

Inégalités ponctuelles et inclusions généralisées de Sobolev

Les résultats classiques sur les inclusions de Sobolev nous indiquent que $W_0^{1,N}(\Omega)$ est contenu dans $L^q(\Omega)$ pour tout q fini, et que si $p > N$ alors $W_0^{1,p}(\Omega)$ est contenu (aussi de façon continue) dans les espaces hölderiens $C^{0,1-\frac{N}{p}}(\overline{\Omega})$. On constate qu'il "manque" des espaces intermédiaires $X(\Omega)$ satisfaisant :

$W_0^{1,p}(\Omega) \subsetneq_{\neq} X(\Omega) \subsetneq_{\neq} W_0^{1,N}(\Omega)$ et $X(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$. E.M. Stein a montré que l'espace de Lorentz-Sobolev

$$W^1(\Omega, |\cdot|_{N,1}) = \left\{ f \in L^1(\Omega) : |\nabla f| \in L^{N,1}(\Omega) \right\}$$

est contenu dans l'ensemble des fonctions continues $C(\Omega)$. Pour cela, en utilisant une représentation intégrale de f , il montre que pour tout cube $Q(h)$ de côté $|h|$, pour tout x et $x+h$ dans $Q(h)$, on a :

$$|f(x+h) - f(x)| \leq c |\nabla f \chi_{Q(h)}|_{L^{N,1}}.$$

La méthode que nous proposons dans ce chapitre nous conduira à redémontrer ce résultat mais en même temps à préciser la constante, on prouvera en particulier que $W^1(\Omega, |\cdot|_{N,1}) \subset C(\Omega)$ et $\forall u \in W^1(\Omega, |\cdot|_{N,1})$, $\forall x \in \Omega$ t.q. $B(x, r) \subset \Omega$, on a :

$$\operatorname{osc}_{B(x,r)} u \leq \frac{\alpha_N^{1-\frac{1}{N}}}{\alpha_{N-1}} \int_0^{\alpha_N r^N} t^{\frac{1}{N}-1} |\nabla u|_* \frac{dt}{t}.$$

Cette inégalité découle d'une inégalité plus générale sur $W^{1,1}(\Omega)$ stipulant que si $\overline{u}$ est la restriction de u à $B(x, r)$ alors

$$\operatorname{osc}_{B(x,r)} u \leq \frac{\alpha_N^{1-\frac{1}{N}}}{\alpha_{N-1}} \int_0^{\alpha_N r^N} s^{\frac{1}{N}-1} \left(|\nabla \overline{u}|_{*\overline{u}} \right)_*(s) ds.$$

Pour obtenir de tels résultats, revenons à une inégalité du chapitre précédent, qui s'écrit : $-u'_*(\sigma) \leq \frac{|\nabla u|_{*u}(\sigma)}{k(\sigma)}$ pour $\sigma \in \Omega_*$, u appartenant à une famille de fonctions. C'est cette inégalité ponctuelle qui permet en réalité de donner non seulement une preuve unificatrice de diverses inclusions de Poincaré-Sobolev mais aussi des extensions non classiques de ces inégalités. Mieux encore, elle conduit à des estimations des diverses constantes qui apparaissent dans ces inégalités comme par exemple, la première valeur propre du p-Laplacien $\lambda_1(\Omega)^{\frac{1}{p}} = \inf_{u \neq 0, u \in W_0^{1,p}(\Omega)} \frac{|\nabla u|_p}{|u|_p}$ ou plus généralement si

$$1 \leq q \leq p^* = \frac{pN}{N-p}, \quad 1 \leq p \leq N, \quad \text{une estimation de } \sup_{u \neq 0, u \in W_0^{1,p}(\Omega)} \frac{|u|_q}{|\nabla u|_p}.$$

On verra que l'on peut remplacer sans difficulté $L^p(\Omega)$ par tout autre espace $L(\Omega, \rho)$ ou $L(\Omega_*, \rho)$ avec ρ une norme de Fatou invariante par réarrangement. Pour donner un exemple de norme ρ différente de celle des espaces de Lorentz, considérons Ω un ouvert de mesure 1, $1 < p < +\infty$, $p' = \frac{p}{p-1}$. Pour $g \geq 0$ mesurable, on associe

$$|g|_{(p')} = \inf_{g = \sum_{k=1}^{+\infty} g_k, g_k \geq 0} \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} \inf_{0 < \varepsilon < p-1} \varepsilon^{-\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\int_{\Omega} g_k^{(p-\varepsilon)'} dx \right)^{\frac{1}{(p-\varepsilon)'}} \right\}$$

où $(p-\varepsilon)'$ est le conjugué de $p-\varepsilon$. Notons $\rho(g) = |g|_{(p')}$.

Considérons $L^{(p')}(\Omega) = \left\{ g \text{ mesurable} : \|g\|_{(p')} < +\infty \right\}$. Ces espaces vérifient $L^{p'+\varepsilon}(\Omega) \subset L^{(p')}(\Omega) \subset L^{p'}(\Omega) \forall \varepsilon > 0$, ils sont appelés petits espaces de Lebesgue. De tels espaces ont été introduits par Fiorenza [60]. Le petit espace de Lebesgue-Sobolev noté :

$$W^{1,(N)}(\Omega) = \left\{ u \in L^1(\Omega) : \rho(|\nabla u|) < +\infty \right\}$$

vérifie :

$$\text{osc}_{B(x,r)} u \leq \frac{\alpha_N^{1-\frac{1}{N}}}{\alpha_{N-1}} \left(\frac{|\Omega|N}{N-1} \right)^{1-\frac{1}{N}} \rho(|\nabla u| \chi_{B(r,x)}).$$

4.1 Inégalités ponctuelles pour le réarrangement relatif

Définition 4.1.1 (propriété PSR). *Nous dirons qu'un sous-ensemble V de $W^{1,1}(\Omega)$ vérifie les inégalités de Poincaré-Sobolev pour le réarrangement relatif (noté PSR) si :*

- (i) $u_* \in W_{loc}^{1,1}(\Omega_*)$, $\forall u \in V$
- (ii) Il existe une fonction $K(\cdot, \Omega, V) : \Omega_* \rightarrow [0, +\infty[$ mesurable t.q. :

$$-u'_*(s) \leq K(s, \Omega, V) \cdot |\nabla u|_{*u}(s), \quad p.p. \text{ tout } s \text{ et } \forall u \in V.$$

Avant de donner des propriétés générales pour un tel ensemble V , voici quelques exemples d'ensembles V (conséquence du théorème fondamental 3.3.1).

Théorème 4.1.1 (existence d'ensemble V vérifiant la propriété PSR).

1. L'ensemble $V = W_0^{1,1}(\Omega) \cap L_+^0(\Omega)$ vérifie la propriété PSR. De plus on peut choisir $K(s, \Omega, V) = \frac{s^{\frac{1}{N}-1}}{N\alpha_N^{\frac{1}{N}}}$.

2. L'ensemble $V = W_0^{1,1}(\Omega)$ vérifie la propriété PSR avec

$$K(s, \Omega, V) = \frac{\max\left(s^{\frac{1}{N}-1}, (|\Omega| - s)^{\frac{1}{N}-1}\right)}{N\alpha_N^{\frac{1}{N}}}.$$

3. Si Ω est un ouvert connexe lipschitzien alors $V = W^{1,1}(\Omega)$ vérifie la propriété PSR. De plus, il existe une constante $Q(\Omega, N) = Q > 0$ (qui est une constante relative isopérimétrique) telle que

$$K(s, \Omega, V) = Q \max\left(s^{\frac{1}{N}-1}, (|\Omega| - s)^{\frac{1}{N}-1}\right).$$

4. Si Ω est un ouvert connexe lipschitzien alors $V = W_{\Gamma_0}^{1,1}(\Omega) \cap L_+^0(\Omega)$ vérifie la propriété PSR avec

$$K(s, \Omega, V) = \frac{s^{\frac{1}{N}-1}}{N\sigma_N^{\frac{1}{N}}} \text{ avec } \sigma_N = \left| \sum (\alpha, 1) \right|.$$

Preuve. C'est une conséquence du théorème fondamental 3.3.1 et ses corollaires 3.3.1, 3.3.2, 3.3.3, propriété 3.5.1.

Corollaire 4.1.1. Soit $\Omega = B(R)$ une boule de rayon $R > 0$. Alors $V = W^{1,1}(B(R))$ vérifie la propriété PSR et

$$K(s, B(R), V) = \frac{1}{\alpha_{N-1}} \left(\frac{\alpha_N}{2}\right)^{1-\frac{1}{N}} \text{Max} \left(s^{\frac{1}{N}-1}, (\alpha_N R^N - s)^{\frac{1}{N}-1}\right)$$

où α_m désigne la mesure de la boule unité de $\mathbb{R}^m$.

Preuve. On sait que dans le cas d'une boule la meilleure constante relative isopérimétrique est $Q = \frac{1}{\alpha_{N-1}} \left(\frac{\alpha_N}{2}\right)^{1-\frac{1}{N}}$, d'où le résultat. $\square$

Voici quelques théorèmes généraux pour les ensembles V vérifiant la propriété PSR.

Proposition 4.1.1. *Soit $V \subset W^{1,1}(\Omega)$ vérifiant la propriété PSR. Pour tout $u \in V \cap W^{1,q}(\Omega)$, $1 \leq q < +\infty$, on a aussi :*

$$-u'_*(s) \leq K(s, \Omega, V) \cdot [(|\nabla u|^q)_{*u}]^{\frac{1}{q}}(s) \quad \text{pp en } s.$$

Preuve. Pour $h > 0$, on a $|u_*(s+h) - u| < u_*(s) \leq h$, par l'inégalité de Hölder

$$\int_s^{s+h} |\nabla u|_{*u} d\sigma = \int_{u_*(s+h) < u < u_*(s)} |\nabla u| dx \leq h^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_s^{s+h} (|\nabla u|^q)_{*u}(\sigma) d\sigma \right)^{\frac{1}{q}}.$$

D'où, pour presque tout $s \in \Omega_*$ on a :

$$|\nabla u|_{*u}(s) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_s^{s+h} |\nabla u|_{*u}(\sigma) d\sigma \leq [(|\nabla u|^q)_{*u}(s)]^{\frac{1}{q}}.$$

□

Proposition 4.1.2. *Soit V vérifiant la propriété PSR.*

Posons $K(s) = K(s, \Omega, V)$ pour $0 < \sigma < t$, $\sup_{\sigma < s < t} [sK(s)] = g(t, \sigma)$. Alors

$$u_*(\sigma) - u_*(t) \leq g(t, \sigma) \left(\frac{t}{\sigma} \right) |\nabla u|_{**}(t)$$

$$\text{où } |\nabla u|_{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t |\nabla u|_*(\tau) d\tau.$$

Preuve. En effet, puisque $u_* \in W_{loc}^{1,1}(\Omega_*)$ alors

$$\begin{aligned} u_*(\sigma) - u_*(t) &= - \int_{\sigma}^t u'_*(s) ds \leq \int_{\sigma}^t K(s, \Omega, V) |\nabla u|_{*u}(s) ds \\ &\leq g(t, \sigma) \int_{\sigma}^t \frac{1}{s} |\nabla u|_{*u}(s) ds \\ &\leq g(t, \sigma) \left(\frac{t}{\sigma} \right) \frac{1}{t} \int_0^t |\nabla u|_{*u}(s) ds \leq g(t, \sigma) \left(\frac{t}{\sigma} \right) |\nabla u|_{**}(t). \end{aligned}$$

□

Il arrive qu'au lieu d'utiliser u_* on ait besoin de u_{**} . Dans ce cas on peut remplacer u'_* par u'_{**} . On a alors le :

Théorème 4.1.2. *Soit V un sous-ensemble de $W^{1,1}(\Omega)$ vérifiant la propriété PSR. Alors, $\forall u \in V$*

$$-u'_{**}(s) \leq \tilde{K}(s) [|\nabla u|_{*u}]_{**}(s) \text{ p.p. } s \in \Omega_*.$$

En particulier, on a :

$$-u'_{**}(s) \leq \tilde{K}(s) |\nabla u|_{**}(s) \text{ p.p. } s$$

où $\tilde{K}(s) = \frac{1}{s} \sup_{0 \leq t \leq s} \text{ess } [tK(t)]$.

Preuve. Par intégration par parties, pour $s \in \Omega_*$, $u \in V$, on a

$$\frac{1}{s} \int_0^s [u_*(t) - u_*(s)] dt = \frac{1}{s} \int_0^s t |u'_*(t)| dt. \quad (4.1)$$

Par la propriété PSR et Hardy-Littlewood, on déduit

$$u_{**}(s) - u_*(s) \leq \frac{1}{s} \int_0^s t K(t) |\nabla u|_{*u}(t) dt \leq \tilde{K}(s) \int_0^s \left(|\nabla u|_{*u} \right)_*(t) dt$$

comme $-\frac{d}{ds} u_{**}(s) = \frac{1}{s} [u_{**}(s) - u_*(s)]$, on déduit

$$-u'_{**}(s) \leq \tilde{K}(s) \left(|\nabla u|_{*u} \right)_{**}(s) \leq \tilde{K}(s) |\nabla u|_{**}(s).$$

□

Exemple si $V = W_{0+}^{1,1}(\Omega)$ alors $\tilde{K}(s) = K(s) = \frac{s^{\frac{1}{N}-1}}{N \alpha_N^{\frac{1}{N}}}$.

4.2 Inclusions de type général : applications aux espaces de Lorentz

Pour étudier les inclusions du type Poincaré-Sobolev associées à une norme ρ rappelons la :

Définition 4.2.1 (norme associée).

Soit ρ une norme (non triviale) sur $L^0(\Omega_*)$. On appelle norme associée l'application $\rho' : L^0(\Omega_*) \rightarrow [0, +\infty]$ définie par

$$\rho'(f) = \sup \left\{ \int_{\Omega_*} |fg| d\sigma, \rho(g) \leq 1 \right\}$$

Théorème 4.2.1 (inclusion dans $L^\infty(\Omega)$). Soit V vérifiant la propriété PSR. L'ensemble $\left\{u \in V, \text{ t.q. } \rho(|\nabla u|_{*u}) < +\infty\right\}$ est inclus dans $L^\infty(\Omega)$ si $\rho'(K(\cdot, \Omega, V))$ est finie. De plus,

$$\operatorname{osc}_\Omega u \leq \rho'(K(\cdot, \Omega, V)) \rho(|\nabla u|_{*u}).$$

Preuve. Pour tous $\sigma, s \in \Omega_*$, on a $|u_*(\sigma) - u_*(s)| \leq \int_{\Omega_*} |\nabla u|_{*u}(t) K(t) dt$ où $K(t) = K(t, \Omega, V)$. Par définition de ρ'

$$\int_{\Omega_*} K(t) |\nabla u|_{*u}(t) \leq \rho'(K) \cdot \rho(|\nabla u|_{*u}).$$

D'où

$$\operatorname{osc}_\Omega u \leq \rho'(K) \rho(|\nabla u|_{*u}) < +\infty \text{ si } \rho'(K) < +\infty \text{ et } \rho(|\nabla u|_{*u}) < +\infty.$$

□

On peut remplacer l'ensemble précédent par un autre ensemble plus courant si ρ a plus de propriétés.

Corollaire 4.2.1. On considère ρ une norme de Fatou invariante par réarrangement sur $L^0(\Omega_*)$. Alors, pour V vérifiant la propriété PSR,

$$\left\{u \in V : \rho(|\nabla u|_*) < +\infty\right\} \subset L^\infty(\Omega) \text{ si } \rho'(K) < +\infty$$

où $K(\cdot) = K(\cdot, \Omega, V)$.

Preuve. On sait que pour $u \in W^{1,1}(\Omega)$, on a toujours,

$$\int_0^s (|\nabla u|_{*u})_*(\sigma) d\sigma \leq \int_0^s |\nabla u|_*(\sigma) d\sigma, \quad \forall s \in \Omega_*.$$

Alors $\rho(|\nabla u|_{*u}) \leq \rho(|\nabla u|_*)$. Par conséquent on a :

$$\left\{u \in V : \rho(|\nabla u|_*) < +\infty\right\} \subset \left\{u \in V : \rho(|\nabla u|_{*u}) < +\infty\right\}.$$

□

Dans ce qui va suivre nous allons donner des normes (les plus courantes en dehors de celles des espaces de Lebesgue) vérifiant les conditions du corollaire 4.2.1 ou du théorème 4.2.1.

Lemme 4.2.1. L'application $f \in L^0(\Omega_*) \xrightarrow{\rho_N} \int_{\Omega_*} t^{\frac{1}{N}} |f|_*(t) \frac{dt}{t}$ est une norme de Fatou, invariante par réarrangement, non triviale.

Preuve. En effet si $f \in L^0_+(\Omega_*)$ $0 \leq f_n \leq f_{n+1} \rightarrow f$ presque partout, comme $0 \leq f_{n*} \leq (f_{n+1})_* \rightarrow f_*$, avec le théorème de Beppo-Lévi on a $\rho_N(f_n) \rightarrow \rho(f)$. Par suite $f \rightarrow \rho_N(f)$ est une norme de Fatou et invariante par réarrangement sur $L^0_+(\Omega)$, donc sur $L^0(\Omega)$. Il suffit de prendre $f(t) = 1$, $\rho_N(1) = N |\Omega|^{\frac{1}{N}}$, donc elle est non triviale. $\square$

Lemme 4.2.2. *La norme associée à la norme du lemme 4.2.1 vérifie*

$$\rho'_N(f) \leq \sup_{0 \leq t \leq |\Omega|} \left[t^{\frac{1}{N'}} |f|_*(t) \right] \text{ où } \frac{1}{N'} = 1 - \frac{1}{N}.$$

Preuve. Si $\rho_N(g) \leq 1$ alors $\int_{\Omega} |fg| \leq \int_{\Omega_*} |f|_* |g|_*$ (d'après l'inégalité de Hardy-Littlewood) d'où

$$\int_{\Omega} |fg| dx \leq \sup_t \left[t^{\frac{1}{N'}} |f|_*(t) \right] \cdot \int_{\Omega_*} t^{-\frac{1}{N'}} |g|_*(t) dt \leq \sup_t \left[t^{\frac{1}{N'}} |f|_*(t) \right].$$

D'où $\rho'_N(f) \leq \sup_t \left[t^{\frac{1}{N'}} |f|_*(t) \right]$. $\square$

On notera désormais $\rho'_{N,1}(f) = \sup_t \left[t^{\frac{1}{N'}} |f|_*(t) \right]$.

Cette inégalité est suffisante dans notre contexte, néanmoins puisque ρ_N est invariante par réarrangement, on a en fait l'égalité.

Lemme 4.2.3.

$$\frac{1}{N} \rho'_{N,1}(f) \leq \rho'_N(f) \leq \rho'_{N,1}(f), \quad \forall f \in L^0(\Omega).$$

Preuve. Puisque ρ_N est invariante par réarrangement, on déduit :

$$\rho'_N(f) = \sup \left\{ \int_{\Omega_*} |f|_* |g|_* dt, \rho_N(g) \leq 1 \right\}.$$

Soit $t \in \Omega_*$ (fixé) et $E \subset \Omega_*$ tel que $|E| = t$. Considérons la fonction $g(\sigma) = \frac{1}{N t^{\frac{1}{N}}} \chi_E(\sigma)$, $\sigma \in \Omega_*$. Alors $\rho_N(g) = 1$ car $g_*(\sigma) = \frac{1}{N t^{\frac{1}{N}}} \chi_{[0,t]}(\sigma)$, on déduit alors que

$$\rho'_N(f) \geq \int_{\Omega_*} |f|_* g_*(\sigma) d\sigma = \frac{t^{\frac{1}{N'}}}{N} \left(\frac{1}{t} \int_0^t |f|_*(\sigma) d\sigma \right).$$

Mais $|f|_*(t) \leq \frac{1}{t} \int_0^t |f|_*(\sigma) d\sigma$. Par conséquent, $\forall t \in \Omega_*$

$$\rho'_N(f) \geq \frac{1}{N} \left[t^{\frac{1}{N'}} |f|_*(t) \right].$$

$\square$

Lemme 4.2.4. (a) Soit $K_1 = \frac{t^{\frac{1}{N}-1}}{(N\alpha_N^{\frac{1}{N}})}$ alors $\rho'_{N,1}(K_1) = \left(N\alpha_N^{\frac{1}{N}}\right)^{-1}$.
 (b) Soit $K_2(t) = \text{Max} \left(t^{\frac{1}{N}-1}, (|\Omega| - t)^{\frac{1}{N}-1}\right)$. Alors :

$$\rho'_{N,1}(K_2) = 2^{1-\frac{1}{N}}.$$

Preuve.

- (a) On a $K_{1*} = K_1$ d'où $\sup_{\sigma} \left[\sigma^{\frac{1}{N'}} K_{1*}(\sigma)\right] = \left(N\alpha_N^{\frac{1}{N}}\right)^{-1}$.
 (b) On a $K_{2*}(\sigma) = 2^{\frac{1}{N'}} \sigma^{-\frac{1}{N'}}$. D'où $\sup_{\sigma} \left[\sigma^{\frac{1}{N'}} K_{2*}(\sigma)\right] = 2^{\frac{1}{N'}}$.

On applique dans les deux cas, le lemme 4.2.3. □

Corollaire 4.2.2 (du lemme 4.2.4).

- (a) Soit $W_0^1(\Omega, |\cdot|_{N,1}) = \left\{u \in W_0^{1,1}(\Omega), |\nabla u| \in L^{N,1}(\Omega)\right\}$.
 Alors, $W_0^1(\Omega, |\cdot|_{N,1}) \subset L^\infty(\Omega)$
 et $\forall u \in W_0^1(\Omega, |\cdot|_{N,1}), |u|_\infty \leq \frac{1}{N\alpha_N^{\frac{1}{N}}} |\nabla u|_{L^{N,1}(\Omega)}$.
 (b) Soit $r > 0$ et $B(r)$ une boule de rayon r . Notons
 $X(B(r)) = \left\{u \in L^1(B(r)) : |\nabla u| \in L^{N,1}(B(r))\right\}$. Alors,

$$\text{osc}_{B(r)} u \leq \frac{\alpha_N^{1-\frac{1}{N}}}{\alpha_{N-1}} \int_0^{\alpha_N r^N} t^{\frac{1}{N}} |\nabla u|_*(t) \frac{dt}{t} = \frac{\alpha_N^{1-\frac{1}{N}}}{\alpha_{N-1}} |\nabla u|_{L^{N,1}(B(r))}.$$

Preuve.

- (a) Si $u \in W_0^1(\Omega, |\cdot|_{N,1})$ alors $v = |u| \in W_0^{1,1}(\Omega)$, $|u|_*(|\Omega|) = 0$. En utilisant ρ_N , on a $\rho_N(|\nabla v|_*) = |\nabla u|_{N,1}$, en utilisant le théorème 4.2.1, on a pour tout s $v_*(s) \leq \rho'_N(K_1) \rho_N(|\nabla v|_*) \leq \frac{1}{N\alpha_N^{\frac{1}{N}}} |\nabla u|_{N,1}$.
 (b) Comme $X(B(r))$ vérifie la propriété PSR avec

$$K(s, B(r), X(B(r))) = \frac{1}{\alpha_{N-1}} \left(\frac{\alpha_N}{2}\right)^{1-\frac{1}{N}} K_2(s),$$

alors avec le théorème 4.2.1,

$$\text{osc}_{B(r)} u \leq \rho'_N(K) \rho_N(|\nabla u|_*) \leq \frac{\alpha_N^{1-\frac{1}{N}}}{\alpha_{N-1}} |\nabla u|_{L^{N,1}(B(r))}.$$

□

Corollaire 4.2.3.

Soit $W^1(\Omega, |\cdot|_{N,1}) = \left\{ u \in L^1(\Omega) : |\nabla u| \in L^{N,1}(\Omega) \right\}$.

Alors $W^1(\Omega, |\cdot|_{N,1}) \subset C(\Omega)$ et $\forall x \in \Omega$, et $r > 0$ t.q. $B(x, r) \subset \Omega$,

$$\operatorname{osc}_{B(x,r)} u \leq \frac{\alpha_N^{1-\frac{1}{N}}}{\alpha_{N-1}} |\nabla u|_{L^{N,1}(B(r))}.$$

4.3 Indice général d'inclusions pour les fonctions à trace nulle

Les inégalités ponctuelles vont nous permettre de donner des estimations de façon simple des constantes telles : $\inf_{u \in W} \frac{|\nabla u|_p}{|u|_q}$, $1 \leq q \leq p^*$. Juste en utilisant trois “petits” arguments :

- (a) $\forall s, \sigma \in \Omega_*$, $u_*(\sigma) - u_*(s) = - \int_{\sigma}^s u'_*(t) dt$ si $u_* \in W_{loc}^{1,1}(\Omega_*)$.
- (b) Equimesurabilité ou invariance par réarrangement.
- (c) Les inégalités ponctuelles de Poincaré-Sobolev pour le réarrangement relatif additionnées de l'inégalité de Hölder entre une norme et sa norme associée.

Voici un théorème général qui illustre cela.

Notations. Pour un ensemble V vérifiant la propriété PSR, on note $K = K(\cdot, \Omega, V)$. Pour ρ une norme sur $L^0(\Omega_*)$, on définit l'espace de Sobolev:

$$W^1(\Omega, \rho) = \left\{ u \in V : \rho(|\nabla u|_*) < +\infty \right\}.$$

On suppose $W^1(\Omega, \rho) \neq \{0\}$.

Pour $u \in L^0(\Omega)$, on définit deux fonctions : $(t, s) \in \Omega_*^2$

$$a_1(t, s, u) = \operatorname{sign}(|u| \geq 0 - t) \operatorname{sign}(t - s) \text{ où } \operatorname{sign}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

$$a_2(t, s, u) = \operatorname{sign}(t - |u| \geq 0) \operatorname{sign}(s - t).$$

$$a(t, s, u) = a_1(t, s, u) + a_2(t, s, u).$$

$$N(t, s) = K(t) \left[\sup_{u \in W^1(\Omega, \rho)} a(t, s, u) \right].$$

On note pour $s \in \Omega_*$, $N(s)(t) = N(t, s)$, $t \in \Omega_*$.

Lemme 4.3.1 (fondamental). *Soit $u \in V$. Alors $\forall s \in \Omega_*$,*

$$|u_*(s)| \leq \int_{\Omega_*} K(t) a(t, s, u) |\nabla u|_{*u}(t) dt.$$

Preuve. Soit $s \in \Omega_*$, $u \in V$. Si $0 \leq s \leq |u| > 0$

alors $u_*(s) = - \int_s^{|u| \geq 0} u'_*(t) dt$ entraîne, du fait que $u \in V$, que

$$|u_*(s)| \leq \int_{\Omega_*} K(t) a_1(t, s, u) |\nabla u|_{*u}(t) dt.$$

Comme $a_2(t, s, u) = 0$, on déduit que

$$|u_*(s)| \leq \int_{\Omega_*} K(t) a(t, s, u) |\nabla u|_{*u}(t) dt.$$

Si $|u| \geq 0 < s \leq |\Omega|$ alors

$$\begin{aligned} |u_*(s)| &= \int_{|u| \geq 0}^s |u'_*(t)| dt \leq \int_{\Omega_*} K(t) a_2(t, s, u) |\nabla u|_{*u}(t) dt \\ &= \int_{\Omega_*} K(t) a(t, s, u) |\nabla u|_{*u}(t) dt. \end{aligned}$$

Si $|u| > 0 \leq s \leq |u| \geq 0$, $u_*(s) = 0$. L'inégalité reste vraie. $\square$

Théorème 4.3.1 (général d'inclusion et d'estimation). *Soit ρ une norme de Fatou invariante par réarrangement non triviale sur $L^0(\Omega_*)$ et soit ρ_0 une application définie, homogène et monotone sur $L^0(\Omega_*)$.*

Pour $s \in \Omega_*$, on note $b(s) = \rho'(N(s))$ (ρ' associée de ρ). Alors

1. $\forall u \in W^1(\Omega, \rho)$, $\rho_0(u_*) \leq \rho_0(b) \rho(|\nabla u|_{*u}) \leq \rho_0(b) \rho(|\nabla u|_*)$,
2. $\rho_0(b) > 0$,
3. $\inf_{u \in W^1(\Omega, \rho)} \frac{\rho(|\nabla u|_*)}{\rho_0(u_*)} \leq \frac{1}{\rho_0(b)}$. En particulier,

$$W^1(\Omega, \rho) \subset \left\{ v \in L^0(\Omega) : \rho_0(v_*) < +\infty \right\} \text{ si } \rho_0(b) < +\infty.$$

Preuve. Soit $u \in W^1(\Omega, \rho)$. D'après le lemme fondamental 4.3.1, on déduit :

$$|u_*(s)| \leq \int_{\Omega_*} N(t, s) |\nabla u|_{*u}(t) dt \leq \rho'(N(s)) \rho(|\nabla u|_{*u}). \quad (4.2)$$

Puisque ρ est une norme de Fatou invariante par réarrangement on déduit $\rho(|\nabla u|_{*u}) \leq \rho(|\nabla u|_*)$. Par suite pour toute application définie, homogène et monotone ρ_0 sur $L^0(\Omega_*)$, on a, pour tout $u \in W^1(\Omega, \rho)$,

$$\rho_0(u_*) \leq \rho(|\nabla u|_*) \rho_0(\rho'(N(s))) = \rho_0(b) \rho(|\nabla u|_*) .$$

Si $\rho_0(b) = 0$ alors $\forall u, u_* = 0$ (d'après le premier énoncé et ρ_0 est définie) donc $W^1(\Omega, \rho) = \{0\}$ (contradiction).

De la relation 1), puisque $\rho_0(b) > 0$ on déduit l'estimation, et si $\rho_0(b) < +\infty$ alors $\rho_0(u_*) < +\infty \forall u \in W^1(\Omega, \rho)$. $\square$

Corollaire 4.3.1 (des fonctions positives).

Si $W^1(\Omega, \rho) \subset L_+^0(\Omega)$ alors pour tout (t, s)

$$N(t, s) = K(t) \text{sign}(t - s).$$

Définition 4.3.1. $\rho_0(b)$ est appelé indice d'inclusion associé à $W^1(\Omega, \rho)$.

Corollaire 4.3.2. On suppose que $1 \in W^1(\Omega, \rho)$ alors $\rho_0(b) = +\infty$

Comme première application, on va retrouver les inclusions classiques en calculant $\rho_0(b)$.

4.4 Inclusions de Poincaré-Sobolev-Lorentz

4.4.1 Cas des fonctions à trace nulle

Considérons le cas où $V = \{u \in W_0^{1,1}(\Omega), u \geq 0\}$. Alors nous savons que $K(t) = \frac{t^{\frac{1}{N}-1}}{N\alpha_N^{\frac{1}{N}}}$. Choisissons $\rho(f) = \left(\int_{\Omega_*} |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $1 < p < +\infty$, alors $W^1(\Omega, \rho) = W_0^{1,p}(\Omega) \cap L_+^0(\Omega)$.

Dans ce cas $\rho'(f) = \left(\int_{\Omega_*} |f|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}$, $N(t, s) = \frac{t^{\frac{1}{N}-1}}{N\alpha_N^{\frac{1}{N}}} \text{sign}(t - s)$. Ainsi

$$\rho'(N(s)) = \left(\int_s^{|\Omega|} t^{-\frac{p'}{N'}}\right)^{\frac{1}{p'}} \frac{1}{N\alpha_N^{\frac{1}{N}}} = \begin{cases} \frac{1}{N\alpha_N^{\frac{1}{N}}} \left(+\text{Log} \frac{|\Omega|}{s}\right)^{\frac{1}{N'}} & \text{si } p = N \\ \frac{1}{N\alpha_N^{\frac{1}{N}}} \cdot \left[\frac{|\Omega|^{1-\frac{p'}{N'}} - s^{1-\frac{p'}{N'}}}{N' - p'} N'\right]^{\frac{1}{p'}} & \text{sinon} \end{cases}$$

pour $s \in \Omega_*$.

Remarque. On peut considérer aussi le cas $p = 1$, $\rho'(N(s)) = \frac{s^{\frac{1}{N}-1}}{N\alpha_N^{\frac{1}{N}}}$.

Théorème 4.4.1.

Soit ρ_0 une application définie, homogène et monotone sur $L^0(\Omega_*)$ t.q.

$$\rho_0 \left(+ \left(\text{Log } \frac{|\Omega|}{s} \right)^{\frac{1}{N'}} \right) < +\infty.$$

Alors $W_0^{1,N}(\Omega) \subset \left\{ v \in L^0(\Omega), \rho_0(v_*) < +\infty \right\}$.

En particulier, $\forall r \in [1, +\infty[$, on a $W_0^{1,N}(\Omega) \subset L^{r,+\infty}(\Omega)$.

De plus, on a :

$$\lambda = \frac{N \alpha_N^{\frac{1}{N}} [eN']^{\frac{1}{N'}}}{|\Omega|^{\frac{1}{r}} r^{\frac{1}{N'}}} \leq \inf_{u \in W_0^{1,N}(\Omega) \ u \neq 0} \frac{|\nabla u|_{L^N}}{|u|_{r,+\infty}}.$$

Preuve. Rappelons que si $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$ alors $|u| \in W_{0+}^{1,N}(\Omega)$. Ainsi la première partie de ce théorème découle du théorème 4.3.1. Quant à la seconde partie, on considère l'application $\rho_0(f) = \sup_{0 \leq s \leq |\Omega|} \left(s^{\frac{1}{r}} |f|_*(s) \right)$, $f \in L^0(\Omega_*)$. Alors dans ce cas :

$$\rho_0(b) = \frac{1}{N \alpha_N^{\frac{1}{N}}} \sup_s \left(s^{\frac{1}{r}} \left(-\text{Log } \frac{s}{|\Omega|} \right)^{\frac{1}{N'}} \right) = \frac{|\Omega|^{\frac{1}{r}}}{N \alpha_N^{\frac{1}{N}}} \sup_{0 \leq t \leq 1} \left[t^{\frac{1}{r}} (-\text{Log } t)^{\frac{1}{N'}} \right]$$

(en posant $t = \frac{s}{|\Omega|}$). Or, nous avons :

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \left[t^{\frac{1}{r}} (-\text{Log } t)^{\frac{1}{N'}} \right] = \left[\sup_{0 \leq t \leq 1} \left[t^{\frac{N'}{r}} (-\text{Log } t) \right] \right]^{\frac{1}{N'}} = \left[\frac{r}{eN'} \right]^{\frac{1}{N'}}.$$

D'où $\rho(b) = \frac{|\Omega|^{\frac{1}{r}}}{N \alpha_N^{\frac{1}{N}}} \left[\frac{r}{eN'} \right]^{\frac{1}{N'}}$, d'où la minoration à l'aide du théorème général 4.3.1. $\square$

Remarque. On a vu que $\inf_{u \in W_0^{1,N}(\Omega) \ u \neq 0} \frac{|\nabla u|_{L^N}}{|u|_{r,+\infty}} = \inf_{u \geq 0 \ u \in W_0^{1,N}(\Omega) \ u \neq 0} \frac{|\nabla u|_{L^N}}{|u|_{r,+\infty}}$ (car $|\nabla u| = |\nabla |u||$). En utilisant le réarrangement sphérique on déduit :

$$\inf_{u \in W_0^{1,N}(\Omega) \ u \neq 0} \frac{|\nabla u|_N}{|u|_{r,+\infty}} \geq \inf_{u \geq 0 \ u \in W_0^{1,N}(\Omega) \ u \neq 0} \frac{|\nabla u|_N}{|u|_{r,+\infty}} = a. \text{ On peut encadrer}$$

cette dernière quantité.

Proposition 4.4.1. Soit $\Omega = B(R)$ une boule de même mesure que Ω

centrée à l'origine. Soit $\delta > 0$ (petit) $\alpha > 1$, $m = \frac{1}{N'} - \frac{\delta}{N} > 0$

et $v(x) = \left(-\text{Log } \frac{\alpha_N |x|^N}{\alpha |\Omega|} \right)^m$ pour $x \in \Omega$. Alors, pour $\alpha < e^{rm}$ on a

$$\frac{|\nabla v|_N}{|v|_{r,+\infty}} = \frac{(re^{-1})^{\frac{\delta}{N}} m^{-m+1}}{[\delta(\text{Log } \alpha)^{\delta}]^{\frac{1}{N}} (N')^{\frac{1}{N'}}} \lambda \geq a \geq \lambda.$$

Preuve. En effet un calcul direct donne :

$$|\nabla u|_{L^N} = \frac{mN\alpha_N^{\frac{1}{N}}}{[\delta(\text{Log } \alpha)^\delta]^{\frac{1}{N}}}, \quad |u|_{r,+\infty} = \alpha^{\frac{1}{r}} |\Omega|^{\frac{1}{r}} \sup_{0 \leq t \leq \frac{1}{\alpha}} \left(t^{\frac{1}{r}} (-Lnt)^m \right)$$

et $\sup_{0 \leq t \leq \frac{1}{\alpha}} \left(t^{\frac{1}{r}} (-Lnt)^m \right) = \left(\frac{rm}{e} \right)^m$. Comme $m = \frac{1}{N'} - \frac{\delta}{N}$ alors on déduit l'expression du rapport sachant que

$$\lambda = \frac{N\alpha_N^{\frac{1}{N}} [eN']^{\frac{1}{N'}}}{|\Omega|^{\frac{1}{r}} r^{\frac{1}{N'}}}, \quad a = \inf_{u \geq 0} \frac{|\nabla u|_N}{|u|_{r,+\infty}}.$$

□

Remarque. Noter que $L^r(\Omega) \subset L^{r,+\infty}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \quad \forall q < r$. On peut “améliorer” le résultat précédent en remplaçant $|\cdot|_{r,+\infty}$ par $\rho_0 = |\cdot|_r$. On a alors, en reprenant la démarche précédente que :

Théorème 4.4.2 (inclusion de Sobolev pour $p = N$).

$W_0^{1,N}(\Omega) \subset L^r(\Omega), \quad \forall r < +\infty$ on a :

$$|u|_{L^r(\Omega)} \leq \frac{|\Omega|^{\frac{1}{r}}}{N\alpha_N^{\frac{1}{N}}} \left(\int_0^1 (-\text{Log } t)^{\frac{r}{N'}} dt \right)^{\frac{1}{r}} \|\nabla u\|_{*u} |_N$$

et

$$\int_0^1 (-\text{Log } t)^{\frac{r}{N'}} dt = \int_0^{+\infty} \sigma^{r(1-\frac{1}{N})} e^{-\sigma} d\sigma = \Gamma\left(1 + \frac{r}{N'}\right) \widetilde{r \rightarrow +\infty} (N')^{\frac{1}{N'}} e^{-\frac{1}{N'}}.$$

Corollaire 4.4.1 (inégalité de Trudinger).

On a $\forall \lambda > \frac{1}{N\alpha_N^{\frac{1}{N}}}$

$$\int_{\Omega} \exp \left(\frac{|u(x)|}{\lambda |\nabla u|_N} \right)^{\frac{N}{N-1}} \leq \frac{|\Omega|}{1 - \left(\frac{1}{\lambda N\alpha_N^{\frac{1}{N}}} \right)^{\frac{N}{N-1}}}.$$

Idée de preuve. Pour k entier, on choisit $r = k \frac{N}{N-1}$ dans le théorème 4.4.2

$$\int_{\Omega} |u(x)|^{k \frac{N}{N-1}} dx \leq \frac{|\Omega|}{(N\alpha_N^{\frac{1}{N}})^{k \frac{N}{N-1}}} \left(\int_0^{+\infty} \sigma^k e^{-\sigma} d\sigma \right) |\nabla u|_N^{k \frac{N}{N-1}}.$$

Sachant que $\exp(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}$, à partir de l'inégalité précédente en multipliant par $\frac{1}{\lambda^{k \frac{N}{N-1}}}$, on déduit après sommation l'inégalité. $\square$

Remarque. L'optimisation de la condition sur λ (inégalité de Trudinger) a été prouvée par E. Lieb [74].

Théorème 4.4.3 (inclusion dans $C^{0,\alpha}$ (cas $p > N$)).

Soit $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $p > N$. Alors $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ avec $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$.

De plus,

$$(i) \quad |u|_\infty \leq \frac{1}{N\alpha_N^{\frac{1}{N}}} \left[\frac{N(p-1)}{p-N} \right]^{1-\frac{1}{p}} |\Omega|^{\frac{1}{N}-\frac{1}{p}} \|\nabla u\|_{*u} |_{L^p(\Omega_*)},$$

(ii) $\forall r > 0, \forall x \in \Omega$ t.q. $B(x, r) = B(r) \subset \Omega$, on a :

$$\text{osc}_{B(x,r)} u \leq \frac{2^{\frac{1}{N}-\frac{1}{p}}}{\alpha_{N-1}} \left(\alpha_N \frac{N(p-1)}{p-N} \right)^{1-\frac{1}{p}} \|\nabla u\|_{L^p(B(x,r))} \cdot r^{1-\frac{N}{p}}.$$

Preuve.

(i) On choisit $\rho_0(f) = |f|_\infty$.

$$\text{Comme } b(s) = \frac{1}{N\alpha_N^{\frac{1}{N}}} \left[\frac{N(p-1)}{p-N} \right]^{1-\frac{1}{p}} \left[|\Omega|^{1-\frac{p'}{N'}} - s^{1-\frac{p'}{N'}} \right],$$

pour $p > N$, $s \in \Omega_*$, on déduit que

$$\rho_0(b) = \frac{1}{N\alpha_N^{\frac{1}{N}}} \left[\frac{N(p-1)}{p-N} \right]^{1-\frac{1}{p}} |\Omega|^{\frac{1}{N}-\frac{1}{p}},$$

on conclut avec le théorème général d'estimation 4.3.1 sachant que $|u| \in W_0^{1,p}(\Omega)$ si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

(ii) Soit $\bar{u}$ la restriction de u à $B(x, r)$. Alors $\bar{u} \in W^{1,1}(B(r))$. Par l'inégalité de Poincaré-Sobolev ponctuelle (voir corollaire 4.1.1 du théorème 4.1.1), on déduit

$$\begin{aligned} \text{osc}_{B(x,r)} u &= \bar{u}_*(\alpha_N r^N) - \bar{u}_*(0) \leq \\ &\leq \frac{1}{\alpha_{N-1}} \left(\frac{\alpha_N}{2} \right)^{1-\frac{1}{N}} \int_0^{\alpha_N r^N} \text{Max} \left(t^{\frac{1}{N}-1}, (\alpha_N r^N - t)^{\frac{1}{N}-1} \right) \|\nabla \bar{u}\|_{*\bar{u}}(t) dt \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Hölder à cette dernière intégrale et sachant

$$\|\nabla \bar{u}\|_{*\bar{u}} |_{L^p(0, \alpha_N r^N)} \leq \|\nabla \bar{u}\|_{L^p(B(r))} = \|\nabla u\|_{L^p(B(r))},$$

on déduit

$$\begin{aligned} \operatorname{osc}_{B(x,r)} u &\leq \frac{1}{\alpha_{N-1}} \left(\frac{\alpha_N}{2} \right)^{1-\frac{1}{N}} \cdot \left(2 \int_0^{\alpha_N r^N} t^{(\frac{1}{N}-1)p'} \right)^{\frac{1}{p'}} |\nabla u|_{L^p(B(r))} \\ &= \frac{2^{\frac{1}{N}-\frac{1}{p}}}{\alpha_{N-1}} \left(\alpha_N \frac{N(p-1)}{p-N} \right)^{1-\frac{1}{p}} |\nabla u|_{L^p(B(r))} \end{aligned}$$

□

Notons que le prolongement par zéro de u dans $\mathbb{R}^N$ est dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Théorème 4.4.4 (inclusion pour $p < N$).

Si $1 \leq p < N$, on a : $W_0^{1,p}(\Omega) \subsetneq L^{p^*}(\Omega)$ avec $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$. de plus, on a :

$$(i) \quad |u|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq \frac{1}{N \alpha_N^{\frac{1}{N}}} B^{\frac{1}{p^*}} |\nabla u|_{*u} |_{L^p(\Omega_*)} \quad \text{si } 1 < p < N \text{ avec}$$

$$B = \frac{p^*}{p^*(p-1)} \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{pp^*}{p^*-p}\right)}{\Gamma\left(\frac{p^*}{p^*-p}\right) \Gamma\left(\frac{p(p^*-1)}{p^*-p}\right)} \right\}^{-1+\frac{p}{p^*}} \left[p^* \left(1 - \frac{1}{p} \right) \right]^{p^* - \frac{p^*}{N}}$$

$$\text{où } \Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt.$$

$$(ii) \quad |u|_{L^{\frac{N}{N-1}}(\Omega)} \leq \frac{1}{N \alpha_N^{\frac{1}{N}}} |\nabla u|_{L^1(\Omega)} \quad \text{si } p = 1.$$

Preuve. Soit $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, quitte à remplacer par $|u|$, on peut supposer que

$$u \geq 0. \text{ On a : } u_*(s) = \int_s^{|\Omega|} |u'_*(t)| dt.$$

Alors

$$\int_{\Omega} u(x)^{p^*} dx = \int_{\Omega_*} u_*(s)^{p^*} ds = \int_0^{|\Omega|} ds \left[\int_s^{|\Omega|} |u'_*(t)| dt \right]^{p^*}.$$

On applique l'inégalité de Bliss (voir ci-après), on déduit

$$|u|_{p^*}^{p^*} \leq \int_0^{|\Omega|} ds \left[\int_s^{|\Omega|} |u'_*(t)| dt \right]^{p^*} \leq B \left[\int_0^{|\Omega|} |u'_*(t)| t^{\frac{N-1}{N}} dt \right]^{\frac{p^*}{p}}.$$

Par l'inégalité PSR, on sait que dans ce cas,

$$\left| u'_*(t) t^{\frac{N-1}{N}} \right| \leq \frac{1}{N \alpha_N^{\frac{1}{N}}} |\nabla u|_{*u}(t) .$$

D'où en combinant les deux inégalités :

$$|u|_{p^*} \leq \frac{B^{\frac{1}{p^*}}}{N \alpha_N^{\frac{1}{N}}} \|\nabla u\|_{*u} \leq \frac{B^{\frac{1}{p^*}}}{N \alpha_N^{\frac{1}{N}}} |\nabla u|_{L^p(\Omega)} .$$

Quant à (ii), puisque $\overline{\mathcal{D}(\Omega)_+} = W_{0+}^{1,1}(\Omega)$ (fonctions positives), on peut supposer que $u \in \mathcal{D}(\Omega)$, $u \geq 0$. Par ailleurs si on considère le réarrangement sphérique $\underline{u} \in W^{1,\infty}(\underline{\Omega})$, $\underline{u} \geq 0$, alors nous avons:

$$\begin{aligned} \int_{\underline{\Omega}} |\nabla \underline{u}(x)| dx &= N \alpha_N^{\frac{1}{N}} \int_{\underline{\Omega}} s^{1-\frac{1}{N}} |u'_*(s)| ds \\ &\leq \int_{\Omega_*} |\nabla u|_{*u}(\sigma) d\sigma = \int_{\Omega} |\nabla u| dx. \end{aligned}$$

Par équimesurabilité, il suffit de montrer que :

$$\left(\int_{\Omega} \left(\underline{u}(x) \right)^{\frac{N}{N-1}} dx \right)^{1-\frac{1}{N}} \leq \frac{1}{N \alpha_N^{\frac{1}{N}}} \left| \nabla \underline{u} \right|_{L^1} .$$

Soit $t > 0$, T_t la troncature au niveau t i.e. $T_t(\sigma) = \min(\sigma, t)$ si $\sigma \geq 0$. En suivant l'idée de W. Ziemer [129] posons, $f(t) = \left(\int_{\Omega} T_t(u)^{\frac{N}{N-1}} dx \right)^{1-\frac{1}{N}}$. Alors f est absolument continue car

$$|f(t) - f(t')| \leq \left(\int_{\Omega} \left| T_t(u) - T_{t'}(u) \right|^{\frac{N}{N-1}} dx \right)^{1-\frac{1}{N}} \leq |t - t'| \left| \underline{u} > \min(t, t') \right|^{1-\frac{1}{N}},$$

d'où si $t' = t + h$,

$$|f(t) - f(t')| \leq h |\underline{u} > t|^{1-\frac{1}{N}} \text{ pour } h > 0.$$

Ce qui entraîne que $|f'(t)| \leq |\underline{u} > t|^{1-\frac{1}{N}}$ p.p. t ,

$$|\underline{u}|_{L^{\frac{N}{N-1}}} \leq \left| \int_0^{+\infty} f'(t) dt \right| \leq \int_0^{+\infty} |\underline{u} > t|^{1-\frac{1}{N}} dt .$$

Puisque $P_{\underline{\Omega}}(u > t) = N\alpha_N^{\frac{1}{N}}|u > t|^{1-\frac{1}{N}}$ pour presque tout t , on déduit à l'aide de la formule de Fleming-Rishel

$$|u|_{L^{\frac{N}{N-1}}} \leq \frac{1}{N\alpha_N^{\frac{1}{N}}} \int_0^{+\infty} P_{\underline{\Omega}}(u > t) dt \leq \frac{1}{N\alpha_N^{\frac{1}{N}}} \int_{\underline{\Omega}} |\nabla u| dx.$$

D'où l'inégalité. $\square$

Remarque. En utilisant $\rho_0(b) = |b|_q$ alors, on peut montrer dans ce cas ($1 < p < N$) que $\rho_0(b) < +\infty \forall q < p^*$. On ne peut malheureusement pas traiter le cas limite $q = p^*$. D'où l'usage du lemme de Bliss.

Lemme 4.4.1 (de Bliss). *Soit $\varphi \geq 0$ et $q > p > 1$. Alors*

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_t^{+\infty} \varphi(s) ds \right)^q dt \leq B \left[\int_0^{+\infty} \varphi(t)^p t^{-1+p+\frac{p}{q}} \right]^{\frac{q}{p}}$$

où

$$B = \frac{q}{q(p-1)} \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{pq}{q-p}\right)}{\Gamma\left(\frac{q}{q-p}\right) \Gamma\left(\frac{p(q-1)}{q-p}\right)} \right\}^{\frac{q}{p}-1} \times \left[q \left(1 - \frac{1}{p}\right) \right]^{q-\frac{q}{p}+1}.$$

N.B. Pour obtenir la régularité au bord on utilisera implicitement un opérateur de prolongement $P : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ pour Ω ouvert lipschitzien (voir Madja V. [79]).

4.4.2 Cas des fonctions nulles sur une partie du bord

Pour cette classe de fonctions, on utilise plutôt la notion de α -réarrangement vue au paragraphe 3.5. On suppose alors que Ω est un ouvert connexe lipschitzien, $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$, $H_{N-1}(\Gamma_0) > 0$, $\Gamma_1 = \partial\Omega \setminus \Gamma_0$.

Remarque. Puisqu'on peut écrire $Q(\Gamma_1, \Omega) = \frac{1}{N\sigma_N^{\frac{1}{N}}}$, on constate que le cas des fonctions à trace partiellement nulle est le même que le cas des fonctions à trace nulle. Il suffit de remplacer α_N mesure de la boule unité par la mesure σ_N d'un secteur unitaire $\Sigma(\alpha, 1)$. On déduit alors facilement :

Théorème 4.4.5 (inclusion de $W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega)$).

Notons pour $1 \leq p \leq +\infty$, $W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega) = W^{1,p}(\Omega) \cap W_{\Gamma_0}^{1,1}(\Omega)$.

1. Si $p > N$ alors, $W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega) \subset C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$ et $\forall u \in W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega)$

$$|u|_{\infty} \leq \frac{1}{N\sigma_N^{\frac{1}{N}}} \left[\frac{N(p-1)}{p-N} \right]^{1-\frac{1}{p}} |\Omega|^{\frac{1}{N}-\frac{1}{p}} \|\nabla u\|_{*u}|_{L^p(\Omega_*)}.$$

L'oscillation de u dans $B(x, r)$ est la même que dans le théorème 4.4.3.

2. Si $p = N$, $W_{\Gamma_0}^{1,N}(\Omega) \subset L^r(\Omega) \forall r \in [1, +\infty[$ et

$$|u|_r \leq \frac{|\Omega|^{\frac{1}{r}}}{N\sigma_N^{\frac{1}{N}}} \left(\int_0^{+\infty} \sigma^{r(1-\frac{1}{N})} e^{-\sigma} d\sigma \right)^{\frac{1}{r}} \|\nabla u\|_{*u}|_N.$$

3. Si $1 \leq p < N$, $W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$, $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$ on a :

(i) $|u|_{p^*} \leq \frac{B^{\frac{1}{p^*}}}{N\sigma_N^{\frac{1}{N}}} \|\nabla u\|_{*u}|_p$ si $1 < p < N$ avec B la même constante que le théorème 4.4.4, (constante de Bliss).

(ii) $|u|_{\frac{N}{N-1}} \leq \frac{1}{N\sigma_N^{\frac{1}{N}}} \|\nabla u\|_1$ si $p = 1$.

4.4.3 Indice général d'inclusion des fonctions à trace quelconque dans $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$

Les inclusions de Sobolev pour les espaces $W^{1,p}(\Omega)$ sont analogues à celles présentées ci-dessus lorsque Ω est un ouvert borné de bord lipschitzien. Les estimations dans ce cas sont différentes i.e. les constantes sont différentes et on utilise non plus le gradient mais la norme de $W^{1,p}(\Omega)$.

Voici un théorème d'estimations générales dans ce cas:

Théorème 4.4.6.

Pour $s \in \Omega_*$, on note $I(s) = \left[\min\left(s, \frac{|\Omega|}{2}\right), \max\left(s, \frac{|\Omega|}{2}\right) \right]$. Soit V un sous-ensemble de $W^{1,1}(\Omega)$ vérifiant la propriété PSR, associé à la fonction $K = K(\cdot, \Omega, V)$. Soit ρ une norme non triviale sur $L^0(\Omega_*)$. Notons, $b(s) = \rho'(\chi_{I(s)} K)$ et

$$V^1(\Omega, \rho) = \left\{ v \in V \text{ t.q. } \rho(|\nabla v|_{*v}) < +\infty \right\}.$$

Alors pour toute application définie, homogène et monotone ρ_0 sur $L^0(\Omega_*)$, vérifiant $\rho_0(1) < +\infty$, si $\rho_0(b) < +\infty$ on a

$$V^1(\Omega, \rho) \subset L(\Omega, \rho_0) = \left\{ v \in L^0(\Omega) : \rho_0(v_*) < +\infty \right\}.$$

De plus, on a : $\forall u \in V^1(\Omega, \rho)$

$$\rho_0\left(u_* - u_*\left(\frac{|\Omega|}{2}\right)\right) \leq \rho_0(b)\rho(|\nabla u|_{*u}).$$

Définition 4.4.1. $\rho_0(b)$ s'appelle indice d'inclusion associé à $V^1(\Omega, \rho)$.

Remarques.

1. Si ρ_0 vérifie $\rho_0(f + \text{constante}) \leq \rho_0(f) + \text{constante} \rho_0(1)$, la dernière inégalité implique :

$$\rho_0(u_*) \leq \rho_0(b)\rho(|\nabla u|_{*u}) + \left|u_*\left(\frac{|\Omega|}{2}\right)\right| \rho_0(1) < +\infty.$$

En effet $|u_*| \leq \left|u_* - u_*\left(\frac{|\Omega|}{2}\right)\right| + \left|u_*\left(\frac{|\Omega|}{2}\right)\right|$, ce qui implique que

$$\rho_0(u_*) \leq \rho_0\left(u_* - u_*\left(\frac{|\Omega|}{2}\right)\right) + \left|u_*\left(\frac{|\Omega|}{2}\right)\right| \rho_0(1).$$

2. Si ρ est une norme de Fatou invariante par réarrangement alors sous les conditions du théorème on a :

$$W^1(\Omega, \rho) \subset V^1(\Omega, \rho) \text{ car } \forall u \in W^1(\Omega, \rho), \rho(|\nabla u|_{*u}) \leq \rho(|\nabla u|_*) < +\infty.$$

Preuve du théorème 4.4.6. Soit $u \in V^1(\Omega, \rho)$ alors $\forall s \in \Omega_*$,

$$\left|u_*(s) - u_*\left(\frac{|\Omega|}{2}\right)\right| \leq \int_{\Omega_*} \chi_{I(s)}(\sigma) K(\sigma) |\nabla u|_{*u}(\sigma) d\sigma.$$

D'où l'on a :

$$\left|u_*(s) - u_*\left(\frac{|\Omega|}{2}\right)\right| \leq \rho'(\chi_{I(s)}K) \cdot \rho(|\nabla u|_{*u}).$$

Si ρ_0 est homogène et monotone, on déduit :

$$\rho_0\left(u_* - u_*\left(\frac{|\Omega|}{2}\right)\right) \leq \rho_0(b)\rho(|\nabla u|_{*u})$$

où $b(s) = \rho'(\chi_{I(s)}K)$, ρ' est la norme associée à ρ . □

Corollaire 4.4.2 (du théorème 4.4.6).

Sous les conditions du théorème précédent, si ρ est une norme de Fatou invariante par réarrangement et $\rho_0(f + \lambda) \leq \rho_0(f) + \lambda\rho_0(1)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+$, $f \in L^0(\Omega_*)$ alors

$$\rho_0(u_*) \leq \rho_0(b)\rho(|\nabla u|_*) + \frac{2}{|\Omega|}\rho_0(1)|u|_1,$$

$$\forall u \in W^1(\Omega, \rho) = \left\{ v \in V : \rho(|\nabla u|_*) < +\infty \right\}.$$

Preuve du corollaire. Puisque ρ est une norme de Fatou invariante par réarrangement on déduit que (voir remarques ci-dessus) :

$$\rho_0(u_*) \leq \rho_0(b)\rho(|\nabla u|_*) + \left| u_* \left(\frac{|\Omega|}{2} \right) \right| \rho_0(1). \quad (4.3)$$

Mais puisque u_* est décroissante on a :

$$\frac{2}{|\Omega|} \int_{\frac{|\Omega|}{2}}^{|\Omega|} u_*(\sigma) d\sigma \leq u_* \left(\frac{|\Omega|}{2} \right) \leq \frac{2}{|\Omega|} \int_0^{\frac{|\Omega|}{2}} u_*(\sigma) d\sigma.$$

D'où

$$\left| u_* \left(\frac{|\Omega|}{2} \right) \right| \leq \frac{2}{|\Omega|} |u|_{L^1}. \quad (4.4)$$

On combine les deux relations (4.3) et (4.4), on déduit l'inégalité. $\square$

Il arrive souvent dans les applications que l'on utilise des fonctions à moyenne donnée. Pour cette raison nous allons donner un théorème analogue au théorème 4.4.6 où $u_* \left(\frac{|\Omega|}{2} \right)$ est remplacée par la moyenne $\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(x) dx$.

Théorème 4.4.7. *Sous les mêmes conditions que le théorème 4.4.6, considérons $u \in V^1(\Omega, \rho)$ et notons $s_u \in \overline{\Omega}_*$ t.q. $u_*(s_u) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u dx$,*

$$I(u, s) = [\min(s, s_u), \max(s, s_u)], \quad b_u(s) = \rho'(\chi_{I(u, s)} K).$$

Pour toute application homogène et monotone ρ_0 sur $L^0(\Omega_*)$ t.q. $\rho_0(b_u) < +\infty$ et $\rho_0(1) < +\infty$, on a

$$\rho_0 \left(u_* - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(x) dx \right) \leq \rho_0(b_u)\rho(|\nabla u|_{*u}).$$

Preuve. Elle est identique à celle du théorème 4.4.6 en remplaçant $I(s)$ par $I(u, s)$ et b par b_u . Notons que si $s_u = 0$ ou $s_u = |\Omega|$ alors u est constante.

Ainsi le cas le plus intéressant est $0 < s_u < |\Omega|$, ainsi il suffit de remplacer dans les applications du théorème 4.4.6, $\frac{|\Omega|}{2}$ par s_u pour obtenir un résultat analogue. $\square$

4.5 Calcul d'indices d'inclusions

Pour changer, nous allons considérer dans cette partie $\rho(f) = |f|_{(p,q)}$ la norme dans l'espace de Lorentz $L^{p,q}(\Omega)$. On va supposer que Ω est un ouvert borné connexe lipschitzien dont la constante relative isopérimétrique est notée $Q > 0$. On a alors :

Lemme 4.5.1. *Soit $1 < p < +\infty$, $1 \leq q \leq +\infty$. Alors, la norme associée à ρ est équivalente à $|\cdot|_{(p',q')}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. De plus, on a*

$$\rho'(g) \leq |g|_{(p',q')}, \quad \forall g \in L^0(\Omega).$$

Preuve. On se contentera de montrer la dernière inégalité qui est suffisante dans notre contexte :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_*} |fg| dx &\leq \int_{\Omega_*} |f|_*(t) |g|_*(t) dt \leq \int_{\Omega_*} |f|_{**}(t) |g|_{**}(t) dt \\ &= \int_{\Omega_*} \left[t^{\frac{1}{p}} |f|_{**}(t) \right] \left[t^{\frac{1}{p'}} |g|_{**}(t) \right] \frac{dt}{t} \leq |f|_{(p,q)} |g|_{(p',q')} \end{aligned}$$

(par l'inégalité de Hölder).

En prenant le supremum sur toutes les fonctions $f \in L^0(\Omega_*) : |f|_{(p,q)} \leq 1$, on a l'inégalité $\rho'(g) \leq |g|_{(p',q')} \quad \forall g \in L^0(\Omega_*)$. $\square$

Rappelons que sous les conditions précédentes, l'ensemble $V = W^{1,1}(\Omega)$ vérifie l'inégalité ponctuelle de Poincaré-Sobolev avec

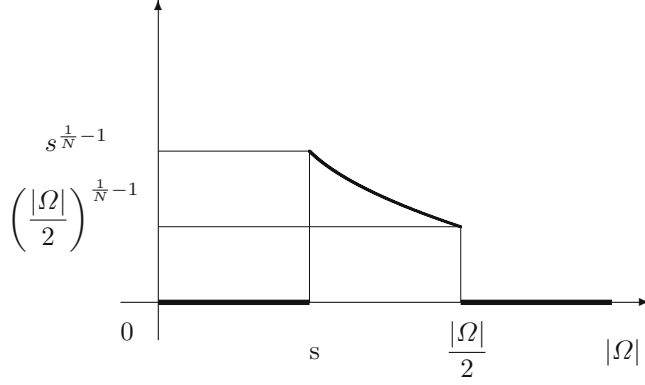
$$K(\sigma) = Q \max \left(\sigma^{\frac{1}{N}-1}, (|\Omega| - \sigma)^{\frac{1}{N}-1} \right).$$

Lemme 4.5.2 (calcul de $(\chi_{I(s)} K)_*$). *Soit $s \in \Omega_*$, alors pour tout $\sigma \in \overline{\Omega_*}$,*

$$(\chi_{I(s)} K)_*(\sigma) = Q \begin{cases} (s + \sigma)^{\frac{1}{N}-1} \chi_{[0, \frac{|\Omega|}{2} - s]}(\sigma) & \text{si } 0 < s \leq \frac{|\Omega|}{2}, \\ (|\Omega| - s + \sigma)^{\frac{1}{N}-1} \chi_{[0, s - \frac{|\Omega|}{2}]}(\sigma) & \text{si } \frac{|\Omega|}{2} < s < |\Omega|. \end{cases}$$

Preuve.

Si $0 < s \leq \frac{|\Omega|}{2}$ alors $\chi_{I(s)} K = \frac{v}{Q}$ a pour allure

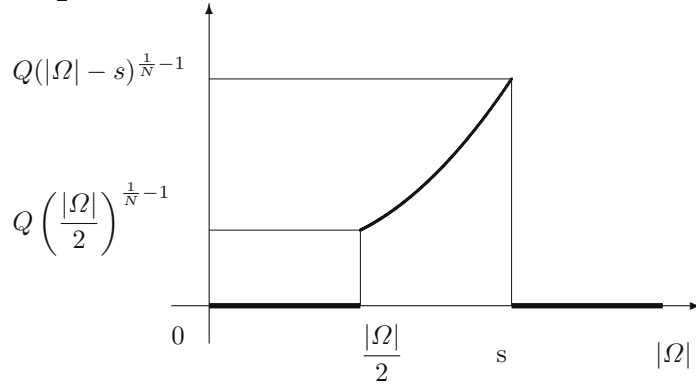


$$\text{i.e. } v(s) = \begin{cases} Q\sigma^{\frac{1}{N}-1} & \text{si } s \leq \sigma \leq \frac{|\Omega|}{2} \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Pour obtenir le réarrangement décroissant de v il suffit de translater d'une longueur s vers la gauche.

$$\text{D'où } (\chi_{[s, \frac{|\Omega|}{2}]} K)_*(\sigma) = Q \begin{cases} (\sigma + s)^{\frac{1}{N}-1} & \text{si } 0 \leq \sigma < \frac{|\Omega|}{2} - s \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $\frac{|\Omega|}{2} < s < |\Omega|$ alors $v = \chi_{[\frac{|\Omega|}{2}, s]} K$ a pour allure :



$$\text{i.e. } v(\sigma) = \begin{cases} Q(|\Omega| - \sigma)^{\frac{1}{N}-1} & \text{si } \frac{|\Omega|}{2} < \sigma \leq s \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$\forall t \in \mathbb{R}_+$, on a

$$|v > t| = \begin{cases} 0 & \text{si } t \geq Q(|\Omega| - s)^{\frac{1}{N}-1} \\ s - \frac{|\Omega|}{2} & \text{si } t \leq Q\left(\frac{|\Omega|}{2}\right)^{\frac{1}{N}-1} \\ s - |\Omega| + \left(\frac{t}{Q}\right)^{-\frac{N}{N-1}} & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'où

$$v_*(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma \geq s - \frac{|\Omega|}{2} \\ Q(|\Omega| - s + \sigma)^{\frac{1}{N}-1} & \text{si } 0 \leq \sigma < s - \frac{|\Omega|}{2}. \end{cases}$$

Commençons par le cas où $p \geq N$, $q = 1$.

Lemme 4.5.3 (expression de $b(s)$). *Soit $p \geq N$, $q = 1$ et posons, pour $s \in \Omega_*$, $b_1(s) = |\chi_{I(s)}K|_{p',+\infty}$. Alors,*

$$b_1(s) = Q \left| s - \frac{|\Omega|}{2} \right|^{\frac{1}{p'}} \left(\frac{2}{|\Omega|} \right)^{\frac{1}{N'}}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad N' = \frac{N}{N-1},$$

et

$$b_1(s) \leq b(s) = |\chi_{I(s)}K|_{(p',+\infty)} \leq p b_1(s) \quad \forall s \in \overline{\Omega}_*.$$

Preuve.

Puisque l'on a $|v|_{p',+\infty} \leq |v|_{(p',+\infty)} \leq p |v|_{p',+\infty}$, calculons $|\chi_{I(s)}K|_{p',+\infty}$. Due à la symétrie des expressions du réarrangement dans le lemme (4.5.2) précédent, il suffit de faire le cas où $0 < s \leq \frac{|\Omega|}{2}$,

$$b_1(s) = |\chi_{I(s)}K|_{p',+\infty} = \sup_t \left[t^{\frac{1}{p'}} (\chi_{I(s)}K)_*(t) \right].$$

Soit en reprenant l'expression du lemme précédent

$$b_1(s) = Q \sup_{0 \leq t \leq \frac{|\Omega|}{2} - s} t^{\frac{1}{p'}} (s+t)^{-\frac{1}{N'}} = Q \left[\sup_{0 \leq t \leq \frac{|\Omega|}{2} - s} \frac{t^{\frac{N'}{p'}}}{s+t} \right]^{\frac{1}{N'}}.$$

Pour $p \geq N$, la fonction $t \rightarrow \frac{t^{\frac{N'}{p'}}}{s+t}$ est croissante. D'où

$$b_1(s) = Q \left(\frac{2}{|\Omega|} \right)^{\frac{1}{N'}} \cdot \left(\frac{|\Omega|}{2} - s \right)^{\frac{1}{p'}}, \quad 0 < s \leq \frac{|\Omega|}{2}.$$

Par symétrie, on a pour $\frac{|\Omega|}{2} < s < |\Omega|$,

$$b_1(s) = Q \left(\frac{2}{|\Omega|} \right)^{\frac{1}{N'}} \cdot \left(s - \frac{|\Omega|}{2} \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

□

Théorème 4.5.1 (inclusions des espaces de Lorentz-Sobolev : $\mathbf{p} \geq \mathbf{N}$).

Soit $p \geq N$, $q = 1$.

Définissons, $W^1(\Omega, |\cdot|_{p,1}) = \left\{ v \in L^1(\Omega) : |\nabla v| \in L^{p,1}(\Omega) \right\}$. Alors,

1. $W^1(\Omega, |\cdot|_{p,1}) \subset L^\infty(\Omega) \cap C^\alpha(\Omega)$, $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$.
2. $\forall v \in W^1(\Omega, |\cdot|_{p,1})$, on a

$$|v|_\infty \leq pQ \left(\frac{|\Omega|}{2} \right)^{\frac{1}{N} - \frac{1}{p}} |\nabla v|_{(p,1)} + \frac{2}{|\Omega|} |v|_1$$

$$\text{et } \text{osc}_{B(x,r)} v \leq \frac{\alpha_N^{1-\frac{1}{p}}}{\alpha_{N-1}} |\nabla v|_{L^{p,1}(B(r))} r^{1-\frac{N}{p}} \text{ où } B(x,r) = B(r) \subset \Omega.$$

Preuve. Notons d'abord que :

$L^{p,1} \subset L^{N,1}$ et $|f|_{(N,1)} \leq |\Omega|^{\frac{1}{N} - \frac{1}{p}} |f|_{(p,1)}$, $\forall f \in L^{p,1}$ $p \geq N$. En effet,

$$|f|_{(N,1)} = \int_{\Omega_*} t^{\frac{1}{N} - \frac{1}{p}} t^{\frac{1}{p}} |f|_{**}(t) \frac{dt}{t} \leq |\Omega|^{\frac{1}{N} - \frac{1}{p}} |f|_{(p,1)}.$$

Ainsi $W^1(\Omega, |\cdot|_{p,1}) \subset W^1(\Omega, |\cdot|_{N,1})$ avec une injection continue. On a vu que : $\forall v \in W^1(\Omega, |\cdot|_{N,1})$,

$$\text{osc}_{B(r)} v \leq \frac{\alpha_N^{1-\frac{1}{N}}}{\alpha_{N-1}} |\nabla v|_{L^{N,1}(B(r))} \leq \frac{\alpha_N^{1-\frac{1}{p}} r^{1-\frac{N}{p}}}{\alpha_{N-1}} |\nabla v|_{L^{p,1}(B(r))}$$

(en utilisant l'inégalité précédente).

Pour justifier l'estimation L^∞ , on considère, $\rho_0(v) = |v|_\infty$. Alors, en appliquant le corollaire 4.4.2 du théorème 4.4.6, on déduit :

$\forall v \in W^1(\Omega, |\cdot|_{p,1})$,

$$|v|_\infty \leq |b|_\infty |\nabla v|_{(p,1)} + \frac{2}{|\Omega|} |v|_1 \leq pQ \left(\frac{|\Omega|}{2} \right)^{\frac{1}{N} - \frac{1}{p}} |\nabla v|_{(p,1)} + \frac{2}{|\Omega|} |v|_1.$$

□

Remarque. Si $p > N$, pour tout $N < q < p$ on a : $L^p \subsetneq L^{q,1} \subsetneq L^{N,1}$. En effet, $f \in L_+^p(\Omega)$ on a :

$$\int_{\Omega_*} t^{\frac{1}{q}} f_*(t) \frac{dt}{t} \leq \left(\int_{\Omega_*} t^{-\frac{p'}{q'}} \right)^{\frac{1}{p'}} |f_*|_p = c |\Omega|^{\frac{1}{p'} - \frac{1}{q'}} |f|_p < +\infty$$

(car $q' > p'$ pour $p > q$).

En conséquence, on a :

$$W^{1,p}(\Omega) \subset W^1(\Omega, |\cdot|_{q,1}) \subset W^1(\Omega, |\cdot|_{N,1}).$$

Corollaire 4.5.1 (du théorème d'inclusion 4.5.1).

Pour tout $p > N$, on a :

$$W^{1,p}(\Omega) \subsetneq C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}), \quad \alpha = 1 - \frac{p}{N}.$$

Preuve. Pour $v \in W^{1,p}(\Omega)$, $\forall N < q < p$, on a

$$\begin{aligned} \operatorname{osc}_{B(r)} v &\leq \frac{\alpha_N^{1-\frac{1}{q}}}{\alpha_{N-1}} |\nabla v|_{L^{q,1}(B(r))} \cdot r^{1-\frac{q}{N}} \\ &\leq \frac{\alpha_N^{1-\frac{1}{q}} \alpha_N^{1-\frac{q(p-1)}{(p-1)q}}}{\alpha_{N-1}} |\nabla v|_{L^p(B(r))} r^{1-\frac{q}{N}} \cdot r^{(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})N} \end{aligned}$$

Quand $q \rightarrow p$, on déduit :

$$\operatorname{osc}_{B(r)} v \leq \frac{\alpha_N^{1-\frac{1}{p}}}{\alpha_{N-1}} |\nabla v|_{L^p(B(r))} \cdot r^{1-\frac{p}{N}}.$$

La régularité au bord $\partial\Omega$ découle de l'opérateur de prolongement continu $P : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. $\square$

Théorème 4.5.2 (inclusion dans les espaces de Lorentz).

Si $1 \leq p < N$, $1 \leq q < +\infty$ alors

$$W^1(\Omega, |\cdot|_{p,q}) \subsetneq L^{p^*,q}(\Omega), \quad \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}.$$

De plus, on a pour $v \in W^1(\Omega, |\cdot|_{p,q})$:

1. Si $\gamma_0 v = 0$ sur $\partial\Omega$ alors si $u = |v|$

$$|v|_{p^*,q} \leq \frac{p^*}{N\alpha_N^{\frac{1}{N}}} \|\nabla u\|_{*u}|_{p,q} \leq \frac{p^*}{N\alpha_N^{\frac{1}{N}}} |\nabla v|_{p,q} \quad \text{si } 1 \leq q \leq p.$$

et

$$|v|_{(p^*,q)} \leq \frac{p^*}{N\alpha_N^{\frac{1}{N}}} \left\| |\nabla u|_{*u} \right\|_{(p,q)} + (p^*)^{\frac{1}{q}} |\Omega|^{\frac{1}{p^*}-1} |v|_1 \quad \text{si } p < q \leq +\infty.$$

2. Si $\gamma_0 v \neq 0$ sur $\partial\Omega$ alors il existe une constante $c_2 > 0$ ne dépendant que de p, q, Ω, N et Q t.q.

$$\left| v - v_* \left(\frac{|\Omega|}{2} \right) \right|_{p^*, q} \leq c_2 \|\nabla v\|_{*v|_{p, q}} \leq c_2 |\nabla v|_{p, q} \quad \text{si } 1 \leq q \leq p,$$

et

$$\left| v - v_* \left(\frac{|\Omega|}{2} \right) \right|_{(p^*, q)} \leq c_2 \|\nabla v\|_{*v|_{(p, q)}} \leq c_2 |\nabla v|_{(p, q)} \quad \text{si } p < q \leq +\infty.$$

Preuve. Commençons par rappeler un lemme de Hardy dont la preuve est identique à celle donnée au début du chapitre : (voir exercice 10.1.29, chapitre 10)

Lemme 4.5.4 (de Hardy (2eme version)). *Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ mesurable, $r < 0$ et $q \geq 1$, deux nombres réels. Alors,*

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} f(t) dt \right)^q x^{-r-1} dx \leq \left(\frac{q}{|r|} \right)^q \int_0^{+\infty} f(t)^q t^{q-r-1} dt.$$

1er cas : $v \in W^1(\Omega, |\cdot|_{p, q})$ t.q. $v = 0$ sur $\partial\Omega$.

Posons $u = |v|$ (quitte à raisonner par densité on pourra supposer v bornée), on a :

$$|v|_{p^*, q}^q = \int_{\Omega_*} \left[t^{\frac{1}{p^*}} u_*(t) \right]^q \frac{dt}{t} = \int_{\Omega_*} t^{\frac{q}{p^*}-1} \left(\int_t^{|\Omega|} |u'_*(\sigma)| d\sigma \right)^q dt.$$

Quitte à prolonger u'_* par zéro, nous pouvons appliquer le lemme de Hardy précédent pour obtenir :

$$|v|_{p^*, q}^q \leq (p^*)^q \int_{\Omega_*} |u'_*(t)|^q t^{q+\frac{q}{p^*}-1} dt = (p^*)^q \int_{\Omega_*} \left[t^{\frac{1}{p}} \left(t^{1-\frac{1}{N}} |u'_*(t)| \right) \right]^q \frac{dt}{t}$$

Par l'inégalité ponctuelle de Poincaré-Sobolev :

$$t^{1-\frac{1}{N}} |u'_*(t)| \leq \frac{1}{N\alpha_N^{\frac{1}{N}}} |\nabla u|_{*u}(t) \quad pp.$$

D'où

$$|v|_{p^*, q}^q \leq \left(\frac{1}{N\alpha_N^{\frac{1}{N}}} \right)^q (p^*)^q \int_{\Omega_*} \left[t^{\frac{1}{p}} |\nabla u|_{*u} \right]^q \frac{dt}{t}.$$

Soit

- Si $1 \leq q \leq p$ en utilisant l'inégalité de Polyà-Szëgo (théorème 3.4.1), on a :

$$|v|_{p^*, q} \leq \frac{p^*}{N\alpha_N^{\frac{1}{N}}} \|\nabla u\|_{*u|_{p, q}} \leq \frac{p^*}{N\alpha_N^{\frac{1}{N}}} |\nabla v|_{p, q}.$$

- Si $p < q < +\infty$ alors par intégration par partie, on a

$$\int_{\Omega_*} t^{\frac{q}{p^*}-1} u_{**}(t)^q dt = \frac{p^*}{q} |\Omega|^{\frac{q}{p^*}} u_{**}(|\Omega|)^q - p^* \int_{\Omega_*} t^{\frac{q}{p^*}} u_{**}^{q-1}(t) u'_{**}(t) dt.$$

A l'aide du théorème 4.1.2 i.e. $-u'_{**}(t) \leq \frac{t^{\frac{1}{N}-1}}{N\alpha_N^{\frac{1}{N}}}$ et l'inégalité de Hölder on déduit :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_*} t^{\frac{q}{p^*}-1} u_{**}(t)^q dt &\leq \frac{p^*}{q} |\Omega|^{\frac{q}{p^*}} u_{**}(|\Omega|)^q \\ &+ \frac{p^*}{N\alpha_N^{\frac{1}{N}}} \left(\int_{\Omega_*} t^{\frac{q}{p^*}-1} u_{**}(t)^q dt \right)^{\frac{1}{q'}} \left(\int_{\Omega_*} t^{\frac{q}{p}-1} (|\nabla u|_{*u})_{**}^q(t) dt \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Young suivante : $ab \leq \frac{1}{q} a^q + \frac{1}{q'} b^{q'}$, on déduit le résultat. $\square$

2eme cas $\gamma_0 v \not\equiv 0$ sur $\partial\Omega$.

Ecrivons que

$$\begin{aligned} \left| v - v_* \left(\frac{|\Omega|}{2} \right) \right|_{p^*,q}^q &= \int_0^{\frac{|\Omega|}{2}} \left[t^{\frac{1}{p^*}} \left| v_*(t) - v_* \left(\frac{|\Omega|}{2} \right) \right| \right]^q \frac{dt}{t} \\ &+ \int_{\frac{|\Omega|}{2}}^{|\Omega|} \left[t^{\frac{1}{p^*}} \left| v_*(t) - v_* \left(\frac{|\Omega|}{2} \right) \right| \right]^q \frac{dt}{t} = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

On traite la première intégrale comme le cas précédent. En appliquant l'inégalité de Hardy,

$$I_1 = \int_0^{\frac{|\Omega|}{2}} t^{\frac{q}{p^*}-1} \left(\int_t^{\frac{|\Omega|}{2}} |v'_*(\sigma)| d\sigma \right)^q dt \leq (p^*)^q \int_0^{\frac{|\Omega|}{2}} \left[t^{\frac{1}{p}} \left(t^{1-\frac{1}{N}} |v'_*(t)| \right) \right]^q \frac{dt}{t}.$$

Puisque $t^{1-\frac{1}{N}} |v'_*(t)| \leq Q |\nabla u|_{*u}(t)$ pour $t \leq \frac{|\Omega|}{2}$, on obtient alors

$$I_1 \leq Q^q (p^*)^q \|\nabla v|_{*v}\|_{p,q}^q \leq Q^p (p^*)^q \|\nabla v\|_{(p,q)}^q. \quad (4.5)$$

Quant à l'inégalité I_2 , nous introduisons

$$\gamma = \frac{q-N}{(q-1)N}, \quad \tilde{b}(t) = \gamma^{1-q} \left[\left(\frac{|\Omega|}{2} \right)^\gamma - (|\Omega| - t)^\gamma \right]^{q-1} \text{ alors } \tilde{b} \in L^1 \left(\frac{|\Omega|}{2}, |\Omega| \right).$$

On écrit pour tout $t \in \left[\frac{|\Omega|}{2}, |\Omega| \right)$

$$\left| v_*(t) - v_* \left(\frac{|\Omega|}{2} \right) \right|^q = \left(\int_{\frac{|\Omega|}{2}}^t (|\Omega| - \sigma)^{-\frac{1}{N'}} (|\Omega| - \sigma)^{\frac{1}{N'}} |v'_*(\sigma)| d\sigma \right)^q$$

$$\leq Q^q \left(\int_{\frac{|\Omega|}{2}}^t (|\Omega| - \sigma)^{-\frac{1}{N'}} |\nabla v|_{*v}(\sigma) d\sigma \right)^q \leq Q^q \tilde{b}(t) \int_{\frac{|\Omega|}{2}}^{|\Omega|} [|\nabla v|_{*v}]^q d\sigma$$

(ceci en utilisant la propriété PSR et l'inégalité de Hölder). Ainsi

$$I_2 \leq Q^q \frac{2^{1+\frac{p}{q}}}{|\Omega|^{\frac{1}{N}}} \left(\int_{\frac{|\Omega|}{2}}^{|\Omega|} \tilde{b}(t) dt \right) \cdot \|\nabla v\|_{*v}^q_{p,q} \leq c_1 |\nabla v|_{(p,q)}^q$$

d'où

$$c_2 = Q[p^* + c'_2]^2, \quad c'_2 = \frac{c_1^{\frac{1}{q}}}{Q}.$$

Preuve identique à la partie 1 pour le cas $p < q < +\infty$. $\square$

Voici une preuve fondée sur le théorème général 4.4.6 qui donne un résultat valable pour $q \leq +\infty$ mais plus faible si $q < +\infty$.

Théorème 4.5.3. *Soit $1 \leq p < N$, $1 < q \leq +\infty$. Alors, on a*

$$W^1(\Omega, |\cdot|_{p,q}) \subset L^{p^*, +\infty}(\Omega).$$

De plus, on a

$$\left| u - u_* \left(\frac{|\Omega|}{2} \right) \right|_{p^*, +\infty} \leq 2^{\frac{1}{p^*}} Q \left(\int_1^{+\infty} (\theta - 1)^\gamma \theta^{-\nu} d\theta \right)^{1-\frac{1}{q}} \|\nabla u\|_{*u}|_{(p,q)}$$

$\forall u \in W^1(\Omega, |\cdot|_{p,q})$, où $\gamma + 1 = \frac{q}{p} \cdot \frac{p-1}{q-1}$, $\nu = \frac{q}{N} \cdot \frac{N-1}{q-1}$ et Q est la constante isopérimétrique associée à Ω .

Preuve. Dans le théorème 4.4.6 d'estimation générale, on choisit alors $\rho_0 = |\cdot|_{p^*, +\infty}$ et $\rho(\cdot) = |\cdot|_{(p,q)}$. Ainsi, $\rho'(\cdot) \leq |\cdot|_{(p',q')}$ et comme $|\cdot|_{(p',q')} \leq p|\cdot|_{p',q'}$, il suffit d'estimer $\rho_0 \left(|\chi_{I(s)} K|_{p',q'} \right)$.

Pour des raisons de symétrie dans l'expression de $(\chi_{I(s)} K)_*$, il suffit d'estimer pour $s < \frac{|\Omega|}{2}$. Dans ce cas nous avons :

$$b(s) = |\chi_{I(s)} K|_{p',q'} = Q \left[\int_0^{\frac{|\Omega|}{2}-s} \sigma^{\frac{q'}{p'}-1} (s+\sigma)^{-\frac{q'}{N'}} d\sigma \right]^{\frac{1}{q'}}.$$

Par changement de variables, la dernière intégrale s'écrit

(en posant $\gamma + 1 = \frac{q'}{p'}$, $\nu = \frac{q'}{N'}$) :

$$\left[\int_0^{\frac{|\Omega|}{2}-s} \sigma^{\frac{q'}{p'}-1} (s+\sigma)^{-\frac{q'}{N'}} d\sigma \right]^{\frac{1}{q'}} = s^{\frac{\gamma+1-\nu}{q'}} \left(\int_1^{\frac{|\Omega|}{2s}} (\theta-1)^\gamma \theta^{-\nu} d\theta \right)^{\frac{1}{q'}}$$

or, $\frac{\gamma+1-\nu}{q'} = -\frac{1}{p^*}$ et $J = Q \left(\int_1^{+\infty} (\theta-1)^\gamma \theta^{-\nu} d\theta \right)^{\frac{1}{q'}} < +\infty$. D'où, en utilisant la symétrie :

$$b(s) \leq J \begin{cases} s^{-\frac{1}{p^*}} & \text{si } 0 < s \leq \frac{|\Omega|}{2}, \\ (|\Omega| - s)^{-\frac{1}{p^*}}, & \text{si } \frac{|\Omega|}{2} < s < |\Omega|. \end{cases}$$

On déduit

$$b_*(s) \leq 2^{\frac{1}{p^*}} J s^{-\frac{1}{p^*}} : |b|_{p^*, +\infty} \leq 2^{\frac{1}{p^*}} J.$$

On applique alors l'estimation générale

$$\left| u - u_* \left(\frac{|\Omega|}{2} \right) \right|_{p^*, +\infty} \leq |b|_{p^*, +\infty} \|\nabla u\|_{*u}(p, q).$$

Sachant que $\|\nabla u\|_{*u}(p, q) \leq |\nabla u|_{(p, q)}$, on a :

$$\left| u - u_* \left(\frac{|\Omega|}{2} \right) \right|_{p^*, +\infty} \leq 2^{\frac{1}{p^*}} Q \left(\int_1^{+\infty} (\theta-1)^\gamma \theta^{-\nu} d\theta \right)^{1-\frac{1}{q}} |\nabla u|_{(p, q)}.$$

□

Corollaire 4.5.2 (du théorème 4.5.3). $\forall u \in W^1(\Omega, |\cdot|_{p, q})$

$$|u|_{p^*, +\infty} \leq 2^{\frac{1}{p^*}} J |\nabla u|_{(p, q)} + 2 |\Omega|^{\frac{1}{p^*}-1} |u|_1.$$

Remarque. Le cas $q = 1$ $p < N$ peut être abordé avec la même méthode en calculant $b(s) = |\chi_{I(s)} K|_{p', +\infty}$.

4.6 Inégalités d'interpolation pour un espace normé général

Les inégalités de Poincaré-Sobolev (PSR) peuvent aussi servir à obtenir des inégalités d'interpolation avec, en prime les estimations des constantes.

En voici quelques exemples :

Théorème 4.6.1 (interpolation du type Gagliardo-Nirenberg généralisée).

Soit ρ une norme non triviale sur $L^0(\Omega_*)$ et soit $u \in V_{0+}^1(\Omega, \rho) = \left\{ v \in W_{0+}^{1,1}(\Omega), \rho(|\nabla v|_{*v}) < +\infty \right\}$.

Pour $q \in]0, +\infty[$, on note $|\Omega_q| = \begin{cases} |\Omega| & \text{si } q \geq 1 \\ |u| > 0| & \text{si } 0 < q < 1 \end{cases}$.

Pour toute application ρ_0 homogène et monotone sur $L^0(\Omega_*)$, on a alors :

$$\rho_0(u_*) \leq \left(\frac{q}{N\alpha_N^{\frac{1}{N}}} \right)^{\frac{1}{q}} \rho(|\nabla u|_{*u})^{\frac{1}{q}} \rho_0 \left[(\rho' (k_1 u_*^{q-1} \chi_{[s, |\Omega_q|]})) \right]^{\frac{1}{q}}$$

avec $k_1(t) = t^{\frac{1}{N}-1}$.

Corollaire 4.6.1. On suppose que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ (pour simplifier). Si $N' \leq p < +\infty$, alors $\forall u \in W_0^{1,N}(\Omega)$,

$$|u|_p \leq \left(\frac{1}{aN\alpha_N^{\frac{1}{N}}} \right)^a \left\| |\nabla u|_{*|u|} \right\|_N^a |u|_{p-N'}^{1-a} \leq \left(\frac{1}{aN\alpha_N^{\frac{1}{N}}} \right)^a |\nabla u|_N^a |u|_{p-N'}^{1-a}$$

avec $a = \frac{N'}{p}$.

Preuve du théorème 4.6.1. Soit $u \in W_0^1(\Omega, \rho)$, d'après l'inégalité de Poincaré-Sobolev (PSR), on a :

$$-u'_*(s) \leq \frac{s^{\frac{1}{N}-1}}{N\alpha_N^{\frac{1}{N}}} |\nabla u|_{*u}(s) \quad p.p.$$

Comme $u \geq 0$, on déduit après multiplication par u_*^{q-1} que

$$-\frac{1}{q} \frac{d}{ds} u_*^q(s) \leq \frac{1}{N\alpha_N^{\frac{1}{N}}} |\nabla u|_{*u}(s) \cdot s^{\frac{1}{N}-1} u_*^{q-1}(s), \quad q \geq 0.$$

En intégrant entre s et $|\Omega_q|$ on déduit de cette inégalité que $\forall s \in \overline{\Omega}_*$

$$u_*^q(s) \leq \frac{q}{N\alpha_N^{\frac{1}{N}}} \int_{\Omega_*} |\nabla u|_{*u}(t) t^{\frac{1}{N}-1} u_*(t)^{q-1} \chi_{[s, |\Omega_q|]}(t) dt.$$

En utilisant ρ et ρ' , on obtient, $\forall s \in \overline{\Omega}_*$

$$u_*^q(s) \leq \frac{q}{N\alpha_N^{\frac{1}{N}}} \rho(|\nabla u|_{*u}) \rho' (k_1 u_*^{q-1} \chi_{[s, |\Omega_q|]})$$

où $k_1(t) = t^{\frac{1}{N}-1}$, $t \in \Omega_*$. Puisque ρ_0 est homogène et monotone sur $L^0(\Omega_*)$, on a alors :

$$\rho_0(u_*) \leq \left(\frac{q}{N\alpha_N^{\frac{1}{N}}} \right)^{\frac{1}{q}} \rho(|\nabla u|_{*u})^{\frac{1}{q}} \rho_0 \left((\rho' (k_1 \chi_{[s, |\Omega_q|]}) u_*^{q-1})^{\frac{1}{q}} \right).$$

□

Preuve du corollaire 4.6.1.

Il suffit de considérer $u \geq 0$. On choisit $\rho_0 = |\cdot|_p$, $\rho = |\cdot|_N$ et $qN' = p$. Alors l'inégalité du théorème implique :

$$|u|_p \leq \left(\frac{q}{N\alpha_N^{\frac{1}{N}}} \right)^{\frac{1}{q}} |\nabla u|_{*u}^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\Omega_*} \left(\int_s^{|\Omega|} t^{-1} u_*^{p-N'}(t) dt \right) ds \right)^{\frac{1}{p}} \quad (4.6)$$

Posons $a = 1 - \frac{p-N'}{p} = \frac{N'}{p} = \frac{1}{q}$. En intégrant par partie la dernière intégrale (ou en utilisant le théorème de Fubini) :

$$\int_{\Omega_*} \left(\int_s^{|\Omega|} t^{-1} u_*^{p-N'}(t) dt \right) ds = \int_{\Omega_*} u_*^{p-N'}(t) dt. \quad (4.7)$$

En combinant (4.6) et (4.7), on a :

$$|u|_p \leq \left(\frac{1}{aN\alpha_N^{\frac{1}{N}}} \right)^a |\nabla u|_{*u}^a |u|_{p-N'}^{1-a},$$

□

Remarques.

- Le corollaire précédent est souvent utilisé avec $N = 2$, $p = 4$, $p - N' = 2$ donc $a = \frac{1}{2}$

$$|u|_4 \leq \left(\frac{1}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} |\nabla u|_2^{\frac{1}{2}} |u|_2^{\frac{1}{2}}$$

- Le théorème 4.6.1 peut être énoncé pour des fonctions à trace non nulle i.e. $W^{1,1}(\Omega)$, il suffit d'appliquer l'inégalité (PSR) adéquate.

A partir de cette dernière interpolation, découlent d'autres interpolations. En voici un exemple

Corollaire 4.6.2 (du théorème 4.6.1).

Sous les mêmes conditions que le théorème précédent, si $\max(N', p - N') \leq r \leq p < +\infty$ alors :

$$|u|_p \leq c |\nabla u|_N^{\frac{r}{p}} |u|_r^{1-\frac{r}{p}}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{avec } c = \left(\frac{1}{aN\alpha_N^{\frac{1}{N}}} \right)^a C_r(N, \Omega)^{\frac{r}{p}-a} |\Omega|^{(1-a)(1-\frac{p-N'}{r})}, \\ a = \frac{N'}{p}, C_r(N, \Omega) = \frac{|\Omega|^{\frac{1}{r}}}{N\alpha_N^{\frac{1}{N}}} \left(\int_0^{+\infty} \sigma^{r(1-\frac{1}{N})} e^{-\sigma} d\sigma \right)^{\frac{1}{r}}. \end{array} \right]$$

Preuve. On a vu au théorème 4.4.2 que pour $u \neq 0$:
 $|u|_r \leq C_r(N, \Omega) |\nabla u|_N$ pour $W_{0+}^{1,N}(\Omega)$, on déduit que :

$$|\nabla u|_N^a = |\nabla u|_N^{a-\frac{r}{p}} |\nabla u|_N^{\frac{r}{p}} \leq C_r(N, \Omega)^{\frac{r}{p}-a} |u|_r^{a-\frac{r}{p}} |\nabla u|_N^{\frac{r}{p}} \quad (4.8)$$

et par l'inégalité de Hölder, on sait que :

$$|u|_{p-N'}^{1-a} \leq |\Omega|^{(1-a)(1-\frac{p-N'}{r})} |u|_r^{1-a}. \quad (4.9)$$

En combinant avec le théorème 4.6.1 précédent, on déduit le résultat. $\square$

Notes pré-bibliographiques

Les résultats issus de ce chapitre sont en majorité dûs à l'auteur (voir références citées en fin d'ouvrage) sauf ceux des inclusions classiques de Sobolev. Néanmoins les preuves sont basées sur les résultats de l'auteur.

Réarrangement Relatif

Un instrument d'estimations dans les problèmes aux limites

Rakotoson, J.-M.

2008, XVI, 292 p. 6 ill., Softcover

ISBN: 978-3-540-69117-4