra “lati” e “dei triangoli”.
- Pag. 311, riga -1: “triangolazione” al posto di “trangoloazione”.
- Pag. 315, riga -6: “(iii)” al posto di “(ii)”.
- Pag. 315, riga -3: “(iv)” al posto di “(iii)”.
- Pag. 318, riga 17: “ $\hat{\mathbf{n}}$ ” al posto di “ $\tilde{\mathbf{n}}$ ” entrambe le volte.
- Pag. 318, riga -10: “ $\tau(t) \in \hat{R}$ ” al posto di “ $\tau(t) \in R$ ”.
- Pag. 318, riga -8: inserire “orientata” fra “superficie” e “ S ”.
- Pag. 318, riga -2: “ $\hat{\mathbf{n}}$ ” al posto di “ $\tilde{\mathbf{n}}$ ”.
- Pag. 319, riga 6: “ $\delta > 0$ ” al posto di “ $\varepsilon > 0$ ”.
- Pag. 319, riga 9: aggiungere alla fine “che induce l’orientazione data”.
- Pag. 319, riga 15: dopo “parametrizzazione locale” aggiungere “che induce l’orientazione data perché $\{\dot{\sigma}(s_0), \hat{\mathbf{n}}(s_0)\}$ è una base positiva.”
- Pag. 319, riga -19: sostituire il periodo “Preso $s_0 \in [a, b]$ (...) orientata positivamente rispetto a R .” con il seguente: “Sia $\varphi: U \rightarrow S$, dove $U = (a, b) \times (-\delta, \delta)$, la parametrizzazione locale data dal lemma precedente. Il complementare in $\varphi(U)$ del supporto di σ ha due componenti connesse, $\Sigma^+ = \varphi((a, b) \times (0, \delta))$ e $\Sigma^- = \varphi((a, b) \times (-\delta, 0))$; a meno di diminuire δ se necessario possiamo supporre che una di queste due componenti connesse, chiamiamola Σ^i , sia contenuta in \hat{R} , mentre l’altra, chiamiamola Σ^e , sia disgiunta da R . Nota che invertire l’orientazione di σ cambia il segno di $\hat{\mathbf{n}}$ e quindi scambia Σ^+ e Σ^- . Dato $s_0 \in [a, b]$ (e, grazie alla periodicità di σ , possiamo supporre $s_0 \neq a, b$), sia $\tau: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ una curva regolare con $\tau(0) = \sigma(s_0)$ e $\tau'(0) \neq \pm \dot{\sigma}(s_0)$. A meno di rimpicciolire ε , possiamo supporre che il supporto di τ sia contenuto in $\varphi(U)$; in particolare, τ entra dentro R se e solo se $\tau(t) \in \Sigma^i$ per $t > 0$ and $\tau(t) \in \Sigma^e$ per $t < 0$. Scriviamo $\tau = \varphi(\tau_1, \tau_2)$ per opportune funzioni $\tau_1, \tau_2: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ ”

di classe C^∞ ; in particolare, $\tau(t) \in \Sigma^\pm$ se e solo se $\pm\tau_2(t) > 0$. Abbiamo

$$\langle \tau'(0), \hat{\mathbf{n}}(s_0) \rangle = \tau'_2(0),$$

che è diverso da zero perché $\tau'(0) \neq \pm\dot{\sigma}(s_0)$. Quindi $\hat{\mathbf{n}}(s_0)$ punta verso l'interno di R se e solo se τ_2 è non decrescente in 0. Essendo $\tau_2(0) = 0$, questo implica che $\tau_2(t) > 0$ per $t > 0$ piccolo, e $\tau_2(t) < 0$ per $t < 0$ piccolo (nota che $\tau_2(t) \neq 0$ perché $\tau(t)$ non appartiene a ∂R per $t \neq 0$). Ma allora $\hat{\mathbf{n}}(s_0)$ punta verso l'interno di R se e solo se $\Sigma^+ = \Sigma^1$. Siccome invertire l'orientazione di σ scambia Σ^+ con Σ^- ma non modifica Σ^1 o Σ^e , possiamo sempre (e in modo unico) orientare σ positivamente rispetto a R ; inoltre, non appena $\hat{\mathbf{n}}(s_0)$ punta verso l'interno di R per qualche $s_0 \in [a, b]$, l'intera curva σ è orientata positivamente rispetto a R .

Pag. 320, riga 14: inserire “con parti interne disgiunte” fra “regolari” e “della stessa”.

Pag. 321, riga 8: “ $\sum_{h=1}^p \varepsilon_h$ ” al posto di “ $\sum_{h=1}^p \varepsilon_j$ ”.

Pag. 322, riga 7: “ $-\varepsilon_h$ ” al posto di “ $-\varepsilon_j$ ”.

Pag. 322, riga 8: “ ε_h ” al posto di “ ε_j ”.

Pag. 322, riga 9: “ ε_h ” al posto di “ ε_j ”.

Pag. 323, riga 8: “Corollario 7.4.9” al posto di “Teorema 7.4.9”.

Pag. 325, riga 11: inserire “ p_1 e p_2 ” dopo “consecutivi”.

Pag. 326, riga 5: “ \dot{R} ” al posto di “ R° ”.

Pag. 326, riga 17: “ \dot{R} ” al posto di “ R° ”.

Pag. 328, riga -13: “a $X \circ \Phi$ ” al posto di “e $X \circ \Phi$ ”.

Pag. 333, riga -1: “5.2” al posto di “5.1”.

Pag. 334, riga 8: inserire “(Esercizio 3.36)” dopo “in p_0 ”.

Pag. 338, riga -1: sostituire l'Esercizio 6.18 con il seguente: “**6.18.** Sia $F: S_1 \rightarrow S_2$ un diffeomorfismo locale fra superfici, e $X_1 \in \mathcal{T}(S_1)$ un campo vettoriale con un punto singolare $p_1 \in S_1$. Dimostra che esiste un intorno $U_1 \subseteq S_1$ di p_1 tale che l'applicazione $X_2: F(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da $X_2(q) = dF_{F^{-1}(q)}X(F^{-1}(q))$ sia un ben definito campo vettoriale su $F(U)$, e mostra che $F(p_1)$ è un punto singolare di X_2 tale che $\text{ind}_{p_1}(X_1) = \text{ind}_{F(p_1)}(X_2)$. In altre parole, l'indice è invariante per diffeomorfismi locali.”

Pag. 338, riga -1: aggiungere alla fine gli esercizi seguenti: “**6.19.** Sia $X \in \mathcal{T}(S)$ un campo vettoriale su una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$, e $p \in S$ un punto singolare di X .

(i) Dimostra che dX_p definisce un endomorfismo di $T_p S$. Se $\det dX_p \neq 0$ diremo che p è un punto singolare *non degenera* di X .

(ii) Dimostra che se p è non degenera allora è un punto singolare isolato, e che in tal caso l'indice di X in p è uguale al segno del determinante di dX_p .

(iii) Preso $a \in S^2$, sia $X_a: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dato da $X_a(p) = a - \langle a, p \rangle p$. Dimostra che $X_a \in \mathcal{T}(S^2)$, trovane i punti singolari e calcola gli indici di X_a nei suoi punti singolari.

(iv) Trova un campo vettoriale $X \in \mathcal{T}(S^2)$ con un solo punto singolare.

6.20. Sia $f \in C^\infty(S)$, dove $S \subset \mathbb{R}^3$ è una superficie.

- (i) Dimostra che esiste un unico campo vettoriale $\nabla f \in \mathcal{T}(S)$, detto *gradiente* di f , tale che

$$\langle \nabla f(p), v \rangle_p = df_p(v)$$

per ogni $p \in S$ e ogni $v \in T_p S$.

- (ii) Dimostra che $p \in S$ è un punto singolare per ∇f se e solo se è un punto critico di f .
 (iii) Sia $p \in S$ un punto critico di f . Dimostra che ponendo per ogni $v \in T_p S$

$$\text{Hess}_p f(v) = \left. \frac{d^2}{dt^2} (f \circ \sigma) \right|_{t=0},$$

dove $\sigma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ è una qualsiasi curva con $\sigma(0) = p$ e $\sigma'(0) = v$, otteniamo una forma quadratica ben definita su $T_p S$, detta *Hessiano* di f in p .

- (iv) Sia $p \in S$ un punto singolare di ∇f . Dimostra che p è non degenere (nel senso dell'esercizio precedente) se e solo se $\text{Hess}_p f$ è una forma quadratica non degenere.
 (v) Sia $p \in S$ un punto singolare non degenere di ∇f . Dimostra che le seguenti affermazioni sono equivalenti:
 (a) $\text{Hess}_p f$ è definito positivo o negativo;
 (b) $\text{ind}_p(\nabla f) = +1$;
 (c) p è un punto di massimo o minimo locale per f .
 (vi) Sia $p \in S$ un punto singolare non degenere di ∇f . Dimostra che le seguenti affermazioni sono equivalenti:
 (a) $\text{Hess}_p f$ è indefinito;
 (b) $\text{ind}_p(\nabla f) = -1$;
 (c) p è un punto di sella per f .
 (vii) Supponiamo che ∇f abbia solo punti singolari non degeneri, e che S sia compatta orientabile. Indichiamo con $m(f)$ il numero di massimi o minimi locali di f , e con $s(f)$ il numero di punti di sella di f . Dimostra che $m(f) - s(f) = \chi(S)$.
 (viii) Sia S compatta orientata da una mappa di Gauss $N: S \rightarrow S^2$, e sia $a \in S^2$ un valore regolare sia per N che per $-N$. Dimostra che $I_a = N^{-1}(\{a, -a\})$ è un insieme finito, e che il numero di punti ellittici in I_a meno il numero di punti iperbolici in I_a è uguale alla caratteristica di Eulero-Poincaré di S .
 (*Suggerimento:* considera la funzione $h_a \in C^\infty(S)$ data da $h_a(p) = \langle p, a \rangle$.)

Pag. 344, riga 9: “regione” al posto di “superficie”.

Pag. 347, riga 11: inserire “positiva” fra “costante” e “le sfere”.

Pag. 348, riga -8: “ e/E ” al posto di “ e/E^2 ”, e “ g/G ” al posto di “ g/G^2 ”.

Pag. 351, riga 11: “Nirenberg” al posto di “Niremburg”.

Pag. 356, riga 10: “Nirenberg” al posto di “Niremburg”.

Pag. 356, riga 11: “Nirenberg” al posto di “Niremburg”.

Pag. 357, riga 16: “negativa” al posto di “nulla”.

Pag. 362, riga 0: “ $\Phi(x_1^o, x_2^o)$ ” al posto di “ (s_0, t_0) ” e “ $\Phi(x_1^o, 0)$ ” al posto di “ $(s_0, 0)$ ” nella Figura 7.3.

Pag. 364, riga 6: “4.66)” al posto di “4.66”.

Pag. 364, riga 15: sostituire il periodo “In particolare, (...) del determinante.” con il seguente: “Nota che $\|\mathbf{v}\| \equiv 1$ implica $\mathbf{v}'(t) \perp \mathbf{v}(t)$ per ogni $t \in I$; in particolare, $\mathbf{v}'(t) \wedge \mathbf{v}(t) = O$ se e solo se $\mathbf{v}'(t) = O$.”

Se $\mathbf{v}'(t_0) = O$ o $\dot{\sigma}(t_0) \wedge \mathbf{v}(t_0) = O$ allora il determinante nell’enunciato è automaticamente zero in t_0 e i piani tangenti lungo la generatrice passante attraverso p_0 sono automaticamente costanti, per cui non c’è niente da dimostrare. Supponiamo allora $\mathbf{v}'(t_0), \dot{\sigma}(t_0) \wedge \mathbf{v}(t_0) \neq O$. Se il determinante nell’enunciato si annulla in t_0 allora $\dot{\sigma}(t_0)$ è combinazione lineare di $\mathbf{v}(t_0)$ and $\mathbf{v}'(t_0)$, per cui i piani tangenti lungo la generatrice per p_0 sono costanti. Viceversa, se i piani tangenti lungo la generatrice per p_0 sono costanti allora la direzione del vettore $(\dot{\sigma}(t_0) + v\mathbf{v}'(t_0)) \wedge \mathbf{v}(t_0)$ non dipende da v . Mandando v a 0 troviamo che questa direzione è la direzione di $\dot{\sigma}(t_0) \wedge \mathbf{v}(t_0)$; quindi $\{\dot{\sigma}(t_0), \mathbf{v}(t_0)\}$ è una base per tutti questi piani tangenti. Ma questo può succedere solo se $\mathbf{v}'(t_0)$ è combinazione lineare di $\dot{\sigma}(t_0)$ e $\mathbf{v}(t_0)$, e ci siamo.”

Pag. 364, riga -5: “allora” al posto di “allaora”.

Pag. 364, riga -4: inserire il seguente “**Problema 7.3.** Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie compatta con curvatura Gaussiana K sempre positiva, e supponiamo che il valore assoluto $|H|$ della curvatura media sia costante. Dimostra che S è una sfera.

Soluzione. Siccome la curvatura Gaussiana è sempre positiva il valore assoluto della curvatura media non si annulla mai; il Problema 4.16 ci dice allora che S è orientabile. Orientiamo S in modo da avere $H \equiv H_0 > 0$, e indichiamo con $k_1 \leq k_2$ le curvature principali. Essendo S compatta e k_1, k_2 continue, possiamo trovare un punto $p \in S$ di massimo per k_2 . Da $k_1 + k_2 \equiv 2H_0$ ricaviamo che p è un punto di minimo per k_1 ; quindi p è un punto ombelicale, grazie alla Proposizione 7.1.1. Allora

$$\forall q \in S \quad k_2(q) \leq k_2(p) = k_1(p) \leq k_1(q) \leq k_2(q) ,$$

e quindi tutti i punti di S sono ombelicali. Il Problema 4.3 allora ci dice che S è contenuta in una sfera; e il ragionamento già usato alla fine della dimostrazione del Teorema 7.1.2 implica che S è una sfera intera.”

Pag. 364, riga -2: inserire il titolo “**RIGIDITÀ**”.

Pag. 365, riga 1: cancellare questa riga.

Pag. 365, riga 2: “(i)” al posto di “(ii)”.

Pag. 365, riga 3: “(ii)” al posto di “(iii)”.

Pag. 365, riga 4: “(iii)” al posto di “(iv)”.

Pag. 365, riga 13: inserire il titolo “**TERZA FORMA FONDAMENTALE**”.

Pag. 365, riga 16: “ $III_p(v, w) = \langle dN_p(v), dN_p(w) \rangle$ ” al posto di “ $III_p(v, w) = \langle \nabla_v N(p), \nabla_w N(p) \rangle$ ”.

Pag. 365, riga 17: cancellare la frase “dove $\nabla_v N(p)$ indica la derivata direzionale di N nella direzione di v , effettuata in \mathbb{R}^3 e calcolata in p .”

Pag. 365, riga -9: inserire il titolo “**SUPERFICI SVILUPPABILI**”, e spostare l’Esercizio 7.4 qui.

Pag. 370, riga -2: “parallele” al posto di “paralellele”.

Pag. 371, riga -17: aggiungere un punto alla fine della riga.

Pag. 375, riga -15: “(invece di limitarci alla più usuale proprietà del sollevamento continuo)” al posto di “questo caso”.

Pag. 378, riga 4: “ C^1 ” al posto di “regolare”.

Pag. 378, riga 7: “ C^1 a tratti se Ψ lo è” al posto di “regolare a tratti”.

Pag. 378, riga 18: “ $[a, b]$ ” al posto di “ $]a, b[$ ”.

Pag. 379, riga 8: “ $F|_{\tilde{U}_\alpha}$ ” al posto di “ F ”.

Pag. 379, riga -2: “ultima sezione di questo libro, dedicata” al posto di “ultimo capitolo di questo libro, dedicato”.

Pag. 380, riga -3: “ $K \circ \sigma_v$ ” al posto di “ $K \circ \sigma$ ”.

Pag. 381, riga 12: “ $F: \tilde{S} \rightarrow S$ ” al posto di “ $F: S_1 \rightarrow S_2$ ”.

Pag. 381, riga 13: “ $p \in \tilde{S}$ e ogni $v \in T_p \tilde{S}$ ” al posto di “ $p \in S_1$ e ogni $v \in T_p S_1$ ”.

Pag. 381, riga 15: “ \tilde{S} ” al posto di “ S_1 ”.

Pag. 385, riga -11: “Math.” al posto di “Math,”.

Pag. 387, riga 7: nella colonna destra, “ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ” al posto di “ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ”.

Pag. 388, riga 6: nella colonna sinistra, “ $\mathbf{\hat{n}}$ 19” al posto di “ $\mathbf{\hat{n}}$ 19, 318”.

Pag. 388, riga 7: nella colonna sinistra, inserire la riga “ $\mathbf{\hat{n}}$ 318”.

Pag. 393, riga -3: nella colonna sinistra, “Nirenberg” al posto di “Niremburg”.

Esercizi aggiuntivi per il Capitolo 1

1.1. Considera la curva $\sigma: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$\sigma(t) = t \cdot (\sqrt{3} \cos(\log t) - 1, \cos(\log t) + \sqrt{3}, 2 \sin(\log t)).$$

- (i) Dimostra che σ è una curva biregolare parametrizzata rispetto a un multiplo della lunghezza d'arco, e determina il riferimento di Frenet.
- (ii) Calcola curvatura e torsione di σ , e osserva che $\kappa(t) = -\sqrt{2}\tau(t)$ per ogni $t \in (0, \infty)$.
- (iii) Determina un vettore non nullo v tale che $\langle v, \mathbf{t}(t) \rangle$ sia costante.

1.2. Sia $\sigma: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3$ la curva biregolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco tale che $\sigma(0) = 0$, $\mathbf{t}(0) = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$, $\mathbf{n}(0) = (0, 1, 0)$ e

$$\kappa(s) = -\tau(s) = (2 - 2s^2)^{-1/2}$$

per ogni $s \in (-1, 1)$.

- (i) Determina un vettore non nullo v tale che $\langle v, \mathbf{t}(s) \rangle$ sia costante.
- (ii) Determina σ .

1.3. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, e sia $\sigma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva biregolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco. Fissato $\varepsilon > 0$, sia $\sigma_\varepsilon: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da $\sigma_\varepsilon(s) = \sigma(s) + \varepsilon \mathbf{t}(s)$, dove \mathbf{t} è il versore tangente di σ .

- (i) Dimostra che σ_ε è una curva regolare.

- (ii) Supponi che $\tau(s) \neq 0$ per ogni $s \in I$. Dimostra che σ_ε è biregolare, e calcolane la curvatura in funzione della curvatura κ e torsione τ di σ .
- (iii) Supponi che esista una costante $0 < c < 1/\varepsilon$ tale che

$$\kappa(s) = c(e^{2s/\varepsilon} - c^2\varepsilon^2)^{-1/2}.$$

Dimostra che il versore normale di σ_ε in $\sigma_\varepsilon(s)$ è ortogonale al versore normale di σ in $\sigma(s)$ per ogni $s \in I$.

1.4. Sia I un intervallo aperto di \mathbb{R} , e sia $\sigma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva biregolare, parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco. Sia $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ la curva definita da $\gamma(s) = \mathbf{t}(s)$.

- (i) Trova un'espressione per il parametro lunghezza d'arco di γ in funzione del parametro lunghezza d'arco di σ .
- (ii) Esprimi il riferimento di Frenet di γ in funzione del riferimento di Frenet di σ .
- (iii) Supponi ora che il supporto di γ sia contenuto in una circonferenza. Mostra che esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che $\tau(s) = c \cdot \kappa(s)$ per ogni $s \in I$, dove τ e κ sono rispettivamente la torsione e la curvatura di σ .

1.5. Sia $\sigma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco con curvatura κ mai nulla e riferimento di Frenet $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$, e siano $v_0, p_0 \in \mathbb{R}^3$ fissati con $\|v_0\| = 1$. Definiamo $\sigma_0: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ponendo

$$\sigma_0(s) = \sigma(s) - p_0 - \langle \sigma(s) - p_0, v_0 \rangle v_0.$$

- (i) Trova un piano che contiene σ_0 .
- (ii) Dimostra che $\sigma'_0(s) = O$ sse $v_0 = \pm \mathbf{t}(s)$.
- (iii) Supponendo che σ_0 sia una curva regolare, calcolane la curvatura.
(Suggerimento: scrivi $v_0 = \langle \mathbf{t}, v_0 \rangle \mathbf{t} + \langle \mathbf{n}, v_0 \rangle \mathbf{n} + \langle \mathbf{b}, v_0 \rangle \mathbf{b}$.)
- (iv) Supponendo che σ_0 sia una curva regolare con curvatura mai nulla, e indicando con ℓ la retta passante per p_0 parallela a v_0 , dimostra che il sostegno di σ è contenuto nel cilindro circolare retto di asse ℓ e raggio $r > 0$ se e solo se

$$\kappa \frac{|\langle \mathbf{b}, v_0 \rangle|}{(1 - \langle \mathbf{t}, v_0 \rangle^2)^{3/2}} \equiv \frac{1}{r}.$$

1.6. Sia $\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la proiezione sul piano orizzontale, $\pi(x, y, z) = (x, y, 0)$, e sia $\sigma: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata per lunghezza d'arco, la cui proiezione sul piano orizzontale sia data da

$$\pi \circ \sigma(t) = \left(\frac{t}{2} \cos \left(\log \frac{t}{2} \right), \frac{t}{2} \sin \left(\log \frac{t}{2} \right), 0 \right),$$

e tale che $\sigma(2) = (1, 0, \sqrt{2})$.

- (i) Determina esplicitamente σ .
- (ii) Mostra che σ è una curva biregolare, e calcolane curvatura e torsione.

1.7. Dati $R, a > 0$, siano $\gamma_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $\gamma_2: (0, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}^2$ le curve definite da

$$\gamma_1(t) = (R \cos t, R \sin t, at), \quad \gamma_2(t) = \left(\sin t, \cos t + \log \tan \frac{t}{2} \right).$$

- (i) Mostra che γ_1 e γ_2 sono curve biregolari.
- (ii) Mostra che l'evoluto di γ_1 è un'elica circolare retta, e calcolane raggio e passo.
- (iii) Esplicita una parametrizzazione per lunghezza d'arco dell'evoluto di γ_2 .

1.8. Dimostra che non esiste alcuna curva $\sigma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ biregolare le cui rette binormali $\{\sigma(t) + u\mathbf{b}(t) \mid u \in \mathbb{R}\}$ al variare di $t \in \mathbb{R}$ si incontrino tutte in un punto.

1.9. Sia $\sigma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva biregolare di classe C^∞ parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco.

- (i) Mostra che esiste una curva $\omega: I \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ di classe C^∞ tale che per ogni $s \in I$ si abbia:

$$\dot{\mathbf{t}}(s) = \omega(s) \wedge \mathbf{t}(s), \quad \dot{\mathbf{n}}(s) = \omega(s) \wedge \mathbf{n}(s), \quad \dot{\mathbf{b}}(s) = \omega(s) \wedge \mathbf{b}(s).$$

- (ii) Mostra che ω è costante se e solo se σ è un'elica circolare retta (ricorda che le eliche circolari rette sono tutte e sole le curve biregolari con curvatura e torsione costanti).
- (iii) Sia $v: I \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ una curva di classe C^∞ . Mostra che la direzione di v è costante se e solo se $v'(t) \wedge v(t) = 0$ per ogni $t \in I$.
- (iv) Mostra che la direzione di ω è costante se e solo se σ è un'elica generalizzata (ricorda che le eliche generalizzate sono tutte e sole le curve biregolari con rapporto costante tra torsione e curvatura).

1.10. Siano $\sigma, \tau: (0, 2) \rightarrow \mathbb{R}^2$ due curve piane regolari tali che $\sigma(1) = \tau(1)$. Assumi inoltre che $\sigma'(1)$ e $\tau'(1)$ non siano paralleli. Posto $\sigma_s(t) = \sigma(t) + (s, 0)$, dimostra che le curve σ_s e τ si intersecano per $|s|$ abbastanza piccolo.

1.11. Sia $\sigma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva biregolare C^∞ parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco. Se il supporto di σ è contenuto in una sfera e σ ha torsione costante a , dimostra che esistono $b, c \in \mathbb{R}$ tali che

$$\kappa(s) = \frac{1}{b \cos(as) + c \sin(as)}$$

per ogni $s \in I$.

1.12. Sia $\sigma: (0, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva biregolare di classe C^∞ parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, e sia $\gamma: (0, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$\gamma(t) = \sigma(t) - \mathbf{b}(t),$$

dove $\mathbf{b}: (0, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}^3$ è il versore binormale di σ .

- (i) Dimostra che γ è sempre una curva regolare.

- (ii) Dimostra che la parametrizzazione data di γ è rispetto alla lunghezza d'arco se e solo se σ è una curva piana.
- (iii) Calcola la curvatura di γ , in termini della curvatura κ e della torsione τ di σ , e dimostra che γ è biregolare in tutti i punti in cui γ'' non si annulla.
- (iv) Supponi che la curva σ abbia torsione $\tau \equiv 1$ e curvatura κ data da

$$\kappa(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \tan \left(\frac{1}{\sqrt{2}} t \right) ;$$

dimostra che in questo caso la curva γ è piana.

1.13. Sia $\sigma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco.

- (i) Dimostra che tutte le rette tangenti affini di σ sono equidistanti da un dato punto $p_0 \in \mathbb{R}^2$ se e solo se σ è un segmento o un arco di circonferenza.
- (ii) Dimostra che tutte le rette normali affini di σ sono equidistanti da un dato punto $p_0 \in \mathbb{R}^2$ se e solo se la curvatura $\kappa: I \rightarrow \mathbb{R}$ di σ è data da

$$\kappa(s) = \pm \frac{1}{\sqrt{as+b}}$$

per opportuni $a, b \in \mathbb{R}$.

1.14. Sia $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ la curva

$$\sigma(t) = (2\sqrt{2}t - \sin t, 2\sqrt{2} \sin t + t, 3 \cos t) .$$

- (i) Calcola curvatura e torsione di σ .
- (ii) Trova, se esistono, una matrice ortogonale $A \in O(3)$ e un'elica $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ della forma

$$\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$$

tali che $A\sigma(t) = \gamma(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

1.15. Sia $\sigma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regolare di classe C^∞ parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, e supponi che la distanza dell'origine dalla retta normale a $\sigma(s)$ sia uguale a 1 per ogni $s \in I$.

- (i) Mostra che $\langle \sigma(s), \mathbf{t}(s) \rangle = 1$ per ogni $s \in I$.
- (ii) Mostra che σ è biregolare.
- (iii) Detta $\kappa: I \rightarrow \mathbb{R}$ la curvatura di σ , mostra che $\dot{\kappa}(s) = -\kappa^3(s)$ per ogni $s \in I$, e deducine che l'applicazione $s \mapsto \kappa^{-2}(s)$ ha derivata costante.
- (iv) Supponi ora $0 \in I$ e $\kappa(0) = 1$. Mostra che

$$\kappa(s) = \frac{1}{\sqrt{2s+1}}$$

per ogni $s \in I$ (in particolare, $I \subseteq (-1/2, \infty)$).

1.16. Sia $a \in \mathbb{R}$ un parametro reale, e considera la curva $\sigma_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da

$$\sigma_a(t) = (\cos t, \sin(t-a), at) .$$

- (i) Mostra che σ_a è regolare per ogni valore di a .
- (ii) Mostra che σ_a è biregolare se e solo se per ogni $k \in \mathbb{Z}$ si ha $a \neq \pi/2 + k\pi$.
- (iii) Nei casi in cui σ_a sia biregolare, calcolane curvatura e torsione.
- (iv) Determina i valori di a per cui σ_a sia contenuta in un piano.

1.17. Sia $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ la curva definita da

$$\sigma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t) .$$

- (i) Calcola la lunghezza di $\sigma|_{[0, 2\pi]}$.
- (ii) Mostra che $\sigma|_{(0, 2\pi)}$ è biregolare, e calcolane la curvatura.
- (iii) Sia $\gamma: (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'evolvente di $\sigma|_{(0, 2\pi)}$. Mostra che esiste $v \in \mathbb{R}^2$ tale che $\gamma(t) = \sigma(t + \pi) + v$ per ogni $t \in (0, 2\pi)$.

Esercizi aggiuntivi per il Capitolo 2

2.1. Sia $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva chiusa di classe C^1 a tratti con sostegno contenuto in una circonferenza di centro $p = (x_1^o, x_2^o) \in \mathbb{R}^2$ e raggio $r > 0$. Dimostra che

$$\int_a^b (\sigma_1 - x_1^o) \sigma_2' dt = - \int_a^b (\sigma_2 - x_2^o) \sigma_1' dt = \pi r^2 \iota_{p_0}(\sigma) .$$

2.2. Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ sia $\sigma_\lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ la curva data da

$$\sigma_\lambda(t) = (\lambda t + 2 \cos t, \lambda t^2 + \sin t, \lambda t^3) .$$

- (i) Calcola la curvatura di σ_λ nel punto $t = \pi$ al variare del parametro λ .
- (ii) Per quali valori di λ la curva σ_λ è una curva piana?
- (iii) Calcola l'indice di avvolgimento di $\sigma_0|_{[0, 2\pi]}$ rispetto ai punti $(3, 0, 0)$ e $(0, 0, 0)$.

2.3. Sia $\sigma: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva piana regolare chiusa C^∞ parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco e di curvatura $\kappa: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^+$. Supponi che esista una costante $c > 0$ tale che $0 \leq \kappa(s) \leq c$ per ogni $s \in [0, l]$ (quindi σ è meno incurvata di un cerchio di raggio $1/c$). Dimostra che

$$L(\sigma) \geq \frac{2\pi\rho(\sigma)}{c} ,$$

dove $L(\sigma)$ è la lunghezza di σ , e $\rho(\sigma)$ è l'indice di rotazione di σ .

2.4. Sia $\sigma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ la curva

$$\sigma(t) = (2 \cos t + \sin(3t), 2 \sin t + \cos(3t)) .$$

Calcola l'indice di avvolgimento di σ rispetto al punto $p = (0, 0)$.

Esercizi aggiuntivi per il Capitolo 3

3.1. Sia $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione

$$\psi(u, v) = (u + v, \sinh v, u^2 - v^2),$$

poniamo $S = \psi(\mathbb{R}^2)$ e sia $p = (1, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$. Sia poi $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ la curva definita da $\sigma(t) = (1, -\sinh t, 2t + 1)$.

- (i) Dimostra che S è una superficie regolare chiusa di \mathbb{R}^3 , di cui ψ è una parametrizzazione globale.
- (ii) Determina $\sigma_o: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $\sigma = \psi \circ \sigma_o$, e deduci che il sostegno di σ è contenuto in S .
- (iii) Osserva che $\sigma(0) = p$, e scrivi il versore tangente a σ in p come combinazione della base $\{\partial_1, \partial_2\}$ del piano tangente $T_p S$ a S in p indotta da ψ .
- (iv) Determina un'equazione cartesiana di $T_p S$.

Esercizi aggiuntivi per il Capitolo 4

4.1. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie con parametrizzazione globale $\varphi: \mathbb{R} \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da

$$\varphi(\theta, t) = (t \cos \theta, t \sin \theta, \theta - t).$$

- (i) Determina i coefficienti metrici di S rispetto a φ .
- (ii) Trova un campo di versori normali su S , e determina i coefficienti di forma di S rispetto a φ .
- (iii) Calcola la curvatura media e la curvatura Gaussiana di S .

4.2. Siano S_1, S_2 due superfici regolari di \mathbb{R}^3 , e supponi che S_1 intersechi S_2 lungo il sostegno di una curva regolare γ . Supponi inoltre che l'angolo formato da S_1 e S_2 lungo γ sia costante.

- (i) Mostra che, se γ è una linea di curvatura per S_1 allora è una linea di curvatura anche per S_2 .

Sia ora $\varphi: (0, \pi/2) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da

$$\varphi(u, v) = \left(\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u + \log \tan \frac{u}{2} + v \right),$$

sia S l'immagine di φ e sia $\gamma: (0, \pi/2) \rightarrow S$ la curva data da $\gamma(t) = \varphi(t, 0)$.

- (ii) Mostra che φ è una superficie immersa, e calcolane un campo di versori normali.
- (iii) Mostra che il sostegno di γ è contenuto in un piano che contiene l'asse z e che forma con S un angolo di $\pi/4$.
- (iv) Mostra che γ è una linea di curvatura per S .

4.3. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare orientata da un campo normale $N: S \rightarrow S^2$, sia $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^∞ , e sia $f \cdot N: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita da $f \cdot N(p) = f(p)N(p)$. Sia $p \in S$, e sia $\{v_1, v_2\}$ una base ortonormale di $T_p S$ tale che $v_1 \wedge v_2 = N(p)$. Sia infine $K(p)$ la curvatura di Gauss di S in p .

- (i) Dimostra che vale la seguente uguaglianza:

$$K(p) = \frac{\langle d(f \cdot N)_p(v_1) \wedge d(f \cdot N)_p(v_2), (f \cdot N)(p) \rangle}{f^3(p)} .$$

Sia ora $a > 0$, e sia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a^2(x^2 + y^2) + z^2 = a^2\}$.

- (ii) Dimostra che S è una superficie regolare, e determina un campo di versori normali su S .
 (iii) Posto $p = (x, 0, z) \in S$, determina una base ortonormale di $T_p S$.
 (iv) Mostra che, se $p = (x, y, z) \in S$, la curvatura di Gauss di S in p è data da

$$K(p) = \frac{a^4(a^2(x^2 + y^2) + z^2)}{(a^4(x^2 + y^2) + z^2)^2} = \frac{a^2}{(1 + (a^2 - 1)(x^2 + y^2))^2} .$$

(Suggerimento: usa la funzione $f(x, y, z) = \sqrt{a^4(x^2 + y^2) + z^2}$.)

4.4. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^∞ , e sia $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione definita da

$$h(s, t) = (s \cos f(t), s \sin f(t), t) .$$

- (i) Mostra che h definisce un diffeomorfismo tra \mathbb{R}^2 e una superficie regolare chiusa $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$.
 (ii) Determina i coefficienti metrici ed i coefficienti di forma di Σ rispetto alla parametrizzazione h .
 (iii) Per ogni $(s, t) \in \mathbb{R}^2$, calcola curvatura media e curvatura di Gauss di Σ in $h(s, t)$.
 (iv) Mostra che per ogni $z \in \mathbb{R}$ esiste un'isometria di Σ in sé che porta $(0, 0, 0)$ in $(0, 0, z)$ se e solo se Σ è un elicoide o un piano, ovvero se e solo se esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $f(t) = at + b$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

4.5. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme definito da

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \cos z - y \sin z = 1\} .$$

- (i) Dimostra che S è una superficie regolare chiusa in \mathbb{R}^3 .
 (ii) Dimostra che $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da

$$\varphi(t, s) = (\cos t + s \sin t, -\sin t + s \cos t, t)$$

è una parametrizzazione globale di S .

- (iii) Calcola i coefficienti metrici di S e determina un campo di versori normali su S .
 (iv) Calcola i coefficienti di forma, la curvatura Gaussiana e la curvatura media di S .

4.6. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ un cilindro di generatrice un arco di Jordan $\sigma: I \rightarrow H$ regolare di classe C^∞ contenuto in un piano affine $H \subset \mathbb{R}^3$, e direttrice una retta ℓ non contenuta in H .

- (i) Scrivi una parametrizzazione di S , e calcola i relativi coefficienti metrici e di forma.
- (ii) Calcola la curvatura Gaussiana di S .
- (iii) Dimostra che l'insieme $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = e^{x+y}\}$ è una superficie regolare di \mathbb{R}^3 con curvatura Gaussiana identicamente nulla, senza calcolarne esplicitamente coefficienti metrici o di forma.

4.7. Siano $\sigma, \tau: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ le traiettorie, parametrizzate rispetto alla lunghezza d'arco, di due punti che si muovono soggetti alle seguenti condizioni:

- (a) σ parte da $\sigma(0) = (0, 0, 0)$ e si muove lungo l'asse x nel verso positivo;
- (b) τ parte da $\tau(0) = (0, 1, 0)$ e si muove parallelamente all'asse z nel verso positivo.

Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ l'unione, al variare di $t \in \mathbb{R}$, delle rette passanti per $\sigma(t)$ e per $\tau(t)$.

- (i) Dimostra che S è una superficie regolare, e danne una parametrizzazione globale.
- (ii) Calcola i coefficienti metrici ed i coefficienti di forma di S rispetto alla parametrizzazione trovata.
- (iii) Calcola la curvatura di Gauss di S , dimostra che essa è ovunque non positiva, e ammette un unico punto di minimo assoluto.
- (iv) Detto P il punto di minimo assoluto trovato in (iii), calcola le direzioni principali e le curvature principali di S in P .

4.8. Supponi che una superficie regolare S ed un piano P siano tangenti lungo il sostegno di una curva regolare σ . Mostra che tutti i punti del sostegno di σ sono parabolici o planari.

4.9. Sia S la superficie di rotazione ottenuta ruotando attorno all'asse z la curva del piano xz di equazione $(x-2)^2 + (z-2)^2 = 2$.

- (i) Dimostra che S è una superficie regolare, e che $p = (1, 0, 1) \in S$.
- (ii) Calcola la prima forma fondamentale di S nel punto p .
- (iii) Calcola la seconda forma fondamentale di S nel punto p .
- (iv) Calcola la curvatura Gaussiana in tutti i punti di S .
- (v) Trova una curva su S passante per p e con curvatura normale massima nel punto p .
- (vi) Trova una curva $\sigma: I \rightarrow S$ su S passante per p e con curvatura normale massima in tutti i suoi punti, cioè tale che

$$\kappa_n(s) = \max\{Q_{\sigma(s)}(v) \mid v \in T_{\sigma(s)}S, I_{\sigma(s)}(v) = 1\}$$

per ogni $s \in I$.

4.10. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientata

- (i) Sia $\sigma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ una linea asintotica con $\kappa(0) \neq 0$. Dimostra che

$$|\tau(0)| = \sqrt{-K(\sigma(0))}.$$

- (ii) Siano $\sigma_1, \sigma_2: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ due linee asintotiche con $\sigma_1(0) = \sigma_2(0) = p$ e $\kappa_1(0), \kappa_2(0) \neq 0$, dove κ_j è la curvatura di σ_j . Dimostra che se $K(p) < 0$ allora $\tau_2(0) = -\tau_1(0)$, dove τ_j è la torsione di σ_j .

4.11. Siano $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3): I \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3): J \rightarrow \mathbb{R}^3$ due curve parametrizzate rispetto alla lunghezza d'arco, e definiamo $\varphi: I \times J \rightarrow \mathbb{R}^3$ ponendo

$$\varphi(u, v) = \sigma(u) + \gamma(v).$$

- (i) Dimostra che se $\dot{\sigma}_1(u)\dot{\gamma}_1(v) > 0$ e $\dot{\sigma}_2(u)\dot{\gamma}_2(v) < 0$ per ogni $(u, v) \in I \times J$ allora φ è una parametrizzazione globale di una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$.
(ii) Supponendo che φ sia una parametrizzazione globale di una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$, calcola prima e seconda forma fondamentale di S .

Assumiamo adesso che σ sia biregolare, di curvatura κ e torsione τ , e che γ sia una parametrizzazione rispetto alla lunghezza d'arco di $\dot{\sigma}$.

- (iii) Supponendo che φ sia una parametrizzazione globale di una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$, esprimi la seconda forma fondamentale di S in termini di κ e τ e del riferimento di Frenet di σ .
(iv) Dimostra che φ non può mai essere una parametrizzazione globale ortogonale.
(v) Supponendo che φ sia una parametrizzazione globale di una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$, trova delle condizioni necessarie e sufficienti su σ perché S abbia curvatura Gaussiana identicamente nulla.

4.12. Siano $S, T \subset \mathbb{R}^3$ le superfici di \mathbb{R}^3 date da

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |z| < \pi/2, (x^2 + y^2) \cos z = 1\},$$

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

- (i) Dimostra che S è diffeomorfa a T , costruendo un diffeomorfismo esplicito.
(ii) Dimostra che il diffeomorfismo costruito non è una isometria.
(iii) Dimostra che non esistono isometrie fra S e T .

4.13. Considera l'applicazione $\varphi: \mathbb{R} \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$\varphi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, u + uv),$$

e sia $S = \varphi(\mathbb{R} \times (0, \infty))$.

- (i) Dimostra che S è una superficie regolare, di cui φ è una parametrizzazione globale.
(ii) Calcola i coefficienti metrici e i coefficienti di forma di S rispetto alla parametrizzazione φ .
(iii) Calcola la curvatura di Gauss di S , ed osserva che essa è ovunque non positiva.

Esercizi aggiuntivi per il Capitolo 5

5.1. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare, e $\sigma: I \rightarrow S$ una curva in S parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco.

- (i) Mostra che, se σ è biregolare, piana ed è una geodetica di S , allora è una linea di curvatura di S .
- (ii) Costruisci un esempio in cui σ sia una geodetica piana di S ma non sia una linea di curvatura di S .
- (iii) Costruisci un esempio in cui σ sia una linea di curvatura di S e sia piana ma non sia una geodetica di S .
- (iv) Dimostra che, se tutte le geodetiche di S sono piane allora S è contenuta in un piano o in una sfera.

5.2. Sia $C \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme definito da $C = \{(x, y, z) \mid 3(x^2 + y^2) - z^2 = 0, z > 0\}$, e considera la funzione $\varphi: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow C$ data da

$$\varphi(x, y) = \left(\frac{x^2 - y^2}{2\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{\sqrt{3(x^2 + y^2)}}{2} \right).$$

- (i) Mostra che C è una superficie regolare.
- (ii) Mostra che φ è un'isometria locale.
- (iii) Sia $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow C$ una geodetica parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco tale che i vettori $\sigma(0)$ e $\dot{\sigma}(0)$ siano linearmente indipendenti. Mostra che la funzione $t \mapsto z(\sigma(t))$ ammette un unico minimo m , e determina m in funzione di $\sigma(0)$ e dell'angolo formato da $\sigma(0)$ e $\dot{\sigma}(0)$.

5.3. Sia

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - \cosh z)^2 + y^2 = \cosh^2 z\},$$

e sia $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione così definita:

$$\varphi(u, v) = ((1 + \cos v) \cosh u, \sin v \cosh u, u).$$

Per ogni $a \in \mathbb{R}$, siano infine $\gamma_a, \sigma_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ le curve definite da $\gamma_a(t) = \varphi(a, t)$ e $\sigma_a(t) = \varphi(t, a)$.

- (i) Dimostra che S è una superficie regolare, e che opportune restrizioni di φ forniscono un atlante per S .
- (ii) Calcola i coefficienti metrici ed i coefficienti di forma di S rispetto a φ .
- (iii) Calcola la curvatura Gaussiana di S , dimostra che è ovunque non positiva, e determina il luogo dei punti ove essa si annulla.
- (iv) Determina i valori reali di a per cui γ_a sia una geodetica (nota che γ_a è parametrizzata rispetto a un multiplo della lunghezza d'arco).
- (v) Determina i valori reali di a per cui la riparametrizzazione di σ_a rispetto alla lunghezza d'arco sia una geodetica.

5.4. Sia S il sottoinsieme di \mathbb{R}^3 così definito:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + 2xz = 1\},$$

e siano $A = S \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z\}$, $B = S \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -z, y > 0\}$.

- (i) Mostra che S è una superficie regolare chiusa, e calcolane un campo di versori normali.
- (ii) Mostra che A è il sostegno di una curva regolare periodica γ , dai una parametrizzazione per lunghezza d'arco di γ e mostra che tale parametrizzazione definisce una geodetica di S .
- (iii) Mostra che B è il sostegno di una curva regolare σ , e dai una parametrizzazione regolare (non necessariamente per lunghezza d'arco) di σ .
- (iv) Mostra che B è il sostegno di una geodetica di S .

5.5. Sia

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z - zy = 0\},$$

e sia $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ la curva definita da $\gamma(t) = (2t^3 + t^2 + 1, 2t, t^2 + 1)$.

- (i) Dimostra che S è una superficie regolare, e determina una parametrizzazione globale h di S .
- (ii) Determina i coefficienti metrici ed i coefficienti di forma di S rispetto alla parametrizzazione h .
- (iii) Determina le linee di curvatura di S passanti per $(1, -1, 1)$.
- (iv) Osserva che il supporto di γ è contenuto in S , e calcola il modulo della curvatura geodetica e della curvatura normale di γ (considerata come curva su S) per $t = 0$.

5.6. Considera l'applicazione $\psi: (-\pi/2, \pi/2) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da:

$$\psi(t, s) = ((2 + e^{-t^2} \cos s) \cos t, (2 + e^{-t^2} \cos s) \sin t, e^{-t^2} \sin s),$$

e sia $\Sigma = \psi((-\pi/2, \pi/2) \times \mathbb{R})$. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia $\gamma_a: (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \Sigma$ data da $\gamma_a(v) = \psi(v, a)$, e per ogni $b \in (-\pi/2, \pi/2)$ sia $\sigma_b: \mathbb{R} \rightarrow \Sigma$ data da $\sigma_b(u) = \psi(b, u)$.

- (i) Dimostra che Σ è una superficie regolare di \mathbb{R}^3 , e che ψ è una superficie immersa.
- (ii) Determina un campo $N: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ di vettori normali non nulli, e determina i punti di $p \in \Sigma$ in cui $N(p)$ è orizzontale (cioè ha componente verticale nulla), e i punti $p \in \Sigma$ in cui lo spazio vettoriale generato da p e $N(p)$ è verticale (cioè contiene l'asse delle z).
- (iii) Mostra che per ogni $b \in (-\pi/2, \pi/2)$ la curva σ_b è regolare e parametrizzata rispetto a un multiplo della lunghezza d'arco, e determina i valori di b per cui σ_b sia una geodetica. (*Suggerimento:* osserva che il sostegno di σ_b è contenuto in un sottospazio vettoriale verticale di \mathbb{R}^3 .)
- (iv) Mostra che per ogni $a \in \mathbb{R}$ la curva γ_a è regolare. Determina i valori di a per cui una opportuna parametrizzazione di γ_a sia una geodetica. (*Suggerimento:* osserva che esiste un istante in cui il versore normale a γ_a è orizzontale.)

5.7. Sia $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione data da:

$$\varphi(u, v) = (2 \cos u, \sin u, 2v).$$

- (i) Trova il più grande $c > 0$ tale che la restrizione di φ a $(-c, c) \times \mathbb{R}$ sia una parametrizzazione globale di una superficie regolare $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$.

- (ii) Mostra che se $\sigma(t) = \varphi(u(t), v(t))$ è una geodetica in Σ allora $v(t) = at + b$ per opportuni $a, b \in \mathbb{R}$.

5.8. Sia S la superficie regolare ottenuta facendo ruotare intorno all'asse z la semiretta di equazione parametrica $v \mapsto (v, 0, 2v)$, con $v > 0$, e sia $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ la curva definita da $\sigma(t) = (e^t \cos 2t, e^t \sin 2t, 2e^t)$.

- (i) Mostra che σ è regolare, e calcolane una parametrizzazione per lunghezza d'arco definita su $(0, +\infty)$.
 (ii) Calcola curvatura e torsione di σ .
 (iii) Mostra che il sostegno di σ è contenuto in S , e calcola il modulo della curvatura normale e della curvatura geodetica di σ , considerata come curva su S .

5.9. Sia $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow S^2$ una curva biregolare periodica di periodo T contenuta nella sfera unitaria S^2 orientata dalla mappa di Gauss $N(p) = p$ per ogni $p \in S^2$. Sia $\{\mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ il riferimento di Darboux di σ (vedi l'Esercizio 5.6), e indica con ϕ l'angolo fra \mathbf{n} e \mathbf{v} .

- (i) Dimostra che per ogni $s \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{Z}$ si ha $\phi(s) \neq 2k\pi$, e deducine che $|\phi(s) - \phi(s')| < 2\pi$ per ogni $s, s' \in \mathbb{R}$.
 (ii) Dimostra che $\int_0^T \tau(s) ds = 0$.

5.10. Sia S la superficie di \mathbb{R}^3 di equazione $(x/2)^2 + (y/2)^2 + z^2 - 1 = 0$. Indichiamo con P l'intersezione di S con la semiretta $\mathbb{R}^+ e_1$, con Q l'intersezione di S con la semiretta $\mathbb{R}^+ e_3$, e con R l'intersezione di S con la semiretta $\mathbb{R}^+(e_1 + e_2 + e_3)$, dove $\{e_1, e_2, e_3\}$ è la base canonica di \mathbb{R}^3 .

- (i) Dimostra che l'intersezione C di S con il piano $H = \{z = 0\}$ è una geodetica di S .
 (ii) Dimostra che la geodetica che passa per P con angolo $\pi/4$ rispetto a C non può passare anche per il punto Q .
 (iii) Dimostra che la geodetica uscente da R con direzione tangente nel piano xy non può contenere punti più vicini all'asse z di R stesso.

5.11. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie data dalla rotazione attorno all'asse delle x del grafico della funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da $f(x) = \sin(x) + 2$. Sia $C = S \cap \{z = 0\} \cap \{y > 0\}$.

- (i) Dimostra che S è una superficie regolare (non compatta).
 (ii) Dimostra che C è supporto di una curva regolare σ parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco.
 (iii) Dimostra che σ è una geodetica di S .
 (iv) Calcola la prima forma fondamentale di S lungo la curva σ .
 (v) Calcola la seconda forma fondamentale di S nel punto $P = (0, 2, 0)$.

5.12. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie di equazione $x^2 + y^2 = z$, orientata in modo da avere versore normale sempre diretto nella direzione delle z positive, e sia $P = (0, 0, 0)$.

- (i) Dimostra che S è una superficie regolare.
 (ii) Calcola la seconda forma fondamentale di S nel punto P .
 (iii) Determina una geodetica di S passante per P .
 (iv) Determina tutte le geodetiche di S passanti per P .

5.13. Sia $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^4 + z^2 = 1\}$.

- (i) Mostra che Σ è una superficie regolare orientabile chiusa, e determina un campo di versori normali $N: \Sigma \rightarrow S^2$.

Nel seguito, con *piano verticale* intenderemo un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^3 di dimensione 2 che contenga l'asse delle z .

- (ii) Determina tutti i punti $p \in \Sigma \setminus \{(0, 0, 1), (0, 0, -1)\}$ tali che $\text{Span}(p, N(p))$ sia un piano verticale.
 (iii) Mostra che l'intersezione di Σ con un qualsiasi piano verticale è sostegno di una curva regolare.
 (iv) Determina i piani verticali la cui intersezione con Σ sia il sostegno di una geodetica di Σ .

5.14. Sia $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita da

$$\varphi(u, v) = (\cos u, e^v \sin u, v),$$

e sia $S = \varphi(\mathbb{R}^2)$. Sia inoltre $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ la curva definita da $\gamma(t) = (0, e^t, t)$.

- (i) Mostra che S è una superficie regolare, un cui atlante è dato da $\varphi|_{(0, 2\pi) \times \mathbb{R}}$ e $\varphi|_{(-\pi, \pi) \times \mathbb{R}}$.
 (ii) Determina i coefficienti metrici ed i coefficienti di forma di S (rispetto alla parametrizzazione φ).
 (iii) Mostra che la curvatura Gaussiana di S è ovunque negativa.
 (iv) Mostra che γ è una curva regolare il cui sostegno è contenuto in S , e che una riparametrizzazione di γ a velocità costante è una geodetica di S .

5.15. Sia $\varphi: \mathbb{R} \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita da

$$\varphi(u, v) = (uv^2, uv, v - uv),$$

e sia $S = \varphi(\mathbb{R}^2)$. Sia inoltre $\sigma: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ la curva definita da $\sigma(t) = (s^2, s, 0)$.

- (i) Mostra che S è una superficie regolare, di cui φ fornisce una parametrizzazione globale.
 (ii) Determina i coefficienti metrici e i coefficienti di forma di S (rispetto alla parametrizzazione φ).
 (iii) Mostra che la curvatura Gaussiana di S è ovunque non positiva.
 (iv) Mostra che σ è una curva regolare il cui sostegno è contenuto in S , e calcola curvatura normale e curvatura geodetica di σ (considerata come curva su S) in ogni suo punto.

Esercizi aggiuntivi per il Capitolo 6

6.1. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto, sia $\sigma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da $\sigma(t) = (\alpha(t), 0, \beta(t))$ con $\alpha(t) > 0$ per ogni $t \in I$, e supponi che σ sia una parametrizzazione iniettiva di un arco aperto di Jordan del piano $\{y = 0\} \subset \mathbb{R}^3$. Sia S la superficie ottenuta ruotando il sostegno di σ intorno all'asse z , e sia infine $\varphi: \mathbb{R} \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$ la superficie immersa con sostegno S data da $\varphi(\theta, t) = (\alpha(t) \cos \theta, \alpha(t) \sin \theta, \beta(t))$.

- (i) Per ogni $t_0 \in I$ calcola la curvatura geodetica del parallelo $\gamma_{t_0}: \mathbb{R} \rightarrow S$ dato da $\gamma_{t_0}(u) = \varphi(u, t_0)$, e verifica che è costante.

Sia ora $S = S^2 \setminus \{(0, 0, 1), (0, 0, -1)\}$, dove S^2 è la sfera unitaria in \mathbb{R}^3 , siano $a, b \in (-1, 1)$ con $a < b$, e poniamo $R = \{(x, y, z) \in S \mid a < z < b\}$.

- (ii) Calcola la curvatura geodetica dei paralleli il cui sostegno è dato da $S \cap \{z = a\}$ e $S \cap \{z = b\}$.
 (iii) Sfruttando il teorema di Gauss-Bonnet, calcola l'area di R .

6.2. Sia S una superficie compatta orientabile con curvatura Gaussiana strettamente positiva, e supponiamo che la mappa di Gauss $N: S \rightarrow S^2$ sia un diffeomorfismo (*Nota:* quest'ultima ipotesi in realtà è sempre verificata; vedi il Corollario 7.4.9). Dimostra che se σ è una geodetica semplice chiusa in S allora $N \circ \sigma$ divide S^2 in due parti di ugual area. (*Suggerimento:* la formula di cambiamento di variabile negli integrali multipli dice che, sotto queste ipotesi, per ogni regione regolare $R \subseteq S$ si ha $\int_R K d\nu = \text{Area}(N(R))$.)

6.3. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie compatta definita dall'equazione

$$x^4 + y^4 + z^4 - 1 = 0,$$

e sia $X: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale dato da

$$X(p) = \pi_p \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)$$

per ogni $p \in S$, dove $\pi_p: \mathbb{R}^3 \rightarrow T_p S$ è la proiezione ortogonale sul piano tangente a S in p .

- (i) Determina i punti singolari di X .
 (ii) Dimostra che l'applicazione $F: S \rightarrow S^2$ data da $F(p) = p/\|p\|$ è un diffeomorfismo tra S e la sfera unitaria S^2 .
 (iii) Calcola l'indice dei punti singolari di X .

6.4. Sia $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 2\}$, e considera il campo vettoriale $X: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ così definito:

$$X(x, y, z) = (y^2 + z^2 - xy, x^2 + z^2 - xy, -z(x + y)).$$

Sia inoltre $v: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ la restrizione di X a Σ .

- (i) Mostra che v è un campo vettoriale su Σ .
 (ii) Determina i punti singolari di v , e calcolane l'indice.

6.5. Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ l'insieme definito da

$$S = \{(x, y, z) \mid 5x^2 - 8xy + 5y^2 + 9z^2 = 18\},$$

e sia $v: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$v(x, y, z) = (4x^2 + 5y^2 - 9xy + 9z^2, 5x^2 + 4y^2 - 9xy + 9z^2, -z(x + y)).$$

- (i) Mostra che S è una superficie regolare di \mathbb{R}^3 , diffeomorfa a S^2 . (*Suggerimento:* l'isomorfismo lineare $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dato da $h(x, y, z) = ((2x-y)/3, (-x+2y)/3, z)$ si restringe ad un diffeomorfismo tra S e $h(S)$.)
- (ii) Mostra che v è un campo vettoriale su S , e determinane i punti singolari.
- (iii) Determina esplicitamente delle isometrie $F_1, F_2, F_3: S \rightarrow S$ distinte dall'identità che verifichino le proprietà seguenti:
- (a) $F_1(p) = p$ per ogni $p \in S \cap \{x + y = 0\}$;
 - (b) $F_2(p) = p$ per ogni $p \in S \cap \{x - y = 0\}$;
 - (c) $F_3(p) = p$ per ogni $p \in S \cap \{z = 0\}$.
- (iv) Calcola l'indice dei punti singolari di v .
- (v) Sia R la regione regolare di S definita da $R = S \cap \{x + y \geq 0, x - y \geq 0, z \geq 0\}$, e sia $K: S \rightarrow \mathbb{R}$ la curvatura Gaussiana. Calcola $\int_R K \, d\nu$.

6.6. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie compatta con mappa di Gauss $N: S \rightarrow S^2$ e curvatura Gaussiana $K: S \rightarrow \mathbb{R}$.

- (i) Dimostra che

$$\int_S |K| \, d\nu \geq 4\pi.$$

- (ii) Posto $K^+ = \max\{K, 0\}$, dimostra che

$$\int_S K^+ \, d\nu = 4\pi$$

se e solo se N è iniettiva sull'aperto $\{p \in S \mid K(p) > 0\}$.

6.7. Sia S l'ellissoide centrato nell'origine con semiassi lungo x, y, z di lunghezza rispettivamente pari a 1, 3 e 1. Sia T l'intersezione di S con il bordo dell'ottante $\{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.

- (i) Dimostra che T è un triangolo geodetico.
- (ii) Calcola l'integrale della curvatura Gaussiana K su T .
- (iii) Trova infiniti poligoni geodetici in S su cui l'integrale della curvatura Gaussiana sia pari a 2π .
- (iv) Dimostra che due poligoni geodetici in S su cui l'integrale della curvatura Gaussiana è pari a 2π si intersecano sempre.

6.8. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie di equazione $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, e sia $T \subset \mathbb{R}^3$ la superficie di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Sia $C = S \cap T$.

- (i) Dimostra che S e T sono superfici regolari.
- (ii) Dimostra che C è l'unione dei supporti di due curve regolari parametrizzate rispetto alla lunghezza d'arco σ_1 e σ_2 , dove σ_1 è contenuta nel semispazio $z \geq 0$ e σ_2 è contenuta nel semispazio $z \leq 0$.
- (iii) Dimostra che σ_1 non è una geodetica né per S né per T .
- (iv) Calcola l'integrale della curvatura Gaussiana di S sulla regione regolare limitata il cui bordo è formato da σ_1 e σ_2 .

6.9. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie di rotazione ottenuta ruotando attorno all'asse z la curva contenuta nel primo quadrante ($x > 0, z > 0$) del piano xz di equazione $x = z$. Sia H il piano di \mathbb{R}^3 di equazione $z = 1$. Sia $C = S \cap H$, e $p = (1, 0, 1)$.

- (i) Dimostra che S è una superficie regolare, che C è una curva regolare e che $p \in C$.
- (ii) Calcola la seconda forma fondamentale di S nel punto p .
- (iii) Dimostra che C non è una geodetica di S .
- (iv) Calcola la curvatura normale di C in tutti i suoi punti.

Sia D l'intersezione di S con il piano $z = 2$, e sia T la regione di S compresa fra le curve C e D .

- (v) Calcola la curvatura geodetica di C e di D in tutti i loro punti.
- (vi) Calcola l'integrale della curvatura gaussiana di S su tutta T .
- (vii) Calcola l'area di T .

6.10. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie di equazione $x^2 + y^2 = z$, orientata in modo da avere versore normale sempre diretto nella direzione delle z positive, e sia $T \subset \mathbb{R}^3$ la superficie di equazione $x^2 + y^2 = 1 - z$, orientata in modo da avere versore normale sempre diretto nella direzione delle z negative. Poniamo $C = S \cap T$.

- (i) Calcola la curvatura normale di C in tutti i suoi punti, considerata come curva in S .
- (ii) Calcola la curvatura normale di C in tutti i suoi punti, considerata come curva in T .
- (iii) Sia R la regione di S delimitata da C e contenente $P = (0, 0, 0)$. Calcola l'integrale della curvatura Gaussiana di S sulla regione R .

6.11. Siano $S, T \subset \mathbb{R}^3$ le superfici date da

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |z| < \pi/2, (x^2 + y^2) \cos z = 1\},$$

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z = 4\},$$

e poniamo $C = S \cap T$.

- (i) Dimostra che S è regolare.
- (ii) Dimostra che C è il supporto di due curve regolari parametrizzate rispetto alla lunghezza d'arco: σ_1 con supporto contenuto nel semispazio $z \geq 0$, e σ_2 con supporto contenuto nel semispazio $z \leq 0$.
- (iii) Calcola l'integrale della curvatura Gaussiana di S sulla regione delimitata da σ_1 e σ_2 .

6.12. Siano S_1, S_2 due superfici compatte orientabili, e sia \mathbf{T}_1 (rispettivamente \mathbf{T}_2) una triangolazione di S_1 (rispettivamente di S_2). Definiamo la *somma connessa* di S_1 e S_2 , che sarà indicata con $S_1 \# S_2$, come segue. Se T_1, T_2 sono facce di $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2$ rispettivamente, sia S'_i la superficie con bordo ottenuta rimuovendo da S_i la parte interna di T_i . Identifica ora il bordo di S_1 con il bordo di S_2 tramite un omeomorfismo che mandi ogni lato di T_1 su un lato di T_2 . Definisci allora $S_1 \# S_2$ come lo spazio topologico ottenuto dall'unione disgiunta di S'_1 e S'_2 tramite l'identificazione appena descritta. Non è difficile dimostrare (e puoi darlo per assodato) che $S_1 \# S_2$ è una superficie, il cui tipo di omeomorfismo non dipende dalle scelte fatte (nemmeno dalle triangolazioni \mathbf{T}_1 e \mathbf{T}_2 !).

- (i) Calcola $\chi(S_1 \# S_2)$ in funzione di $\chi(S_1)$ e $\chi(S_2)$.
- (ii) Sfruttando il teorema di classificazione delle superfici compatte orientabili, mostra che se S_1, S_2 sono superfici compatte orientabili tali che $S_1 \# S_2$ è omeomorfo a $S^1 \times S^1$ allora S_1 è omeomorfo a $S^1 \times S^1$ e S_2 a S^2 , o viceversa.

Esercizi aggiuntivi per il Capitolo 7

7.1. Un *ovaloide* è una superficie compatta di \mathbb{R}^3 con curvatura Gaussiana sempre positiva; in particolare, S è orientabile (Problema 4.16), e una mappa di Gauss $N: S \rightarrow S^2$ fornisce un diffeomorfismo di S con S^2 (Corollario 7.4.9; nel seguito potrai sfruttare questi fatti).

Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ un ovaloide con mappa di Gauss $N: S \rightarrow S^2$, e indichiamo con $k_1 \leq k_2$ le curvature principali di S .

- (i) Mostra che, a meno di sostituire N con $-N$, esiste $\varepsilon > 0$ tale che

$$\varepsilon \leq \kappa_1(p) \leq \kappa_2(p)$$

per ogni $p \in S$ (e supponi d'ora in poi che questa condizione sia verificata).

- (ii) Mostra che esiste un unico diffeomorfismo $\varphi: S \rightarrow S$ tale che $N \circ \varphi = -N$, e deducine che per ogni $p \in S$ si ha $T_{\varphi(p)}S = T_pS$, per cui $d\varphi_p$ può essere considerato un endomorfismo di T_pS .
- (iii) Mostra che per ogni $p \in S$ e $v \in T_pS$ si ha $d\varphi_p(v) \neq v$.

Nel resto di questo esercizio supponi che esista una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che $\|\varphi(p) - p\| = c$ per ogni $p \in S$ (in questo caso, si dice che l'ovaloide S ha *larghezza costante*).

- (iv) Mostra che per ogni $p \in S$ si ha $\varphi(p) - p = c \cdot N(p)$.
- (v) Mostra che, se $v \in T_pS$ con $\|v\| = 1$ definisce una direzione principale in p con $Q_p(v) = k$, allora $ck - 1 \neq 0$ e v definisce una direzione principale in $\varphi(p)$ con $Q_{\varphi(p)}(v) = k/(ck - 1)$.
- (vi) Deduci che se la curvatura Gaussiana di S è costante allora S è una sfera.

Curve e superfici

Abate, M.; Tovena, F.

2006, XIII, 396 pagg., Softcover

ISBN: 978-88-470-0535-8