Inhaltsverzeichnis

2 Ein erstes Beispiel einer Variationsformulierung

Wir beginnen mit einem typischen eindimensionalen linearen Randwertproblem: Gesucht ist eine reelle Funktion u auf dem Intervall $[0, 1]$, welche die Differentialgleichung

$$-\big(a(x)u'(x)\big)' + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in (0, 1)$$

und die Randbedingungen

$$\begin{aligned} u(0) &= g_0, \\ a(1)u'(1) &= g_1 \end{aligned}$$

für vorgegebene Daten a, b, c, f, g_0 und g_1 erfüllt. Wie wir in der Übungsaufgabe 1 sehen werden, lässt sich (fast) jede lineare Differentialgleichung 2. Ordnung in diese Form bringen. Aufgrund der speziellen Gestalt des ersten Terms spricht man von einer Differentialgleichung in Divergenzform. Wir haben in der Einleitung gesehen, dass in Bilanzgleichungen Ausdrücke dieser Form ($\operatorname{div} q$) auftreten. Also lässt sich die obige Differentialgleichung als Bilanzgleichung (im stationären eindimensionalen Fall) mit $q = -a(x)u'(x)$ und $q_0 = f(x) - c(x)u(x) - b(x)u'(x)$ interpretieren.

Beispiel

Die Bestimmung der Temperaturverteilung in einem dünnen Stab, der sich mit Länge 1 in x-Richtung erstreckt, führt auf die obige Differentialgleichung für $u = T$ mit $a = \lambda$, $b = 0$, $c = \alpha$ und $f = \alpha\, T_0$, siehe Kapitel 1, falls man annehmen darf, dass alle beteiligten Größen nur von x abhängen.

Die Randbedingung im Punkt $x = 0$ schreibt den Wert der gesuchten Funktion im Randpunkt vor, man nennt sie eine Dirichlet[1]-Randbedingung (oder auch eine Randbedingung der 1. Art). Die Randbedingung im Punkt $x = 1$ schreibt die erste Ableitung der gesuchten Funktion im Randpunkt vor, man nennt sie eine Neumann[2]-Randbedingung (oder auch eine Randbedingung der 2. Art). Genau genommen wird ein Wert für $a(1)u'(1)$, also in der Sprache einer Bilanzgleichung für den (negativen) Fluss $-q = a(x)u'(x)$ im Punkt $x = 1$ vorgeschrieben.

[1] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859), deutscher Mathematiker
[2] Carl Gottfried Neumann (1832–1925), deutscher Mathematiker

Beispiel

Für die Bestimmung der Temperaturverteilung in einem Stab werden durch diese Randbedingungen im Punkt $x = 0$ die Temperatur und im Punkt $x = 1$ die Wärmestromdichte vorgegeben.

Eine vollständige Problembeschreibung erfordert es, die gegebenen Eigenschaften der Daten und die gewünschten Eigenschaften der Lösung zu präzisieren. Plausible Annahmen über die Daten sind z.B. die stetige Differenzierbarkeit der Funktion a auf $[0, 1]$ und die Stetigkeit der Funktionen b, c und f auf $[0, 1]$, also insgesamt:

$$a \in C^1[0, 1], \quad b, c, f \in C[0, 1], \quad g_0, g_1 \in \mathbb{R}.$$

Unter diesen Bedingungen ist es nahe liegend, von der Lösung u zu erwarten, dass sie zweimal stetig differenzierbar auf $[0, 1]$ ist, kurz

$$u \in C^2[0, 1].$$

Wir arbeiten hier also mit dem klassischen Begriff der Ableitung aus der Analysis sowohl bei der Problemformulierung als auch bei den Differenzierbarkeitsbedingungen an die Lösung. Man spricht daher von einer klassischen Formulierung des Randwertproblems und einer klassischen Lösung u.

Die Differentialgleichung lässt sich kurz auch in der Form

$$Lu(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in (0, 1)$$

mit dem linearen Differentialoperator L, gegeben durch

$$Lu(x) = -\big(a(x)u'(x)\big)' + b(x)u'(x) + c(x)u(x),$$

schreiben.

Als ein einfaches Beispiel eines Randwertproblems der obigen Art wird im Laufe des Buches immer wieder Bezug auf das folgende Modellproblem genommen:

Beispiel

Das eindimensionale Modellproblem. Für $a(x) = 1$, $b(x) = 0$, $c(x) = 0$ erhält man das Randwertproblem:

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x) \quad \text{für alle } x \in (0, 1), \\ u(0) &= g_0, \\ u'(1) &= g_1. \end{aligned}$$

Variationsformulierung

Der erste Schritt zur Konstruktion einer (Näherungs-)Lösung ist die Diskretisierung. Die schnellste Art zu einem diskretisierten Problem zu kommen, bietet eine so genannte Finite-Differenzen-Methode. Dabei ersetzt man die Ableitungen der Differentialgleichung durch Differenzenquotienten und erhält ein System von Differenzengleichungen für die Näherungen der exakten Lösung in endlich vielen Punkten des Intervalls $[0, 1]$. Wir werden hier mit einer aufwendigeren Diskretisierungsmethode beginnen, einer so genannten Finite-Elemente-Methode. Diese Technik gilt als die wichtigste Diskretisierungsmethode. Sie hat eine Reihe von Vorteilen, die bei weitem die Anfangsstrapaze ausgleichen.

Ausgangspunkt dieser Diskretisierungsmethode ist nicht die obige klassische Formulierung, sondern eine so genannte Variationsformulierung des Randwertproblems. Anstelle die Gleichheit der linken und rechten Seite der Differentialgleichung in jedem Punkt $x \in (0, 1)$ zu verlangen, fordern wir

$$\int_0^1 \Big[-\big(a(x)u'(x)\big)' + b(x)u'(x) + c(x)u(x) \Big] v(x)\, dx = \int_0^1 f(x)v(x)\, dx \tag{2.1}$$

für hinreichend viele Funktionen v, die wir Testfunktionen nennen. Wir testen also gewissermaßen die Gleichheit der linken und rechten Seite der Differentialgleichung hinter dem Integral. Es ist klar, dass diese beiden Formen des Begriffes Gleichheit übereinstimmen, solange wir ausreichend viele Testfunktionen verwenden. Rein formal haben wir also in diesem ersten Schritt die Differentialgleichung mit einer Testfunktion v multipliziert und anschließend über das Intervall $(0, 1)$ integriert.

Wir vereinbaren für das weitere Vorgehen, dass alle beteiligten Funktionen die notwendigen Differenzierbarkeits- und Integrierbarkeitsbedingungen erfüllen. Die genauen Anforderungen werden zu einem späteren Zeitpunkt detailliert beschrieben. Im nächsten Schritt der Umwandlung in ein Variationsproblem wird der Term, der die höchste Ableitung enthält, partiell integriert:

$$\int_0^1 -\big(a(x)u'(x)\big)'\, v(x)\, dx = -a(x)u'(x)v(x)\Big|_0^1 + \int_0^1 a(x)u'(x)v'(x)\, dx. \tag{2.2}$$

Anschließend vereinfachen wir den auftretenden Randterm mit Hilfe der bekannten Randbedingungen an u unter der zusätzlichen Annahme, dass die Testfunktion v die Randbedingung $v(0) = 0$ erfüllt:

$$-a(x)u'(x)v(x)\Big|_0^1 = -\underbrace{a(1)u'(1)}_{=g_1} v(1) + a(0)u'(0)\underbrace{v(0)}_{=0} = -g_1 v(1). \tag{2.3}$$

Bei den bisherigen Umformungen wurde die Randbedingung $u(0) = g_0$ nicht verwendet. Wir müssen sie nach wie vor explizit vorschreiben und erhalten somit aus (2.1) unter Verwendung von (2.2) und (2.3) folgende neue Formulierung des Randwertproblems, die zunächst wesentlich komplizierter aussieht: Gesucht ist eine Funktion u mit $u(0) = g_0$, sodass

$$\int_0^1 \big[a(x)u'(x)v'(x) + b(x)u'(x)v(x) + c(x)u(x)v(x)\big]\, dx = \int_0^1 f(x)v(x)\, dx + g_1 v(1)$$

für alle Testfunktionen v mit $v(0) = 0$.

Wesentliche und natürliche Randbedingungen

Die Randbedingung $u(0) = g_0$ im Punkt $x = 0$ lässt sich nicht bei der Vereinfachung des Randterms, der durch partielle Integration entstanden ist, einbauen, ganz einfach weil $u(0)$ im Randterm nicht vorkommt. Daher musste diese Bedingung explizit in der neuen Problemformulierung übernommen werden. Um trotzdem den Beitrag im Randterm an der Stelle $x = 0$ vereinfachen zu können (d.h. hier die erste Ableitung zu eliminieren), wurde die entsprechende (homogene) Randbedingung $v(0) = 0$ als Einschränkung an die Testfunktion v gestellt. Randbedingungen dieser Art nennt man wesentliche Randbedingungen: Sie sind in der Variationsformulierung explizit an die Lösung zu stellen und bedingen eine entsprechende homogene Randbedingung an die Testfunktionen.

Ganz anders verhält es sich mit der Randbedingung im Punkt $x = 1$: Sie enthält die erste Ableitung der gesuchten Funktion, dieselbe erste Ableitung tritt im Randterm auf, die Randbedingung wird bei der Vereinfachung des Randterms verwendet ohne jegliche Einschränkung an die Testfunktion. Randbedingungen dieser Art nennt man natürliche Randbedingungen: Sie sind sozusagen in der Variationsformulierung eingebaut, werden daher nicht (nochmals) explizit an die Lösung u gestellt. In Punkten des Randes mit einer natürlichen Randbedingung dürfen keinerlei Einschränkungen an die Testfunktionen v gestellt werden, wie wir noch sehen werden.

Für eine vollständige Formulierung des Randwertproblems als Variationsproblem ist es noch erforderlich, geeignete Mengen für die Testfunktionen v und die Lösung u zu fixieren:

Schwache Ableitungen

In der Variationsformulierung kommen Ableitungen nur im Integranden vor, und zwar nur in Ausdrücken der Form $\int_0^1 w'(x)\varphi(x)\,dx$. Also genügt ein Ableitungsbegriff, der festlegt, was man unter diesen Ausdrücken zu verstehen hat. Definiert man die Ableitung w' wie klassisch üblich, dann folgt durch partielle Integration sofort die Identität

$$\int_0^1 w'(x)\varphi(x)\,dx = -\int_0^1 w(x)\varphi'(x)\,dx \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(0,1). \tag{2.4}$$

Dabei bezeichnet $C_0^\infty(0,1)$ die Menge aller unendlich oft mal differenzierbaren Funktionen auf $(0,1)$, die außerhalb einer kompakten Menge $K \subset (0,1)$, also insbesondere in der Nähe der Randpunkte, verschwinden. Wir drehen nun den Spieß um und erheben (2.4) zur definierenden Eigenschaft einer Ableitung. Um sie vom klassischen Begriff einer Ableitung zu unterscheiden, nennen wir diese Ableitung schwache (oder auch verallgemeinerte) Ableitung:

Definition

Eine lokal integrierbare Funktion w' heißt schwache Ableitung einer lokal integrierbaren Funktion w, wenn (2.4) gilt. (Die Einschränkung auf lokal integrierbare Funktionen, also auf Funktionen, die auf jedem kompakten Intervall $K \subset (0,1)$ integrierbar sind, stellt sicher, dass die Integrale in (2.4) existieren.)

Es lässt sich zeigen, dass die schwache Ableitung w' einer Funktion w, sofern sie existiert, als lokal integrierbare Funktion eindeutig ist. Sie stimmt im Falle der klassischen Differenzierbarkeit von w mit der klassischen Ableitung überein, was die Übernahme der gleichen Bezeichnung rechtfertigt.

Es wird sich herausstellen, dass auch Funktionen, die nicht auf dem ganzen Intervall $(0,1)$ im klassischen Sinne differenzierbar sind, trotzdem eine schwache Ableitung besitzen können.

Dazu betrachten wir das wichtige Beispiel einer Funktion, die stückweise klassisch differenzierbar ist: Sei w eine Funktion auf $[0,1]$ und $\bar{x}$ ein Punkt in $(0,1)$, so dass die Einschränkungen $w|_{[0,\bar{x})}$ und $w|_{(\bar{x},1]}$ stetig differenzierbar sind und die links- und rechtsseitigen Grenzwerte von w und w' im Punkt $\bar{x}$ existieren. Die einseitigen Grenzwerte von w werden mit $w(\bar{x}-)$ und $w(\bar{x}+)$ bezeichnet. Wenn überhaupt eine schwache Ableitung von w auf dem Intervall $(0,1)$ existiert, muss diese schwache Ableitung auf den Teilintervallen $(0,\bar{x})$ und $(\bar{x},1)$ mit der klassischen Ableitung übereinstimmen. Das folgt leicht aus der Eindeutigkeit der schwachen Ableitung. Damit bleibt als einziger Kandidat für die schwache Ableitung die Funktion w', die man durch stückweises Differenzieren von w auf $(0,\bar{x}) \cup (\bar{x},1)$ erhält. Diese Funktion w' ist natürlich lokal integrierbar. (Für eine lokal integrierbare Funktion ist es unerheblich, welcher Wert der Funktion an der Stelle $x = \bar{x}$ zugeordnet wird.)

Es bleibt zu untersuchen, ob diese Funktion w' tatsächlich die schwache Ableitung ist. Es ist also zu überprüfen, ob (2.4) gilt. Wir betrachten zunächst die linke Seite: Da w nur auf den beiden Teilintervallen, nicht aber auf dem gesamten Intervall stetig differenzierbar ist, können wir partielle Integration auch nur auf den Teilintervallen anwenden:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 w'(x)\varphi(x)\,dx \\
&= \int_0^{\bar{x}} w'(x)\varphi(x)\,dx + \int_{\bar{x}}^1 w'(x)\varphi(x)\,dx \\
&= w(x)\varphi(x)\Big|_0^{\bar{x}} - \int_0^{\bar{x}} w(x)\varphi'(x)\,dx + w(x)\varphi(x)\Big|_{\bar{x}}^1 - \int_{\bar{x}}^1 w(x)\varphi'(x)\,dx \\
&= [w(\bar{x}-) - w(\bar{x}+)]\,\varphi(\bar{x}) - \int_0^1 w(x)\varphi'(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Vergleicht man mit (2.4), so ist die Funktion w' offensichtlich genau dann die schwache Ableitung, wenn $w(\bar{x}-) = w(\bar{x}+)$, wenn also w stetig ist. Natürlich lassen sich die Überlegungen leicht von 2 Teilintervallen auf endlich viele Teilintervalle übertragen. Also gilt:

Satz

Eine stückweise stetig differenzierbare Funktion besitzt genau dann eine schwache Ableitung, wenn die Funktion stetig ist.

Wir werden später von dieser fundamentalen Tatsache bei der Diskretisierung Gebrauch machen.

Sobolew-Räume

Für eine korrekte Variationsformulierung ist es erforderlich, dass alle auftretenden Integrale wohldefiniert sind und einen endlichen Wert besitzen. Zum Beispiel erfüllt der Term $\int_0^1 c(x)u(x)v(x)\,dx$ diese Anforderung, wenn alle beteiligten Funktionen (Lebesgue-) messbar sind, der Koeffizient c beschränkt ist (kurz $c \in L_\infty(0,1)$) und u, v quadratisch integrierbar sind (kurz $u, v \in L_2(0,1)$). Dies ist eine direkte Folgerung aus der Cauchy-Ungleichung für Funktionen $v, w \in L_2(0,1)$: Das Produkt vw ist integrierbar (kurz $vw \in L_1(0,1)$) und es gilt:

$$(v,w)_{L_2(0,1)} \le \|v\|_{L_2(0,1)}\,\|w\|_{L_2(0,1)}$$

mit dem L_2-Skalarprodukt und der dazugehörigen L_2-Norm

$$(v,w)_{L_2(0,1)} = \int_0^1 v(x)w(x)\,dx, \qquad \|v\|_{L_2(0,1)} = \sqrt{(v,v)_{L_2(0,1)}}.$$

Die analoge Diskussion der weiteren Terme führt insgesamt auf die Forderungen

$$a, b, c \in L_\infty(0,1), \quad f \in L_2(0,1)$$

an die Daten und die Forderungen

$$u, u', v, v' \in L_2(0,1)$$

an die Lösung bzw. an die Testfunktionen. Das führt uns zu folgender Menge als Arbeitsraum für Lösung und Testfunktionen:

Definition

$H^1(0,1)$ bezeichnet die Menge aller Funktionen $v \in L_2(0,1)$, die eine schwache Ableitung $v' \in L_2(0,1)$ besitzen:

$$H^1(0,1) = \{v \in L_2(0,1) : v' \in L_2(0,1)\}.$$

In $H^1(0,1)$ ist durch

$$(v,w)_{H^1(0,1)} = \int_0^1 v(x)w(x)\,dx + \int_0^1 v'(x)w'(x)\,dx$$

ein Skalarprodukt, das H^1-Skalarprodukt, die dazugehörige H^1-Norm

$$\|v\|_{H^1(0,1)} = \sqrt{(v,v)_{H^1(0,1)}} = \left(\int_0^1 |v(x)|^2\,dx + \int_0^1 |v'(x)|^2\,dx\right)^{1/2}$$

und die H^1-Halbnorm

$$|v|_{H^1(0,1)} = \|v'\|_{L_2(0,1)} = \left(\int_0^1 |v'(x)|^2\,dx\right)^{1/2}$$

gegeben. $H^1(0,1)$ nennt man einen Sobolew[3]-Raum der Ordnung 1.

[3] Sergei L'vovich Sobolew (1908–1989), russischer Mathematiker

Wir werden später sehen, wie wichtig es ist, mit diesen Normen zu arbeiten. Man könnte diese Normen natürlich auch in den klassischen Funktionenräumen $C[0,1]$ bzw. $C^1[0,1]$ (anstelle von $L_2(0,1)$ und $H^1(0,1)$) verwenden. Diese so normierten Räume sind allerdings nicht vollständig: Wir können aus dem Cauchy-Kriterium einer Folge nicht auf die Konvergenz der Folge schließen, eine sehr wichtige Eigenschaft ginge verloren. Siehe Übungsaufgabe 3 für ein Beispiel einer Cauchy-Folge in $C^1[0,1]$ bezüglich der H^1-Norm, die keinen Grenzwert in $C^1[0,1]$ besitzt. Hingegen lässt sich zeigen, dass die Räume $L_2(0,1)$ und $H^1(0,1)$ bezüglich der oben eingeführten Normen vollständig sind. $L_2(0,1)$ und $H^1(0,1)$ sind also Hilbert-Räume.

Der Spuroperator

Für die Menge $H^1(0,1)$ als Teilmenge von lokal integrierbaren Funktionen ist die Bedeutung der wesentlichen Randbedingungen $u(0) = g_0$ für eine Lösung u und die Forderung $v(0) = 0$ für eine Testfunktion zunächst nicht klar, da man lokal integrierbare Funktionen, die sich nur in einzelnen Punkten (allgemeiner auf einer Nullmenge) unterscheiden, als gleich betrachtet. Es bedarf daher einer genaueren Überlegung: Von entscheidender Bedeutung ist die folgende Ungleichung:

Lemma

Es gibt eine Konstante $C_{tr} > 0$ mit

$$|v(0)| \le C_{tr}\,\|v\|_{H^1(0,1)} \quad \text{für alle } v \in C^1[0,1].$$

Beweis. Aus der Identität

$$v(0) = v(x) - \int_0^x v(y)'\,dy$$

folgt mit Hilfe der Dreiecksungleichung und der Cauchy-Ungleichung

$$|v(0)| \le |v(x)| + \int_0^x |v'(y)|\,dy \le |v(x)| + \int_0^1 |v'(y)|\,dy \le |v(x)| + \|v'\|_{L_2(0,1)}.$$

Durch Integration folgt

$$\begin{aligned} |v(0)| &\le \int_0^1 |v(x)|\,dx + \|v'\|_{L_2(0,1)} \le \|v\|_{L_2(0,1)} + \|v'\|_{L_2(0,1)} \\ &\le \sqrt{2}\left(\|v\|^2_{L_2(0,1)} + \|v'\|^2_{L_2(0,1)}\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Die behauptete Abschätzung gilt also für $C_{tr} = \sqrt{2}$. □

Die Aussage dieses Lemmas lässt sich auch folgendermaßen ausdrücken: Der lineare Operator $\gamma_0 : C^1[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, der jeder Funktion $v \in C^1[0,1]$ ihren Wert $v(0)$ zuordnet, also $\gamma_0 v = v(0)$, ist bezüglich der H^1-Norm beschränkt. Es lässt sich zeigen, dass $C^1[0,1]$ bezüglich der H^1-Norm dicht in $H^1(0,1)$ ist. Daher gibt es eine eindeutige Erweiterung des Operators γ_0 auf ganz $H^1(0,1)$. Wir bezeichnen diesen erweiterten Operator wieder mit γ_0, er heißt der Spuroperator. Der Ausdruck $v(0)$ als alternative Schreibweise von $\gamma_0 v$ ist somit auf ganz $v \in H^1(0,1)$ (nicht aber auf $L_2(0,1)$) wohldefiniert und es gilt die Abschätzung des letzten Lemmas auf ganz $H^1(0,1)$:

$$|v(0)| \leq C_{tr}\,\|v\|_{H^1(0,1)} \quad \text{für alle } v \in H^1(0,1).$$

Das endgültige Variationsproblem

Nach diesen Vorbereitungen lassen sich nun alle beteiligten Funktionenmengen exakt definieren:

$$V = H^1(0,1), \quad V_0 = \{v \in V \,|\, v(0) = 0\}, \quad V_g = \{v \in V \,|\, v(0) = g_0\}.$$

V bezeichnet also den Arbeitsraum, V_0 ist der lineare Teilraum der Testfunktionen und V_g ist die lineare Mannigfaltigkeit, in der die Lösung u gesucht wird. Wir kommen somit zur endgültigen Variationsformulierung unseres Randwertproblems: Gesucht ist $u \in V_g$, sodass

$$a(u,v) = \langle f, v\rangle \quad \text{für alle } v \in V_0$$

mit

$$\begin{aligned} a(w,v) &= \int_0^1 \big[a(x)w'(x)v'(x) + b(x)w'(x)v(x) + c(x)w(x)v(x)\big]\,dx,\\ \langle f, v\rangle &= \int_0^1 f(x)v(x)\,dx + g_1 v(1) \end{aligned}$$

für $w, v \in V$. Alle Ausdrücke sind für Daten

$$a, b, c \in L_\infty(0,1), \quad f \in L_2(0,1), \quad g_0, g_1 \in \mathbb{R}$$

wohldefiniert.

Wie man sofort sieht, hängt der Ausdruck $a(w,v)$ sowohl von w als auch von v linear ab, definiert also eine Bilinearform $a\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$. Der Term $\langle f, v\rangle$ hängt linear von v ab, definiert also ein lineares Funktional $f\colon V \longrightarrow \mathbb{R}$. Die Bezeichnung $\langle f, v\rangle$ ist einfach als Wert des Funktionals f für das Argument v, also als alternative Schreibweise für $f(v)$ zu verstehen. Man beachte, dass das Symbol a sowohl zur Bezeichnung der Koeffizientenfunktion $a(x)$ als auch zur Bezeichnung der Bilinearform $a(w,v)$ verwendet wird. Wir verzichten auf die Einführung unterschiedlicher Symbole, da aus dem Zusammenhang stets klar sein wird, was gemeint ist. Analoges gilt für das Symbol f.

Wir nennen das obige Problem ein (lineares) Variationsproblem (oder auch eine (lineare) Variationsgleichung), Lösungen dieses Variationsproblems werden schwache (oder auch verallgemeinerte) Lösungen genannt.

Beispiel

Die Variationsformulierung für das eindimensionale Modellproblem lautet: Gesucht ist $u \in V_g = \{v \in V = H^1(0,1)\colon v(0) = g_0\}$, sodass

$$\underbrace{\int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx}_{=\,a(u,v)} = \underbrace{\int_0^1 f(x)v(x)\,dx + g_1 v(1)}_{=\,\langle f, v\rangle} \quad \text{für alle } v \in V_0$$

WARNUNG: Es mag auf Grund der Herleitung der Eindruck entstehen, dass eine klassische Lösung automatisch auch eine schwache Lösung ist. Das ist zwar richtig, wenn wir von einer klassischen Lösung $u \in C^2[0,1]$ ausgehen, nicht aber, wenn wir die Voraussetzungen an die Daten abschwächen: Zur korrekten klassischen Formulierung der Differentialgleichung genügen eigentlich die Bedingungen $a \in C^1(0,1)$, $b, c, f \in C(0,1)$ und $u \in C^2(0,1)$. Wegen der Randbedingung im Punkt $x = 0$ wird man zusätzlich die Stetigkeit von u in diesem Punkt fordern, wegen der Randbedingung im Punkt $x = 1$ die Stetigkeit von a und die stetige Differenzierbarkeit von u in diesem Punkt. Also können wir für die klassische Formulierung auch die Bedingungen

$$a \in C^1(0,1) \cap C(0,1], \quad b, c, f \in C(0,1), \quad g_0, g_1 \in \mathbb{R}$$

an die Daten stellen und erwarten eine klassische Lösung

$$u \in C^2(0,1) \cap C^1(0,1] \cap C[0,1). \tag{2.5}$$

Eine solche klassische Lösung muss nicht notwendig eine quadratisch integrierbare Ableitung besitzen, siehe Übungsaufgabe 5. Also

$$\text{klassische Lösung} \overset{\text{i. A.}}{\not\Rightarrow} \text{schwache Lösung}$$

Nur wenn zusätzliche Integrierbarkeitsbedingungen gelten, ist eine klassische Lösung auch eine schwache Lösung.

Um den Zusammenhang zwischen einer klassischen Lösung und einer schwachen Lösung noch näher zu beleuchten, untersuchen wir die umgekehrte Frage: Ist eine schwache Lösung auch eine klassische Lösung?

Sei also $u \in V_g$ eine schwache Lösung. Wir nehmen zusätzlich an, dass a stetig differenzierbar ist, b, c, f stetig sind und u zweimal stetig differenzierbar ist. Durch partielle Integration erhält man

$$\int_0^1 a(x)u'(x)v'(x)\,dx = a(x)u'(x)v(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \big(a(x)u'(x)\big)'\,v(x)\,dx.$$

Wegen $v(0) = 0$ folgt damit aus der Variationsgleichung

$$a(1)u'(1)v(1) + \int_0^1 \Big[-\big(a(x)u'(x)\big)' + b(x)u'(x) + c(x)u(x) \Big] v(x)\,dx$$
$$= \int_0^1 f(x)v(x)\,dx + g_1 v(1). \tag{2.6}$$

Wir wählen zunächst Testfunktionen $v \in C_0^\infty(0,1)$ $(\subset V_0)$. Das bedeutet insbesondere $v(0) = v(1) = 0$. Dann folgt

$$\int_0^1 \Big[-\big(a(x)u'(x)\big)' + b(x)u'(x) + c(x)u(x) \Big] v(x)\,dx = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx.$$

Es lässt sich zeigen, dass $C_0^\infty(0,1)$ bezüglich der L_2-Norm dicht in $C[0,1]$ liegt. Daher folgt sofort

$$-\big(a(x)u'(x)\big)' + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in (0,1).$$

Die Differentialgleichung ist also erfüllt und aus (2.6) wird die Bedingung:

$$a(1)u'(1)v(1) = g_1 v(1) \quad \text{für alle } v \in V_0.$$

Da $v(1)$ beliebig gewählt werden kann, erhält man daraus die (natürliche) Randbedingung:

$$a(1)u'(1) = g_1.$$

Hier sieht man, warum keine Einschränkungen an den Wert einer Testfunktion in einem Randpunkt mit Neumann-Randbedingung gestellt werden dürfen. Wir könnten sonst nicht die natürliche Randbedingung aus der Variationsgleichung extrahieren.

WARNUNG:

$$\text{schwache Lösung} \overset{\text{i. A.}}{\not\Rightarrow} \text{klassische Lösung}$$

Das ist offensichtlicher: Die obige Herleitung klappt nur, wenn zusätzliche Differenzierbarkeitsbedingungen gelten.

Ergänzende Hinweise

Eine Vertiefung der hier verwendeten Begriffe und Aussagen aus der linearen Funktionalanalysis und über Sobolew-Räume findet man zum Beispiel in [1,2].

Übungsaufgaben

1. Zeigen Sie, dass jede lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$a(x)u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x)$$

für $a \in C^1(0,1)$ und $b, c, f \in C(0,1)$ auch in der Form

$$-\big(\bar{a}(x)u'(x)\big)' + \bar{b}(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x)$$

mit geeigneten Funktionen $\bar{a} \in C^1(0,1)$ und $\bar{b} \in C(0,1)$ geschrieben werden kann (und umgekehrt). Beide Formen einer allgemeinen linearen Differentialgleichung sind also (im Wesentlichen) ineinander transformierbar, die zweite Form führt zu einfacheren Ausdrücken in der Variationsgleichung. In physikalischen Problemstellungen besitzt der Ausdruck $-\bar{a}(x)u'(x)$ aus der zweiten Form eine unmittelbare physikalische Interpretation (als Fluss q).

2. Zeigen Sie, dass jede lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$a(x)u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x)$$

für $a \in C^2(0,1)$, $b \in C^1(0,1)$ und $c, f \in C(0,1)$ auch in der Form

$$\big(-\bar{a}(x)u'(x) + \bar{b}(x)u(x)\big)' + \bar{c}(x)u(x) = f(x)$$

mit geeigneten Funktionen $\bar{a} \in C^2(0,1)$, $\bar{b} \in C^1(0,1)$ und $\bar{c} \in C(0,1)$ geschrieben werden kann (und umgekehrt). Beide Formen einer allgemeinen linearen Differentialgleichung sind also (im Wesentlichen) ineinander transformierbar. Ein Term von erster Ordnung in u lässt sich also auch als Beitrag zum Fluss ($q = -\bar{a}(x)u'(x) + \bar{b}(x)u(x)$) unterbringen. In Bilanzgleichungen beschreiben Terme von erster Ordnung in u (in welcher Form auch immer) zum Beispiel den konvektiven Transport einer Größe.

3. Die Funktionenfolge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist durch

$$u_k(x) = \begin{cases} 2x & \text{für} \quad x \in \left[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{2k}\right], \\ 1 - \frac{1}{2k} - 2k\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 & \text{für} \quad x \in \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2k}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2k}\right), \\ 2(1-x) & \text{für} \quad x \in \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2k}, 1\right] \end{cases}$$

gegeben. Zeigen Sie: $u_k \in C^1[0,1]$. Berechnen Sie $\|u_k - u\|_{H^1(0,1)}$ mit

$$u(x) = \begin{cases} 2x & \text{für} \quad x \in [0, 1/2], \\ 2(1-x) & \text{für} \quad x \in (1/2, 1] \end{cases}$$

und zeigen Sie

$$\lim_{k\to\infty} \|u_k - u\|_{H^1(0,1)} = 0.$$

Schließen Sie daraus, dass $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $C^1[0,1]$ bezüglich der H^1-Norm ist, aber keinen Grenzwert in $C^1[0,1]$ besitzt.

4. Wandeln Sie das Randwertproblem in klassischer Formulierung

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x) \quad \text{für alle } x \in (0,1), \\ -u'(0) &= g_0 - \alpha_0\, u(0), \\ u(1) &= g_1 \end{aligned}$$

in ein Variationsproblem um. Hinweis: Die Randbedingung bei $x = 0$ ist eine natürliche Randbedingung (Robin-Randbedingung oder Randbedingung der 3. Art): Mit ihrer Hilfe lässt sich die Größe $u'(0)$ aus dem Randterm, der durch partielle Integration entsteht, durch die rechte Seite der Randbedingung ersetzen. Bringen Sie alle bilinearen Terme auf die linke Seite und alle linearen Terme auf die rechte Seite der Gleichung, um die Bilinearform a und das lineare Funktional f zu identifizieren.

http://www.springer.com/978-3-7643-8426-5

Numerische Mathematik
Eine Einführung anhand von
Differentialgleichungsproblemen; Band 1: Stationäre
Probleme
Zulehner, W.
2008, VI, 150 S., Softcover
ISBN: 978-3-7643-8426-5
A product of Birkhäuser Basel