

---

## Table des matières

|                                                                                                                    |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Avant-propos .....                                                                                                 | VII |
| Préface .....                                                                                                      | IX  |
| Index de symboles .....                                                                                            | 1   |
| <b>1 Motivations et généralités sur le réarrangement</b>                                                           |     |
| <b>monotone</b> .....                                                                                              | 5   |
| 1.1 Notations et rappels .....                                                                                     | 6   |
| 1.2 Les inégalités de Hardy-Littlewood .....                                                                       | 11  |
| 1.3 Etude de la continuité de $u \rightarrow u_*$ .....                                                            | 16  |
| 1.4 Espaces fonctionnels liés au réarrangement .....                                                               | 21  |
| 1.5 Théorème de Ryff et conséquences .....                                                                         | 25  |
| 1.6 Construction du réarrangement monotone d'une fonction $u$<br>en dimension 1 .....                              | 27  |
| <b>2 Réarrangement relatif</b> .....                                                                               | 31  |
| 2.1 Calcul d'une dérivée directionnelle :<br>le réarrangement relatif .....                                        | 32  |
| 2.2 Propriétés immédiates du réarrangement relatif .....                                                           | 42  |
| 2.3 Opérateurs moyennes de première espèce .....                                                                   | 47  |
| 2.4 Opérateurs moyennes de seconde espèce .....                                                                    | 49  |
| 2.5 Formules intégrales pour une fonction de deux variables<br>et conséquences .....                               | 51  |
| 2.6 Applications des opérateurs moyennes .....                                                                     | 54  |
| 2.7 Construction d'un réarrangement relatif d'une fonction $v$ par<br>rapport à une fonction $u$ en escalier ..... | 56  |
| <b>3 Inégalités du type Polyà-Szëgo et régularité</b>                                                              |     |
| <b>du réarrangement</b> .....                                                                                      | 61  |
| 3.1 Continuité $s \rightarrow u_*(s)$ .....                                                                        | 62  |

|          |                                                                                                                                           |     |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 3.2      | Formule de Fleming-Rishel                                                                                                                 | 63  |
| 3.3      | Continuité locale absolue du réarrangement monotone                                                                                       | 67  |
| 3.4      | Réarrangements sphériques et inégalités de Polyà-Szëgo classiques                                                                         | 75  |
| 3.5      | Inégalités de Polyà-Szëgo ponctuelles pour le $\alpha$ -réarrangement                                                                     | 79  |
| <b>4</b> | <b>Inégalités ponctuelles et inclusions généralisées de Sobolev</b>                                                                       | 83  |
| 4.1      | Inégalités ponctuelles pour le réarrangement relatif                                                                                      | 84  |
| 4.2      | Inclusions de type général : applications aux espaces de Lorentz                                                                          | 87  |
| 4.3      | Indice général d'inclusions pour les fonctions à trace nulle                                                                              | 91  |
| 4.4      | Inclusions de Poincaré-Sobolev-Lorentz                                                                                                    | 93  |
| 4.4.1    | Cas des fonctions à trace nulle                                                                                                           | 93  |
| 4.4.2    | Cas des fonctions nulles sur une partie du bord                                                                                           | 99  |
| 4.4.3    | Indice général d'inclusion des fonctions à trace quelconque dans $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$                                    | 100 |
| 4.5      | Calcul d'indices d'inclusions                                                                                                             | 103 |
| 4.6      | Inégalités d'interpolation pour un espace normé général                                                                                   | 111 |
| <b>5</b> | <b>Formalisme d'estimations pour les problèmes aux limites</b>                                                                            | 115 |
| 5.1      | Quelques lemmes préliminaires                                                                                                             | 116 |
| 5.2      | Estimations ponctuelles pour des équations quasilineaires                                                                                 | 117 |
| 5.2.1    | Cas des problèmes de Dirichlet                                                                                                            | 118 |
| 5.2.2    | Cas des problèmes Neumann-Dirichlet                                                                                                       | 124 |
| 5.3      | Cas des équations de Neumann homogènes                                                                                                    | 125 |
| 5.4      | Un problème de valeurs propres non linéaires en physique des plasmas                                                                      | 129 |
| 5.5      | Quelques remarques subsidiaires                                                                                                           | 134 |
| <b>6</b> | <b>Continuité de l'application dérivée du réarrangement monotone : <math>u \rightarrow u'_*</math></b>                                    | 137 |
| 6.1      | Quelques résultats généraux : convergence dans $W^{1,1}$ et longueur d'un arc de courbe d'une fonction monotone                           | 137 |
| 6.1.1    | Les I-fonctions et régularité globale du réarrangement associé                                                                            | 141 |
| 6.1.2    | Longueur d'arc et propriétés inhérentes                                                                                                   | 147 |
| 6.2      | Fonctions co-aïres régulières et continuité de $u \in W^{1,p}(\Omega)$ (resp. $W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow u'_* \in L^p(\Omega_*, k)$ ) | 155 |
| 6.2.1    | Décomposition d'une fonction de distribution et propriétés diverses                                                                       | 157 |
| 6.2.2    | Définition d'une fonction co-aïre et continuité                                                                                           | 165 |

|           |                                                                                                                                                                                                     |            |
|-----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>7</b>  | <b>Continuité forte de l'application réarrangement relatif :</b>                                                                                                                                    |            |
|           | $u \rightarrow b_{*u}$ et conséquences . . . . .                                                                                                                                                    | 173        |
| 7.1       | Quelques formules auxiliaires . . . . .                                                                                                                                                             | 174        |
| 7.2       | Approximation spéciale de $b_{*u}$ pour $u \in L^1(\Omega)$ . . . . .                                                                                                                               | 185        |
| 7.3       | Convergence forte de la dérivée directionnelle $u \rightarrow u_*$ . . . . .                                                                                                                        | 190        |
| <b>8</b>  | <b>Quelques problèmes liés au réarrangement relatif . . . . .</b>                                                                                                                                   | <b>195</b> |
| 8.1       | Optimisation multicontrainte . . . . .                                                                                                                                                              | 195        |
|           | 8.1.1 Un théorème abstrait d'existence de multiplicateurs<br>de Lagrange . . . . .                                                                                                                  | 196        |
|           | 8.1.2 Une application concrète . . . . .                                                                                                                                                            | 200        |
| 8.2       | Sur un problème semilinéaire abstrait et ses applications aux<br>problèmes nonlocaux . . . . .                                                                                                      | 206        |
|           | 8.2.1 Théorèmes abstraits pour des problèmes nonlocaux . . . . .                                                                                                                                    | 206        |
|           | 8.2.2 Applications à quelques problèmes nonlocaux . . . . .                                                                                                                                         | 209        |
| <b>9</b>  | <b>Réarrangement relatif d'une famille de fonctions<br/>et problèmes d'évolution . . . . .</b>                                                                                                      | <b>215</b> |
| 9.1       | Réarrangement relatif d'une famille de fonctions . . . . .                                                                                                                                          | 216        |
| 9.2       | Régularité en temps du réarrangement $u_*(t, s)$ . . . . .                                                                                                                                          | 217        |
| 9.3       | Convergence et continuité pour $u \rightarrow \frac{\partial u_*}{\partial t}$ . . . . .                                                                                                            | 223        |
| 9.4       | Applications aux estimations <i>a priori</i> et à la régularité . . . . .                                                                                                                           | 224        |
|           | 9.4.1 Un théorème abstrait d'existence et de régularité . . . . .                                                                                                                                   | 224        |
|           | 9.4.2 Cas des équations quasilinéaires paraboliques . . . . .                                                                                                                                       | 226        |
|           | 9.4.3 Cas particulier des équations linéaires : estimations<br>ponctuelles de $\int_0^s \left  \frac{\partial u}{\partial t} \right _*(t, \sigma) d\sigma$ et $\int_0^s  u _*(t, \sigma) . . . . .$ | 231        |
| 9.5       | Comportement, pour un temps long, d'un système<br>d'équations en Chemotaxis . . . . .                                                                                                               | 234        |
| <b>10</b> | <b>Exercices et problèmes . . . . .</b>                                                                                                                                                             | <b>243</b> |
| 10.1      | Exercices . . . . .                                                                                                                                                                                 | 243        |
| 10.2      | Problèmes . . . . .                                                                                                                                                                                 | 250        |
| <b>11</b> | <b>Solutions ou indications . . . . .</b>                                                                                                                                                           | <b>257</b> |
| 11.1      | Exercices . . . . .                                                                                                                                                                                 | 257        |
| 11.2      | Problèmes . . . . .                                                                                                                                                                                 | 266        |
| <b>12</b> | <b>Commentaires bibliographiques . . . . .</b>                                                                                                                                                      | <b>277</b> |
|           | <b>Littérature . . . . .</b>                                                                                                                                                                        | <b>281</b> |
|           | <b>Index . . . . .</b>                                                                                                                                                                              | <b>291</b> |
|           | <b>Résumé . . . . .</b>                                                                                                                                                                             | <b>293</b> |

<http://www.springer.com/978-3-540-69117-4>

Réarrangement Relatif

Un instrument d'estimations dans les problèmes aux limites

Rakotoson, J.-M.

2008, XVI, 292 p. 6 ill., Softcover

ISBN: 978-3-540-69117-4