

Kapitel I

Grundlagen der ebenen euklidischen Geometrie

Einleitung. Im 19. Jahrhundert erwachte das Bedürfnis nach mehr Strenge in der Elementar-Geometrie. Nach 2000-jährigem Gebrauch der euklidischen Axiome der Ebene und des Raumes wollte man die Grundlagen genauer fassen und ihre gegenseitige logische Abhängigkeit studieren.

Im Jahre 1899 erschien nach Vorarbeiten von A.-M. LEGENDRE (1752–1833) und M. PASCH (1843–1930) das noch heute fundamentale Werk *Grundlagen der Geometrie* (Festschrift zur Feier der Enthüllung des GAUSS-WEBER-Denkmal in Göttingen, Teubner, Leipzig) von D. HILBERT (1862–1943) mit der

Einleitung.

Die Geometrie bedarf – ebenso wie die Arithmetik – zu ihrem folgerichtigen Aufbau nur weniger und einfacher Grundsätze. Die Grundsätze heißen *Axiome* der Geometrie. Die Aufstellung der Axiome der Geometrie und die Erforschung ihres Zusammenhanges ist eine Aufgabe, die seit EUKLID in zahlreichen vortrefflichen Abhandlungen der mathematischen Literatur sich erörtert findet. Die bezeichnete Aufgabe läuft auf die logische Analyse unserer räumlichen Anschauung hinaus.

Die vorliegende Untersuchung ist ein neuer Versuch, für die Geometrie ein *vollständiges* und *möglichst einfaches* System von Axiomen aufzustellen und aus denselben die wichtigsten geometrischen Sätze in der Weise abzuleiten, daß dabei die Bedeutung der verschiedenen Axiomgruppen und die Tragweite der aus den einzelnen Axiomen zu ziehenden Folgerungen klar zutage tritt.

Im ersten Kapitel entwickelt HILBERT dann die folgenden fünf Axiomgruppen:

- I. Axiome der Verknüpfung,
- II. Axiome der Anordnung,
- III. Axiome der Kongruenz,
- IV. Axiome der Parallelen,
- V. Axiome der Stetigkeit.

Dabei werden in I lediglich die Inzidenzaxiome ohne das Parallelenaxiom formuliert. In Kapitel III, §15, wird als Koordinatensatz die so genannte *Streckenrechnung* auf der Basis des Satzes von PAPPUS (bei HILBERT heißt es noch PASCAL) eingeführt. Nach einem Exkurs über Flächenberechnung wird in Kapitel V erneut *Streckenrechnung*, diesmal mit Hilfe des Satzes von DESARGUES, erklärt. Nach kurzer Einleitung beginnt HILBERT:

Wir denken drei verschiedene Systeme von Dingen: die Dinge des *ersten* Systems nennen wir *Punkte*, ..., die Dinge des *zweiten* Systems nennen wir *Geraden*, ..., die Dinge des *dritten* Systems nennen wir *Ebenen* Wir denken die Punkte, Geraden, Ebenen in gewisser gegenseitiger Beziehung und bezeichnen die Beziehungen durch Worte wie „liegen“, „zwischen“ ...; die genaue und vollständige Beschreibung dieser Beziehungen erfolgt durch die *Axiome der Geometrie*.

Diese Axiome wurden nicht sofort uneingeschränkt akzeptiert, denn was Punkte sind und z.B. „zwischen“ bedeuten soll, wird erst durch die Axiome implizit festgelegt: HILBERTs Axiomensystem ist ein Gleichungssystem mit vielen Unbekannten, das man nicht lösen kann. G. FREGE (1848–1925) polemisiert 1903 (Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. **12**, 319–324, 368–375) gegen die Formulierung der HILBERTschen Erklärungen:

Von altersher nennt man Axiom einen Gedanken, dessen Wahrheit feststeht,... Wenn wir die Frage beantworten wollen, ob ein Gegenstand – z.B. meine Taschenuhr – ein Punkt ist, stoßen wir gleich beim ersten Axiome auf die Schwierigkeit, daß da von zwei Punkten die Rede ist.

FREGE parodiert HILBERT:

Erklärung. Wir denken uns Gegenstände, die wir Götter nennen.
Axiom 1. Jeder Gott ist allmächtig.
Axiom 2. Es gibt wenigstens einen Gott.

Die euklidische Geometrie ist ein logisch recht kompliziertes Gebilde. Ein vollständiges Axiomensystem für sie aufzustellen, konnte daher keine Kleinigkeit sein, solange man noch nicht im modernen, axiomatischen Denken geübt war. Alle erwähnten Schwierigkeiten verschwinden, wenn man hypermodern definiert: Ein n -Tupel $(P, G, E, =, \parallel, \dots)$ heißt eine *ebene Geometrie*, wenn P, G, E nicht-leere Mengen und „=“, „ \parallel “, ... Relationen sind, die den folgenden Axiomen genügen ...

Im vorliegenden ersten Kapitel werden die Grundlagen der „ebenen“ Geometrie zunächst nach HILBERTs Vorbild in der Form von „affinen Ebenen“ entwickelt. Dann folgen wir jedoch einem Vorschlag von Emil ARTIN (1898–1962) und ersetzen die „Streckenrechnung“ durch den mehr algebraisch definierten so genannten „Multiplikatoren-Schiefkörper“ (oder wie ARTIN ihn nennt, „field of trace preserving endomorphisms“). Dieser Ansatz von ARTIN stammt aus dem Jahre 1940 (*Collected Papers I*, 505–510) und ist in seiner *Geometric algebra* (1957) eingehend dargestellt. Es muss erwähnt werden, dass dieser Gedankengang bereits 1919 von W. SCHWAN (Math. Z. **3**, 11–28) skizziert wurde.

An Stelle von Anordnung, Kongruenz und Stetigkeit wird in §5 gefordert, dass die zugrunde liegende Ebene ein vollständiger metrischer Raum ist, bei dem affine und metrische Eigenschaften in anschaulicher Weise harmonieren.

David HILBERT (geb. 1862 in Königsberg, gest. 1943 in Göttingen) studierte und promovierte in Königsberg, wurde 1892 dort a.o. Professor und kam 1895 als ordentlicher Professor nach Göttingen. Er arbeitete über Invariantentheorie (1890–1893), über Grundlagen der Geometrie (1893–1899) und über algebraische Zahlentheorie: Sein berühmter *Zahlbericht* erschien 1897, als er gerade 35 Jahre alt war! Auf dem Internationalen Mathematiker Kongress 1900 in Paris formulierte HILBERT 23 Probleme als mathematische Ziele des 20. Jahrhunderts. Zwischen 1904 und 1906 untersuchte er das so genannte DIRICHLET-Problem und beschäftigte sich mit Variationsrechnung. Um 1909 begründete er die Theorie der nach ihm benannten HILBERT-Räume und beschäftigte sich ab 1910 hauptsächlich mit Grundlagenfragen der Mathematischen Logik. Er wurde 1930 emeritiert. Unzweifelhaft war HILBERT einer der größten Mathematiker der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts.

Literatur: C. REID, *Hilbert* (1996).

§ 1 Affine Ebenen

1. Inzidenz-Axiome. Es sei \mathbb{P} eine nicht-leere Menge und \mathbb{G} eine nicht-leere Menge von Teilmengen von \mathbb{P} . Die Elemente a, b, \dots, x, y von \mathbb{P} heißen *Punkte*, die Elemente F, G, H, \dots von \mathbb{G} heißen *Geraden*. Ist a ein Punkt und G eine Gerade, dann sagt man im Fall $a \in G$ auch, dass a *auf G liegt* oder dass G *durch a geht*. Ein $a \in \mathbb{P}$ heißt *Schnittpunkt* der Geraden G, H usw., wenn a auf G und H usw. liegt. Eine Teilmenge $M \neq \emptyset$ von \mathbb{P} heißt *kollinear*, wenn es eine Gerade G gibt mit $M \subset G$. Drei Punkte a, b, c heißen *in allgemeiner Lage* oder ein *Dreieck*, wenn sie nicht kollinear sind, wenn sie also nicht auf einer Geraden liegen. Zwei Geraden G, H heißen *parallel* oder *Parallelen*, wenn sie *entweder* gleich sind *oder* keinen Schnittpunkt haben, d.h., wenn gilt

$$(1) \quad G \cap H \neq \emptyset \implies G = H.$$

Sind G und H parallel, so schreibt man $G \parallel H$, andernfalls $G \nparallel H$.

Ein Paar (\mathbb{P}, \mathbb{G}) heißt eine *affine Ebene*, wenn die folgenden *Inzidenz-Axiome* erfüllt sind:

- (I.1) Auf jeder Geraden liegen mindestens zwei Punkte.
- (I.2) Sind a, b verschiedene Punkte, dann gibt es genau eine Gerade G durch a und b .
- (I.3) (*Parallelen-Axiom*) Ist a ein Punkt und G eine Gerade, dann gibt es genau eine Gerade H mit $G \parallel H$ und $a \in H$.

(I.4) Es gibt drei Punkte in allgemeiner Lage.

Ein erstes Beispiel einer affinen Ebene wird durch (\mathbb{P}, \mathbb{G}) gegeben mit

$$\mathbb{P} := \{a, b, c, d\} \quad \text{und} \quad \mathbb{G} := \left\{ \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\} \right\}.$$

Anschaulich erhält man die folgenden Bilder:

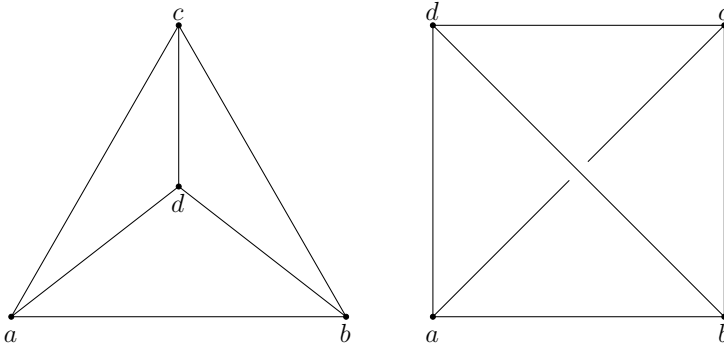


Abb. 1: Affine Ebene mit 4 Punkten

Die nach (I.2) eindeutig bestimmte Gerade G durch a und b nennt man die *Verbindungsgerade* von a und b , man schreibt $a \vee b = b \vee a := G$. Die Eindeutigkeit der Verbindungsgeraden ergibt für $a, b, c \in \mathbb{P}$, $a \neq b$ und $a \neq c$:

$$(2) \quad c \in a \vee b \iff a \vee b = a \vee c.$$

Die nach (I.3) eindeutig bestimmte Gerade H heißt die *Parallele* zu G durch a .

Proposition. *Sind die Geraden G, H einer affinen Ebene nicht parallel, dann haben G und H einen eindeutig bestimmten Schnittpunkt.*

Es gibt also genau ein $a \in \mathbb{P}$ mit $G \cap H = \{a\}$. Man schreibt dafür abkürzend und unmissverständlich $G \wedge H := a$, also

$$(3) \quad G \cap H = \{G \wedge H\}, \text{ falls } G \nparallel H.$$

Beweis. Nach Definition gilt also $G \neq H$ und $G \cap H \neq \emptyset$. Würde es aber $a, b \in G \cap H$ mit $a \neq b$ gegeben, dann gilt sowohl $a, b \in G$ als auch $a, b \in H$. Nach (I.2) würde dann $G = a \vee b = H$ folgen. \square

Eine weitere Charakterisierung betrifft die Gleichheit von Geraden.

Lemma. *Seien F, G Geraden einer affinen Ebene. Aus $F \subset G$ folgt dann bereits $F = G$.*

Beweis. Seien $a, b \in F$, $a \neq b$, gemäß (I.1). Wegen $a, b \in G$ folgt dann $F = a \vee b = G$ aus (I.2). \square

Das Standardbeispiel einer affinen Ebene ist die so genannte *affine Koordinatenebene*. Dazu sei K ein Körper und

$$\mathbb{P} := K^2 := \left\{ a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} : a_1, a_2 \in K \right\}$$

der K -Vektorraum der Spaltenvektoren. Eine Teilmenge G von \mathbb{P} heißt eine *Gerade*, wenn es $a, u \in \mathbb{P}$, $u \neq 0$, gibt mit

$$G = G_{a,u} := a + Ku = \{a + \alpha u : \alpha \in K\}.$$

Die Geraden sind somit die eindimensionalen affinen Unterräume des K^2 . Sei $\mathbb{G} := \{G_{a,u} : a, u \in \mathbb{P}, u \neq 0\}$. Dann erhält man leicht für $a, b, u, v \in \mathbb{P}$ mit $u \neq 0$ und $v \neq 0$:

$$(4) \quad G_{a,u} \parallel G_{b,v} \iff u, v \text{ linear abhängig.}$$

$$(5) \quad G_{a,u} = G_{b,v} \iff \text{es gibt } \alpha, \beta \in K, \beta \neq 0, \text{ mit } b = a + \alpha u, v = \beta u.$$

Damit verifiziert man die Inzidenz-Axiome leicht. $\mathbf{A}_2(K) := (\mathbb{P}, \mathbb{G})$ heißt *affine Koordinatenebene zum Körper K* .

Aufgaben. a) Man verifiziere (4), (5) und die Inzidenz-Axiome für $\mathbf{A}_2(K)$.

b) Sei (\mathbb{P}, \mathbb{G}) eine affine Ebene. Seien $a, b \in \mathbb{P}$, $a \neq b$. Dann gibt es ein $c \in \mathbb{P}$, so dass a, b, c in allgemeiner Lage sind.

c) Durch jeden Punkt einer affinen Ebene gehen mindestens drei Geraden.

d) Man zeige, dass es keine affine Ebene (\mathbb{P}, \mathbb{G}) mit $\sharp \mathbb{P} = 3$ oder $\sharp \mathbb{P} = 5$ gibt.

e) Sei \mathbb{P} eine Menge, die mindestens 5 Elemente enthält. Definiert man jetzt $\mathbb{G} := \{G \subset \mathbb{P} : \sharp G = 2\}$, so erfüllt (\mathbb{P}, \mathbb{G}) die Axiome (I.1), (I.2), (I.4), aber nicht (I.3).

f) Sei $\mathbb{P} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x_2 \geq 0\}$ die *obere Halbebene* und

$$\begin{aligned} \mathbb{G} = & \left\{ \{(x_1, x_2) \in \mathbb{P} : (x_1 - \mu)^2 + x_2^2 = \rho^2\} : \mu, \rho \in \mathbb{R}, \rho > 0 \right\} \\ & \cup \left\{ \{(\mu, x_2) : x_2 \in \mathbb{R}, x_2 \geq 0\} : \mu \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

die Menge der in \mathbb{P} gelegenen Teile euklidischer Kreise mit Mittelpunkt auf der x_1 -Achse bzw. euklidischer Geraden senkrecht zur x_1 -Achse. Dann erfüllt (\mathbb{P}, \mathbb{G}) die Axiome (I.1), (I.2), (I.4), aber nicht (I.3).

g) Ist $(\mathbb{Z}^2; \mathbb{G})$ mit $\mathbb{G} = \{a + \mathbb{Z}u : a, u \in \mathbb{Z}^2, u \neq 0\}$ eine affine Ebene?

2. Richtungen. Sei (\mathbb{P}, \mathbb{G}) stets eine affine Ebene. Man hat zunächst ein

Lemma. *Parallelität ist eine Äquivalenzrelation auf \mathbb{G} .*

Beweis. Natürlich gilt $G \parallel G$ für jede Gerade und $G \parallel H$ impliziert $H \parallel G$. Seien nun $F, G, H \in \mathbb{G}$ mit $F \parallel G$ und $G \parallel H$ gegeben. Man unterscheidet 2 Fälle:

a) $F \cap H = \emptyset$: Definitionsgemäß gilt dann $F \parallel H$.

b) $F \cap H \neq \emptyset$: Sei $a \in F \cap H$. Dann ist F die Parallele zu G durch a und H die Parallele zu G durch a . Aus (I.3) folgt $F = H$, also auch $F \parallel H$. \square

Eine Äquivalenzklasse in \mathbb{G} bezüglich der Relation „parallel“ nennt man eine *Richtung* oder ein *Parallelenbüschel* von \mathbb{G} und schreibt sie in der Form

$$[G] := \{H \in \mathbb{G} : H \parallel G\}.$$

Analog nennt man für $p \in \mathbb{P}$ die Menge aller Geraden durch p

$$[p] := \{G \in \mathbb{G} : p \in G\}$$

das *Geradenbüschel* durch p .

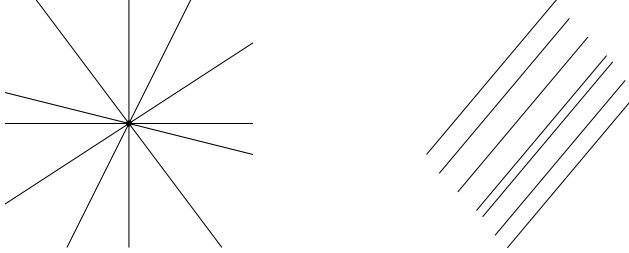


Abb. 2: Geraden- und Parallelenbüschel

Proposition. Seien $a, b, c \in \mathbb{P}$ in allgemeiner Lage. Dann sind die drei Richtungen $[a \vee b]$, $[b \vee c]$, $[c \vee a]$ paarweise verschieden.

Beweis. Wäre z.B. $[a \vee b] = [b \vee c]$, würde also $a \vee b \parallel b \vee c$ gelten, dann würde $b \in (a \vee b) \cap (b \vee c)$ schon $a \vee b = b \vee c$ nach sich ziehen. Dann ergibt $c \in a \vee b$ aber einen Widerspruch dazu, dass a, b, c in allgemeiner Lage sind. \square

Die Inzidenz-Axiome garantieren bereits, dass alle Geraden die gleiche Mächtigkeit haben.

Satz. a) Sind G und H nicht parallele Geraden, dann ist die Abbildung

$$\Phi : [H] \longrightarrow G, F \longmapsto F \wedge G,$$

von der Menge der zu H parallelen Geraden auf die Menge der Punkte von G eine Bijektion.

b) Je zwei Geraden können bijektiv aufeinander abgebildet werden.

Beweis. a) Nach dem Lemma sind zunächst $F \in [H]$ und G nicht parallel, besitzen also nach Proposition 1 einen eindeutig bestimmten Schnittpunkt $F \wedge G$. Damit ist die Abbildung Φ wohldefiniert. Zu $a \in G$ gibt es nach (I.3) eine eindeutig bestimmte Parallele F_a zu H durch a . Damit ist die Abbildung

$$\Psi : G \rightarrow [H], \Psi(a) := F_a,$$

wohldefiniert. Für $F \in [H]$ ist $(\Psi \circ \Phi)(F) = \Psi(F \wedge G)$ die Gerade durch $F \wedge G$, die zu H parallel ist, also gleich F . Damit ist $\Psi \circ \Phi$ die Identität. Für $a \in G$ ist

$$(\Phi \circ \Psi)(a) = \Phi(F_a) = F_a \wedge G = a.$$

Also ist auch $\Phi \circ \Psi$ die Identität. Demnach ist Φ bijektiv.

b) Seien F und G zwei verschiedene Geraden. Dann gibt es nach Lemma 1 ein $a \in F$ mit $a \notin G$ und ein $b \in G$ mit $b \notin F$. Sei $H := a \vee b$ die Verbindungsgerade. Wegen $F \parallel H$ und $G \parallel H$ kann a) zweimal angewendet werden und ergibt Bijektionen $[H] \rightarrow G$ und $[H] \rightarrow F$, also auch eine Bijektion $G \rightarrow F$. \square

Bemerkung. Ist $a \in \mathbb{P}$ und $G \in \mathbb{G}$, so bezeichne man die Parallele zu G durch den Punkt a mit aG . Man erhält dann eine „Operation“ von \mathbb{P} auf \mathbb{G} mittels $\mathbb{P} \times \mathbb{G} \longrightarrow \mathbb{G}$, $(a, G) \longmapsto aG$. Aus dem Lemma ergibt sich leicht

$$G \parallel H \iff aG = aH \quad \text{für alle } a \in \mathbb{P}.$$

Aufgaben. a) Seien $a, b, c, d \in \mathbb{P}$. Für $a \neq b$ und $c \neq d$ sind äquivalent:

(i) $c(a \vee b) = d(a \vee b)$. (ii) $a \vee b \parallel c \vee d$. (iii) $a(c \vee d) = d(c \vee d)$.

b) Sei $\mathbb{A}_2(K)$ die affine Koordinatenebene aus 1. Für $a, u \in K^2$, $u \neq 0$, gilt

$$[Ku] = [G_{a,u}] = \{G_{b,u} : b \in K^2\}, \quad [a] = \{G_{a,v} : v \in K^2, v \neq 0\}.$$

c) Zwei Geraden F und G sind genau dann nicht parallel, wenn $F \cap G$ aus einem Punkt besteht.

d) Parallelität ist keine Äquivalenzrelation für die Paare (\mathbb{P}, \mathbb{G}) aus den Aufgaben 1e) und 1f).

3. Ordnung. Sei (\mathbb{P}, \mathbb{G}) eine affine Ebene. Nach Satz 2b) sind alle Geraden gleichmächtig. Man definiert die *Ordnung* der affinen Ebene (\mathbb{P}, \mathbb{G}) durch

$$\text{Ord}(\mathbb{P}, \mathbb{G}) := \begin{cases} \sharp G, & \text{falls } G \in \mathbb{G} \text{ und } \sharp G \text{ endlich,} \\ \infty, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aus (I.1) folgt $\text{Ord}(\mathbb{P}, \mathbb{G}) \geq 2$. Ein Beispiel einer affinen Ebene der Ordnung 2 wurde in 1 angegeben.

Lemma. a) Zu jedem $G \in \mathbb{G}$ gibt es ein $a \in \mathbb{P}$ mit $a \notin G$.

b) Zu jedem $a \in \mathbb{P}$ gibt es ein $G \in \mathbb{G}$ mit $a \notin G$.

c) Für paarweise verschiedene $a, b, c \in \mathbb{P}$ mit $c \notin a \vee b$ sind a, b, c in allgemeiner Lage.

Beweis. a) Andernfalls wäre $G = \mathbb{P}$ eine Gerade, was (I.4) widerspricht.

b) Man wählt $b \in \mathbb{P}$, $b \neq a$, und $c \in \mathbb{P}$, $c \notin a \vee b$ nach a). Dann gilt $a \notin b \vee c$ nach 1(2).

c) Man verwende (I.2) und 1(2). \square

Die Bedeutung der Ordnung wird klar in dem folgenden

Satz. Ist (\mathbb{P}, \mathbb{G}) eine affine Ebene der Ordnung n , dann gilt:

a) $\sharp \mathbb{P} = n^2$.

b) $\sharp \mathbb{G} = n(n+1)$.

c) Jedes Geradenbüschel besteht aus $n+1$ Geraden, d.h., durch jeden Punkt gehen $n+1$ Geraden.

d) Es gibt $n+1$ Richtungen.

e) *Jedes Parallelenbüschel besteht aus n Geraden, d.h., zu jeder Geraden gibt es n Parallelen.*

Beweis. Der folgende Text ist im Fall $n = \infty$ in offensichtlicher Weise zu interpretieren.

c) Seien $a \in \mathbb{P}$ und $G \in \mathbb{G}$ mit $a \notin G$ nach dem Lemma gegeben. Sei H eine beliebige Gerade durch a . Gilt $H \parallel G$, so ist H als Parallele zu G durch a eindeutig bestimmt. Gilt $H \not\parallel G$, so ist H nach Proposition 1 durch den Schnittpunkt $H \wedge G$ eindeutig bestimmt, nämlich $H = (H \wedge G) \vee a$ nach (I.2). Damit gehen $\sharp G + 1$ Geraden durch a .

d) Bei gegebenem Punkt a gibt es nach (I.3) in jeder Richtung genau eine Gerade durch a . Umgekehrt legt jede Gerade durch a eine Richtung fest. Damit gibt es so viele Richtungen wie Geraden durch einen Punkt.

e) Man verwende Satz 2a).

b) Man schreibe \mathbb{G} nach Lemma 2 als disjunkte Vereinigung der Richtungen. Aus d) und e) folgt $\sharp \mathbb{G} = n(n+1)$.

a) Sei $G \in \mathbb{G}$. Nach Lemma 2 und dem Parallelenaxiom (I.3) ist \mathbb{P} die disjunkte Vereinigung aller Geraden in $[G]$. Aus $\sharp G = n$ und e) folgt dann $\sharp \mathbb{P} = n^2$. \square

Aufgaben. a) Sei $\mathbf{A}_2(K)$ die affine Koordinatenebene über dem Körper K aus 1. Dann stimmt die Ordnung von $\mathbf{A}_2(K)$ mit der Ordnung von K überein.

b) Zu jeder Primzahl p und jeder positiven ganzen Zahl n gibt es eine affine Ebene der Ordnung p^n .

c) Man zeige (eventuell mit Hilfe eines Computers oder mit dem Hinweis in 3.5), dass es keine affine Ebene der Ordnung 6 gibt.

4. Beispiele. a) Die *Anschaungsebene* ist die affine Koordinatenebene $\mathbf{A}_2(\mathbb{R})$ zum Körper \mathbb{R} der reellen Zahlen. Man wiederhole die Ergebnisse aus 1. Die Ordnung dieser affinen Ebene ist ∞ .

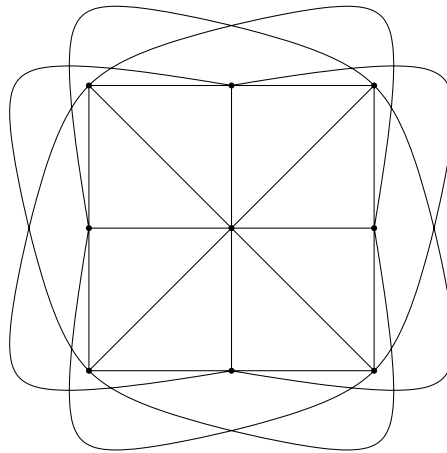


Abb. 3: Eine affine Ebene der Ordnung 3 mit 9 Punkten und 12 Geraden

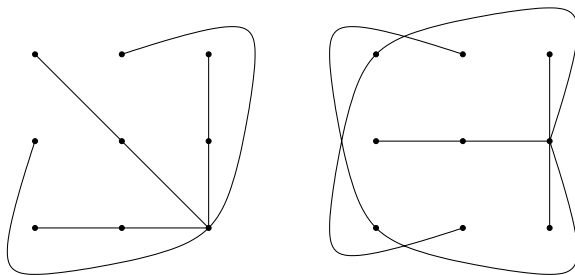


Abb. 4: Geraden durch einen Punkt in einer affinen Ebene der Ordnung 3

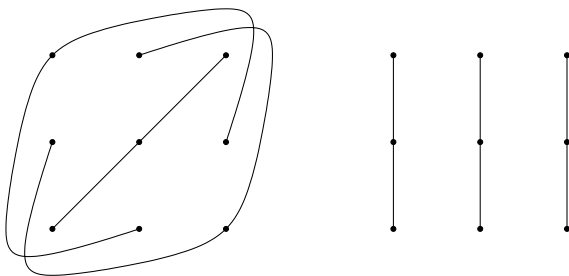


Abb. 5: Eine Richtung in einer affinen Ebene der Ordnung 3

b) *Ordnung 3*. Der Nachweis, dass es sich bei der obigen Figur um eine affine Ebene der Ordnung 3 handelt, ist etwas mühsam. Eine einfache Begründung folgt in Bemerkung 5.

c) *MOULTON-Ebene*. In der Anschauungsebene $\mathbb{P} = \mathbb{R}^2$ werden die so genannten *MOULTON-Geraden* $M_{\alpha,\beta,\gamma}$ für $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ definiert durch

$$M_{\alpha,\beta,\gamma} := \{x \in \mathbb{P} : \alpha x_1 + \beta x_2 = \gamma\}, \text{ falls } \alpha\beta \geq 0,$$

bzw.

$$M_{\alpha,\beta,\gamma} := M'_{\alpha,\beta,\gamma} \cup M''_{\alpha,\beta,\gamma}, \text{ falls } \alpha\beta < 0,$$

wobei

$$\begin{aligned} M'_{\alpha,\beta,\gamma} &:= \{x \in \mathbb{P} : \alpha x_1 + \beta x_2 = \gamma, x_2 \leq 0\}, \\ M''_{\alpha,\beta,\gamma} &:= \{x \in \mathbb{P} : \alpha x_1 + 2\beta x_2 = \gamma, x_2 \geq 0\}. \end{aligned}$$

Im Fall $\alpha\beta \geq 0$ handelt es sich also um gewöhnliche euklidische Geraden, im Fall $\alpha\beta < 0$ sind es „Geraden“, die an der x_1 -Achse geknickt sind. \mathbb{R}^2 ist zusammen mit allen *MOULTON-Geraden* eine affine Ebene, die so genannte *MOULTON-Ebene* (F.R. MOULTON, Trans. Am. Math. Soc. **3**, 192–195 (1902)).

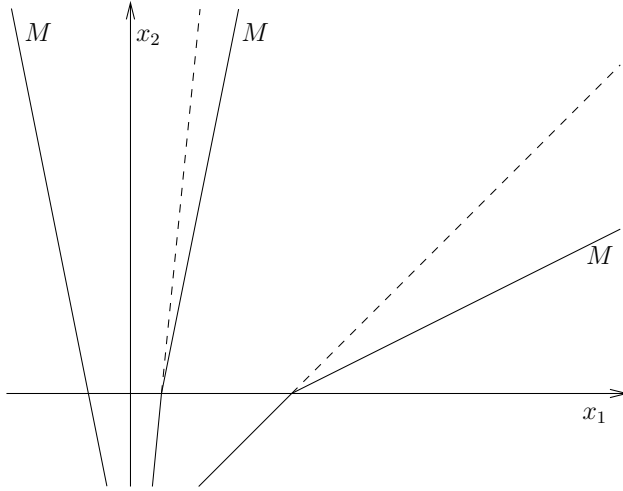


Abb. 6: Die MOULTON-Ebene

- Aufgaben.** a) Weisen Sie die Inzidenz-Axiome für die MOULTON-Ebene nach.
 b) Zwei MOULTON-Geraden $M_{\alpha,\beta,\gamma}$ und $M_{\alpha',\beta',\gamma'}$ sind genau dann parallel, wenn (α, β) und (α', β') linear abhängig sind.
 c) Sei $\mathbb{A}_2(\mathbb{Q})$ die affine Koordinatenebene über \mathbb{Q} . Ist $(\mathbb{Z}^2, \mathbb{G})$ eine affine Ebene, wobei $\mathbb{G} := \{(a + \mathbb{Q}u) \cap \mathbb{Z}^2 : a, u \in \mathbb{Z}^2, u \neq 0\}$?

5. Affine Isomorphismen. Wie überall in der modernen Mathematik spielen auch in der Geometrie die „Struktur erhaltenden“ Abbildungen eine zentrale Rolle. Gegeben seien zwei affine Ebenen $\mathbb{A} = (\mathbb{P}, \mathbb{G})$ und $\mathbb{A}' = (\mathbb{P}', \mathbb{G}')$. Eine bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$ heißt ein *affiner Isomorphismus*, wenn gilt:

$$(1) \quad \varphi(G) \in \mathbb{G}' \quad \text{für alle } G \in \mathbb{G}.$$

\mathbb{A} und \mathbb{A}' nennt man dann *affin isomorph*. Im Fall $\mathbb{A} = \mathbb{A}'$ heißt φ ein *Automorphismus* der affinen Ebene.

Proposition. Für jeden affinen Isomorphismus $\varphi : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$ gilt

$$\varphi(\mathbb{G}) := \{\varphi(G) : G \in \mathbb{G}\} = \mathbb{G}'.$$

Beweis. Für $a, b \in \mathbb{P}$, $a \neq b$, gilt $\varphi(a) \neq \varphi(b)$ und $\varphi(a \vee b) = \varphi(a) \vee \varphi(b)$ aufgrund von (1). \square

Damit bilden die Automorphismen von $\mathbb{A} = (\mathbb{P}, \mathbb{G})$ eine Gruppe bei Hintereinanderausführung, die so genannte *Automorphismengruppe* $\text{Aut } \mathbb{A}$.

Lemma. Sind G und H parallele Geraden in \mathbb{A} und ist φ ein affiner Isomorphismus, dann sind $\varphi(G)$ und $\varphi(H)$ parallel in \mathbb{A}' .

Beweis. Aus $\varphi(G) \cap \varphi(H) = \varphi(G \cap H) \neq \emptyset$ folgt $G \cap H \neq \emptyset$, also $G = H$ und damit $\varphi(G) = \varphi(H)$. \square

Bemerkung. Die als erstes Beispiel in 1 sowie in 4b) angegebenen affinen Ebenen sind affin isomorph zu den affinen Koordinatenebenen $\mathbb{A}_2(K)$, wobei K ein Körper mit 2 bzw. 3 Elementen ist.

Aufgaben. a) Sei (\mathbb{P}, \mathbb{G}) eine affine Ebene und $\varphi : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$ eine bijektive Abbildung. Dann ist auch $(\mathbb{P}', \varphi(\mathbb{G}))$ eine affine Ebene.

b) Seien \mathbb{A}, \mathbb{A}' affine Ebenen. Sei $\varphi : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$ eine bijektive Abbildung mit der Eigenschaft: a, b, c kollinear $\iff \varphi(a), \varphi(b), \varphi(c)$ kollinear. Dann ist φ ein affiner Isomorphismus.

c) Alle affinen Ebenen der Ordnung 2 sind affin isomorph zur affinen Koordinatenebene $\mathbb{A}_2(K)$, $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

d) Sei $\mathbb{A} = (\mathbb{P}, \mathbb{G})$ eine affine Ebene der Ordnung 2. Dann ist $\text{Aut } \mathbb{A}$ isomorph zur Permutationsgruppe S_4 .

e) Sei K ein Körper und $\alpha \mapsto \bar{\alpha}$ ein Körperautomorphismus von K . Man definiert nun $\bar{\alpha} := \begin{pmatrix} \bar{a}_1 \\ \bar{a}_2 \end{pmatrix}$ für $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in K^2$. Für $M \in \text{GL}(2; K)$ und $q \in K^2$ ist die Abbildung $\varphi : K^2 \rightarrow K^2$, $x \mapsto M\bar{x} + q$, ein Automorphismus von $\mathbb{A}_2(K)$ mit der Eigenschaft $\varphi(G_{a,u}) = G_{\varphi(a), M\bar{a}}$.

f) Affin isomorphe affine Ebenen besitzen isomorphe Automorphismengruppen.

g) Sei \mathbb{A} eine affine Ebene und $\varphi \in \text{Aut } \mathbb{A}$. Sind $a, b \in \mathbb{P}$ Fixpunkte von φ , d.h. $\varphi(a) = a$ und $\varphi(b) = b$, so ist $a \vee b$ eine Fixgerade von φ , d.h. $\varphi(a \vee b) = a \vee b$. Gilt darüber hinaus auch $\varphi(x) = x$ für alle $x \in a \vee b$?

h) Affine Isomorphismen bilden Geradenbüschel auf Geradenbüschel und Parallelenbüschel auf Parallelenbüschel ab.

6*. Über das Parallelen-Axiom von EUKLID bis GAUSS. Das 5. Postulat des 1. Buches der *Elemente* sagt aus, dass zwei Geraden, die von einer dritten so geschnitten werden, dass die beiden an einer Seite liegenden Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte sind, sich auf derselben Seite schneiden (vgl. Prolog). Diese Formulierung weicht wegen der Verwendung von „Winkeln“ wesentlich von dem Inzidenz-Axiom (I.3) ab, ist aber zusammen mit den anderen Axiomen bei EUKLID mit diesem äquivalent.

Zu allen Zeiten hat es Gelehrte gegeben, die sich mit dem Versuch abquälten, dieses Axiom aus den anderen Axiomen abzuleiten. Es beginnt wohl mit PTOLEMÄUS (ca. 100–160 n.Chr.) und endet mit A.-M. LEGENDRE (1752–1833). TROPFKE schreibt hierzu (loc. cit., S. 26):

Schon das Altertum (PROKLUS) hatte den inneren Zusammenhang des elften Axioms mit dem Satze von der Winkelsumme im Dreiecke erkannt. Hierauf baute LEGENDRE weiter und wies unanfechtbar nach, daß die Winkelsumme nicht größer als 180° sein kann, und daß, wenn die Winkelsumme bei einem Dreiecke 180° beträgt, dies dann bei jedem der Fall sei. Der fehlende Nachweis, daß die Winkelsumme auch nicht kleiner als 180° sein könne, mißlang ihm ebenso, wie allen seinen Vorgängern.

Man hatte einen Ausweg aus der schwierigen Lage darin zu finden gesucht, daß man das Parallelaxiom fallen ließ und andere Forderungen dafür aufstellte, ein Mittel, durch das man indes nichts besserte, sondern nur die Schwierigkeit auf ein anderes Gebiet übertrug.

Nach A.P. JUSCHKEWITSCH, *Geschichte der Mathematik im Mittelalter* (1964), S. 277 f., hatte die Forschung, die dem 5. Postulat des EUKLID gewidmet war, auch in den islamischen Ländern eine hervorragende Bedeutung. Sie begann bereits kurz nach der Übersetzung der *Elemente* ins Arabische.

Alle Versuche, das Parallelen-Axiom zu beweisen, schlugen fehl. Erst durch C.F. GAUSS (Brief von GAUSS an W. BOLYAI, 1799 [*Werke* 8]; Anzeige von GAUSS, 1816 [*Werke* IV, S. 364 f.], Briefe an BESSEL (ab 1829) und SCHUMACHER (ab 1831)) und nach ihm durch N. LOBATSCHESKIJ (1793–1856) und J. BOLYAI (1802–1860) wurde klar, dass es Geometrien gibt, in denen durch jeden Punkt zwei Parallelen möglich sind. Aus der Habilitationsschrift *Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* von B. RIEMANN (1826–1866) aus dem Jahre 1854 ergibt sich, dass die Annahme, dass es keine Parallelen gibt, ebenfalls zu keinem Widerspruch zu den Axiomen führt.

Literatur: F. ENGEL und P. STÄCKEL, *Die Theorie der Parallelenlinien von EUKLID bis auf GAUSS*, Teubner, Leipzig 1895; Reprint, Johnson, New York-London 1968.

K. MAINZER, *Geschichte der Geometrie* (1980).

§ 2 Translationsebenen

Es sei $\mathbf{A} = (\mathbb{P}, \mathbb{G})$ stets eine affine Ebene.

1. Dilatationen. Wie in Bemerkung 1.2 schreibt man für eine Gerade G und einen Punkt a abkürzend

$$(1) \quad aG := \text{Parallele zu } G \text{ durch } a.$$

Weiter wird der Schnittpunkt zweier nicht paralleler Geraden G und H wie in 1.1(3) mit $G \wedge H$ bezeichnet. Eine bijektive Abbildung $\sigma : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ heißt eine *Dilatation* von \mathbf{A} , wenn gilt

$$(2) \quad \sigma(a) \vee \sigma(b) \parallel a \vee b \quad \text{für alle } a, b \in \mathbb{P} \text{ mit } a \neq b.$$

Mit σ ist natürlich auch die Umkehrabbildung σ^{-1} eine Dilatation. Mit zwei Dilatationen ist die zusammengesetzte Abbildung nach Lemma 1.2 eine Dilatation. Die Dilatationen von \mathbf{A} bilden daher eine Gruppe $\text{Dilat } \mathbf{A}$.

Proposition. *Jede Dilatation von \mathbf{A} ist ein Automorphismus von \mathbf{A} .*

Beweis. Ist G eine Gerade, dann schreibe man $G = a \vee b$. Für $x \in G$ mit $x \neq a$ und $x \neq b$ gilt $a \vee x = a \vee b$, also

$$\sigma(a) \vee \sigma(x) \parallel a \vee x \quad \text{und} \quad \sigma(a) \vee \sigma(b) \parallel a \vee b.$$

Aus Lemma 1.2 folgt $\sigma(a) \vee \sigma(x) \parallel \sigma(a) \vee \sigma(b)$. Weil $\sigma(a)$ auf beiden Geraden liegt, ergibt sich $\sigma(a) \vee \sigma(x) = \sigma(a) \vee \sigma(b)$, also $\sigma(x) \in \sigma(a) \vee \sigma(b)$. Damit ist

$\sigma(a \vee b) \subset \sigma(a) \vee \sigma(b)$ bewiesen. Die Gleichheit folgt, wenn man σ durch σ^{-1} ersetzt. Also ist σ ein Automorphismus von \mathbf{A} . \square

Man hat demnach

$$(3) \quad \text{Dilat} \mathbf{A} \subset \text{Aut} \mathbf{A}.$$

Aus Lemma 1.5 folgt speziell für $G, H \in \mathbb{G}$ und $\sigma \in \text{Dilat} \mathbf{A}$

$$(4) \quad \sigma(G) \parallel \sigma(H) \iff G \parallel H.$$

Zusammen mit (1) erhält man für $a \in \mathbb{P}$ und $G \in \mathbb{G}$

$$(5) \quad \sigma(aG) = bH, \text{ wobei } b := \sigma(a) \text{ und } H := \sigma(G).$$

Andererseits folgt aus (3) und Proposition 1.5 auch

$$(6) \quad \sigma(a \vee b) = \sigma(a) \vee \sigma(b) \quad \text{für } a \neq b \text{ und } \sigma \in \text{Dilat} \mathbf{A}.$$

Lemma. *Sei σ eine Dilatation von \mathbf{A} und seien $a, b \in \mathbb{P}$ verschiedene Punkte. Für jedes $x \in \mathbb{P}$, das nicht auf $a \vee b$ liegt, gilt*

$$(7) \quad \sigma(x) = \sigma(a)(a \vee x) \wedge \sigma(b)(b \vee x).$$

Beweis. Nach (2) ist $\sigma(a) \vee \sigma(x)$ parallel zu $a \vee x$ und geht durch $\sigma(a)$. Aus (I.3) folgt $\sigma(a) \vee \sigma(x) = \sigma(a)(a \vee x)$. Analog folgt $\sigma(b) \vee \sigma(x) = \sigma(b)(b \vee x)$. Da $a \vee x$ und $b \vee x$ durch x gehen und x nicht auf $a \vee b$ liegt, sind $a \vee x$ und $b \vee x$ nicht parallel. Nach (2) sind $\sigma(a) \vee \sigma(x)$ und $\sigma(b) \vee \sigma(x)$ nicht parallel und haben $\sigma(x)$ als Schnittpunkt. \square

Die Identität (7) reicht schon aus, um σ vollständig zu beschreiben.

Satz. *Eine Dilatation σ ist durch die Bilder zweier verschiedener Punkte eindeutig bestimmt.*

Beweis. Seien a und b verschiedene Punkte und $\sigma(a), \sigma(b) \in \mathbb{P}$ gegeben. Für Punkte x , die nicht auf $a \vee b$ liegen, ist $\sigma(x)$ durch (7) gegeben. Liegt x auf $a \vee b$, $x \neq a$, so wählt man nach Lemma 1.3 ein $c \in \mathbb{P}$, das nicht auf $a \vee b$ liegt. Dann ist $\sigma(x)$ wieder nach (7) durch $a, c, \sigma(a)$ und $\sigma(c)$ eindeutig bestimmt. Weil $\sigma(c)$ bereits durch (7) gegeben ist, ist σ durch $\sigma(a)$ und $\sigma(b)$ eindeutig festgelegt. \square

Natürlich nennt man $a \in \mathbb{P}$ einen *Fixpunkt* einer Abbildung $\varphi : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$, wenn $\varphi(a) = a$ gilt. Der Satz impliziert sofort das

Korollar. *Hat eine Dilatation σ zwei Fixpunkte, dann ist σ die Identität.*

Aufgaben. a) Sei K ein Körper. Für $0 \neq \lambda \in K$ und $q \in K^2$ ist die Abbildung $\sigma : K^2 \rightarrow K^2$, $x \mapsto \lambda x + q$, eine Dilatation von $\mathbf{A}_2(K)$.

b) \mathbf{A} habe die Ordnung 2. Dann ist die $\text{Dilat} \mathbf{A}$ isomorph zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

c) Für welche $M \in \text{GL}(2; \mathbb{R})$ und $q \in \mathbb{R}^2$ ist $\sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $x \mapsto Mx + q$,

eine Dilatation der MOULTON-Ebene 1.4c)?

d) Sei $\mathbf{A}' = (\mathbb{P}', \mathbb{G}')$ eine weitere affine Ebene und $\varphi : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$ ein affiner Isomorphismus. Ist $\sigma : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ eine Dilatation von \mathbf{A} , dann ist $\varphi \circ \sigma \circ \varphi^{-1}$ eine Dilatation von \mathbf{A}' . Insbesondere ist $\text{Dilat } \mathbf{A}$ ein Normalteiler in $\text{Aut } \mathbf{A}$.

2. Fixgeraden. Eine Gerade $G \in \mathbb{G}$ heißt *Fixgerade* einer Dilatation σ , wenn $\sigma(G) = G$ gilt. Eine einfache Beschreibung liefert die

Proposition. *Ist σ eine Dilatation und $G \in \mathbb{G}$, dann sind äquivalent:*

- (i) $\sigma(G) \cap G \neq \emptyset$.
- (ii) $\sigma(G) \subset G$.
- (iii) G ist eine Fixgerade von σ .

Beweis. (i) \implies (iii): Nach 1(2) und 1(6) gilt $\sigma(G) \parallel G$. Aus $\sigma(G) \cap G \neq \emptyset$ folgt dann bereits $\sigma(G) = G$.

(iii) \implies (ii) \implies (i): Trivial. □

Wir ziehen noch ein paar einfache, aber wichtige Folgerungen.

Korollar A. *Jede Dilatation σ besitzt Fixgeraden: Ist $a \in \mathbb{P}$ mit $\sigma(a) \neq a$, so ist $a \vee \sigma(a)$ eine Fixgerade durch a .*

Beweis. Für $\sigma = \text{id}$ ist die Behauptung klar. Ist $\sigma \neq \text{id}$, so existiert ein $a \in \mathbb{P}$ mit $\sigma(a) \neq a$. Für $G := a \vee \sigma(a)$ gilt $\sigma(a) \in G \cap \sigma(G)$. □

Korollar B. *Sind F und G zwei nicht parallele Fixgeraden einer Dilatation σ , dann ist $F \wedge G$ ein Fixpunkt von σ .*

Beweis: Für $a := F \wedge G$ gilt $\sigma(a) \in \sigma(F) = F$ und $\sigma(a) \in \sigma(G) = G$, also $\sigma(a) = F \wedge G = a$. □

Damit erhält man den

Satz. *Ist $\sigma \neq \text{id}$ eine Dilatation, dann tritt genau einer der beiden folgenden Fälle ein:*

- (i) σ hat keinen Fixpunkt. Dann sind die Fixgeraden von σ genau die Geraden einer Richtung, d.h. einer Äquivalenzklasse paralleler Geraden.
- (ii) σ hat einen Fixpunkt p . Dann sind die Fixgeraden von σ genau die Geraden durch p .

Die Fixgeraden von σ bilden also entweder ein Parallelenbüschel oder ein Geradenbüschel.

Beweis. Man unterscheidet zwei Fälle:

- (i) σ hat keinen Fixpunkt: Nach Korollar A und B sind dann alle Fixgeraden parallel zu einer Fixgeraden F . Sei jetzt H eine beliebige zu F parallele Gerade und $b \in H$. Die Gerade $G := b \vee \sigma^{-1}(b)$ erfüllt $b \in G \cap \sigma(G)$. Aufgrund der Proposition ist G eine Fixgerade von σ und daher gilt $G \parallel F$. Wegen $H \parallel F$ und $b \in G \cap H$ folgt $H = G$.

(ii) σ hat einen Fixpunkt. Dieser Fixpunkt p ist nach Korollar 1 eindeutig bestimmt, denn sonst wäre σ die Identität. Ist F eine Gerade durch p , dann gilt $p \in F \cap \sigma(F)$ und F ist nach der Proposition eine Fixgerade. Ist G eine Fixgerade, also $\sigma(G) = G$, dann gilt $G = a \vee \sigma(a)$ für jedes $a \in G$, $a \neq p$. Da aber $p \vee a$ eine Fixgerade ist, folgt $\sigma(a) \in p \vee a$, also $G = p \vee a$. \square

Korollar C. Ist $\sigma \neq \text{id}$ eine Dilatation und $a \in \mathbb{P}$ mit $\sigma(a) \neq a$, so gibt es genau eine Fixgerade von σ durch a , nämlich $a \vee \sigma(a)$.

Aufgaben. a) Welche der in den Aufgaben 1a)–c) angegebenen Dilatationen besitzen Fixpunkte? Man bestimme die zugehörigen Fixgeraden.

b) Beschreiben Sie alle Dilatationen von \mathbb{A} , wenn \mathbb{A} die affine Ebene über dem Körper $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ist.

3. Translationen. Eine Dilatation τ heißt *Translation*, wenn τ die Identität ist oder keinen Fixpunkt hat. Nach Satz 2(i) gilt die

Proposition. Ist $\tau \neq \text{id}$ eine Translation, dann bilden die Fixgeraden von τ eine Richtung, d.h., sie bilden eine Äquivalenzklasse paralleler Geraden.

Diese Richtung nennt man die *Richtung* von τ . Speziell gibt es nach (I.3) oder Korollar 2C durch jeden Punkt genau eine Fixgerade von τ .

Satz. Eine Translation τ ist durch das Bild eines Punktes eindeutig bestimmt. Für $\tau \neq \text{id}$ und $a \in \mathbb{P}$ gilt $b := \tau(a) \neq a$. Für alle $x \in \mathbb{P}$, $x \notin a \vee b$, gilt:

$$(1) \quad \tau(x) = x(a \vee b) \wedge b(a \vee x).$$

Beweis. Man darf $\tau \neq \text{id}$ annehmen. Da τ dann keinen Fixpunkt hat, gilt $b \neq a$. Sei F die nach Korollar 2C eindeutig bestimmte Fixgerade durch a , also $F = a \vee b$. Da τ eine Dilatation ist, folgt $\tau(a) \vee \tau(x) \parallel a \vee x$ für $x \notin a \vee b$, also $\tau(a) \vee \tau(x) = b(a \vee x)$ und $\tau(x) \in b(a \vee x)$. Andererseits ist xF die Fixgerade durch x , so dass $\tau(x) \in xF$ folgt. Man erhält $\tau(x) = xF \wedge b(a \vee x)$ wegen $a \vee b \parallel a \vee x$, also (1). Da es mindestens einen Punkt x gibt, der nicht auf $a \vee b$ liegt, ist τ nun durch $\tau(a)$ und $\tau(x)$ nach Satz 1 eindeutig bestimmt. \square

Eine algebraische Beziehung zwischen Translationen und Dilatationen beschreibt das

Lemma. Die Menge $\text{Trans}\mathbb{A}$ aller Translationen von \mathbb{A} ist ein Normalteiler in $\text{Dilat}\mathbb{A}$. Die Translationen $\tau \neq \text{id}$ und $\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}$, $\sigma \in \text{Dilat}\mathbb{A}$, haben die gleichen Richtungen.

Beweis. a) $\text{Trans}\mathbb{A}$ ist Untergruppe: Mit τ ist τ^{-1} natürlich eine Translation. Seien τ_1 und τ_2 von der Identität verschiedene Translationen und $\tau := \tau_1 \circ \tau_2$. Gibt es ein $a \in \mathbb{P}$ mit $\tau(a) = a$, dann gilt $\tau_2(a) = \tau_1^{-1}(a)$ und der Satz ergibt $\tau_2 = \tau_1^{-1}$, also $\tau = \text{id}$. Andernfalls hat τ keinen Fixpunkt und ist somit ebenfalls eine Translation.

b) Sei σ eine Dilatation, τ eine Translation und $\rho := \sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}$. Hat ρ einen

Fixpunkt a , dann gilt $\tau(b) = b$ für $b := \sigma^{-1}(a)$ und es folgt $\tau = \text{id}$. Damit gilt $\rho = \text{id}$. Wenn ρ keinen Fixpunkt hat, folgt $\rho \in \text{Trans}\mathbb{A}$.

c) Sei F die Fixgerade von $\tau \neq \text{id}$ durch a und G die Fixgerade von $\rho := \sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}$ durch a . Also gilt $F = a \vee \tau(a)$ und $G = a \vee \rho(a)$ nach Korollar 2C. Dann ist

$$H := \sigma^{-1}(G) = \sigma^{-1}(a) \vee \tau \circ \sigma^{-1}(a)$$

parallel zu G , denn σ ist eine Dilatation. Andererseits ist

$$H = b \vee \tau(b), \quad b := \sigma^{-1}(a),$$

nach Korollar 2C eine Fixgerade von τ . Damit ist H , also auch G , aufgrund der Proposition parallel zu F . \square

Korollar. *Ist G eine Gerade, so ist $\{\tau \in \text{Trans}\mathbb{A} : \tau(G) = G\}$ eine Untergruppe von $\text{Trans}\mathbb{A}$. Speziell haben die Translationen $\tau \neq \text{id}$ und τ^{-1} die gleichen Richtungen.*

Aufgaben. a) Sei K ein Körper und $\mathbb{A}_2(K)$ die zugehörige affine Koordinatenebene. Für $q \in K^2$ ist die Abbildung $\tau_q : K^2 \rightarrow K^2$, $x \mapsto x + q$, eine Translation von $\mathbb{A}_2(K)$ und es gilt $\text{Trans}\mathbb{A}_2(K) = \{\tau_q : q \in K^2\}$.

b) Sei $(\mathbb{R}^2, \mathbb{G})$ die MOULTON-Ebene 1.4c). Für welche $q \in \mathbb{R}^2$ ist die Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $x \mapsto x + q$, eine Translation von $(\mathbb{R}^2, \mathbb{G})$?

c) Seien $\alpha, \beta \in \text{Dilat}\mathbb{A}$ Spiegelungen an a bzw. $b \in \mathbb{P}$, $a \neq b$, d.h. $\alpha, \beta \neq \text{id}$, $\alpha \circ \alpha = \beta \circ \beta = \text{id}$, $\alpha(a) = a$, $\beta(b) = b$. Dann gilt $\alpha \circ \beta \in \text{Trans}\mathbb{A}$.

d) $\text{Trans}\mathbb{A}$ ist ein Normalteiler in $\text{Aut}\mathbb{A}$. Stimmen die Richtungen von $\tau \neq \text{id}$ in $\text{Trans}\mathbb{A}$ und $\varphi \circ \tau \circ \varphi^{-1}$, $\varphi \in \text{Aut}\mathbb{A}$, überein?

4. Translations-Axiom. *Sind a, b zwei Punkte von \mathbb{P} , dann gibt es eine Translation τ mit $\tau(a) = b$.*

Nach Satz 3 ist diese Translation dann durch $a, b \in \mathbb{P}$ eindeutig bestimmt. Man schreibt $\tau = \tau_{ab}$ und hat

$$(1) \quad \tau_{ab}(a) = b \quad \text{für } a, b \in \mathbb{P}.$$

Für $a \neq b$ ist $[a \vee b]$ nach Korollar 2C und Proposition 3 die Richtung von τ_{ab} .

Eine affine Ebene $\mathbb{A} = (\mathbb{P}, \mathbb{G})$, in der das Translations-Axiom gilt, nennt man eine *Translationsebene*. Eine Translationsebene ist also dadurch charakterisiert, dass die Gruppe $\text{Trans}\mathbb{A}$ transitiv auf \mathbb{P} operiert.

Lemma. *Ist \mathbb{A} eine Translationsebene, dann ist die Gruppe $\text{Trans}\mathbb{A}$ aller Translationen von \mathbb{A} abelsch.*

Beweis. Es seien τ_1 und τ_2 zwei von der Identität verschiedene Translationen von \mathbb{A} . Man unterscheidet zwei Fälle:

a) τ_1 und τ_2 haben verschiedene Richtungen. Man verwendet Lemma 3 und Korollar 3. Im Falle $\tau_1 \circ (\tau_2 \circ \tau_1^{-1} \circ \tau_2^{-1}) \neq \text{id}$ hätten danach τ_1 und τ_1^{-1} , also auch τ_1 und $\tau_2 \circ \tau_1^{-1} \circ \tau_2^{-1}$, und damit auch τ_1 und $\tau_1 \circ (\tau_2 \circ \tau_1^{-1} \circ \tau_2^{-1})$ die gleiche

Richtung. Analog hätten τ_2 und $\tau_1 \circ \tau_2 \circ \tau_1^{-1}$, also auch τ_2 und $(\tau_1 \circ \tau_2 \circ \tau_1^{-1}) \circ \tau_2^{-1}$ die gleiche Richtung im Widerspruch zur Annahme. Es folgt

$$\tau_1 \circ \tau_2 \circ \tau_1^{-1} \circ \tau_2^{-1} = \text{id}, \quad \text{also} \quad \tau_1 \circ \tau_2 = \tau_2 \circ \tau_1.$$

b) τ_1 und τ_2 haben die gleiche Richtung. Nach Lemma 1.3, Proposition 1.2 und dem Translations-Axiom gibt es eine Translation τ , so dass τ und τ_1 bzw. τ_2 verschiedene Richtungen haben. Nach Teil a) gilt $\tau_1 \circ \tau = \tau \circ \tau_1$ und $\tau_2 \circ \tau = \tau \circ \tau_2$. Hätten τ_1 und $\tau_2 \circ \tau$ die gleiche Richtung, so würden τ_2 und $\tau_2 \circ \tau$, also τ_2 und $\tau = \tau_2^{-1} \circ (\tau_2 \circ \tau)$ nach Korollar 3 die gleiche Richtung haben. Damit haben τ_1 und $\tau_2 \circ \tau$ verschiedene Richtungen und Teil a) ergibt $\tau_1 \circ (\tau_2 \circ \tau) = (\tau_2 \circ \tau) \circ \tau_1$. Zusammen folgt

$$\tau_1 \circ \tau_2 \circ \tau = \tau_2 \circ \tau \circ \tau_1 = \tau_2 \circ \tau_1 \circ \tau, \quad \text{also} \quad \tau_1 \circ \tau_2 = \tau_2 \circ \tau_1. \quad \square$$

Das Translations-Axiom ermöglicht aber auch eine erste geometrische Aussage.

Satz. Es sei $\mathbf{A} = (\mathbb{P}, \mathbb{G})$ eine Translationsebene. Seien F, G, H paarweise verschiedene, parallele Geraden aus \mathbb{G} und seien Punkte $a, a' \in F$ sowie $b, b' \in G$ und $c, c' \in H$ gegeben. Gilt dann

$$(2) \quad a \vee b \parallel a' \vee b' \quad \text{und} \quad a \vee c \parallel a' \vee c',$$

so gilt auch

$$(3) \quad b \vee c \parallel b' \vee c'.$$

Beweis. Da $a' = a$ schon $b' = b$ und $c' = c$ impliziert, darf man ohne Einschränkung $a' \neq a$ annehmen. Sei $\tau = \tau_{aa'}$ die Translation mit $\tau(a) = a'$. Wegen $F = a \vee a' = a \vee \tau(a)$ ist F nach Korollar 2C eine Fixgerade von τ . Nach Proposition 3 sind dann auch G und H Fixgeraden von τ , so dass $\tau(b) \in G$ und $\tau(c) \in H$ folgt. 1(2) impliziert nun $a \vee b \parallel \tau(a) \vee \tau(b)$, also

$$a \vee b \parallel a' \vee \tau(b).$$

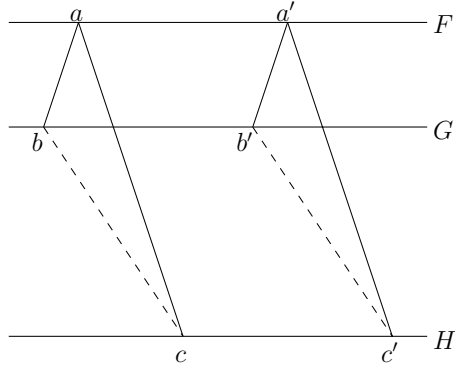


Abb. 7: Kleiner Satz von DESARGUES

Aus $F \parallel G$ folgt $G \parallel a \vee b$. Damit gilt

$$\tau(b) = G \wedge a'(a \vee b) = b'.$$

Analog folgt $\tau(c) = c'$. Nach 1(2) ist $b' \vee c' = \tau(b) \vee \tau(c)$ parallel zu $b \vee c$. \square

Bemerkungen. a) Die Behauptung des Satzes, also die Gültigkeit von (3) als Folge von (2) und der angegebenen anderen Voraussetzung, nennt man auch den *Kleinen Satz von DESARGUES*.

b) Man kann mit einigem Aufwand zeigen, dass die Gültigkeit dieses Kleinen Satzes von DESARGUES bereits impliziert, dass \mathbf{A} eine Translationsebene ist (vgl. E. ARTIN (1957), Theorem 2.17).

c) Die MOULTON-Ebene aus 1.4c) ist keine Translationsebene, weil dort der Kleine Satz von DESARGUES nicht gilt, wie die nebenstehende Abbildung veranschaulicht.

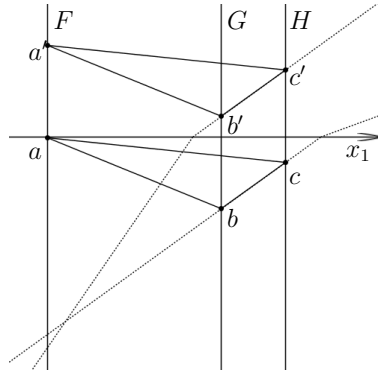


Abb. 8: Der Kleine Satz von DESARGUES gilt nicht in der MOULTON-Ebene

Beispiel. Man betrachte die einfachste affine Ebene mit 4 Punkten und 3 Richtungen. Von den 24 Permutationen der Punkte a, b, c, d haben nur die folgenden 9 keinen Fixpunkt:

τ	a	b	c	d	$p \vee q \parallel \tau(p) \vee \tau(q)$
α	b	a	d	c	
	b	c	d	a	$a \vee b \not\parallel b \vee c$
	b	d	a	c	$a \vee b \not\parallel b \vee d$
	c	a	d	b	$a \vee b \not\parallel c \vee a$
	c	d	b	a	$a \vee d \not\parallel c \vee a$
β	c	d	a	b	
	d	a	b	c	$a \vee d \not\parallel d \vee c$
	d	c	a	b	$a \vee d \not\parallel d \vee b$
γ	d	c	b	a	

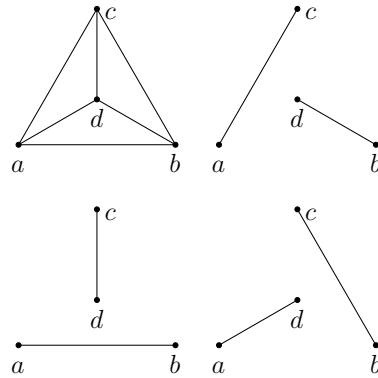


Abb. 9: Affine Ebene mit 3 Richtungen

Die Gruppe der Translationen besteht aus den Permutationen $\text{id}, \alpha, \beta, \gamma$ mit den Relationen $\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = \text{id}$ und $\alpha \circ \beta = \gamma = \beta \circ \alpha$. Offenbar handelt es sich um eine Translationsebene. $\text{Trans} \mathbf{A}$ ist eine KLEINSche Vierergruppe, die natürlich zu $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ isomorph ist. Dieses Ergebnis erhält man natürlich auch aus Aufgabe 3a) für $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Aufgaben. a) Sei K ein Körper. Dann ist $\mathbf{A}_2(K)$ eine Translationsebene.

b) Sei $\mathbf{A}' = (\mathbb{P}', \mathbb{G}')$ eine weitere affine Ebene und $\varphi : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$ ein affiner Isomor-

phismus. Mit \mathbf{A} ist dann auch \mathbf{A}' eine Translationsebene. Die Gruppen $\text{Trans}\mathbf{A}$ und $\text{Trans}\mathbf{A}'$ sind isomorph.

c) In einer affinen Ebene kommutieren zwei von der Identität verschiedene Translationen, wenn sie verschiedene Richtungen haben.

5. \mathbb{P} als additive Gruppe. Es sei $\mathbf{A} = (\mathbb{P}, \mathbb{G})$ eine Translationsebene und \mathcal{o} ein willkürlich, aber fest gewählter Punkt von \mathbb{P} . Zu jedem $a \in \mathbb{P}$ gibt es nach 4(1) genau eine Translation τ_a mit

$$(1) \quad a = \tau_a(\mathcal{o}).$$

Nun wird auf \mathbb{P} eine Addition erklärt durch

$$(2) \quad a + b := \tau_a \circ \tau_b(\mathcal{o}) = \tau_a(b) = \tau_b(a) \quad \text{für } a, b \in \mathbb{P}.$$

Wegen Lemma 4 stimmen hier alle Terme überein und die Addition ist kommutativ. Weiter ist \mathcal{o} das Nullelement, denn es gilt $\tau_{\mathcal{o}} = \text{id}$ nach (1).

Lemma. *Sei $\mathbf{A} = (\mathbb{P}, \mathbb{G})$ eine Translationsebene. Mit der Addition (2) ist \mathbb{P} eine abelsche Gruppe mit Nullelement \mathcal{o} und die Abbildung*

$$\mathbb{P} \longrightarrow \text{Trans}\mathbf{A}, \quad a \longmapsto \tau_a,$$

ist ein Isomorphismus der Gruppen. Es gilt darüber hinaus

$$(3) \quad a + b = a(\mathcal{o} \vee b) \wedge b(\mathcal{o} \vee a), \quad \text{falls } \mathcal{o}, a \text{ und } b \text{ nicht kollinear sind,}$$

$$(4) \quad \tau_a(x) = x + a \quad \text{für } a, x \in \mathbb{P}.$$

Für $a \neq \mathcal{o}$ ist $\mathcal{o} \vee a$ die Fixgerade von τ_a durch \mathcal{o} , d.h., τ_a hat die Richtung $[\mathcal{o} \vee a]$.

Beweis. Nach (1) gilt $\tau_{a+b}(\mathcal{o}) = a + b$, es folgt daher $\tau_{a+b} = \tau_a \circ \tau_b$ für $a, b \in \mathbb{P}$ aus (2). Ist $\tau \in \text{Trans}\mathbf{A}$, so ist natürlich $\tau = \tau_a$ mit $a := \tau(\mathcal{o})$ nach Satz 3. Damit ist $a \mapsto \tau_a$ aber eine bijektive Abbildung von \mathbb{P} auf $\text{Trans}\mathbf{A}$. Also ist \mathbb{P} eine zu $\text{Trans}\mathbf{A}$ isomorphe Gruppe.

Zum Nachweis von (3) verwende man $a + b = \tau_b(a)$ nach (2). Dann folgt die Identität aus 3(1) mit \mathcal{o} an Stelle von a . Die fehlende Behauptung (4) ergibt sich aus (2), für die Fixgerade verwende man Korollar 2C. \square

Da jede Translation eine Dilatation ist, ergibt 1(2) sofort das

Korollar A. *Für $a, b \in \mathbb{P}$ mit $a \neq b$ gilt $a \vee b \parallel \mathcal{o} \vee (b - a)$.*

Weil $\mathcal{o} \vee a$ für alle $x \in \mathcal{o} \vee a$ eine Fixgerade von τ_x ist, folgt das

Korollar B. *Für $\mathcal{o} \neq a \in \mathbb{P}$ ist $\mathcal{o} \vee a = \mathcal{o} \vee (-a)$ eine Untergruppe von $(\mathbb{P}; +)$.*

Wie in 1(1) bezeichne aG die Parallele zu $G \in \mathbb{G}$ durch a .

Korollar C. *Für $a, b, c \in \mathbb{P}$ mit $b \neq c$ gilt $a(b \vee c) = a \vee (a + b - c)$.*

Beweis. Korollar A und B liefern

$$b \vee c \parallel \circ \vee (b - c) \quad \text{und} \quad a \vee (a + b - c) \parallel \circ \vee (b - c). \quad \square$$

Damit kann die Addition durch Parallelität gekennzeichnet werden:

Parallelogramm-Satz. *Es sei $\mathbf{A} = (\mathbb{P}, \mathbb{G})$ eine Translations-ebene. Für paarweise verschiedene, nicht-kollineare $a, b, c, d \in \mathbb{P}$ sind äquivalent:*

- (i) $a + c = b + d$.
- (ii) $a \vee b \parallel c \vee d$ und $a \vee d \parallel b \vee c$.

Beweis. (i) \implies (ii): Nach Korollar A ist $a \vee b \parallel \circ \vee (b - a)$, also $a \vee b \parallel \circ \vee (c - d)$ und daher $a \vee b \parallel c \vee d$. Analog erhält man $a \vee d \parallel b \vee c$.

(ii) \implies (i): Nach Voraussetzung und nach Korollar C liegt b auf

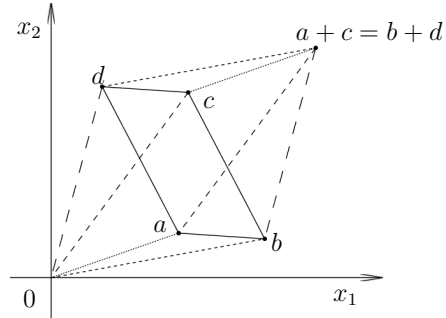


Abb. 10: Parallelogramm-Satz

$$a \vee b = a(c \vee d) = a \vee (a + c - d) \quad \text{und} \quad b \vee c = c(a \vee d) = c \vee (a + c - d).$$

Da a, b, c, d nicht kollinear sind, sind auch a, b, c wegen (ii) nicht kollinear. Also gilt $a \vee b \neq b \vee c$. Es folgt

$$b = (a \vee b) \wedge (b \vee c) = (a \vee (a + c - d)) \wedge (c \vee (a + c - d)) = a + c - d. \quad \square$$

Im weiteren Verlauf dieses Paragraphen sei \circ ein fest gewählter Punkt von \mathbb{P} . Die durch \circ gemäß (2) auf \mathbb{P} induzierte Addition wird stets mit $a + b$ bezeichnet. Man schreibt auch $\mathbb{P} = (\mathbb{P}; +)$.

Bemerkungen. a) Die Addition in \mathbb{P} hängt natürlich auch von der Wahl des „Basispunktes“ \circ ab. Man geht also eigentlich von einer „affinen Ebene mit Basispunkt“ aus und konstruiert dazu eine Gruppe.

b) Die Änderung der Gruppenstruktur, die bei Änderung des Basispunktes eintritt, lässt sich leicht übersehen: Ist \circ' ein weiterer Basispunkt und ist τ'_a die Translation mit $a = \tau'_a(\circ')$, dann ist die neue Addition durch $a \boxplus b := \tau'_a \circ \tau'_b(\circ')$ definiert. Man wählt $\tau \in \text{Trans } \mathbf{A}$ mit $\circ = \tau(\circ')$ und hat $a = \tau_a(\circ) = \tau_a \circ \tau(\circ')$, also $\tau'_a = \tau_a \circ \tau$. Mit $p := \tau(\circ)$ folgt dann

$$\begin{aligned} a \boxplus b &= \tau'_a \circ \tau'_b(\circ') = \tau_a \circ \tau \circ \tau_b \circ \tau(\circ') \\ &= \tau_a \circ \tau \circ \tau_b(\circ) = \tau_a \circ \tau_b(p) = a + b + p. \end{aligned}$$

Definiert man nun $\varphi : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ durch $\varphi(a) := a + p$, dann erhält man

$$\varphi(a \boxplus b) = \varphi(a) + \varphi(b).$$

Damit folgt $p = -\circ'$ und φ ist ein Isomorphismus der Gruppen.

Aufgaben. a) Sei $\mathbb{A}_2(K) = (\mathbb{P}, \mathbb{G})$ die affine Koordinatenebene über dem Körper K aus 1.1 und $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dann stimmt die hier definierte Addition auf \mathbb{P} mit der Addition des K -Vektorraums \mathbb{P} überein.

b) (*Kleiner Scherensatz*) Sei \mathbb{A} eine Translationsebene. Gegeben seien zwei verschiedene, parallele Geraden F und G sowie paarweise verschiedene Punkte $a, c, a', c' \in F$ und $b, d, b', d' \in G$. Aus $a \vee b \parallel a' \vee b'$, $b \vee c \parallel b' \vee c'$ und $c \vee d \parallel c' \vee d'$ folgt $a \vee d \parallel a' \vee d'$.

c) (*Kleiner Satz von PAPPUS*) Sei \mathbb{A} eine Translationsebene. Gegeben seien zwei verschiedene, parallele Geraden F und G sowie Punkte $a, a', a'' \in F$ und $b, b', b'' \in G$. Aus $a \vee b' \parallel a' \vee b''$ und $a' \vee b \parallel a'' \vee b'$ folgt $a \vee b \parallel a'' \vee b''$.

6. Multiplikatoren-Schiefkörper. Sei $\mathbb{A} = (\mathbb{P}, \mathbb{G})$ eine Translationsebene, $\mathcal{O} \in \mathbb{P}$ fest. Nach Lemma 5 ist $\mathbb{P} = (\mathbb{P}; +)$ eine abelsche Gruppe. Es bezeichne $\text{End } \mathbb{P}$ die Menge der Endomorphismen von $(\mathbb{P}; +)$, also die Menge der Selbstabbildungen $\alpha : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ mit der Eigenschaft

$$(1) \quad \alpha(a + b) = \alpha(a) + \alpha(b) \quad \text{für alle } a, b \in \mathbb{P}.$$

Man hat hier natürlich $\alpha(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$ und $\alpha(-a) = -\alpha(a)$ für alle $a \in \mathbb{P}$. Bezüglich der Verknüpfungen

$$(2) \quad (\alpha, \beta) \mapsto \alpha + \beta \quad \text{mit} \quad (\alpha + \beta)(a) := \alpha(a) + \beta(a) \quad \text{für } a \in \mathbb{P},$$

$$(3) \quad (\alpha, \beta) \mapsto \alpha \circ \beta \quad \text{mit} \quad (\alpha \circ \beta)(a) := \alpha(\beta(a)) \quad \text{für } a \in \mathbb{P}$$

ist $\text{End } \mathbb{P}$ ein unitärer (assoziativer) Ring, der *Endomorphismenring der abelschen Gruppe* \mathbb{P} . Dabei ist das Nullelement \mathcal{O} von $\text{End } \mathbb{P}$ durch $\mathcal{O}(a) := \mathcal{O}$ für alle $a \in \mathbb{P}$ und das Einselement $\mathbb{1}$ von $\text{End } \mathbb{P}$ durch die identische Abbildung $\mathbb{1}(a) := a$ für alle $a \in \mathbb{P}$ gegeben.

Ein Endomorphismus α von \mathbb{P} heißt ein *Multiplikator* von \mathbb{A} , wenn gilt:

$$(4) \quad \alpha(a) \in \mathcal{O} \vee a \quad \text{für alle } a \in \mathbb{P}, a \neq \mathcal{O}.$$

Die Menge aller Multiplikatoren von \mathbb{A} wird mit $K(\mathbb{A})$ bezeichnet. Offenbar gehören \mathcal{O} und $\mathbb{1}$ zu $K(\mathbb{A})$, also nach Korollar 5B auch alle „Vielfach-Abbildungen“ $a \mapsto na$, $n \in \mathbb{Z}$. Aus (4) folgt direkt

$$(5) \quad \mathcal{O} \vee \alpha(a) = \mathcal{O} \vee a \quad \text{für } a \in \mathbb{P}, \alpha \in K(\mathbb{A}), \alpha(a) \neq \mathcal{O}.$$

Das überraschende Ergebnis, dass jeder von Null verschiedene Multiplikator eine bijektive Abbildung ist, folgt speziell aus dem

Lemma A. $\text{End } \mathbb{P} \cap \text{Dilat } \mathbb{A} = K(\mathbb{A}) \setminus \{\mathcal{O}\}.$

Beweis. a) Ist der Endomorphismus $\alpha : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ zugleich eine Dilatation, dann gilt $\alpha(\mathcal{O}) \vee \alpha(a) \parallel \mathcal{O} \vee a$ für alle $a \in \mathbb{P}$, $a \neq \mathcal{O}$. Wegen $\alpha(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$ gilt $\mathcal{O} \vee \alpha(a) \parallel \mathcal{O} \vee a$, also $\mathcal{O} \vee \alpha(a) = \mathcal{O} \vee a$ und damit (4). Die linke Seite ist demnach in der rechten Seite enthalten.

b) *Jeder von Null verschiedene Multiplikator ist eine Dilatation.* Sei $\alpha \in K(\mathbb{A})$ und $\mathcal{O} \neq a \in \mathbb{P}$ mit $\alpha(a) = \mathcal{O}$. Für $b \in \mathbb{P}$, $b \notin \mathcal{O} \vee a$, gilt zunächst einmal $\alpha(b) \in \mathcal{O} \vee b$ aufgrund von (4). Weil aber α ein Endomorphismus von \mathbb{P} ist, folgt auch $\alpha(b) = \alpha(b-a) \in \mathcal{O} \vee (b-a)$. Damit ist $\alpha(b)$ gleich dem Schnittpunkt von $\mathcal{O} \vee b$ und $\mathcal{O} \vee (b-a)$, also gleich \mathcal{O} . Für alle $b \in \mathbb{P}$, $b \notin \mathcal{O} \vee a$, gilt $\alpha(b) = \mathcal{O}$. Ersetzt man nun b durch a , so folgt auch $\alpha(x) = \mathcal{O}$ für $x \in \mathcal{O} \vee a$, also $\alpha = \mathcal{O}$. Sei nun $\mathcal{O} \neq \alpha \in K(\mathbb{A})$. Es folgt $\alpha(a) \neq \mathcal{O}$ für alle $\mathcal{O} \neq a \in \mathbb{P}$, d.h., α ist injektiv. Für $a, b \in \mathbb{P}$, $a \neq b$, folgt $\alpha(a) \vee \alpha(b) \parallel \mathcal{O} \vee (\alpha(b) - \alpha(a))$ aus Korollar 5A. Weil α ein Endomorphismus ist, gilt $\alpha(a) \vee \alpha(b) \parallel \mathcal{O} \vee \alpha(b-a)$, also $\alpha(a) \vee \alpha(b) \parallel \mathcal{O} \vee (b-a)$ nach (5) und damit

$$(*) \quad \alpha(a) \vee \alpha(b) \parallel a \vee b \quad \text{für } a \neq b.$$

Zu zeigen bleibt die Surjektivität von α . Zu $c \in \mathbb{P}$, $c \neq \mathcal{O}$, wählt man ein $a \in \mathbb{P}$ mit $a \notin \mathcal{O} \vee c$. Dann definiert man $G := \alpha(a) \vee c$, $H := aG$. Wegen $c \notin \mathcal{O} \vee a$ gilt $G \parallel \mathcal{O} \vee c$ aufgrund von (5). Sei also $b := H \wedge (\mathcal{O} \vee c)$. Wegen $a \notin \mathcal{O} \vee c$ gilt $b \neq a$ und folglich $H = a \vee b$. Aus $G \parallel H$ folgt $G = \alpha(a)H$ und (*) ergibt $G = \alpha(a) \vee \alpha(b)$, also $\alpha(b) \in G$. Da α ein Multiplikator ist, hat man $\alpha(b) \in \mathcal{O} \vee b = \mathcal{O} \vee c$ und $\alpha(b) = G \wedge (\mathcal{O} \vee c) = c$. Damit ist α bijektiv und daher wegen (*) eine Dilatation. \square

$K(\mathbb{A})$ ist aber auch gegenüber Addition und Produkt in $\text{End } \mathbb{P}$ abgeschlossen.

Lemma B. $K(\mathbb{A})$ ist ein Unterring von $\text{End } \mathbb{P}$.

Beweis. Seien $\alpha, \beta \in K(\mathbb{A})$. Man erhält $(\alpha - \beta)(a) = \alpha(a) - \beta(a) \in \mathcal{O} \vee a$ für $a \in \mathbb{P}$, $a \neq \mathcal{O}$, also $\alpha - \beta \in K(\mathbb{A})$, wenn man Korollar 5B ausnutzt. Zum Nachweis von $\alpha \circ \beta \in K(\mathbb{A})$ sei ohne Einschränkung $\alpha \circ \beta \neq \mathcal{O}$. Für $a \in \mathbb{P}$ mit $a \neq \mathcal{O}$ folgt dann $\alpha(\beta(a)) \in \mathcal{O} \vee \beta(a) = \mathcal{O} \vee a$ nach (5), also $\alpha \circ \beta \in K(\mathbb{A})$. \square

In einem *Schiefkörper* gelten die üblichen Axiome eines Körpers bis auf die Forderung, dass die Multiplikation kommutativ ist. Man vergleiche dazu K. MEYBERG (1978), 3.2.

Satz. Ist \mathbb{A} eine Translationsebene, dann ist $K(\mathbb{A})$ ein Schiefkörper.

Beweis. Wegen Lemma A und Lemma B genügt es, $\alpha^{-1} \in K(\mathbb{A})$ für alle $\mathcal{O} \neq \alpha \in K(\mathbb{A})$ zu zeigen. Das folgt aber direkt aus (5) und (4). \square

$K(\mathbb{A})$ heißt *Multiplikatoren-Schiefkörper* zur Translationsebene \mathbb{A} .

Bemerkung. Wegen (4) gilt also $\alpha(a) \in \mathcal{O} \vee a$ für alle $\alpha \in K(\mathbb{A})$. Man kann jedoch nicht schließen, dass sich jedes $b \in \mathcal{O} \vee a$ in der Form $b = \alpha(a)$ mit einem $\alpha \in K(\mathbb{A})$ schreiben lässt. Dazu vergleiche man 3.1.

Aufgaben. a) Sei $\mathbb{A} = (\mathbb{P}, G)$ eine affine Ebene der Ordnung 2. Dann gilt $K(\mathbb{A}) = \{\mathcal{O}, \mathbb{I}\}$.

b) Sei K ein Körper, $\mathbb{A} = \mathbb{A}_2(K)$ die zugehörige affine Koordinatenebene und $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dann ist $K(\mathbb{A})$ isomorph zu K .

7. Beschreibung der Dilatationen. Sei $\mathbf{A} = (\mathbb{P}, \mathbb{G})$ eine Translationsebene, $\mathcal{O} \in \mathbb{P}$ fest. Eine Abbildung $\sigma : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ ist genau dann eine Dilatation von \mathbf{A} , wenn es ein $a \in \mathbb{P}$ und ein $\mathcal{O} \neq \alpha \in K(\mathbf{A})$ gibt mit

$$(1) \quad \sigma(x) = \alpha(x) + a \quad \text{für alle } x \in \mathbb{P}.$$

Beweis. a) Sei $\sigma : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ eine Dilatation und $b \in \mathbb{P}$, $b \neq \mathcal{O}$, gegeben. Dann definiert $\tau_b(x) := x + b$ eine Translation τ_b . Nach Lemma 3 ist auch $\sigma \circ \tau_b \circ \sigma^{-1}$ eine Translation, deren Richtung mit der Richtung von τ_b übereinstimmt. Aufgrund von Lemma 5 gibt es ein $b^* \in \mathbb{P}$, $b^* \neq \mathcal{O}$, mit

$$(2) \quad \sigma \circ \tau_b \circ \sigma^{-1} = \tau_{b^*} \quad \text{und} \quad \mathcal{O} \vee b = \mathcal{O} \vee b^*.$$

In (2) trägt man $\sigma(y)$ für $y \in \mathbb{P}$ ein und bekommt

$$(3) \quad \sigma(y + b) = \sigma(y) + b^* \quad \text{für alle } b, y \in \mathbb{P},$$

wenn man natürlich $\mathcal{O}^* = \mathcal{O}$ setzt. Aus (3) entnimmt man

$$(b + c)^* = \sigma(y + b + c) - \sigma(y) = \sigma(y + b) + c^* - \sigma(y) = b^* + c^* \quad \text{für } b, c \in \mathbb{P},$$

so dass $b \mapsto b^*$ ein Endomorphismus von \mathbb{P} ist. In (3) setzt man nun $y := \mathcal{O}$, $a := \sigma(\mathcal{O})$, $b := x$ und erhält

$$(4) \quad \sigma(x) = x^* + a, \quad \text{d.h.} \quad x^* = \tau_{-a} \circ \sigma(x).$$

Demnach ist $x \mapsto x^*$ eine Dilatation, es gilt also $\mathcal{O}^* \vee x^* \parallel \mathcal{O} \vee x$ für $x \neq \mathcal{O}$ aufgrund von 1(2). Wegen $\mathcal{O}^* = \mathcal{O}$ folgt $\mathcal{O} \vee x^* = \mathcal{O} \vee x$, d.h. $x^* \in \mathcal{O} \vee x$, und $\alpha(x) := x^*$ ist ein von \mathcal{O} verschiedener Multiplikator. Aus (4) folgt (1).

b) Wegen Lemma 3 ist nur zu zeigen, dass $\mathcal{O} \neq \alpha \in K(\mathbf{A})$ eine Dilatation ist. Das folgt aber aus Lemma 6A. \square

Bemerkungen. a) Die Multiplikatoren ungleich \mathcal{O} von \mathbf{A} sind damit genau die Dilatationen mit Fixpunkt \mathcal{O} .

b) Nach (1) sind α und a durch σ eindeutig bestimmt. Es gibt daher eine Bijektion

$$(K(\mathbf{A}) \setminus \{\mathcal{O}\}) \times \mathbb{P} \longrightarrow \text{Dilat} \mathbf{A}, \quad (\alpha, a) \longmapsto \sigma_{\alpha, a},$$

wobei $\sigma_{\alpha, a}$ durch (1) definiert ist. Eine Verifikation ergibt

$$\sigma_{\alpha, a} \circ \sigma_{\beta, b} = \sigma_{\gamma, c} \quad \text{mit} \quad \gamma := \alpha \circ \beta \quad \text{und} \quad c := \alpha(b) + a.$$

Man sagt dafür auch, dass $\text{Dilat} \mathbf{A}$ das semi-direkte Produkt der multiplikativen Gruppe $K(\mathbf{A}) \setminus \{\mathcal{O}\}$ und der additiven Gruppe $(\mathbb{P}; +)$ ist und schreibt

$$\text{Dilat} \mathbf{A} = K(\mathbf{A}) \setminus \{\mathcal{O}\} \ltimes \mathbb{P}$$

(vgl. G. FISCHER, R. SACHER (1983), I.1.6.2).

Aufgaben. a) Sei K ein Körper. Dann besteht $\text{Dilat}\mathbb{A}_2(K)$ genau aus den Abbildungen $x \mapsto \lambda x + q$, $0 \neq \lambda \in K$, $q \in K^2$.
 b) Sei \mathbb{A} eine Translationsebene und $a \in \mathbb{P}$. Dann ist $\{\sigma \in \text{Dilat}\mathbb{A} : \sigma(a) = a\}$ eine zu $K(\mathbb{A}) \setminus \{0\}$ isomorphe Gruppe
 c) Seien \mathbb{A} und \mathbb{A}' affin isomorphe Translationsebenen. Dann sind die zugehörigen Multiplikatoren-Schiefkörper $K(\mathbb{A})$ und $K(\mathbb{A}')$ isomorph.
 d) Sei \mathbb{A} eine Translationsebene und $\text{char } K(\mathbb{A}) \neq 2$. Zu jedem $a \in \mathbb{P}$ gibt es genau eine *Spiegelung* σ an a , d.h. $\text{id} \neq \sigma \in \text{Dilat}\mathbb{A}$ mit $\sigma \circ \sigma = \text{id}$ und $\sigma(a) = a$, nämlich $\sigma(x) = 2a - x$.

8. Automorphismen. Nach 1.5(1) ist eine bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ genau dann ein Automorphismus von $\mathbb{A} = (\mathbb{P}, \mathbb{G})$, wenn gilt

$$(1) \quad \varphi(G) \in \mathbb{G} \text{ für alle } G \in \mathbb{G}.$$

Da jede Gerade durch zwei verschiedene Punkte eindeutig bestimmt ist, ist (1) äquivalent zu der Aussage:

$$(2) \quad \text{Für alle } a \neq b \text{ gilt } \varphi(a \vee b) = \varphi(a) \vee \varphi(b).$$

Nach Lemma 1.5 hat man speziell für $\varphi \in \text{Aut}\mathbb{A}$:

$$(3) \quad \text{Aus } G \parallel H \text{ folgt } \varphi(G) \parallel \varphi(H).$$

Ist \mathbb{A} eine Translationsebene, dann gibt es zu jedem $\varphi \in \text{Aut}\mathbb{A}$ natürlich eine Translation τ mit $\psi := \tau \circ \varphi \in \text{Aut}\mathbb{A}$ und $\psi(o) = o$.

Lemma. Sei $\mathbb{A} = (\mathbb{P}, \mathbb{G})$ eine Translationsebene. Dann ist jedes $\varphi \in \text{Aut}\mathbb{A}$ mit $\varphi(o) = o$ ein Endomorphismus von \mathbb{P} .

Beweis. Seien $a, b \in \mathbb{P}$ gegeben, so dass o, a, b nicht kollinear sind. Dann sind auch $o, \varphi(a), \varphi(b)$ in allgemeiner Lage. Nach Korollar 5A und (3) gilt dann

$$o \vee a \parallel b \vee (a + b), \text{ also } o \vee \varphi(a) \parallel \varphi(b) \vee \varphi(a + b),$$

d.h. $\varphi(a + b) \in \varphi(b)(o \vee \varphi(a))$. Eine Vertauschung von a, b ergibt

$$\varphi(a + b) = \varphi(b)(o \vee \varphi(a)) \wedge \varphi(a)(o \vee \varphi(b)),$$

denn $o \vee \varphi(a)$ und $o \vee \varphi(b)$ sind nicht parallel. Andererseits gilt

$$o \vee \varphi(a) \parallel \varphi(b) \vee (\varphi(a) + \varphi(b)), \text{ also } \varphi(a) + \varphi(b) \in \varphi(b)(o \vee \varphi(a)),$$

und aus Symmetriegründen folgt

$$\varphi(a) + \varphi(b) = \varphi(b)(o \vee \varphi(a)) \wedge \varphi(a)(o \vee \varphi(b)) = \varphi(a + b).$$

Seien $a, b \in \mathbb{P}$ von Null verschieden, so dass o, a, b kollinear sind. Nach Lemma 1.3 gibt es ein $c \in \mathbb{P}$, das nicht auf der Geraden durch o, a und b liegt. Dann sind $o, a + b, c$ und $o, a, b + c$ sowie o, b, c jeweils in allgemeiner Lage. Aus dem bereits bewiesenen Teil folgt

$$\varphi(a+b) + \varphi(c) = \varphi(a+b+c) = \varphi(a) + \varphi(b+c) = \varphi(a) + \varphi(b) + \varphi(c) ,$$

also

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b) .$$

Demnach ist φ ein Endomorphismus von $(\mathbb{P}, +)$. □

Wir benutzen diese Ergebnisse, um die affine Koordinatenebene $\mathbb{A}_2(K)$ über einem Körper K näher zu untersuchen. Für einen Körperautomorphismus σ von K sei dann

$$\tilde{\sigma} : K^2 \rightarrow K^2, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sigma(x_1) \\ \sigma(x_2) \end{pmatrix}.$$

Satz. *Sei K ein Körper. Dann sind die Automorphismen der affinen Koordinatenebene $\mathbb{A}_2(K)$ genau die Abbildungen*

$$K^2 \rightarrow K^2, \quad x \mapsto M\tilde{\sigma}(x) + q,$$

wobei $M \in GL(2; K)$, $q \in K^2$ und σ alle Körperautomorphismen von K durchläuft.

Beweis. Die angegebenen Abbildungen sind bijektiv und bilden eine Gerade $a + Ku$, $a, u \in K^2$, $u \neq 0$, ab auf

$$b + Kv, \quad b = M\tilde{\sigma}(a) + q, \quad v = M\tilde{\sigma}(u).$$

Sie sind also Automorphismen.

Sei nun $\varphi \in \text{Aut } \mathbb{A}_2(K)$ beliebig. Nach Abänderung durch eine Translation darf man $\varphi(o) = o$ annehmen, $o = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Aufgrund des Lemmas ist φ ein Endomorphismus von $(K^2, +)$. Da mit o , $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ auch $o, \varphi(e_1), \varphi(e_2)$ nicht kollinear sind, darf man nach Abänderung durch einen Automorphismus ohne Einschränkung $\varphi(o) = o$, $\varphi(e_1) = e_1$, $\varphi(e_2) = e_2$ annehmen. Es folgt

$$\varphi(Ke_1) = Ke_1, \quad \varphi(Ke_2) = Ke_2, \quad \varphi(K(e_1 + e_2)) = K(e_1 + e_2).$$

Aus den beiden ersten Gleichungen erhält man die Existenz von Abbildungen $\sigma_1, \sigma_2 : K \rightarrow K$ mit $\varphi\left(\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \sigma_1(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varphi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_2(\beta) \end{pmatrix}$, also

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}\right) + \varphi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \sigma_1(\alpha) \\ \sigma_2(\beta) \end{pmatrix} \quad \text{für alle } \alpha, \beta \in K.$$

Nun gilt

$$\begin{pmatrix} \sigma_1(\alpha) \\ \sigma_2(\alpha) \end{pmatrix} = \varphi\left(\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \in K \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{für alle } \alpha \in K,$$

also $\sigma_1 = \sigma_2 =: \sigma$. Mit φ ist σ ein Endomorphismus von $(K, +)$ und bijektiv. Weiterhin gilt für alle $\alpha, \beta \in K$

$$\begin{pmatrix} \sigma(\alpha\beta) \\ \sigma(\alpha) \end{pmatrix} = \varphi\left(\begin{pmatrix} \alpha\beta \\ \alpha \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(\alpha \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix}\right) \in \varphi\left(K \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix}\right) = K \begin{pmatrix} \sigma(\beta) \\ 1 \end{pmatrix},$$

also $\sigma(\alpha\beta) = \sigma(\alpha)\sigma(\beta)$. Demnach ist σ ein Körperautomorphismus und $\varphi = \tilde{\sigma}$. \square

Es ist bekannt, dass die Identität der einzige Körperautomorphismus von \mathbb{R} ist (vgl. *Zahlen* (1992), 2.5.3). Damit folgt das

Korollar. *Die Automorphismen der affinen Koordinatenebene $\mathbb{A}_2(\mathbb{R})$ sind genau die Abbildungen*

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto Mx + q, \quad M \in GL(2; \mathbb{R}), \quad q \in \mathbb{R}^2.$$

Es gilt also

$$\text{Aut } \mathbb{A}_2(\mathbb{R}) \cong GL(2; \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2.$$

Aufgaben. a) Sei K ein Primkörper, d.h. $K \cong \mathbb{Q}$ oder $K \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, p Primzahl. Dann besteht $\text{Aut } \mathbb{A}_2(K)$ genau aus den Abbildungen

$$x \mapsto Mx + q, \quad M \in GL(2; K), \quad q \in K^2.$$

b) Ist jeder bijektive Endomorphismus einer Translationsebene auch ein Automorphismus der affinen Ebene?

§ 3 Affine Koordinatenebenen

Es sei $\mathbb{A} = (\mathbb{P}, \mathbb{G})$ stets eine affine Ebene.

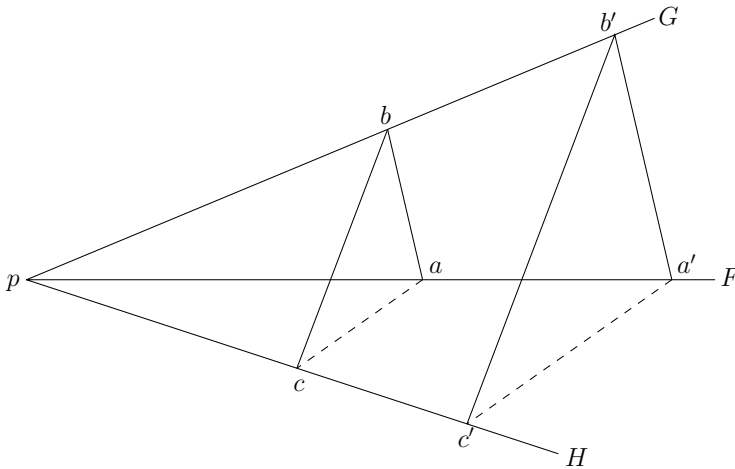


Abb. 11: Der Satz von DESARGUES

1. Satz von DESARGUES. *Seien F, G, H drei paarweise verschiedene Geraden, die sich im Punkt p schneiden. Sind $a, a' \in F$, $b, b' \in G$ und $c, c' \in H$ von p verschiedene Punkte mit*

$$(1) \quad a \vee b \parallel a' \vee b' \quad \text{und} \quad b \vee c \parallel b' \vee c',$$

dann gilt auch

$$(2) \quad a \vee c \parallel a' \vee c'.$$

Diese Aussage ist ein weiteres Axiom für affine Ebenen und steht in Analogie zum so genannten *Kleinen Satz von DESARGUES* (vgl. Bemerkung 2.4a)). Girard DESARGUES (1591–1661, französischer Geometer) war ein Zeitgenosse von DESCARTES (1596–1650).

Lemma. Für eine Translationsebene $\mathbf{A} = (\mathbb{P}, \mathbb{G})$ sind äquivalent:

- (i) Es gilt der Satz von DESARGUES.
- (ii) Sind \mathcal{O}, a, a' drei paarweise verschiedene, kollineare Punkte, dann gibt es ein $\alpha \in K(\mathbf{A})$ mit $\alpha(a) = a'$.
- (iii) Sind a, b, c drei paarweise verschiedene, kollineare Punkte, dann gibt es eine Dilatation σ von \mathbf{A} mit $\sigma(a) = b$ und $\sigma(c) = c$.

Beweis. (i) \implies (ii): Seien \mathcal{O}, a, a' paarweise verschieden und kollinear. Aufgrund von Lemma 1.3 gibt es ein $b \in \mathbb{P}$, so dass \mathcal{O}, a, b in allgemeiner Lage sind. Nach dem Vorbild von Lemma 2.1 definiert man Abbildungen σ_1 und σ_2 durch

$$\begin{aligned} \sigma_1(x) &:= (\mathcal{O} \vee x) \wedge a'(a \vee x) \quad \text{für } x \notin \mathcal{O} \vee a, \\ \sigma_2(x) &:= (\mathcal{O} \vee x) \wedge b'(b \vee x) \quad \text{für } x \notin \mathcal{O} \vee b \end{aligned}$$

und $x \in \mathbb{P}$. Dabei ist $b' := \sigma_1(b)$. Aus der Gültigkeit des Satzes von DESARGUES schließt man mit obiger Figur und $c = x$, dass $c' = \sigma_1(x) = \sigma_2(x)$ für alle Punkte $x \notin (\mathcal{O} \vee a) \cup (\mathcal{O} \vee b)$ gilt. Man setzt nun

$$\sigma(x) = \begin{cases} \sigma_1(x), & \text{falls } x \notin \mathcal{O} \vee a, \\ \sigma_2(x), & \text{falls } x \notin \mathcal{O} \vee b, \\ \mathcal{O}, & \text{falls } x = \mathcal{O}. \end{cases}$$

Damit wird $\sigma(a) = \sigma_2(a) = (\mathcal{O} \vee a) \wedge b'(b \vee a) = a'$. Aus $\sigma(x) = \mathcal{O}$ folgt nun $x = \mathcal{O}$. Sind von \mathcal{O} verschiedene $x, y \in \mathbb{P}$ gegeben, so wählt man ein $c \in \mathbb{P}$, $c \neq \mathcal{O}$, so dass x, y nicht auf $\mathcal{O} \vee c$ liegen. Mit $c' = \sigma(c)$ schließt man analog

$$\sigma(z) = (\mathcal{O} \vee z) \wedge c'(c \vee z), \quad z = (\mathcal{O} \vee \sigma(z)) \wedge c(c' \vee \sigma(z)) \quad \text{für } z \notin \mathcal{O} \vee c.$$

Mit dieser Beschreibung folgert man aus $\sigma(x) = \sigma(y)$ schon $x = y$. Die Definition von σ liefert $\mathcal{O} \vee x = \mathcal{O} \vee \sigma(x)$ und $\mathcal{O} \vee y = \mathcal{O} \vee \sigma(y)$. Für $x \neq y$ schließt man daraus mit dem Satz von DESARGUES $\sigma(x) \vee \sigma(y) \parallel x \vee y$. Ist $d \in \mathbb{P}$, $d \notin \mathcal{O} \vee c$, so erhält man $\sigma(x) = d$ für $x := (\mathcal{O} \vee d) \wedge c(c' \vee d)$. Damit ist σ eine Dilatation von \mathbf{A} , die \mathcal{O} fest lässt und a auf a' abbildet. Nach 2.7 ist dann σ aber ein Multiplikator $\neq \mathcal{O}$.

(ii) \implies (iii): Man setzt $\tau(x) := x - c$ und wählt einen Multiplikator $\alpha \neq \mathcal{O}$ mit $\alpha(\tau(a)) = \tau(b)$. Dann ist $\sigma := \tau^{-1} \circ \alpha \circ \tau$ eine Dilatation mit $\sigma(c) = c$ und $\sigma(a) = b$.

(iii) \implies (i): Es seien a, b, c und a', b', c' wie in (1) gegeben. Man wählt eine

Beweis. Nach 2.6(4) gilt $\alpha(a) \in \mathcal{O} \vee a$ für alle $\alpha \in K(\mathbf{A})$. Wegen Lemma 1 gibt es zu $a' \in \mathcal{O} \vee a$ ein $\alpha \in K(\mathbf{A})$ mit $a' = \alpha(a)$. Also folgt (2). Mit $\tau(x) := x + a$ gilt nun

$$a \vee b = \tau(\mathcal{O}) \vee \tau(b - a) = \tau(\mathcal{O} \vee (b - a)) = \{a + \alpha(b - a) : \alpha \in K(\mathbf{A})\},$$

wenn man 2.1(6) beachtet. \square

Man erhält auch eine Darstellung aller Punkte durch die Werte von Multiplikatoren auf zwei Punkten.

Satz. Sei $\mathbf{A} = (\mathbb{P}, \mathbb{G})$ eine DESARGUES-Ebene. Sind $\mathcal{O}, p, q \in \mathbb{P}$ in allgemeiner Lage, dann gibt es zu jedem $x \in \mathbb{P}$ eindeutig bestimmte $\alpha, \beta \in K(\mathbf{A})$ mit

$$(3) \quad x = \alpha(p) + \beta(q).$$

Beweis. Wegen (2) darf man für die Existenz ohne Einschränkung annehmen, dass $x \notin (\mathcal{O} \vee p) \cup (\mathcal{O} \vee q)$. Wegen (2) gibt es $\alpha, \beta \in K(\mathbf{A})$ mit

$$(*) \quad (\mathcal{O} \vee p) \wedge x(\mathcal{O} \vee q) = \alpha(p) \quad \text{und} \quad (\mathcal{O} \vee q) \wedge x(\mathcal{O} \vee p) = \beta(q).$$

Nach der Voraussetzung an x sind $\mathcal{O}, \alpha(p), \beta(q)$ in allgemeiner Lage. Aus 2.5(3) und 2.6(5) folgt dann

$$(**) \quad \alpha(p) + \beta(q) = \alpha(p)(\mathcal{O} \vee q) \wedge \beta(q)(\mathcal{O} \vee p).$$

Nun erhält man (3) aus (**), denn nach (*) gilt

$$\alpha(p)(\mathcal{O} \vee q) = x(\mathcal{O} \vee q) \quad \text{und} \quad \beta(q)(\mathcal{O} \vee p) = x(\mathcal{O} \vee p).$$

Zum Nachweis der Eindeutigkeit der Darstellung (3) seien $\alpha, \beta \in K(\mathbf{A})$ mit $\alpha(p) + \beta(q) = \mathcal{O}$ gegeben. Im Falle $\beta \neq \mathcal{O}$ folgt $\beta(q) = -\alpha(p)$, also $q = \gamma(p)$ mit einem $\gamma \in K(\mathbf{A})$ nach Satz 2.6. Aus 2.6(5) erhält man aber $q \in \mathcal{O} \vee p$ im Widerspruch zur Annahme. Es folgt $\beta = \mathcal{O}$. Analog schließt man $\alpha = \mathcal{O}$. Gilt nun $x = \alpha(p) + \beta(q) = \alpha'(p) + \beta'(q)$, so folgt $\mathcal{O} = (\alpha - \alpha')(p) + (\beta - \beta')(q)$, also die Eindeutigkeit in (3). \square

Für $a, u \in \mathbb{P}$, $u \neq \mathcal{O}$, setzt man

$$(4) \quad G_{a,u} := \{a + \alpha(u) : \alpha \in K(\mathbf{A})\}.$$

Falls \mathbf{A} eine DESARGUES-Ebene ist, erhält man alle Geraden in der Form (4), denn wegen (1) gilt

$$(5) \quad G_{a,u} = a \vee (a + u).$$

Lemma. Sei \mathbf{A} eine DESARGUES-Ebene. Sind $G_{a,u}$ und $G_{b,v}$, $u \neq \mathcal{O}$, $v \neq \mathcal{O}$, zwei Geraden in \mathbb{G} , dann sind äquivalent:

- (i) $G_{a,u} \parallel G_{b,v}$.
- (ii) \mathcal{O}, u, v sind kollinear.
- (iii) Es gibt $\alpha \in K(\mathbf{A})$ mit $v = \alpha(u)$.

Beweis. (i) \implies (ii): Die beiden Geraden schneiden sich offenbar genau dann, wenn es $\alpha, \beta \in K(\mathbb{A})$ gibt mit $a + \alpha(u) = b + \beta(v)$, also mit

$$(6) \quad \alpha(u) - \beta(v) = b - a.$$

Wären \mathcal{o}, u, v in allgemeiner Lage, so besitzt (6) nach dem Satz eindeutige Lösungen α, β , d.h., die Geraden sind nicht parallel. Also sind \mathcal{o}, u, v kollinear.

(ii) \implies (iii): Man verwende Lemma 1.

(iii) \implies (i): Aus (5) und Korollar 2.5A folgt $G_{a,u} \parallel \mathcal{o} \vee u$, $G_{b,v} \parallel \mathcal{o} \vee v$. Da $v \neq \mathcal{o}$ schon $\alpha \neq \mathcal{O}$ impliziert, liefert 2.6(5) bereits $\mathcal{o} \vee u = \mathcal{o} \vee v$. \square

Wegen (5) hat man das

Korollar. Sind $a, b, c, d \in \mathbb{P}$ paarweise verschieden, dann sind äquivalent:

- (i) $a \vee b \parallel c \vee d$.
- (ii) Es gibt ein $\alpha \in K(\mathbb{A})$ mit $d - c = \alpha(b - a)$.

Aufgabe. Sei \mathbb{A} eine DESARGUES-Ebene.

a) Für $a, b, u, v \in \mathbb{P}$, $u \neq \mathcal{o}$, $v \neq \mathcal{o}$, sind äquivalent:

- (i) $G_{a,u} = G_{b,v}$.
 - (ii) Es gibt $\alpha, \beta \in K(\mathbb{A})$ mit $b = a + \alpha(u)$, $v = \beta(u)$.
- b) Für $p, q \in \mathbb{P}$, $p \neq q$, gilt

$$p \vee q = \{\alpha(p) + \beta(q) : \alpha, \beta \in K(\mathbb{A}), \alpha + \beta = 1\}.$$

3. Affine Koordinatenebenen. Es sei K ein Schiefkörper. Analog zum Fall eines kommutativen Körpers in 1.1 soll die „affine Ebene der Spaltenvektoren über K “ konstruiert werden: Man definiert zunächst eine Menge von *Punkten*

$$(1) \quad \mathbb{P} := K^2 = \left\{ a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} : a_1, a_2 \in K \right\}$$

und erklärt eine *Addition*

$$(2) \quad a + b := \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} \quad \text{für } a, b \in \mathbb{P}$$

sowie eine *skalare Multiplikation*

$$(3) \quad \alpha a := \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \end{pmatrix} \quad \text{für } a \in \mathbb{P} \text{ und } \alpha \in K.$$

Eine leichte Verifikation ergibt:

$$(4) \quad (\mathbb{P}; +) \text{ ist eine abelsche Gruppe mit Nullelement } \mathcal{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(5) Für $a, b \in \mathbb{P}$ und $\alpha, \beta \in K$ gelten die Regeln

$$(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a, \quad \alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b, \quad (\alpha\beta)a = \alpha(\beta a), \quad 1a = a.$$

Damit wird \mathbb{P} zu einem Linksvektorraum über dem Schiefkörper K .

Zwei Elemente $a, b \in \mathbb{P}$ heißen *linear unabhängig*, wenn aus $\alpha a + \beta b = \mathfrak{o}$ mit $\alpha, \beta \in K$ stets $\alpha = \beta = 0$ folgt; andernfalls heißen sie *linear abhängig*.

Proposition A. *Seien $p, q \in \mathbb{P}$ linear unabhängig. Dann gibt es zu jedem $x \in \mathbb{P}$ eindeutig bestimmte $\alpha, \beta \in K$ mit $x = \alpha p + \beta q$.*

Beweis. Zunächst bedeutet $x = \alpha p + \beta q$ nach (2) und (3) die Gültigkeit der Gleichungen

$$(*) \quad \alpha p_1 + \beta q_1 = x_1 \quad \text{und} \quad \alpha p_2 + \beta q_2 = x_2$$

in K . Nach evtl. Änderungen der Bezeichnungen darf $q_2 \neq 0$ angenommen werden. Dann ist (*) äquivalent zu

$$(**) \quad \beta = (x_2 - \alpha p_2) q_2^{-1} \quad \text{und} \quad \alpha(p_1 - p_2 q_2^{-1} q_1) = x_1 - x_2 q_2^{-1} q_1.$$

Wegen

$$p - p_2 q_2^{-1} \cdot q = \begin{pmatrix} p_1 - p_2 q_2^{-1} q_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

folgt $p_1 - p_2 q_2^{-1} q_1 \neq 0$ und (**) ist eindeutig nach α, β lösbar. \square

Die Mengen

$$(6) \quad G_{a,u} := \{a + \alpha u : \alpha \in K\}, \quad u \neq \mathfrak{o},$$

nennt man *Geraden* und setzt

$$(7) \quad \mathbb{G} := \{G_{a,u} : a, u \in \mathbb{P}, \quad u \neq \mathfrak{o}\}.$$

Man beachte, dass sich $G_{a,u}$ nicht ändert, wenn man

$$(8) \quad u \text{ durch } \beta u \text{ mit einem } 0 \neq \beta \in K,$$

$$(9) \quad a \text{ durch } a + \alpha u \text{ mit einem } \alpha \in K$$

ersetzt.

Proposition B. *Sind $p, q \in \mathbb{P}$ verschieden, dann gibt es genau eine Gerade durch p und q , nämlich $G_{p,q-p}$.*

Beweis. Man sucht also a und $u \neq \mathfrak{o}$, so dass p und q auf $G_{a,u}$ liegen, so dass also $a + \alpha u = p$ und $a + \beta u = q$ mit $\alpha, \beta \in K$ lösbar sind. Da sicher $\gamma := \beta - \alpha \neq 0$ gilt, folgt $\gamma u = q - p$ und man darf nach (8) annehmen, dass $u = q - p$ und $\beta = \alpha + 1$ gilt. Mit (9) folgt $G_{a,u} = G_{a,q-p} = G_{p,q-p}$. \square

Analog zum Beweis von Lemma 2 erhält man die

Proposition C. *Zwei Geraden $G_{a,u}$ und $G_{b,v}$ sind genau dann parallel, wenn u, v linear abhängig sind.*

Damit erhält man schließlich die

Proposition D. Die Gerade $G_{b,u}$ ist parallel zu $G_{a,u}$ und geht durch b .

Da die Punkte $\circ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ in allgemeiner Lage sind, ergibt ein Vergleich mit 1.1 das

Lemma. Definiert man \mathbb{P} bzw. \mathbb{G} durch (1) bzw. (7), so ist $\mathbf{A}_2(K) := (\mathbb{P}, \mathbb{G})$ eine affine Ebene.

Man nennt $\mathbf{A}_2(K)$ die affine Koordinatenebene zum Schiefkörper K .

Bemerkungen. a) Im Falle eines Körpers, also eines kommutativen Schiefkörpers, ist \mathbb{P} der 2-dimensionale K -Vektorraum der Spaltenvektoren (vgl. 1.1).

b) Es gibt wenigstens ein Beispiel eines echten Schiefkörpers, dessen Kenntnis zur mathematischen Allgemeinbildung gehört: Der so genannte *Quaternionen-Schiefkörper* $\mathbb{H} = \mathbb{R} + \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}ij$ ist eine vierdimensionale Algebra über den reellen Zahlen mit den definierenden Relationen $i^2 = j^2 = -1$ und $ij = -ji$. Man vergleiche *Zahlen* (1992), Kap. 7.

Aufgaben. Sei K ein Schiefkörper.

a) Die Geraden in $\mathbf{A}_2(K)$ sind genau die Mengen

$$M_{\alpha,\beta,\gamma} = \{x \in K^2 : x_1\alpha + x_2\beta = \gamma\}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in K, \quad (\alpha, \beta) \neq (0, 0).$$

b) Unter welcher Bedingung an (α, β, γ) , $(\alpha', \beta', \gamma')$ sind zwei Geraden $M_{\alpha,\beta,\gamma}$ und $M_{\alpha',\beta',\gamma'}$ in a) parallel?

4. Koordinatenebenen als DESARGUES-Ebenen. Es sei $\mathbf{A}_2(K) = (\mathbb{P}, \mathbb{G})$ die affine Koordinatenebene zum Schiefkörper K . Für $c \in \mathbb{P}$ definiert man

$$(1) \quad \tau_c : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}, \quad x \longmapsto \tau_c(x) := x + c.$$

Proposition. Die Abbildungen τ_c , $c \in \mathbb{P}$, sind genau die Translationen von $\mathbf{A}_2(K)$ und $\mathbf{A}_2(K)$ ist eine Translationsebene.

Beweis. Nach 3(6) gilt $\tau_c(G_{a,u}) = G_{a+c,u}$ und $G_{a+c,u} \parallel G_{a,u}$ folgt aus Proposition 3C. Damit sind alle τ_c , $c \in \mathbb{P}$, Dilatationen von $\mathbf{A}_2(K)$. Für $c \neq \circ$ hat τ_c keinen Fixpunkt, so dass τ_c eine Translation ist. Ist nun τ eine beliebige Translation, so ist $\tau' := \tau_{-c} \circ \tau$, $c := \tau(\circ)$, eine Translation mit Fixpunkt \circ , also $\tau' = \text{id}$, d.h. $\tau = \tau_c$. \square

Man wählt nun den Punkt $\circ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ als Basispunkt von $\mathbf{A}_2(K)$ und sieht wegen (1), dass die nach 2.5(2) erklärte Addition von \mathbb{P} mit der bereits definierten Addition 3(2) übereinstimmt.

Lemma. Für einen Endomorphismus φ von $(\mathbb{P}; +)$ sind äquivalent:

- (i) φ ist ein Multiplikator.
- (ii) Es gibt $\alpha \in K$ mit $\varphi(a) = \alpha a$ für alle $a \in \mathbb{P}$.

Beweis. Ein Endomorphismus φ von \mathbb{P} ist nach 2.6(4) genau dann ein Multiplikator von $\mathbf{A}_2(K)$, wenn $\varphi(a) \in \circ \vee a$ für alle $a \in \mathbb{P}$, $a \neq \circ$, gilt.

(i) \implies (ii): Nach Proposition 3B bedeutet dies $\varphi(a) \in G_{\mathcal{O},a}$ für $a \in \mathbb{P}$, $a \neq \mathcal{O}$. Nun zeigt 3(3), dass es zu jedem $a \in \mathbb{P}$ ein $\alpha_a \in K$ mit $\varphi(a) = \alpha_a \cdot a$ gibt. Für $a, b \in \mathbb{P}$ folgt dann $\alpha_{a+b} \cdot (a+b) = \varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b) = \alpha_a \cdot a + \alpha_b \cdot b$. Sind a, b linear unabhängig, so erhält man $\alpha_a = \alpha_{a+b} = \alpha_b$. Damit hängt α_a nicht von a ab.

(ii) \implies (i): Natürlich gilt $\alpha a \in \mathcal{O} \vee a$ für $a \neq \mathcal{O}$. □

Wegen (ii) ist Lemma 1(ii) erfüllt und man bekommt den

Satz A. *Die affine Koordinatenebene zu einem Schiefkörper K ist eine DESARGUES-Ebene.*

Umgekehrt kann man von einer DESARGUES-Ebene $\mathbf{A}' = (\mathbb{P}', \mathbb{G}')$ ausgehen, den Schiefkörper K' der Multiplikatoren (vgl. Satz 2.6) bilden und dazu die affine Koordinatenebene $\mathbf{A}_2(K')$ definieren. Aufgrund von Satz 2 kann man nach geeigneter Wahl von Punkten p und q in \mathbb{P}' jedes $x' \in \mathbb{P}'$ eindeutig in der Form $x' = \alpha(p) + \beta(q)$ schreiben. Damit erhält man eine bijektive Abbildung $\mathbb{P}' \rightarrow K'^2$, $x' \mapsto \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. Ein Vergleich von Proposition 2 mit 3(7) zeigt, dass es sich um einen affinen Isomorphismus handelt. Man hat damit den

Satz B. *Ist \mathbf{A} eine DESARGUES-Ebene mit zugehörigem Multiplikatoren-Schiefkörper $K = K(\mathbf{A})$, dann ist \mathbf{A} affin isomorph zur affinen Koordinatenebene über dem Schiefkörper K .*

Aufgaben. a) In einer DESARGUES-Ebene seien drei verschiedene parallele Geraden F, G, H und Punkte $a, a' \in F$, $b, b' \in G$, $c, c' \in H$ gegeben. Wenn die Schnittpunkte $(a \vee b) \wedge (a' \vee b')$, $(b \vee c) \wedge (b' \vee c')$ und $(c \vee a) \wedge (c' \vee a')$ existieren, sind sie kollinear.

b) Seien K und K' Schiefkörper. Die affinen Koordinatenebenen $\mathbf{A}_2(K)$ und $\mathbf{A}_2(K')$ sind genau dann affin isomorph, wenn K und K' isomorph sind.

c) Für eine DESARGUES-Ebene \mathbf{A} sind äquivalent:

(i) $\tau \circ \tau = \mathbb{1}$ für jedes τ in $\text{Trans } \mathbf{A}$. (ii) $\text{char } K(\mathbf{A}) = 2$.

d) Sei \mathbf{A} eine DESARGUES-Ebene. Sind $a, b, c \in \mathbb{P}$ in allgemeiner Lage, so besitzt jedes $x \in \mathbb{P}$ eine eindeutige Darstellung in der Form

$$x = \alpha(a) + \beta(b) + \gamma(c) \text{ mit } \alpha, \beta, \gamma \in K(\mathbf{A}), \alpha + \beta + \gamma = \mathbb{1}.$$

e) Man bestimme die Menge $\text{Dilat } \mathbf{A}_2(K)$ für einen Schiefkörper K .

f) Beweisen Sie das Analogon von Satz 2.8 für einen Schiefkörper K .

5*. Ausblicke. Die Beschreibung von DESARGUES-Ebenen durch Koordinaten eines Schiefkörpers (Satz 4B) wurde durch M. HALL (1910–1990) im Jahre 1943 auf beliebige affine Ebenen verallgemeinert (Trans. Am. Math. Soc. **54**, 229–277). An die Stelle eines Schiefkörpers tritt eine komplizierte algebraische Struktur: ein so genannter *Ternärkörper*. Man kann sich hierüber in dem klassischen Buch *Finite geometries* von P. DEMBOWSKI (1968) orientieren, in dem man Vieles findet, was man bis etwa 1968 über endliche affine oder projektive Ebenen wusste. Eine Konstruktion einer projektiven Ebene aus einer affinen Ebene wird in VI.1.3 beschrieben.

Alle bis heute bekannten Beispiele von endlichen affinen Ebenen haben als Ordnung eine Potenz einer Primzahl. Nach R.H. BRUCK und H.J. RYSER (Can. J. Math. **1**, 88–93 (1949)) können endliche affine Ebenen der Ordnung n im Falle $n \equiv 1 \pmod{4}$ oder $n \equiv 2 \pmod{4}$ nur existieren, wenn n Summe zweier Quadrate ganzer Zahlen ist. Damit gibt es keine endlichen affinen Ebenen der Ordnung 6, 14 oder 21. Einen einfachen Beweis des Satzes von BRUCK-RYSER findet man bei H. LENZ (1965), Satz VII.9.1. Damit ist 10 unter den Nicht-Primzahlpotenzen die kleinste Zahl, die als Ordnung einer affinen Ebene möglich wäre: Mit langjährigen Computerrechnungen gelang 1989 der Nachweis, dass es keine affine Ebene der Ordnung 10 gibt. Man vergleiche C.W. LAM (Am. Math. Mon. **98**, 305–318 (1991)).

§ 4 PAPPUS-Ebenen

1. Satz von PAPPUS. In seiner *Geometric algebra* (1957) schreibt E. ARTIN (1898–1962) im Zusammenhang mit der Frage, unter welchen Voraussetzungen der Multiplikatoren-Schiefkörper einer DESARGUES-Ebene kommutativ ist:

One of the simple but fascinating results in foundations of geometry is the fact that one can find a simple geometric configuration which is equivalent with the commutative law for multiplication of our field k .

Diese „einfache geometrische Konfiguration“ nennt man nach dem lateinisierten Namen des PAPPOS von Alexandria (Griechischer Mathematiker, um 300 n.Chr.) den

Satz von PAPPUS. Seien F und G zwei Geraden einer affinen Ebene und seien $a, a', a'' \in F \setminus G$ und $b, b', b'' \in G \setminus F$ paarweise verschiedene Punkte. Gilt dann

$$a \vee b' \parallel a' \vee b'' \quad \text{und} \quad a' \vee b \parallel a'' \vee b',$$

so ist auch

$$a \vee b \parallel a'' \vee b''.$$

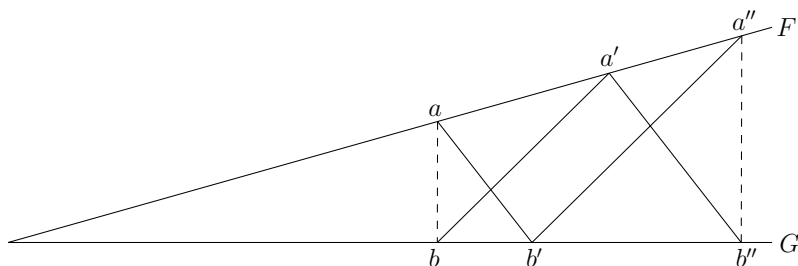


Abb. 13: Der Satz von PAPPUS

In der älteren Literatur wird der Satz auch nach PASCAL benannt. Mit der obigen Formulierung soll nicht behauptet werden, dass der Satz von PAPPUS

in jeder affinen Ebene gültig ist. Wie beim Satz von DESARGUES ist der obige Satz – wie HILBERT zuerst bemerkte – ein zusätzliches Axiom. Man nennt eine Translationsebene $\mathbb{A} = (\mathbb{P}, \mathbb{G})$ eine PAPPUS-Ebene, wenn in \mathbb{A} der Satz von PAPPUS gilt.

Aufgabe. a) Sei \mathbb{H} der Quaternionen-Schiefkörper über \mathbb{R} . Der Satz von PAPPUS gilt in $\mathbb{A}_2(\mathbb{H})$ nicht.

b) Sei K ein (kommutativer) Körper. Dann ist die affine Koordinatenebene $\mathbb{A}_2(K)$ eine PAPPUS-Ebene.

2. Dreimal PAPPUS ist DESARGUES. Kurz nach Erscheinen der ersten Auflage von HILBERTs *Grundlagen der Geometrie* (1899) bemerkte G. HESSENBERG (Math. Ann. **61**, 161–172 (1905)), dass die Sätze von DESARGUES und PAPPUS als Axiome nicht unabhängig sind:

Satz von HESSENBERG. Ist \mathbb{A} eine affine Ebene, in welcher der Satz von PAPPUS gilt, dann gilt in \mathbb{A} auch der Satz von DESARGUES.

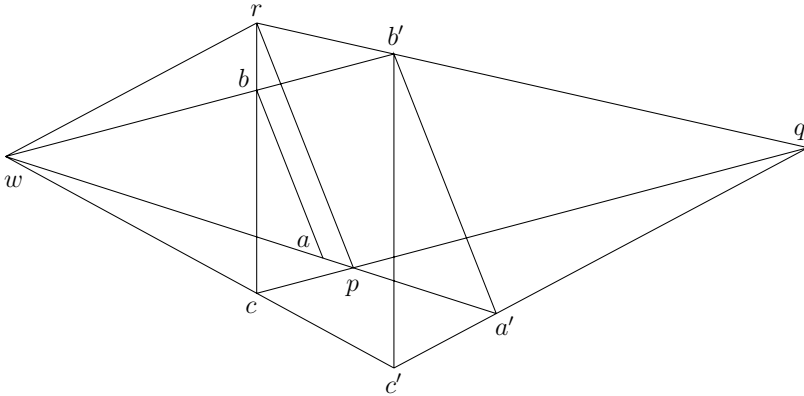


Abb. 14: Der Satz von HESSENBERG

Zum *Beweis* hat man den Satz von PAPPUS dreimal anzuwenden und betrachtet dazu die obige Konfiguration.

Dabei seien die Voraussetzungen

$$(1) \quad a \vee b \parallel a' \vee b' \quad \text{und} \quad b \vee c \parallel b' \vee c'$$

des Satzes von DESARGUES 3.1 erfüllt, die Punkte seien paarweise verschieden und w sei der gemeinsame Schnittpunkt der paarweise verschiedenen Geraden $a \vee a'$, $b \vee b'$ und $c \vee c'$.

Im Falle $b \vee b' \parallel a \vee c$ und $b \vee b' \parallel a' \vee c'$ gilt $a \vee c \parallel a' \vee c'$, also die Aussage des Satzes von DESARGUES. Nach eventueller Vertauschung von F und G darf man ohne Einschränkung

$$(2) \quad b \vee b' \parallel a' \vee c'$$

annehmen und kann die Punkte p, q, w durch

$$(3) \quad p := c(b \vee b') \wedge (a \vee a'), \quad q := c(b \vee b') \wedge (a' \vee c'), \quad w = (b \vee b') \wedge (a \vee a')$$

definieren. Würde $q = b'$ gelten, so erhält man $c \in b \vee b'$ als Widerspruch. Aus $q = c'$ bekommt man $c \vee c' \parallel b \vee b'$ als Widerspruch. Nimmt man zunächst an, dass $b \vee c$ und $q \vee b'$ parallel sind, so folgt mit (1) bereits $q \in b' \vee c'$. Nach (3) gilt $q \in a' \vee c'$. Also sind dann a', b', c' kollinear und (1) impliziert, dass a, b, c auf einer zu $a' \vee c'$ parallelen Gerade liegen. Also gilt dann insbesondere auch der Satz von DESARGUES $a \vee c \parallel a' \vee c'$.

Daher können wir annehmen, dass der Schnittpunkt

$$(4) \quad r := (b \vee c) \wedge (q \vee b')$$

existiert. Nun wendet man den Satz von PAPPUS an auf die Punkte

(i) w, c, c' und r, b', q : Wegen (1) gilt $r \vee c \parallel b' \vee c'$, wegen (3) gilt $w \vee b' \parallel c \vee q$. Es folgt

$$(5) \quad r \vee w \parallel c' \vee q.$$

(ii) r, q, b' und p, w, a' : Wegen (5) und (3) ist $r \vee w \parallel a' \vee q$, wegen (3) hat man dann $b' \vee w \parallel q \vee p$. Es folgt mit (1)

$$(6) \quad p \vee r \parallel a' \vee b' \parallel a \vee b.$$

(iii) w, p, a und r, b, c : Wegen (6) ist $p \vee r \parallel a \vee b$, wegen (3) gilt $c \vee p \parallel b \vee w$. Es folgt

$$(7) \quad r \vee w \parallel a \vee c.$$

Aus (7), (5) und (3) erhält man $a \vee c \parallel a' \vee c'$. □

3. Äquivalenzsatz. Ist $\mathbf{A} = (\mathbb{P}, \mathbb{G})$ eine DESARGUES-Ebene mit Multiplikatoren-Schiefkörper $K(\mathbf{A})$, dann sind äquivalent:

- (i) In \mathbf{A} gilt der Satz von PAPPUS.
- (ii) $K(\mathbf{A})$ ist kommutativ.

Zum Beweis geht man von einer PAPPUS-Konfiguration aus, bei der o, a, b in allgemeiner Lage sind und bei der man wegen Proposition 3.2 die sechs Punkte gleich in der angegebenen Art wählen kann.

Behauptung A. Die Voraussetzungen des Satzes von PAPPUS in Abb. 15 bedeuten gerade

$$\beta^{-1} = \gamma \quad \text{und} \quad \delta^{-1} = \alpha.$$

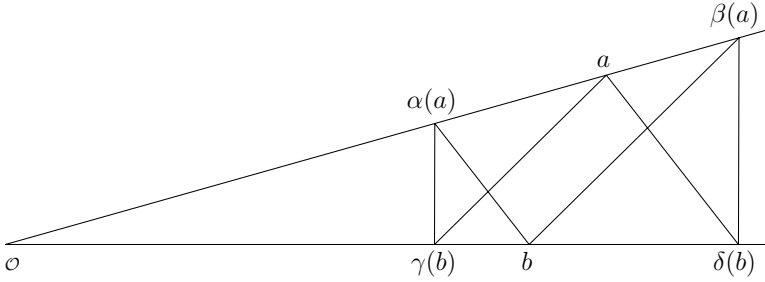


Abb. 15: PAPPUS-Konfiguration in einer DESARGUES-Ebene

Beweis. Die Voraussetzungen bedeuten $\alpha(a) \vee b \parallel a \vee \delta(b)$ und $\gamma(b) \vee a \parallel b \vee \beta(a)$. Nach Korollar 3.2 ist das äquivalent mit der Existenz von $\varphi, \psi \in K(\mathbb{A})$, so dass $a - \delta(b) = \varphi(\alpha(a) - b)$ und $b - \beta(a) = \psi(\gamma(b) - a)$. Da o, a, b in allgemeiner Lage sind, ist dies wegen Satz 3.2 gleichwertig mit

$$\varphi \circ \alpha = \mathbb{1}, \quad \delta = \varphi, \quad \psi \circ \gamma = \mathbb{1}, \quad \psi = \beta \quad \square$$

Behauptung B. Die Behauptung des Satzes von PAPPUS in Abb. 15 bedeutet genau

$$\alpha \circ \beta^{-1} = \gamma \circ \delta^{-1}.$$

Beweis. Die Behauptung $\alpha(a) \vee \gamma(b) \parallel \beta(a) \vee \delta(b)$ ist wieder gleichwertig mit der Existenz eines $\varphi \in K(\mathbb{A})$ mit $\alpha(a) - \gamma(b) = \varphi(\beta(a) - \delta(b))$, also mit $\alpha = \varphi \circ \beta$ und $\gamma = \varphi \circ \delta$, d.h. mit $\alpha \circ \beta^{-1} = \gamma \circ \delta^{-1}$. \square

Ein Vergleich beider Behauptungen vollendet den Beweis, fürwahr ein Mirakel. $\square\square$

Damit können nun die Sätze A und B aus 3.4 umformuliert werden als

Satz A. Jede affine Koordinatenebene über einem Körper K ist eine PAPPUS-Ebene.

Satz B. Ist \mathbb{A} eine PAPPUS-Ebene mit Multiplikatoren-Körper $K = K(\mathbb{A})$, dann ist \mathbb{A} affin isomorph zur affinen Koordinatenebene über K .

4. Satz von WEDDERBURN. Jeder endliche Schiefkörper ist kommutativ, also ein Körper.

Dieser berühmte algebraische Satz wurde von J.H.M. WEDDERBURN (1882–1948) im Jahre 1905 bewiesen (*A theorem on finite algebras*, Trans. Am. Math. Soc. **6**, 349–352). Einen modernen Beweis findet man bei E. ARTIN (1957), Theorem 1.14. Kombiniert man diesen Satz mit dem Äquivalenzsatz 3, so erhält man den folgenden rein geometrischen

Satz. In jeder endlichen DESARGUES-Ebene gilt der Satz von PAPPUS.

Denn in einer endlichen Ebene ist natürlich auch der Multiplikatoren-Schiefkörper nach Satz 3.2 endlich. Ein rein geometrischer Beweis dieses Satzes stammt von H. TECKLENBURG (J. Geom. **30**, 172–181 (1987)).

§ 5 Euklidische Ebenen

1. Einleitung. Die affinen Ebenen, die ursprünglich in 1.1 durch die Inzidenz-Axiome eingeführt und an die im Verlauf dieses Kapitels weitere Forderungen wie Transitivität der Translationsgruppe und Gültigkeit von geometrischen Sätzen (DESARGUES bzw. PAPPUS) gestellt wurden, sollen nun durch metrische Eigenschaften weiter eingeschränkt werden. Aber auch ohne diese Einschränkung kann man in Koordinatenebenen über beliebigen Körpern interessante „Geometrie“ betreiben. Einfachste Beispiele werden im Kapitel II behandelt. In allen diesen Geometrien kann man weder Längen noch Entfernungen von Punkten noch Größen von Flächen messen. Dazu braucht man in irgendeiner Form die reellen Zahlen (oder allgemeiner einen reell-abgeschlossenen Körper).

Die hier verwendete Vorgehensweise unterscheidet sich von der in der Literatur üblichen: Meist prägt man den Geraden einer DESARGUES-Ebene oder einer PAPPUS-Ebene mit Hilfe von Anordnungs- und Vollständigkeits-Axiomen die Struktur der reellen Zahlen auf, ohne von den reellen Zahlen selbst Gebrauch zu machen: Die reellen Zahlen werden durch die Geometrie neu geschaffen! Der vorliegende Text fordert dagegen die Existenz einer vollständigen Metrik auf der Menge \mathbb{P} der Punkte, die mit der affinen Struktur verträglich ist.

2. Normierte Gruppen. Ein Paar $(X; \|\cdot\|)$ heißt eine *normierte Gruppe*, wenn $X = (X; +)$ eine additiv geschriebene abelsche Gruppe und die Abbildung $X \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$, eine *Norm* von X in dem folgenden üblichen Sinne ist: Für alle $x, y \in X$ gilt

(N.1) $\|x\| \geq 0$ und $\|x\| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$,

(N.2) $\|-x\| = \|x\|$,

(N.3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Ist $(X; \|\cdot\|)$ eine normierte Gruppe, dann ist

$$\pi : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \pi(x, y) := \|x - y\|,$$

eine *Metrik* von X und $(X; \pi)$ ein *metrischer Raum*. Man kann die metrischen Begriffe auf die Norm beziehen: Eine Folge $(x_k)_{k \geq 1}$ in X heißt *konvergent*, wenn es ein $a \in X$ gibt mit $\|a - x_k\| \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$. Der *Limes* a ist eindeutig bestimmt und man schreibt $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k := a$. Eine Teilmenge Y von X heißt *abgeschlossen*, wenn für jede konvergente Folge $(x_k)_{k \geq 1}$ in Y auch der Limes zu Y gehört. Eine Folge $(x_k)_{k \geq 1}$ in X heißt *CAUCHY-Folge*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $\|x_k - x_l\| < \varepsilon$ für alle $k, l \geq N$. Die normierte Gruppe $(X; \|\cdot\|)$ heißt *vollständig*, wenn jede CAUCHY-Folge in X konvergiert.

Ist X überdies ein Vektorraum über \mathbb{R} , dann nennt man $x \mapsto \|x\|$ eine *Vektornorm*, wenn zusätzlich

$$(N.3^*) \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\| \quad \text{für } \alpha \in \mathbb{R} \text{ und } x \in X$$

gilt. Wir nennen $(X; \|\cdot\|)$ eine *normierte Gruppe mit Parallelogramm-Gesetz*, wenn in der normierten Gruppe $(X; \|\cdot\|)$ das

$$\textbf{Parallelogramm-Gesetz:} \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

für alle $x, y \in X$ gilt.

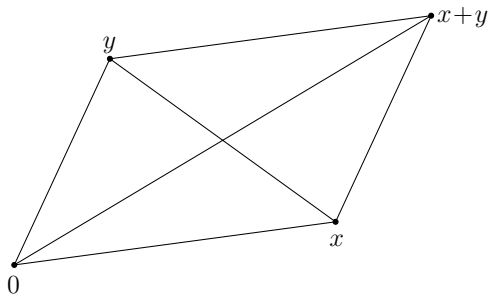


Abb. 16: Parallelogramm-Gesetz

Lemma. Ist $(X; \|\cdot\|)$ eine normierte Gruppe mit Parallelogramm-Gesetz und definiert man die symmetrische Abbildung

$$(1) \quad \sigma : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \sigma(x, y) := \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) \quad \text{für } x, y \in X,$$

dann gelten die folgenden Beziehungen für $x, y, z \in X$:

$$(2) \quad \sigma(x + y, z) = \sigma(x, z) + \sigma(y, z),$$

$$(3) \quad \sigma(x, x) = \|x\|^2,$$

$$(4) \quad \sigma(mx, ny) = mn \cdot \sigma(x, y) \quad \text{für } m, n \in \mathbb{Z}.$$

Beweis. σ ist wegen (N.2) symmetrisch und erfüllt $\sigma(0, y) = 0$ für alle $y \in \mathbb{P}$. Ersetzt man im Parallelogramm-Gesetz x durch $z \pm y$ und y durch $x \pm y$, so folgt

$$\|x + z + 2y\|^2 + \|z - x\|^2 = 2\|z + y\|^2 + 2\|x + y\|^2$$

und

$$\|x + z - 2y\|^2 + \|z - x\|^2 = 2\|z - y\|^2 + 2\|x - y\|^2.$$

Eine Subtraktion ergibt

$$(*) \quad \sigma(x + z, 2y) = 2 \cdot \sigma(z, y) + 2 \cdot \sigma(x, y).$$

Für $z = 0$ erhält man $\sigma(x, 2y) = 2 \cdot \sigma(x, y)$ und (2) folgt aus (*). Nun setzt man $y = x$ im Parallelogramm-Gesetz und in (1). Man erhält (3). Wegen (1) und (N.2) gilt zunächst $\sigma(-x, y) = \sigma(x, -y) = -\sigma(x, y)$ und eine Induktion über m ergibt $\sigma(mx, y) = m \cdot \sigma(x, y)$ für $m \in \mathbb{N}$. Zusammen erhält man (4). \square

Aus $\sigma(mx, mx) = m^2 \|x\|^2$ und (N.1) folgt das

Korollar. *Eine normierte Gruppe mit Parallelogramm-Gesetz hat keine Torsion, d.h., für $0 \neq m \in \mathbb{Z}$ und $0 \neq x \in X$ gilt $mx \neq 0$.*

Bemerkungen. a) An Stelle einer normierten Gruppe kann man – scheinbar allgemeiner – von einer Gruppe X mit translationsinvarianter Metrik sprechen. b) Das Lemma geht auf eine Arbeit von J. VON NEUMANN (1903–1957) und P. JORDAN (1902–1980) aus dem Jahre 1935 (Ann. Math. (2) **36**, 719–723) zurück, in der mit dem Parallelogramm-Gesetz diejenigen normierten Vektorräume charakterisiert werden, in denen die Norm durch ein geeignetes Skalarprodukt definiert werden kann.

Aufgaben. a) Sei X eine endliche abelsche Gruppe. Dann existiert eine Norm auf X , aber X ist keine normierte Gruppe mit Parallelogramm-Gesetz.

b) $(\mathbb{Z}, \|\cdot\|)$ ist genau dann eine normierte Gruppe mit Parallelogramm-Gesetz, wenn es ein $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, gibt mit $\|x\| = \alpha|x|$ für alle $x \in \mathbb{Z}$.

c) Die Maximumsnorm $\|x\| = \max\{|x_1|, |x_2|\}$ auf \mathbb{R}^2 erfüllt nicht das Parallelogramm-Gesetz.

3. Metrische Translationsebenen. Ein Tripel $\mathbf{A} = (\mathbb{P}, \mathbb{G}; \|\cdot\|)$ heißt eine *metrische Translationsebene*, wenn die Axiome (MT.1) bis (MT.3) gelten:

(MT.1) (\mathbb{P}, \mathbb{G}) ist eine Translationsebene.

Mit der Wahl eines festen Punktes σ wird \mathbb{P} zu einer additiven Gruppe. Es sei $K(\mathbf{A}) = K(\mathbb{P}, \mathbb{G})$ der zugehörige Multiplikatoren-Schiefkörper nach 2.6.

(MT.2) $(\mathbb{P}; \|\cdot\|)$ ist eine vollständige normierte Gruppe mit Parallelogramm-Gesetz.

(MT.3) Die Geraden $G \in \mathbb{G}$ sind abgeschlossene Teilmengen von \mathbb{P} .

Fordert man zusätzlich die Gültigkeit des Satzes von DESARGUES bzw. PAPPUS, so spricht man natürlich von einer *metrischen DESARGUES-Ebene* bzw. von einer *metrischen PAPPUS-Ebene*.

Sind $\mathbf{A} = (\mathbb{P}, \mathbb{G}; \|\cdot\|)$ und $\mathbf{A}' = (\mathbb{P}', \mathbb{G}'; \|\cdot\|')$ zwei metrische Translationsebenen, so heißt ein affiner Isomorphismus $\varphi : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}'$, der $\|x\| = \|\varphi(x)\|'$ für alle $x \in \mathbb{P}$ erfüllt, ein *metrischer affiner Isomorphismus*. Dann nennt man \mathbf{A} und \mathbf{A}' natürlich auch *metrisch affin isomorph*.

Nun sei $\mathbf{A} = (\mathbb{P}, \mathbb{G}; \|\cdot\|)$ eine metrische Translationsebene. Man beachte, dass die Endomorphismen $x \mapsto mx$, $m \in \mathbb{Z}$, von \mathbb{P} zu $K(\mathbf{A})$ gehören. Aus (MT.2)

und Korollar 2 erhält man daher die

Proposition. *Ist $\mathbf{A} = (\mathbb{P}, \mathbb{G}; \|\cdot\|)$ eine metrische Translationsebene, dann hat der Multiplikatoren-Schiefkörper $K(\mathbf{A})$ die Charakteristik Null.*

Der Körper \mathbb{Q} der rationalen Zahlen kann dann mittels $r \mapsto r \cdot \mathbb{1}$ ins Zentrum von $K(\mathbf{A})$ eingebettet werden. Damit kann $K(\mathbf{A})$ als \mathbb{Q} -Vektorraum aufgefasst werden. Lemma 2 entnimmt man daher das

Lemma. *Sei $\mathbf{A} = (\mathbb{P}, \mathbb{G}; \|\cdot\|)$ eine metrische Translationsebene. Durch*

$$(1) \quad \sigma(x, y) := \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) \quad \text{für } x, y \in \mathbb{P}$$

ist eine symmetrische positiv definite Bilinearform des \mathbb{Q} -Vektorraums \mathbb{P} definiert. Es gilt

$$(2) \quad \sigma(x, x) = \|x\|^2 \quad \text{für } x \in \mathbb{P}$$

und speziell

$$(3) \quad \|rx\| = |r| \cdot \|x\| \quad \text{für } r \in \mathbb{Q} \text{ und } x \in \mathbb{P}.$$

Bis jetzt wurde nicht verwendet, dass die Norm $x \mapsto \|x\|$ nach (MT.2) einen vollständigen metrischen Raum definiert.

Satz. *Ist $\mathbf{A} = (\mathbb{P}, \mathbb{G}; \|\cdot\|)$ eine metrische Translationsebene, so enthält das Zentrum von $K(\mathbf{A})$ einen zu \mathbb{R} isomorphen Teilkörper. Genauer gibt es einen injektiven Homomorphismus $r \mapsto \alpha_r$ von \mathbb{R} in das Zentrum von $K(\mathbf{A})$ mit den Eigenschaften*

$$(4) \quad \sigma(\alpha_r(x), y) = r \cdot \sigma(x, y) \quad \text{und} \quad \|\alpha_r(x)\| = |r| \cdot \|x\|$$

für alle $x, y \in \mathbb{P}$ und $r \in \mathbb{R}$. Mit der Skalarmultiplikation

$$(5) \quad (r, x) \mapsto r \cdot x := \alpha_r(x) \quad \text{für } r \in \mathbb{R} \text{ und } x \in \mathbb{P}$$

wird \mathbb{P} zu einem Vektorraum über \mathbb{R} und $\sigma : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}$ zu einer positiv definiten Bilinearform des \mathbb{R} -Vektorraums \mathbb{P} .

Beweis. Für $r \in \mathbb{R}$ sei $(r_k)_{k \geq 1}$ eine konvergente Folge aus \mathbb{Q} mit Limes r . Wegen (3) gilt $\|r_k x - r_l x\| = |r_k - r_l| \cdot \|x\|$ für $k, l \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{P}$. Damit ist $(r_k x)_{k \geq 1}$ eine CAUCHY-Folge in \mathbb{P} . Nach (MT.2) gibt es ein $\alpha_r(x) \in \mathbb{P}$ mit

$$(*) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} r_k x = \alpha_r(x).$$

Offenbar definiert $x \mapsto \alpha_r(x)$, $x \in \mathbb{P}$, einen Endomorphismus α_r von \mathbb{P} . Für $o \neq x \in \mathbb{P}$ gilt natürlich $r_k x \in o \vee x$. (MT.3) liefert $\alpha_r(x) \in o \vee x$. Aus 2.6(4) ergibt sich $\alpha_r \in K(\mathbf{A})$. Dann folgt (4) aus (*) und (1). Mit $r_k \cdot \mathbb{1}$, $k \in \mathbb{N}$, liegt auch α_r im Zentrum von $K(\mathbf{A})$. Die fehlenden Aussagen über die skalare Multiplikation folgen wieder aus (*). \square

Aufgabe. Für welche der folgenden Normen $\|\cdot\|$ ist $(\mathbb{A}_2(\mathbb{R}); \|\cdot\|)$ eine metrische Translationsebene? Wie sieht die zugehörige Bilinearform aus?

(i) $\|x\| = |x_1| + |x_2|$, (ii) $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2}$, (iii) $\|x\| = \sqrt{2x_1^2 + 3x_2^2}$.

4. Euklidische Ebenen. Es sei $\mathbb{A} = (\mathbb{P}, \mathbb{G}; \|\cdot\|)$ eine metrische DESARGUES-Ebene, also eine metrische Translationsebene, für die (\mathbb{P}, \mathbb{G}) eine DESARGUES-Ebene ist. Nach 3.2(4) erhält man die Geraden von \mathbb{G} genau in der Form

$$(1) \quad G_{a,u} := \{a + \alpha(u) : \alpha \in K(\mathbb{A})\}, \quad a, u \in \mathbb{P}, \quad u \neq o,$$

wobei $K = K(\mathbb{A})$ der Multiplikatoren-Schiefkörper der DESARGUES-Ebene ist. Nach Satz 3 kann nun außerdem angenommen werden:

- (2) $\mathbb{R} \cdot \mathbb{1}$ ist ein Unterkörper von K .
- (3) \mathbb{P} ist ein Vektorraum über \mathbb{R} .
- (4) Durch $\sigma(x, y) := \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$ für $x, y \in \mathbb{P}$ ist eine symmetrische, positiv definite Bilinearform auf \mathbb{P} erklärt.
- (5) $\sigma(x, x) = \|x\|^2$ für $x \in \mathbb{P}$.

Man betrachte die folgende Konfiguration, wobei G, G' parallele Geraden sind und wobei sich $a \vee a'$ und $b \vee b'$ in einem Punkt p schneiden. Der **Strahlensatz** der klassischen Geometrie würde dann

$$\frac{\|a' - p\|}{\|a - p\|} = \frac{\|b' - p\|}{\|b - p\|} = \frac{\|a' - b'\|}{\|a - b\|}$$

bedeuten. Wegen (1) und Lemma 3.2 ist dies schon der Fall, wenn

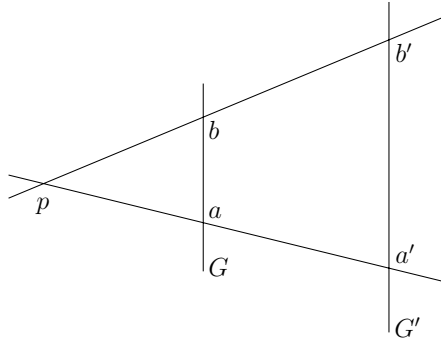


Abb. 17: Strahlensatz

$$(S) \quad \frac{\|\alpha(x)\|}{\|x\|} = \frac{\|\alpha(y)\|}{\|y\|} \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{P} \setminus \{o\} \text{ und } \alpha \in K(\mathbb{A}).$$

Eine metrische PAPPUS-Ebene \mathbb{A} , in welcher der Strahlensatz (S) gilt, soll eine *euklidische Ebene* genannt werden.

Lemma. Sei \mathbb{A} eine euklidische Ebene mit Multiplikatoren-Körper K . Dann gibt es eine Abbildung $K \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha \mapsto |\alpha|$, mit folgenden Eigenschaften:

- a) $\alpha \mapsto |\alpha|$ ist eine Norm von K , die $|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ für $\alpha, \beta \in K$ erfüllt.
- b) Für $r \in \mathbb{R}$ stimmt $|r \cdot \mathbb{1}|$ mit dem gewöhnlichen Betrag der reellen Zahl r überein.
- c) Es gibt eine symmetrische, positiv definite Bilinearform $\tau : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$ des \mathbb{R} -Vektorraums K mit der Eigenschaft $|\alpha|^2 = \tau(\alpha, \alpha)$ für $\alpha \in K$.
- d) Für $x, y \in \mathbb{P}$ und $\alpha \in K$ gilt $\sigma(\alpha(x), \alpha(y)) = \tau(\alpha, \alpha) \cdot \sigma(x, y)$.

Wegen Teil a) nennt man $\alpha \mapsto |\alpha|$ auch *reelle Bewertung von K* . Da K den Körper $\mathbb{R} \cdot \mathbb{1}$ enthält, kann K in Teil c) als Vektorraum über \mathbb{R} aufgefasst werden.

Beweis. Nach (S) ist

$$(*) \quad |\alpha| := \frac{\|\alpha(x)\|}{\|x\|}, \quad x \neq \mathcal{O},$$

unabhängig von $x \in \mathbb{P}$. Wegen (4) hängt dann aber auch

$$(**) \quad \tau(\alpha, \beta) := \frac{\sigma(\alpha(x), \beta(x))}{\sigma(x, x)} = \frac{1}{4} (|\alpha + \beta|^2 - |\alpha - \beta|^2)$$

nicht von $\mathcal{O} \neq x \in \mathbb{P}$ ab. Damit ist τ eine positiv definite Bilinearform auf K und die Teile c) und d) sind bewiesen. Wegen (*) bekommt man Teil a) für $\beta \neq \mathcal{O}$ aus

$$|\alpha\beta| = \frac{\|\alpha\beta(x)\|}{\|x\|} = \frac{\|\alpha\beta(x)\|}{\|\beta(x)\|} \cdot \frac{\|\beta(x)\|}{\|x\|} = |\alpha| \cdot |\beta|$$

und Teil b) aus (4). □

Damit erhält man nun den finalen

Satz. Ist \mathbf{A} eine euklidische Ebene, dann gilt $K = \mathbb{R} \cdot \mathbb{1}$ oder $K \cong \mathbb{C} \cdot \mathbb{1}$.

Beweis. Es sei $\tau : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$ die symmetrische, positiv definite Bilinearform mit $|\alpha|^2 = \tau(\alpha, \alpha)$, $\alpha \in K$, nach Teil c) des Lemmas. Aufgrund von Teil a) des Lemmas gilt also

$$(*) \quad \tau(\alpha\beta, \alpha\beta) = \tau(\alpha, \alpha) \cdot \tau(\beta, \beta) \quad \text{für } \alpha, \beta \in K.$$

Hier wird nun „linearisiert“, d.h., man ersetzt α durch $\alpha + \gamma$, β durch $\beta + \delta$ mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in K$ und vergleicht die in $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ linearen Terme. Es folgt

$$(**) \quad \tau(\alpha\beta, \gamma\delta) + \tau(\gamma\beta, \alpha\delta) = 2 \cdot \tau(\alpha, \gamma) \cdot \tau(\beta, \delta).$$

Für $\gamma = \alpha$, $\delta = \mathbb{1}$ bzw. $\beta = \alpha$, $\gamma = \mathbb{1}$ erhält man

$$\tau(\alpha\beta, \alpha) = \tau(\alpha, \alpha) \cdot \tau(\beta, \mathbb{1})$$

bzw.

$$\tau(\alpha^2, \delta) + \tau(\alpha, \alpha\delta) = 2 \cdot \tau(\alpha, \mathbb{1}) \cdot \tau(\alpha, \delta).$$

Nun trägt man die erste Gleichung (für $\beta = \delta$) in die zweite ein und bekommt

$$\tau(\alpha^2 - 2\tau(\alpha, \mathbb{1}) \cdot \alpha + \tau(\alpha, \alpha) \cdot \mathbb{1}, \delta) = 0 \quad \text{für alle } \alpha, \delta \in K.$$

Da τ nicht-ausgeartet ist, folgt

$$(***) \quad \alpha^2 - 2\tau(\alpha, \mathbb{1}) \cdot \alpha + \tau(\alpha, \alpha) \cdot \mathbb{1} = \mathcal{O} \quad \text{für alle } \alpha \in K.$$

Im Falle $K \neq \mathbb{R} \cdot \mathbb{1}$ wählt man ein $\alpha \in K \setminus \mathbb{R} \cdot \mathbb{1}$. Der Unterkörper L von K , der von $\mathbb{R} \cdot \mathbb{1}$ und α erzeugt wird, hat nach (***) den Grad 2. Für beliebiges $\beta \in K$

ist aber der Grad von $L(\beta)$ über K ebenfalls 2 und die Gradrelation ergibt $\beta \in L$, also $K = L$. Da \mathbb{C} bis auf Isomorphie die einzige Körpererweiterung von \mathbb{R} vom Grad 2 ist, folgt $K \cong \mathbb{C}$. \square

Bemerkungen. a) Beim Beweis des Satzes wurde nur ausgenutzt, dass K wegen $(*)$ eine so genannte *Kompositionsalgebra über \mathbb{R}* mit Einselement ist. Ein analoger, aber technisch aufwändigerer Beweis wird in der Theorie der Kompositionsalgebren geführt. Man vergleiche *Zahlen* (1992), 10.1.3.

b) Nach Teil a) des Lemmas ist K durch die Norm $\alpha \mapsto |\alpha|$ bewertet. Wenn man den Satz von OSTROWSKI (*Zahlen* (1992), 8.4.6) verwendet, wonach jede bewertete kommutative \mathbb{R} -Algebra mit Eins zu \mathbb{R} oder \mathbb{C} isomorph ist, dann kann man auf den Beweis des Satzes verzichten.

Aufgaben. a) Man gebe ein Beispiel einer metrischen Translationsebene an, in der der Strahlensatz (S) nicht gilt.

b) Sei $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ und $\|x\| := \sqrt{x^t x}$ für $x \in K^2$. Dann ist $(\mathbb{A}_2(K); \|\cdot\|)$ eine euklidische Ebene.

5. Hauptsatz für euklidische Ebenen. Sei $\mathbf{A} = (\mathbb{P}, \mathbb{G}; \|\cdot\|)$ eine euklidische Ebene. Dann ist \mathbf{A} metrisch affin isomorph

entweder zur

(I) affinen Koordinatenebene \mathbb{R}^2 über \mathbb{R} , wobei die Norm durch das gewöhnliche Skalarprodukt $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle := x^t y$ des Vektorraums \mathbb{R}^2 gegeben ist,

oder zur

(II) affinen Koordinatenebene \mathbb{C}^2 über \mathbb{C} , wobei die Norm durch die symmetrische positiv definite Bilinearform $(x, y) \mapsto \langle \operatorname{Re} x, \operatorname{Re} y \rangle + \langle \operatorname{Im} x, \operatorname{Im} y \rangle$, falls $x = \operatorname{Re} x + i \operatorname{Im} x$, des \mathbb{R} -Vektorraums \mathbb{C}^2 gegeben ist.

Umgekehrt wird sowohl durch (I) als auch durch (II) eine euklidische Ebene gegeben.

Beweis. Man kombiniere Satz 4.3B mit Satz 4 und Lemma 4. Dann ist \mathbf{A} metrisch affin isomorph zur affinen Koordinatenebene K^2 , $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, wobei die Norm durch eine symmetrische, positiv definite Bilinearform σ des \mathbb{R} -Vektorraums K^2 gegeben ist, die $\sigma(\rho x, \rho y) = |\rho|^2 \cdot \sigma(x, y)$ für alle $x, y \in K^2$ und $\rho \in K$ erfüllt. Aus der Existenz von Orthonormalbasen (vgl. M. KOECHER (1997), 5.2.3) folgt für $K = \mathbb{R}$, dass es ein $M \in \operatorname{GL}(2; \mathbb{R})$ gibt mit $\sigma(Mx, My) = \langle x, y \rangle$.

Sei also $K = \mathbb{C}$ und e_1, e_2 die kanonische Basis von \mathbb{R}^2 . Dann ist e_1, ie_1, e_2, ie_2 eine Basis des \mathbb{R} -Vektorraums \mathbb{C}^2 . Bezüglich dieser Basis hat die Matrix von σ die Gestalt

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha} & \hat{\beta} \\ \hat{\beta} & \hat{\gamma} \end{pmatrix}, \quad \alpha = \sigma(e_1, e_1), \quad \gamma = \sigma(e_2, e_2), \quad \beta = \sigma(e_1, e_2) + i\sigma(ie_1, e_2).$$

Dabei ist

$$\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & -\alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad \alpha = \alpha_1 + i\alpha_2 \in \mathbb{C}$$

die übliche Matrixdarstellung (vgl. *Zahlen* (1992), 3.2.5). Da $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$ positiv definit ist, gibt es ein $M \in \text{GL}(2; \mathbb{C})$ mit $\overline{M}^t \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} M = E$. Dann hat man

$$\sigma(Mx, My) = \langle \text{Re } x, \text{Re } y \rangle + \langle \text{Im } x, \text{Im } y \rangle.$$

Also ist in beiden Fällen $x \mapsto Mx$ der gesuchte metrische affine Isomorphismus. Wegen $K(\mathbb{A}) = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sind die Koordinatenebenen in (I) und (II) nicht affin isomorph.

Für die Umkehrung hat man lediglich Parallelogramm-Gesetz und Strahlensatz (vgl. III.2.1) zu verifizieren. \square

Im Fall (I) wird man von der *reellen euklidischen Ebene*, im Fall (II) von der *komplexen euklidischen Ebene* sprechen.

Bemerkung. Im Fall $K = \mathbb{C}$ darf die Bilinearform σ nach (II) nicht mit der üblichen hermiteschen Form $(x, y) \mapsto \overline{x}^t y$ verwechselt werden, denn diese ist nicht reellwertig. Es gilt jedoch $\overline{x}^t x = \|x\|^2$ für $x \in \mathbb{C}^2$.

Aufgabe. Sei \mathbb{H} der Quaternionen-Schiefkörper über \mathbb{R} . Dann ist $(A(\mathbb{H}); \|\cdot\|)$ mit $\|x\| := \sqrt{\overline{x}^t x}$ eine metrische DESARGUES-Ebene, in der der Strahlensatz gilt.

Ebene Geometrie

Koecher, M.; Krieg, A.

2007, XII, 280 S. 109 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-540-49327-3