
Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Aspekte der Hamiltonschen Mechanik	9
1.1 Analytische Aspekte der Hamiltonschen Mechanik	10
1.2 Geometrische Aspekte der Hamiltonschen Mechanik	12
1.2.1 Geometrische Eigenschaften von Flüssen	12
1.2.2 Hamiltonsche Flüsse	13
1.2.3 Die symplektische Form	15
1.3 Algebraische Aspekte der Hamiltonschen Mechanik	16
1.3.1 Observable und Zustände	16
1.3.2 Die Poisson-Klammer und die Zeitentwicklung	20
1.4 Warum „Geometrische Mechanik“	21
1.5 Aufgaben	22
2 Differentialgeometrische Grundlagen	29
2.1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten	30
2.1.1 Karten und Atlanten	30
2.1.2 Tangentialvektoren und das Tangentenbündel	35
2.1.3 Vektorfelder, Flüsse und Lie-Klammern	41
2.2 Vektorbündel	45
2.2.1 Bündelkarten und erste Eigenschaften	46
2.2.2 Konstruktionen von Vektorbündeln	50
2.2.3 Algebraische Strukturen für Schnitte von Vektorbündeln	54
2.2.4 Kovariante Ableitungen und Krümmung	60
2.2.5 Orientierung und α -Dichtenbündel	63
2.3 Kalkül auf Mannigfaltigkeiten	72
2.3.1 Tensorfelder und Lie-Ableitung	72
2.3.2 Differentialformen	75
2.3.3 Multivektorfelder und die Schouten-Nijenhuis-Klammer	82
2.3.4 Integration auf Mannigfaltigkeiten	87
2.4 Aufgaben	92

3	Symplektische Geometrie	105
3.1	Symplektische Mannigfaltigkeiten als Phasenräume	105
3.1.1	Definitionen und erste Eigenschaften	106
3.1.2	Hamiltonsche Vektorfelder und Poisson-Klammern	108
3.1.3	Das Darboux-Theorem	113
3.2	Beispiele von symplektischen Mannigfaltigkeiten	118
3.2.1	Kotangentenbündel	118
3.2.2	Von Lagrangescher zu Hamiltonscher Mechanik	130
3.2.3	Fast-Komplexe Strukturen und Kähler-Mannigfaltigkeiten	138
3.3	Impulsabbildungen und Phasenraumreduktion	151
3.3.1	Lie-Gruppen und Gruppenwirkungen	152
3.3.2	Impulsabbildungen	175
3.3.3	Die Marsden-Weinstein-Reduktion	185
3.4	Aufgaben	191
4	Poisson-Geometrie	209
4.1	Poisson-Mannigfaltigkeiten	210
4.1.1	Poisson-Klammern und Poisson-Tensoren	211
4.1.2	Hamiltonsche und Poisson-Vektorfelder	215
4.1.3	Beispiele von Poisson-Mannigfaltigkeiten	218
4.1.4	Symplektische Blätterung und das <i>Splitting</i> -Theorem	225
4.1.5	Poisson-Abbildungen	233
4.2	Lie-Algebroiden und Poisson-Kohomologie	237
4.2.1	Lie-Algebroiden	238
4.2.2	Poisson-Kohomologie	247
4.2.3	Die fundamentale und die modulare Klasse	253
4.2.4	Formale Poisson-Tensoren	257
4.3	Aufgaben	271
5	Quantisierung: Erste Schritte	281
5.1	Die Problemstellung	281
5.1.1	Klassische Mechanik und Quantenmechanik im Vergleich	283
5.1.2	Quantisierung und klassischer Limes	288
5.2	Kanonische Quantisierung für polynomiale Funktionen	292
5.2.1	Das Groenewold-van Hove-Theorem	294
5.2.2	Ordnungsvorschriften: Standard- und Weyl-Ordnung	299
5.2.3	Wick-, Anti-Wick- und $\hbar$ -Ordnung	303
5.2.4	Die ersten Sternprodukte	306
5.3	Symbolkalkül für Pseudodifferentialoperatoren	314
5.3.1	Integralformeln und Pseudodifferentialoperatoren	315
5.3.2	Integralformeln für die Sternprodukte	324
5.3.3	Asymptotische Entwicklungen und ihre Konvergenz	331
5.3.4	Asymptotische Entwicklung und klassischer Limes	336
5.4	Geometrische Verallgemeinerung: Kotangentenbündel	337

5.4.1	Standardgeordnete Quantisierung auf T^*Q	338
5.4.2	κ -Ordnung und Sternprodukte auf T^*Q	347
5.5	Aufgaben	355
6	Formale Deformationsquantisierung	371
6.1	Sternprodukte auf Poisson-Mannigfaltigkeiten	372
6.1.1	Ziele und Erwartungen	372
6.1.2	Die Definition von Sternprodukten	374
6.1.3	Existenz und Klassifikation von Sternprodukten	380
6.2	Algebraische Deformationstheorie nach Gerstenhaber	386
6.2.1	λ -Adische Topologie und der Banachsche Fixpunktsatz	389
6.2.2	Die Gerstenhaber-Klammer und der Hochschild-Komplex	393
6.2.3	Formale Deformationen assoziativer Algebren	402
6.2.4	Eine formale assoziative Deformation	410
6.2.5	Das Hochschild-Kostant-Rosenberg-Theorem	413
6.3	Kalkül mit Sternprodukten	419
6.3.1	Inverse, Exponential- und Logarithmusfunktion	419
6.3.2	Derivationen von Sternprodukten	423
6.3.3	Automorphismen von Sternprodukten	429
6.3.4	Zeitentwicklung und die Heisenberg-Gleichung	433
6.3.5	Spurfunktionale	437
6.4	Die Fedosov-Konstruktion	444
6.4.1	Das formale Weyl-Algebrabündel	446
6.4.2	Die Fedosov-Derivation	453
6.4.3	Die Fedosov-Taylor-Reihe und das Fedosov-Sternprodukt	464
6.4.4	Die Fedosov-Klasse	470
6.5	Aufgaben	474
7	Zustände und Darstellungen	485
7.1	Zustände als positive Funktionale	486
7.1.1	Geordnete Ringe, Prä-Hilbert-Räume und $*$ -Algebren	487
7.1.2	Positivitätsbegriffe	495
7.1.3	Positive Funktionale in der Deformationsquantisierung	501
7.1.4	Die KMS-Bedingung und thermodynamische Zustände	507
7.1.5	Positive Deformationen	512
7.2	Darstellungen und GNS-Konstruktion	517
7.2.1	Elementare Darstellungstheorie einer $*$ -Algebra	518
7.2.2	Die allgemeine GNS-Konstruktion	522
7.2.3	GNS-Darstellungen in der Deformationsquantisierung	525
7.2.4	Deformation und klassischer Limes von $*$ -Darstellungen	537
7.3	Aufgaben	544

A	Differentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten	551
A.1	Zerlegungen der Eins	551
A.2	Algebraische Definition von Differentialoperatoren	556
A.3	Differentialoperatoren der Algebra $C^\infty(M)$	560
A.4	Algebraische Definition von Multidifferentialoperatoren	566
A.5	Multidifferentialoperatoren auf Schnitten von Vektorbündeln ..	573
	Kommentiertes Literaturverzeichnis	579
	Literaturverzeichnis	583
	Sachverzeichnis	601

Poisson-Geometrie und Deformationsquantisierung

Eine Einführung

Waldmann, S.

2007, XII, 612 S. 32 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-540-72517-6