
Vorwort

The world is continuous, but the mind is discrete.

David Mumford

Unser Ziel ist es, einige kritische Lücken zwischen diversen Gebieten der Mathematik zu schließen, indem wir das Zusammenspiel zwischen dem stetigen und dem diskreten Volumen von Polytopen untersuchen. Beispiele für Polytope in drei Dimensionen sind unter anderem Kristalle, Quader, Tetraeder und beliebige konvexe Objekte, deren Oberflächen alle flach sind. Es ist unterhaltsam zu sehen, wie viele Probleme aus der Kombinatorik, Zahlentheorie und vielen weiteren mathematischen Gebieten in die Sprache von Polytopen, die in einem euklidischen Raum existieren, übersetzt werden können. Umgekehrt liefert uns die flexible Struktur von Polytopen zahlentheoretische und kombinatorische Informationen, die auf natürliche Weise aus ihrer Geometrie hervorquellen.

Das *diskrete Volumen* eines Körpers \mathcal{P} kann intuitiv als die Anzahl der Rasterpunkte, die in \mathcal{P} liegen, beschrieben werden, wenn ein festes Raster im euklidischen Raum gegeben ist. Das *stetige Volumen* von \mathcal{P} hat die übliche intuitive Bedeutung des Volumens, das wir alltäglichen Gegenständen in der wirklichen Welt zuordnen.

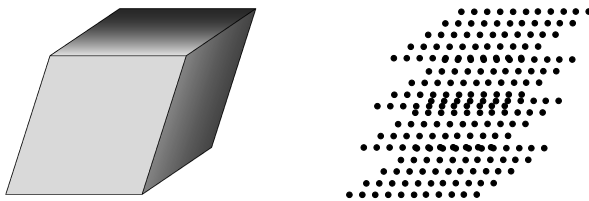


Abb. 0.1. Stetiges und diskretes Volumen.

Den Unterschied zwischen den beiden Volumenbegriffen kann man sich physikalisch wie folgt denken. Auf der einen Seite liefert uns das Raster auf Quantenebene, das von der molekularen Struktur der Wirklichkeit vorgegeben wird, einen diskreten Begriff des Raums und damit ein diskretes Volumen. Auf der anderen Seite liefert uns der Newton'sche Begriff des stetigen Raums das stetige Volumen. Wir betrachten die Dinge stetig auf der Newton'schen Ebene, aber in der Praxis berechnen wir oft Dinge diskret auf der Quantenebene. Mathematisch gesehen hilft uns das Raster, das wir in den Raum legen – entsprechend dem durch die Atome, aus denen ein Gegenstand besteht, gebildeten Raster – auf überraschende Weise dabei, das übliche stetige Volumen zu berechnen, wie wir noch sehen werden.

Um das stetig-diskrete-Zusammenspiel der drei Felder Kombinatorik, Zahlentheorie und Geometrie in Aktion zu sehen, konzentrieren wir uns zunächst auf das leicht zu stellende *Münzenproblem* von Frobenius. Die Schönheit dieses konkreten Problems besteht darin, dass es leicht zu verstehen ist, ein nützliches Berechnungstool liefert und trotzdem die meisten Zutaten der tiefergehenden Theorien, die hier entwickelt werden, enthält.

Im ersten Kapitel geben wir detaillierte Formeln, die sich auf natürliche Weise aus dem Frobenius'schen Münzwechselproblem ergeben, an, um die Verbindungen zwischen den drei oben genannten Gebieten aufzuzeigen. Das Münzenproblem gibt uns ein Gerüst, um die Verbindungen zwischen diesen Gebieten zu identifizieren. In den nachfolgenden Kapiteln entfernen wir dieses Gerüst und konzentrieren uns auf die Verbindungen selbst:

- (1) Aufzählung ganzzahliger Punkte in Polyedern – Kombinatorik,
- (2) Dedekind-Summen und endliche Fourier-Reihen – Zahlentheorie und
- (3) Polygone und Polytope – Geometrie.

Wir legen besonderen Wert auf Berechnungstechniken und auf die Berechnung von Volumina durch Zählen ganzzahliger Punkte unter Benutzung diverser alter und neuer Ideen. Daher sollen die Formeln, die wir erhalten, nicht nur schön sein (was sie wahrlich sind!), sondern sie sollen es uns auch erlauben, Volumina effizient zu berechnen, indem wir einige schöne Funktionen verwenden. In den wirklich seltenen Fällen mathematischer Darstellungen, in denen wir eine Formulierung haben, die sowohl „leicht zu schreiben“ als auch „schnell berechenbar“ ist, haben wir ein mathematisches Juwel gefunden. Wir haben uns bemüht, dieses Buch mit solchen mathematischen Juwelen zu füllen.

Vieles vom Material in diesem Buch wird vom Leser in den mehr als 200 Aufgaben entwickelt. Die meisten Kapitel enthalten Aufwärmübungen, die nicht auf dem Material in dem Kapitel aufbauen und gestellt werden können, bevor das Kapitel gelesen wird. Einige Aufgaben sind von zentraler Bedeutung, in dem Sinn, dass das aktuelle oder spätere Material von ihnen abhängt. Diese Aufgaben sind mit ♣ markiert, und wir geben detaillierte Lösungshinweise dazu am Ende des Buches. Die meisten Kapitel enthalten auch eine Liste offener Forschungsprobleme.

Es stellt sich heraus, dass sogar ein Fünftklässler eine interessante Arbeit über Gitterpunktaufzählung schreiben kann [144], während das Thema sich zur tiefergehenden Untersuchung anbietet, die die aktuellen Anstrengungen führender Forscher anzieht. Es handelt sich also um ein Gebiet der Mathematik, das sowohl unsere unschuldigen Kindheitsfragen als auch unsere verfeinerte Einsicht und tiefere Neugierde anzieht. Das Niveau der Untersuchung ist sehr angemessen für eine vertiefende Grundstudiumsvorlesung in Mathematik. Da die drei oben skizzierten Themen sich zur weiteren Untersuchung anbieten, wurde unser Buch auch mit Erfolg für einen einführenden Hauptstudiumskurs verwendet.

Um dem Leser dabei zu helfen, die Tragweite der Verbindungen zwischen dem stetigen und dem diskreten Volumen voll zu erfassen, beginnen wir unsere Abhandlung in zwei Dimensionen, wo wir leicht Skizzen machen und schnell experimentieren können. Wir führen behutsam die Funktionen, die wir in höheren Dimensionen brauchen (Dedekind-Summen) ein, indem wir das Münzenproblem geometrisch als das diskrete Volumen eines verallgemeinerten Dreiecks, auch Simplex genannt, betrachten.

Die Techniken sind am Anfang recht einfach, im Wesentlichen nichts weiter als Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen. Daher ist das Buch für einen Studenten, der die üblichen Vorlesungen über Analysis und lineare Algebra gehört hat, leicht verständlich. Hilfreich wären ein grundlegendes Verständnis der Partialbruchzerlegung, unendlicher Reihen, offener und abgeschlossener Mengen im \mathbb{R}^d , komplexer Zahlen (insbesondere Einheitswurzeln) und modularer Arithmetik.

Ein wichtiger Berechnungstool, das wir uns das ganze Buch hindurch zu Nutze machen werden, ist die *Erzeugendenfunktion* $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a(m)x^m$, wobei die $a(m)$ eine beliebige Folge von Zahlen bilden, die wir untersuchen möchten. Wenn die unendliche Folge von Zahlen $a(m)$, $m = 0, 1, 2, \dots$, in einer einzigen Funktion $f(x)$ zusammengefasst wird, stellt sich oft heraus, dass wir aus bis dahin unvorhergesehenen Gründen die ganze Reihe $f(x)$ in überraschend kompakter Form aufschreiben können. Es ist diese Umformulierung der Erzeugendenfunktionen, die es uns erlaubt, die Kombinatorik der zugrundeliegenden Folge $a(m)$ zu verstehen. Für uns könnte die Folge zum Beispiel die Anzahl der möglichen Zerlegungen einer ganzen Zahl mit gegebenen Münzwerten oder die Anzahl der Punkte in einem immer größer werdenden Körper sein, und so weiter. Hier finden wir noch ein weiteres Beispiel für das Zusammenspiel zwischen dem Diskreten und dem Stetigen: Wir bekommen eine *diskrete* Menge von Zahlen $a(m)$ und führen dann die Untersuchung auf der Erzeugendenfunktion $f(x)$ in der *stetigen* Variable x durch.

Was ist das diskrete Volumen?

Die oben gegene physikalisch intuitive Beschreibung des diskreten Volumens steht auf einem soliden mathematischen Fundament, sobald wir den Begriff des Gitters einführen. Das Raster wird mathematisch durch die Sammlung

aller ganzzahligen Punkte im euklidischen Raum beschrieben, nämlich $\mathbb{Z}^d = \{(x_1, \dots, x_d) : \text{alle } x_k \in \mathbb{Z}\}$. Diese diskrete Sammlung gleichmäßig verteilter Punkte wird *Gitter* genannt. Zu einem gegebenen geometrischen Körper \mathcal{P} ist sein diskretes Volumen einfach als die Anzahl der Gitterpunkte in \mathcal{P} definiert, also als Anzahl der Elemente der Menge $\mathbb{Z}^d \cap \mathcal{P}$.

Intuitiv erhalten wir, wenn wir das Gitter um einen Faktor k verkleinern und die Anzahl der so geschrumpften Gitterpunkte in \mathcal{P} zählen, eine bessere Annäherung an das Volumen von \mathcal{P} , relativ zum Volumen einer einzelnen Zelle des geschrumpften Gitters. Es stellt sich heraus, dass, nachdem das Gitter um einen ganzzahligen Faktor k geschrumpft wurde, die Anzahl $\#(\mathcal{P} \cap \frac{1}{k}\mathbb{Z}^d)$ geschrumpfter Gitterpunkte in einem *ganzzahligen Polytop* \mathcal{P} wie von Geisterhand ein Polynom in k ist. Diese Zählfunktion $\#(\mathcal{P} \cap \frac{1}{k}\mathbb{Z}^d)$ ist als *Ehrhart-Polynom* von \mathcal{P} bekannt. Wenn wir das Gitter durch Grenzwertbildung immer weiter schrumpfen, dann kommen wir natürlich beim durch das Riemann-Integral aus der Analysis definierten stetigen Volumen heraus:

$$\text{vol } \mathcal{P} = \lim_{k \rightarrow \infty} \# \left(\mathcal{P} \cap \frac{1}{k} \mathbb{Z}^d \right) \frac{1}{k^d}.$$

Wenn wir aber bei festgelegten Streckungen des Gitters stehenbleiben, erhalten wir überraschende Flexibilität für die Berechnung des Volumens von \mathcal{P} und für die Anzahl der Gitterpunkte, die in \mathcal{P} enthalten sind.

Wenn also der Körper \mathcal{P} ein ganzzahliges Polytop ist, verhalten sich die Fehlerterme, die die Diskrepanz zwischen dem diskreten und dem stetigen Volumen messen, recht erfreulich; sie sind durch Ehrhart-Polynome gegeben, und diese Aufzählungspolynome bilden den Inhalt von Kapitel 3

Die Fourier-Dedekind-Summen sind die Bausteine: Zahlentheorie

Jedes Polytop hat ein diskretes Volumen, das durch gewisse endliche Summen, die als *Dedekind-Summen* bekannt sind, ausgedrückt werden kann. Bevor wir deren Definition geben, motivieren wir diese Summen zunächst mit einigen Beispielen, die ihr Verhalten als Bausteine der Gitterpunkt-Aufzählung illustrieren. Konkret betrachten wir als Beispiel ein 1-dimensionales Polytop, gegeben durch das Intervall $\mathcal{P} = [0, a]$, wobei a eine beliebige positive reelle Zahl ist. Es ist klar, dass wir die Gauß-Klammer $[x]$ benötigen, um die Gitterpunkte in \mathcal{P} zu zählen, und tatsächlich ist die Antwort $[a] + 1$.

Als nächstes betrachten wir einen 1-dimensionalen Geradenabschnitt in der 2-dimensionalen Ebene. Wir wählen unseren Geradenabschnitt \mathcal{P} so, dass er im Koordinatenursprung beginnt und im Gitterpunkt (c, d) endet. Wie nach kurzem Nachdenken klar wird, enthält die Anzahl der Gitterpunkt auf diesem endlichen Geradenabschnitt einen alten Bekannten, nämlich den größten gemeinsamen Teiler von c und d . Die genaue Anzahl der Gitterpunkte auf dem Geradenabschnitt ist $\text{ggT}(c, d) + 1$.

Um diese beiden Beispiele zu vereinheitlichen, betrachten wir ein Dreieck \mathcal{P} in der Ebene, dessen Ecken rationale Koordinaten haben. Es stellt sich heraus,

dass eine bestimmte endliche Summe völlig natürlich ist, da sie gleichzeitig die Gauß-Klammer und den größten gemeinsamen Teiler verallgemeinert, obwohl letzteres weniger offensichtlich ist. Ein Beispiel für eine Dedekind-Summe in zwei Dimensionen, die auf natürliche Weise in der Formel für das diskrete Volumen eines rationalen Dreiecks \mathcal{P} auftaucht, ist das Folgende:

$$s(a, b) = \sum_{m=1}^{b-1} \left(\frac{m}{b} - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{ma}{b} - \left\lfloor \frac{ma}{b} \right\rfloor - \frac{1}{2} \right).$$

Die Definition benutzt die Gauß-Klammer. Warum ähneln diese Summen auch dem größten gemeinsamen Teiler? Glücklicherweise genügen die Dedekind-Summen einem bemerkenswerten Reziprozitätsgesetz, ganz ähnlich dem euklidischen Algorithmus, der den ggT berechnet. Dieses Reziprozitätsgesetz erlaubt es, Dedekind-Summen in etwa $\log(b)$ Schritten zu berechnen, anstatt der b Schritte, die die obige Definition nahelegt. Das Reziprozitätsgesetz für $s(a, b)$ bildet das Herzstück einiger erstaunlicher Zahlentheorie, die wir elementar behandeln, die aber auch aus dem tiefergehenden Gebiet der Modulformen und anderer moderner Hilfsmittel kommt.

Wir befinden uns in der glücklichen Position, eine wichtige Spitze eines enormen Ideenbergs zu sehen, der in die Wasser der Geometrie getaucht ist. Während wir immer tiefer in diese Gewässer eintauchen, zeigt sich uns immer mehr versteckte Schönheit, und die Dedekind-Summen sind ein unverzichtbares Hilfsmittel, das es uns erlaubt, je weiter zu sehen, desto tiefer wir dringen.

Die relevanten Körper sind Polytope: Geometrie

Die Beispiele, die wir benutzt haben, nämlich Geradenabschnitte und Polygone in der Ebene, sind Spezialfälle von Polytopen in beliebigen Dimensionen. Ein Weg, Polytope zu definieren, ist es, die *konvexe Hülle* einer endlichen Menge von Punkten im euklidischen Raum \mathbb{R}^d zu betrachten. Das heißt, angenommen, jemand gibt uns eine Menge von Punkten $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ im \mathbb{R}^d . Das durch die gegebenen Punkte \mathbf{v}_j bestimmte Polytop ist definiert als die Menge aller Linearkombinationen $c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_n \mathbf{v}_n$, wobei die Koeffizienten c_j nichtnegative reelle Zahlen sind, die der Bedingung $c_1 + c_2 + \dots + c_n = 1$ genügen. Diese Konstruktion wird *\mathcal{V} -Beschreibung* des Polytops genannt.

Es gibt eine weitere äquivalente Definition, die *\mathcal{H} -Beschreibung* des Polytops. Wenn uns nämlich jemand die linearen Ungleichungen gibt, die eine Sammlung von Halbräumen im \mathbb{R}^d definieren, dann können wir das dazugehörige Polytop als Durchschnitt aller durch die gegebenen Ungleichungen definierten Halbräume definieren.

Es gibt einige „offensichtliche“ Tatsachen über Polytope, die den meisten Studenten intuitiv klar sind, die aber in Wirklichkeit vertrackt sind und deren Beweis aus elementaren Axiomen nicht trivial ist. Zwei dieser Tatsachen, nämlich dass jedes Polytop sowohl eine \mathcal{V} - als auch eine \mathcal{H} -Beschreibung hat, und dass jedes Polytop trianguliert werden kann, bilden eine unabdingbare

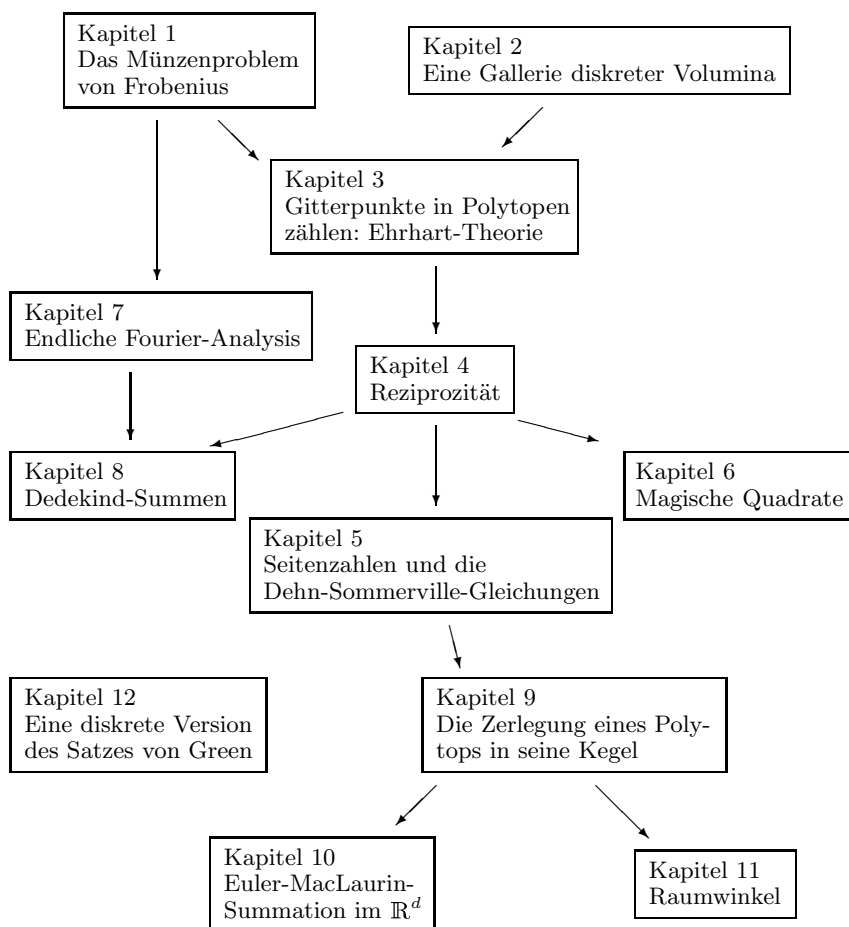


Abb. 0.2. Die partiell geordnete Menge der Kapitelabhängigkeiten.

Basis für das Material, das wir in diesem Buch erarbeiten werden. Wir beweisen beide Tatsachen sorgfältig in den Anhängen. Die beiden Hauptaussagen der Anhänge sind intuitiv klar, so dass Neulinge die Beweise überspringen können, ohne dass ihre Fähigkeit zur Berechnung stetiger und diskreter Volumina Schaden nimmt. Alle Sätze im Text (auch die in den Anhängen) werden aus grundlegenden Axiomen hergeleitet, mit Ausnahme des letzten Kapitels, in dem wir einige Grundbegriffe der Funktionentheorie voraussetzen.

Der Text ist in zwei Teile gegliedert, wie wir jetzt erläutern.

Teil I

Wir haben uns sehr bemüht, den Inhalt der ersten sechs Kapitel nahtlos zu einem Text zusammenfließen zu lassen.

- Die Kapitel 1 und 2 führen einige Grundkonzepte von Erzeugendenfunktionen ein, im visuell ansprechenden Kontext diskreter Geometrie, mit einer Fülle detaillierter motivierender Beispiele.
- Die Kapitel 3, 4 und 5 entwickeln die gesamte Ehrhart-Theorie diskreter Volumina rationaler Polytope.
- Kapitel 6 ist ein „Nachtischkapitel“ in dem Sinn, dass es uns Gelegenheit gibt, die entwickelte Theorie auf die Aufzählung *magischer Quadrate* anzuwenden, einem antiken Thema, das sich aktiver gegenwärtiger Forschung erfreut.

Teil II

Wir fangen jetzt noch einmal von Vorne an.

- Nachdem wir Erfahrung mit einer Vielzahl von Beispielen und Ergebnissen über ganzzahlige Polytope gesammelt haben, sind wir bereit, mehr über die *Dedekind-Summen* aus Kapitel 8 zu lernen, die die atomaren Einheiten der diskreten Volumenpolynome bilden. Auf der anderen Seite müssen wir uns, um Dedekind-Summen vollständig zu verstehen, mit *endlicher Fourier-Analysis* vertraut machen, die wir daher aus elementaren Grundlagen in Kapitel 7 entwickeln, wobei wir lediglich Partialbruchzerlegungen verwenden.
- Kapitel 9 beantwortet eine einfache aber vertrackte Frage: Wie lässt sich die endliche geometrische Reihe in einer Dimension auf höherdimensionale Polytope erweitern? Der *Satz von Brion* gibt die elegante und endgültige Antwort auf diese Frage.
- Kapitel 10 erweitert das Zusammenspiel zwischen dem stetigen und dem diskreten Volumen eines Polytops (das wir bereits im ersten Teil im Detail untersucht haben) durch Einführung von *Euler-Maclaurin-Summenformeln* in allen Dimensionen. Diese Formeln vergleichen die stetige Fourier-Transformation eines Polytops mit dessen diskreter Fourier-Transformation, dabei ist das Material völlig in sich abgeschlossen.
- Kapitel 11 entwickelt eine spannende Erweiterung der Ehrhart-Theorie, die *Raumwinkel* eines Polytops definiert und untersucht; diese sind natürliche Erweiterungen 2-dimensionaler Winkel auf höhere Dimensionen.
- Schließlich enden wir mit einem weiteren „Nachtischkapitel“, das funktionentheoretische Methoden verwendet, um eine Integralformel für die Diskrepanz zwischen diskreten und stetigen Flächen, die von einer geschlossenen Kurve in der Ebene umschlossen sind, zu finden.

Da Polytope sowohl von theoretischem Nutzen (in triangulierten Mannigfaltigkeiten zum Beispiel) als auch in der Praxis unverzichtbar (in Computergrafik zum Beispiel) sind, werden wir sie benutzen, um Ergebnisse aus der Zahlentheorie und der Kombinatorik zu verbinden. Viele Forschungsarbeiten werden über diese Zusammenhänge geschrieben, noch während wir dies schreiben, und es ist unmöglich, diese alle hier abzudecken; wir hoffen allerdings, dass diese bescheidenen Anfänge dem Leser, der nicht mit diesen Gebieten vertraut ist, ein gewisses Gefühl für ihre Schönheit, grenzenlose Verbundenheit und Nützlichkeit geben. Wir laden den allgemeinen mathematischen Leser herzlich ein in das, was wir für eine atemberaubende Welt des Zählens und der Verbindungen zwischen Gebieten der Kombinatorik, Zahlentheorie und Geometrie halten.

Es gibt eine Reihe hervorragender Bücher, die sich nichttrivial mit unserem überschneiden und Material enthalten, das die hier behandelten Themen ergänzt. Wir empfehlen herzlich die Monografien von Barvinok [12] (über Konvexität allgemein), Ehrhart [80] (die historische Einführung in Ehrhart-Theorie), Ewald [81] (über Verbindungen zur algebraischen Geometrie), Hibi [95] (über das Zusammenspiel algebraischer Geometrie mit Polytopen), Miller-Sturmfels [131] (über algorithmische kommutative Algebra) und Stanley [171] (über allgemeine Aufzählungsprobleme in der Kombinatorik).

Danksagungen

Wir hatten das große Glück, während des Schreibens an diesem Buch Hilfe von vielen freundlichen Menschen zu erhalten. Zu allererst bedanken wir uns bei den Studenten der Kurse, in denen wir dieses Material ausprobieren konnten, an der Binghamton University (SUNY), der San Francisco State University und der Temple University. Unser Dank gilt unseren Studenten bei der MSRI/Banff 2005 Graduate Summer School. Insbesondere danken wir Kristin Camenga und Kevin Woods, die die Tutorien zu diesem Sommerkurs abgehalten, zahlreiche Tippfehler entdeckt und uns viele interessante Anregungen für dieses Buch gegeben haben. Wir sind dankbar für die großzügige Unterstützung des Sommerkurses durch das Mathematical Sciences Research Institute, das Pacific Institute of Mathematics und die Banff International Research Station.

Viele Kollegen haben dieses Unterfangen unterstützt, und wir sind besonders all denen dankbar, die uns über (Tipp-)Fehler informiert und uns gute Vorschläge gemacht haben: Daniel Antonetti, Alexander Barvinok, Nathanael Berglund, Andrew Beyer, Tristram Bogart, Garry Bowlin, Benjamin Braun, Robin Chapman, Yitwah Cheung, Jessica Cuomo, Dimitros Dais Aaron Dall, Jesus De Loera, David Desario, Mike Develin, Ricardo Diaz, Michael Dobbins, Jeff Doker, Han Minh Duong, Richard Ehrenborg, David Einstein, Joseph Gubeladze, Christian Haase, Mary Halloran, Friedrich Hirzebruch, Brian Hopkins, Serkan Hoşten, Benjamin Howard, Piotr Maciak, Evgeny Materov, Asia Matthews, Peter McMullen, Martín Mereb, Ezra Miller, Mel Nathanson,

Julian Pfeifle, Peter Pleasants, Jorge Ramírez Alfonsín, Bruce Reznick, Adrian Riskin, Steven Sam, Junro Sato, Kim Seashore, Melissa Simmons, Richard Stanley, Bernd Sturmfels, Thorsten Theobald, Read Vanderbilt, Andrew Van Herick, Sven Verdoolaege, Michèle Vergne, Julie Von Bergen, Neil Weickel, Carl Woll, Zhiqiang Xu, Jon Yaggie, Ruriko Yoshida, Thomas Zaslavsky, Günter Ziegler und zwei anonymen Referees. Wir werden Errata, Aktualisierungen usw. auf der Internetseite

`math.sfsu.edu/beck/ccd.html`

sammeln.

Wir sind der Redaktion des Springer-Verlags dankbar, allen voran Mark Spencer, der uns den Prozess der Veröffentlichung stets auf freundliche und unterstützende Art vereinfacht hat. Wir danken David Kramer für das makellose Redigieren, Frank Ganz dafür, dass er uns an seinem L^AT_EX-Wissen teilhaben ließ, und Felix Pertnoy für den nahtlosen Produktionsprozess.

Matthias Beck möchte seine tiefste Dankbarkeit gegenüber Tendai Chitewere ausdrücken, für ihre Geduld, Unterstützung und bedingungslose Liebe. Er dankt seiner Familie dafür, dass sie immer für ihn da ist. Sinai Robins möchte Michal Robins, Shani Robins und Gabriel Robins für ihre unermüdliche Unterstützung und ihr Verständnis während der Fertigstellung dieses Projekts danken. Wir beide danken allen Cafés, die wir in den letzten fünf Jahren besucht haben, dafür, dass sie uns ihren Kaffee in Theoreme umwandeln ließen.

San Francisco
Philadelphia
June 2007

Matthias Beck
Sinai Robins

Das Kontinuum diskret berechnen

Beck, M.; Robins, S.

2008, XX, 242 S., Softcover

ISBN: 978-3-540-79595-7