Teil I

Statik der Starrkörper

1

Mathematische Vorüberlegungen

Die Grundtatsachen der Vektorrechnung sind den meisten Lesern aus dem Schulunterricht bekannt. Offensichtlich haben Vektoren einen „Richtungscharakter“, der sie zu geeigneten mathematischen Objekten macht, um etwa die physikalische Wirkung von Kräften, aber auch die Lage ihrer Angriffspunkte im Raum zu beschreiben. Erfahrungsgemäß fällt das Verständnis der diesbezüglichen Sachverhalte nicht schwer, solange keine Koordinatentransformationen stattfinden. Das ist in Teil I weitgehend der Fall. In Teil II und III sind sie jedoch unvermeidlich. Um auf diese Situation optimal vorzubereiten, werden wir insbesondere die Komponentenschreibweise verwenden, die im Gegensatz zur (schulüblichen) Spaltenschreibweise den Blick auf die zugrunde liegende Vektorbasis nicht verstellt.

In Teil II werden wir die Erfahrung machen, dass Vektoren zur Beschreibung räumlicher Spannungszustände nicht ausreichen. Es werden mathematische Objekte mit zweifacher Richtungscharakteristik benötigt. Diese begründen historisch die sogenannte Tensorrechnung (lat. *tensor* = Spannung), in der Vektoren und Skalare als Spezialfälle auftreten. Dazu führen wir zu Beginn von Teil II mit der **Indizierten Tensornotation** eine überaus praktische und platzsparende Schreibweise ein, die in der Fachliteratur zur Festigkeitslehre und Thermofluiddynamik heute obligatorisch ist.

Die Beschreibung von Bewegungen räumlich ausgedehnter Körper in Teil III macht die parallele Betrachtung von ortsfesten und körperfesten Koordinatensystemen erforderlich. Letztere bewegen sich relativ zu Ersteren. Die Behandlung des (bei Studenten nicht sonderlich beliebten) Impulsmomentensatzes ist in der indizierten Tensordarstellung vergleichsweise einfach.

1.1 Skalare

Physikalische Größen, die *keinen* Richtungscharakter besitzen, wie z. B. Massen, (statische) Drücke, Temperaturen, bezeichnet man als **Skalare** (= *scalar*). Sie bestehen aus einer Zahl, multipliziert mit einer geeigneten Einheit, z. B.

$$\underbrace{m}_{\text{skalare Größe}} = \underbrace{100}_{\text{Zahl}} \; \underbrace{\text{kg}}_{\text{Einheit}} \; .$$

Der „Zahlenvorrat“ ist in aller Regel der reelle Zahlenkörper $\mathbb{R}$. Es dürfen nur Größen gleicher physikalischer Dimension (also Massen und Massen etc.) summiert werden! Man kann zwar ohne Weiteres schreiben

$$m = \ 4\,\text{kg} \ + \ 500\,\text{g}\,,$$

wird im Allgemeinen aber Wert darauf legen, die Masse m mit nur einer Zahl auszudrücken, d. h., eine von beiden Teilmassen wird auf die Einheit der anderen umgerechnet, so dass das Distributivgesetz (Ausklammern) anwendbar wird. Also entweder

$$m = \ 4\,\text{kg} \ + \ 0,5\,\text{kg} \ = \ (4 \ + \ 0,5)\,\text{kg} \ = \ 4,5\,\text{kg}$$

oder

$$m = \ 4000\,\text{g} \ + \ 500\,\text{g} \ = \ (4000 \ + \ 500)\,\text{g} \ = \ 4500\,\text{g}.$$

1.2 Vektoren

Nachfolgend wird eine kurzgefasste Zusammenstellung von ingenieurrelevanten Tatsachen der Vektorrechnung gegeben, deren Darstellung nicht den Anspruch der mathematischen Strenge erhebt. Hierzu sei der Leser auf [3], [7] verwiesen.

Vektoren (= *vector*) sind Größen mit *einfachem* Richtungscharakter. Man kann sie sich im einfachsten Fall als Pfeile im dreidimensionalen Raum unserer Anschauung vorstellen. Der Pfeil $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ überführt den Punkt P in den Punkt Q, so dass man auch von einer „Translation“ spricht. Zwei Pfeile $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ und $\overrightarrow{\mathrm{P'Q'}}$ mit gleicher Richtung und gleicher Länge repräsentieren den gleichen Vektor.

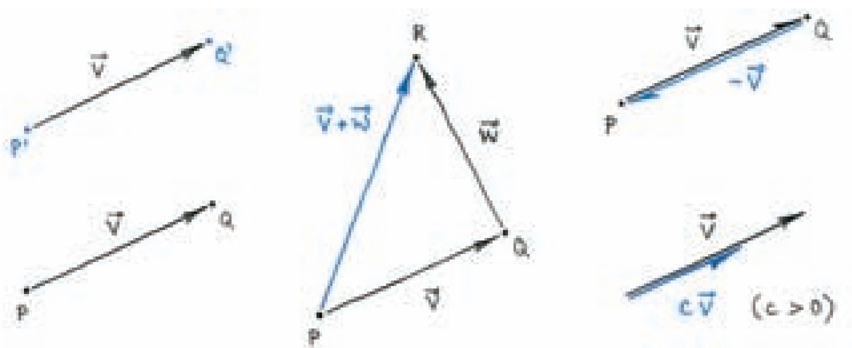


Abb. 1.1 Translationen und Vektoren

In diesem Sinne können wir alle Pfeile gleicher Richtung und Länge zu einer Äquivalenzklasse zusammenfassen und stattdessen von einem Vektor $\vec{\mathbf{v}}$ reden. Führt man zwei Translationen $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ und $\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ nacheinander aus, so liegt damit die Translation $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ vor. Dafür schreiben wir die **Summe**

$\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}}$.

Weiterhin können wir die **Multiplikation** eines **Vektors** $\vec{\mathbf{v}}$ mit einem **Skalar** $c \in \mathbb{R}$ vornehmen. Dadurch ändert sich die Länge des Vektors $\vec{\mathbf{v}}$ um das c-fache.

Man erkennt leicht, dass für Vektoren folgende Rechenregeln gelten:

(1) Addition ist kommutativ: $\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{w}} + \vec{\mathbf{v}}$

(2) Addition ist assoziativ: $\vec{\mathbf{u}} + (\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}}) = (\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}) + \vec{\mathbf{w}}$

(3) Es gibt einen Nullvektor $\vec{\mathbf{0}}$, so dass $\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{0}} = \vec{\mathbf{v}}$ ist.

(4) Zu jedem Vektor $\vec{\mathbf{v}}$ gibt es einen Vektor $-\vec{\mathbf{v}}$, so dass $\vec{\mathbf{v}} + (-\vec{\mathbf{v}}) = \vec{\mathbf{0}}$ ist.

Das bedeutet: Die Translation $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ wird wieder rückgängig gemacht, wenn anschließend $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ ausgeführt wird, so dass im Ergebnis $\overrightarrow{\mathrm{PP}}$ vorliegt, was gewissermaßen eine „Nulltranslation“ bewirkt.

(5) $1\,\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}$

(6) Multiplikation mit Skalaren $c, d \in \mathbb{R}$ ist assoziativ: $c\,(d\vec{\mathbf{v}}) = (c\,d)\vec{\mathbf{v}} = c\,d\vec{\mathbf{v}}$

(7) Addition von Skalaren ist distributiv: $(c + d)\,\vec{\mathbf{v}} = c\,\vec{\mathbf{v}} + d\,\vec{\mathbf{v}}$

(8) Addition von Vektoren ist distributiv: $c\,(\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}}) = c\,\vec{\mathbf{v}} + c\,\vec{\mathbf{w}}$

Unter einem **Vektorraum** verstehen wir eine nichtleere Menge, deren Elemente die vorgenannten Regeln, auch Vektorraum-Axiome genannt, erfüllen.

Definition: n Vektoren $\vec{\mathbf{v}}_1$, ..., $\vec{\mathbf{v}}_n$ heißen **linear unabhängig**, wenn gilt

$$\underbrace{c_1\,\vec{\mathbf{v}}_1 + c_2\,\vec{\mathbf{v}}_2 + \ldots + c_n\,\vec{\mathbf{v}}_n}_{\text{Linearkombination}} = \vec{\mathbf{0}} \qquad \Longrightarrow \qquad c_1, \ldots, c_n = 0$$

mit $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$. ■

Das ist folgendermaßen zu verstehen: Die linksstehende Vektorgleichung darf nur auf die eine Weise erfüllbar sein, dass alle Konstanten $c_1, \ldots, c_n$ gleichzeitig verschwinden. Denn anderenfalls lässt sich diese Gleichung so umstellen, dass *ein* Vektor durch die $n-1$ übrigen ausgedrückt wird.

Wir stellen also fest:

- Keiner der n linear unabhängigen Vektoren lässt sich mithilfe der anderen ausdrücken.
- Jeder der n linear unabhängigen Vektoren zeigt in eine eigene Richtung (auch nicht in die Gegenrichtung eines anderen Vektors).
- Zwei voneinander linear abhängige Vektoren $\overrightarrow{\mathbf{v}}_1$ und $\overrightarrow{\mathbf{v}}_2$ lassen sich durch Multiplikation mit einem Skalar gemäß

  $$\overrightarrow{\mathbf{v}}_1 = c\,\overrightarrow{\mathbf{v}}_2 \qquad \text{bzw.} \qquad \overrightarrow{\mathbf{v}}_2 = \frac{1}{c}\,\overrightarrow{\mathbf{v}}_1$$

  ineinander überführen. Sie sind somit entweder parallel ($c > 0$) oder antiparallel ($c < 0$).

Wir bezeichnen einen Vektorraum als **n-dimensional**, wenn es n linear unabhängige Vektoren gibt und $(n+1)$ Vektoren linear abhängig sind. Es ist daher naheliegend, in einem n-dimensionalen Vektorraum eine Menge von n linear unabhängigen Vektoren zu einer sogenannten **Basis**

$$\vec{\mathbf{e}}_1,\ \vec{\mathbf{e}}_2,\ \ldots,\ \mathbf{e}_n$$

zusammenzufassen. Jeder Vektor lässt sich auf eindeutige Weise als **Linearkombination** der Basisvektoren erzeugen:

$$\overrightarrow{\mathbf{v}} \ = \ v_1\,\vec{\mathbf{e}}_1 \ + \ \ldots \ + \ v_n\,\mathbf{e}_n$$

bzw.

$$\overrightarrow{\mathbf{v}} \ = \ \sum_{i=1}^{n} v_i\,\mathbf{e}_i\ . \tag{1.1}$$

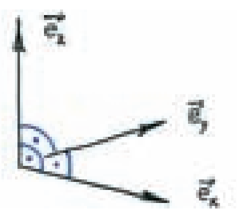
Man nennt die $v_i\,\mathbf{e}_i$ die **Komponenten** des Vektors $\overrightarrow{\mathbf{v}}$. Die Skalare v_i dagegen heißen **Koordinaten** des Vektors $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ bezüglich der Basis $\vec{\mathbf{e}}_1,\ \ldots,\ \mathbf{e}_n$.

Die Koordinaten v_i müssen keineswegs die physikalische Dimension einer Länge beinhalten! Im heutigen Sprachgebrauch hat sich allerdings anstelle der „Koordinaten“ ebenfalls das Wort „Komponenten“ eingebürgert – vermutlich durch Einfluss des englischen *component*, was beides bedeuten kann (vgl. [4], Wortstelle C 1660).

Wir beschränken uns vorübergehend auf $n = 3$ und legen – wie in Abbildung 1.2 dargestellt – in jede Achse des bekannten kartesischen Koordinatensystems einen Vektor der Länge 1. Diese werden dementsprechend als $\vec{\mathbf{e}}_\mathrm{x}$, $\vec{\mathbf{e}}_\mathrm{y}$, $\vec{\mathbf{e}}_\mathrm{z}$ bezeichnet. Wir stellen daher fest:

Die drei Vektoren $\vec{\mathbf{e}}_\mathrm{x}$, $\vec{\mathbf{e}}_\mathrm{y}$, $\vec{\mathbf{e}}_\mathrm{z}$ bilden eine **Orthonormalbasis** wegen

1. $\vec{\mathbf{e}}_\mathrm{x} \perp \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{y}\,,\quad \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{x} \perp \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{z}\,,\quad \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{y} \perp \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{z}$ (Orthogonalität)



2. $\|\vec{\mathbf{e}}_\mathrm{x}\| \;=\; \|\vec{\mathbf{e}}_\mathrm{y}\| \;=\; \|\vec{\mathbf{e}}_\mathrm{z}\| \;=\; 1$ (Normiertheit)

$\boxed{\text{orthogonal + normiert = }\textbf{orthonormal}}$.

Anstelle der traditionellen Indexbezeichung mit

$$\vec{\mathbf{v}} \;=\; v_\mathrm{x}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathrm{x} \;+\; v_\mathrm{y}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathrm{y} \;+\; v_\mathrm{z}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathrm{z}$$

kann natürlich auch

$$\vec{\mathbf{v}} \;=\; v_1\,\vec{\mathbf{e}}_1 \;+\; v_2\,\vec{\mathbf{e}}_2 \;+\; v_3\,\vec{\mathbf{e}}_3$$

stehen. Ob man die drei Raumrichtungen nun mit $1, 2, 3$ oder $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}$ bezeichnet, ist im Prinzip egal, die zählende Indizierung bietet jedoch den Vorteil der Summenschreibweise nach (1.1).

Viele mechanische Probleme lassen sich allerdings als „ebene Probleme“ formulieren, d. h., die dritte Dimension ist in der Realität zwar vorhanden, besitzt aber im Sinne des Problems keinen Informationswert. Die voranstehende Vektordarstellung wird dann einfach entsprechend verkürzt, so dass die verbleibenden Terme die vorgesehenen Indexbezeichnungen tragen.

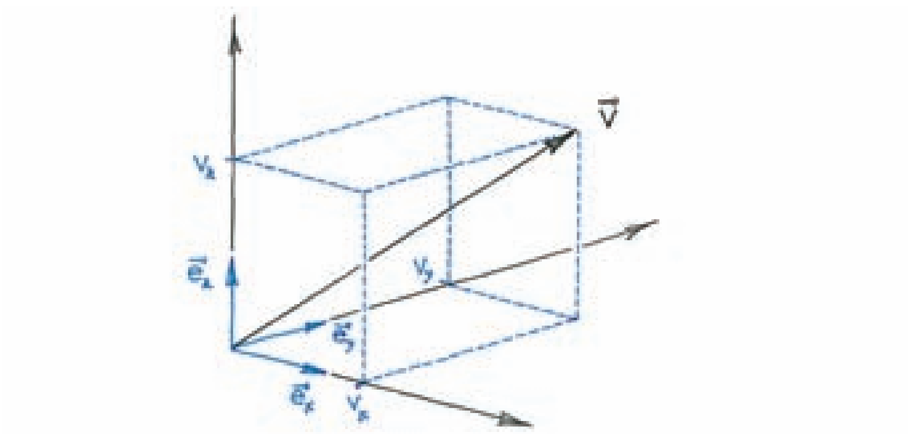


Abb. 1.2 Darstellung des Vektors $\vec{\mathbf{v}}$ im dreidimensionalen Raum

Liegt in einem Vektorraum die Basis erst einmal *fest*, so genügt zur eindeutigen Beschreibung des Vektors $\vec{\mathbf{v}}$ auch die Angabe lediglich seiner Koordinaten $v_\mathrm{x}, v_\mathrm{y}, v_\mathrm{z}$ (bzw. v_1, v_2, v_3). Diese stellen **geordnete Mengen** dar, die bekanntlich in Gestalt von **Spaltenmatrizen** (auch: **-vektoren**) notiert werden. Man nennt

$$\underline{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} v_\mathrm{x} \\ v_\mathrm{y} \end{pmatrix} \qquad \text{Geordnetes Paar,}$$

$$\underline{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} v_\mathrm{x} \\ v_\mathrm{y} \\ v_\mathrm{z} \end{pmatrix} \qquad \text{Tripel,}$$

$$\underline{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \qquad n\text{-Tupel.}$$

Bei geordneten Mengen darf im Gegensatz zu gewöhnlichen Mengen wie $\{a, b, c\}$ die Reihenfolge der Elemente *nicht* vertauscht werden!

1.2.1 Vektoraddition, Multiplikation mit einem Skalar

Die **Vektoraddition**

$$\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}}$$

erfolgt in der Komponentenschreibweise zu

$$u_\mathrm{x}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathrm{x} + u_\mathrm{y}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathrm{y} + u_\mathrm{z}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathrm{z} = \\ = (v_\mathrm{x} + w_\mathrm{x})\,\vec{\mathbf{e}}_\mathrm{x} + (v_\mathrm{y} + w_\mathrm{y})\,\vec{\mathbf{e}}_\mathrm{y} + (v_\mathrm{z} + w_\mathrm{z})\,\vec{\mathbf{e}}_\mathrm{z}\,.$$

Durch Vergleich erhält man die Koordinatengleichungen

$$\begin{aligned} u_\mathrm{x} &= v_\mathrm{x} + w_\mathrm{x}\,, \\ u_\mathrm{y} &= v_\mathrm{y} + w_\mathrm{y}\,, \\ u_\mathrm{z} &= v_\mathrm{z} + w_\mathrm{z} \end{aligned}$$

oder in Spaltenschreibweise

$$\begin{pmatrix} u_\mathrm{x} \\ u_\mathrm{y} \\ u_\mathrm{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_\mathrm{x} \\ v_\mathrm{y} \\ v_\mathrm{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_\mathrm{x} \\ w_\mathrm{y} \\ w_\mathrm{z} \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{v}} + \underline{\mathbf{w}}\,.$$

Die **Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar** ergibt sich in der Komponentenschreibweise mit

$$c\,\vec{\mathbf{v}} = c\,v_\mathrm{x}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathrm{x} + c\,v_\mathrm{y}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathrm{y} + c\,v_\mathrm{z}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathrm{z}$$

gewissermaßen von selbst. Damit ist auch

$$c\,\underline{\mathbf{v}} \;=\; \begin{pmatrix} c\,v_\mathrm{x} \\ c\,v_\mathrm{y} \\ c\,v_\mathrm{z} \end{pmatrix}$$

selbstverständlich. Die Rechenregeln bezüglich Addition und Multiplikation mit Skalaren wurden bereits mit den Vektorraum-Axiomen (1) bis (8) gegeben.

1.2.2 Skalarprodukt $\mathbb{E}^3,\ \mathbb{E}^3 \;\rightarrow\; \mathbb{R}\ |$[1]

Es werden zwei Vektoren miteinander multipliziert, und das Ergebnis ist ein Skalar. Da es sich dabei um eine Abbildung in den zugrunde liegenden Zahlenkörper $\mathbb{R}$ handelt, spricht man auch vom „Innenprodukt".

Das Skalarprodukt (= *scalar product*) ist definiert durch die Projektionseigenschaft

$$\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}} \;:=\; v\; w\; \cos\alpha\;. \tag{1.2}$$

Dabei sind

$$v \;:=\; \left\|\vec{\mathbf{v}}\right\|, \quad w \;:=\; \left\|\vec{\mathbf{w}}\right\|$$

die **Beträge** („Längen") der Vektoren $\vec{\mathbf{v}}$, $\vec{\mathbf{w}}$ sowie

$$\alpha \;:=\; \sphericalangle\; \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}$$

der von diesen eingeschlossene Winkel. Geht man zur Komponentenschreibweise über, erhält man aufgrund des Distributivgesetzes (s. u.) sofort

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}} \;&=\; \left(v_\mathrm{x}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathrm{x} \,+\, v_\mathrm{y}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathrm{y} \,+\, v_\mathrm{z}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathrm{z}\right)\cdot\left(w_\mathrm{x}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathrm{x} \,+\, w_\mathrm{y}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathrm{y} \,+\, w_\mathrm{z}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathrm{z}\right) \\
&=\; \; v_\mathrm{x}\,w_\mathrm{x}\;\; \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{x}\cdot\vec{\mathbf{e}}_\mathrm{x} \;+\; v_\mathrm{x}\,w_\mathrm{y}\;\; \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{x}\cdot\vec{\mathbf{e}}_\mathrm{y} \;+\; v_\mathrm{x}\,w_\mathrm{z}\;\; \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{x}\cdot\vec{\mathbf{e}}_\mathrm{z} \;+ \\
&\;\; +\; v_\mathrm{y}\,w_\mathrm{x}\;\; \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{y}\cdot\vec{\mathbf{e}}_\mathrm{x} \;+\; v_\mathrm{y}\,w_\mathrm{y}\;\; \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{y}\cdot\vec{\mathbf{e}}_\mathrm{y} \;+\; v_\mathrm{y}\,w_\mathrm{z}\;\; \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{y}\cdot\vec{\mathbf{e}}_\mathrm{z} \;+ \\
&\;\; +\; v_\mathrm{z}\,w_\mathrm{x}\;\; \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{z}\cdot\vec{\mathbf{e}}_\mathrm{x} \;+\; v_\mathrm{z}\,w_\mathrm{y}\;\; \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{z}\cdot\vec{\mathbf{e}}_\mathrm{y} \;+\; v_\mathrm{z}\,w_\mathrm{z}\;\; \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{z}\cdot\vec{\mathbf{e}}_\mathrm{z} \;\;.
\end{aligned}$$

Da *verschiedene* Basisvektoren zueinander orthogonal sind, gilt

$$\vec{\mathbf{e}}_\mathrm{x} \cdot \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{y} \;=\; \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{x} \cdot \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{z} \;=\; \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{y} \cdot \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{z} \;=\; \cos\left[\,90^\circ\right] \;=\; \mathbf{0}\;,$$

umgekehrt erhält man bei *gleichen* Basisvektoren wegen der Normiertheit

$$\vec{\mathbf{e}}_\mathrm{x} \cdot \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{x} \;=\; \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{y} \cdot \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{y} \;=\; \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{z} \cdot \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{z} \;=\; \cos\left[\,0^\circ\right] \;=\; \mathbf{1}\;.$$

Damit verbleibt

$$\boxed{\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}} \;=\; v_\mathrm{x}\,w_\mathrm{x} \;+\; v_\mathrm{y}\,w_\mathrm{y} \;+\; v_\mathrm{z}\,w_\mathrm{z}}\;. \tag{1.3}$$

[1] Vgl. hierzu wie auch bei den folgenden Abschnitten die Ausführungen in Abschnitt 1.5.

Dieses Ergebnis in seiner schlichten Einfachheit verdanken wir also nur der Orthonormalität der Basis!

Geometrisch kann man $v \cos\alpha$ als Projektion des Vektors $\vec{\mathbf{v}}$ auf die Wirkungslinie des Vektors $\vec{\mathbf{w}}$ auffassen – und umgekehrt $w \cos\alpha$ auf die Wirkungslinie des Vektors $\vec{\mathbf{v}}$:

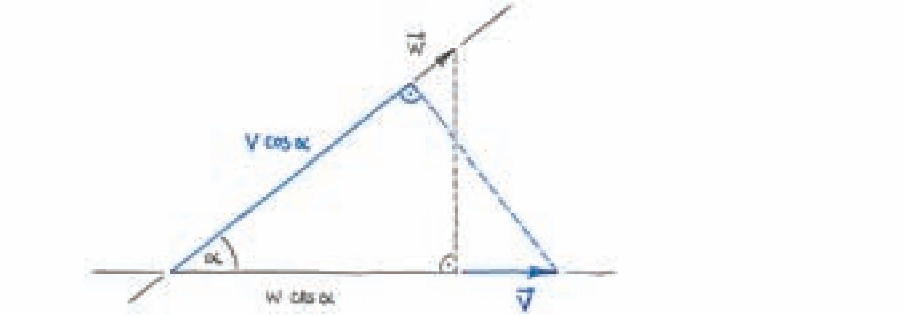


Abb. 1.3 Zur Projektionseigenschaft des Skalarproduktes

Besonders nützlich ist diese Projektionseigenschaft, wenn einer der beteiligten Vektoren ein Einheitsvektor ist, z. B.

$$\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{x}} = v_{\mathrm{x}} \underbrace{\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{x}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{x}}}_{=1} + v_{\mathrm{y}} \underbrace{\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{y}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{x}}}_{=0} + v_{\mathrm{z}} \underbrace{\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{z}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{x}}}_{=0} .$$

Also ergibt wegen

$$\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{x}} = v_{\mathrm{x}} , \quad \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{y}} = v_{\mathrm{y}} , \quad \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{z}} = v_{\mathrm{z}} \tag{1.4}$$

das Skalarprodukt von $\vec{\mathbf{v}}$ mit einem Basisvektor die Projektion von $\vec{\mathbf{v}}$ auf die jeweilige Achse und damit dessen zugehörige Koordinate. Daher können wir jeden Vektor auch entsprechend

$$\vec{\mathbf{v}} = (\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{x}})\, \vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{x}} + (\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{y}})\, \vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{y}} + (\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{z}})\, \vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{z}} \tag{1.5}$$

darstellen[2].

Für das Skalarprodukt gelten die Gesetze

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}} &= \vec{\mathbf{w}} \cdot \vec{\mathbf{v}} && \text{(Kommutativgesetz),} \\ (c\, \vec{\mathbf{v}}) \cdot \vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{v}} \cdot (c\, \vec{\mathbf{w}}) &= c\, (\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}}) && \text{(Assoziativgesetz mit Skalar),} \\ \vec{\mathbf{u}} \cdot (\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}}) &= \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{w}} && \text{(Distributivgesetz).} \end{aligned}$$

[2] Diese etwas seltsam anmutende Darstellung wird uns im Abschnitt 1.2.6 von Nutzen sein!

1.2.3 Kreuzprodukt $\quad \mathbb{E}^3,\ \mathbb{E}^3 \longrightarrow \mathbb{E}^3$

Es werden zwei Vektoren miteinander multipliziert, und das Ergebnis ist wieder ein Vektor. Daher spricht man auch vom **Vektorprodukt** (= *vector product*).

Wir setzen

$$\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}} \;=:\; \vec{\mathbf{u}}\ .$$

Der Vektor $\vec{\mathbf{u}}$ wird durch die folgenden Bedingungen eindeutig festgelegt:

- Es ist $\vec{\mathbf{u}} \perp \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}$ und $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}$ bilden ein „Rechtssystem“. Damit wird die Richtung von $\vec{\mathbf{u}}$ definiert.
- Mit $\|\vec{\mathbf{u}}\| := v\,w \sin\alpha$ liegt der Betrag von $\vec{\mathbf{u}}$ fest. Es ist $\alpha = \sphericalangle\, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}$ und v, w stellen wie zuvor die Beträge der jeweiligen Vektoren dar.

Das weitere Vorgehen erfolgt wie beim Skalarprodukt:

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}} &= \big(v_\mathrm{x}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathrm{x} + v_\mathrm{y}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathrm{y} + v_\mathrm{z}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathrm{z}\big) \times \big(w_\mathrm{x}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathrm{x} + w_\mathrm{y}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathrm{y} + w_\mathrm{z}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathrm{z}\big) \\
&= \quad v_\mathrm{x} w_\mathrm{x}\ \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{x} \times \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{x} + v_\mathrm{x} w_\mathrm{y}\ \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{x} \times \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{y} + v_\mathrm{x} w_\mathrm{z}\ \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{x} \times \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{z} + \\
&\quad + v_\mathrm{y} w_\mathrm{x}\ \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{y} \times \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{x} + v_\mathrm{y} w_\mathrm{y}\ \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{y} \times \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{y} + v_\mathrm{y} w_\mathrm{z}\ \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{y} \times \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{z} + \\
&\quad + v_\mathrm{z} w_\mathrm{x}\ \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{z} \times \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{x} + v_\mathrm{z} w_\mathrm{y}\ \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{z} \times \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{y} + v_\mathrm{z} w_\mathrm{z}\ \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{z} \times \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{z}\ .
\end{aligned}$$

Für *gleiche* Basisvektoren bekommt man hier nun

$$\vec{\mathbf{e}}_\mathrm{x} \times \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{x} = \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{y} \times \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{y} = \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{z} \times \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{z} = \vec{\mathbf{0}}\ .$$

Bei *verschiedenen* Basisvektoren ist das Ergebnis immer der dritte Basisvektor, mit positivem bzw. negativem Vorzeichen entsprechend der obigen Forderung nach einem Rechtssystem:

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{e}}_\mathrm{x} \times \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{y} &= \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{z}\,, & \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{x} \times \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{z} &= -\,\vec{\mathbf{e}}_\mathrm{y}\,, \\
\vec{\mathbf{e}}_\mathrm{z} \times \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{x} &= \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{y}\,, & \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{y} \times \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{x} &= -\,\vec{\mathbf{e}}_\mathrm{z}\,, \\
\vec{\mathbf{e}}_\mathrm{y} \times \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{z} &= \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{x}\,, & \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{z} \times \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{y} &= -\,\vec{\mathbf{e}}_\mathrm{x}\,.
\end{aligned}$$

Denn die Reihenfolge x, y, z und deren zyklische Vertauschungen

x y z $\qquad$ **z x y** $\qquad$ **y z x**

stellen definitionsgemäß Rechtssysteme dar. Also müssen die Ergebnisvektoren der zu den obigen drei Gruppen jeweils antizyklischen Permutationen

x z y $\qquad$ **y x z** $\qquad$ **z y x**

mit einem Minuszeichen versehen werden, damit sich Rechtssysteme ergeben. Zusammengefasst erhält man

$$\boxed{\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}} = \big(v_\mathrm{y} w_\mathrm{z} - v_\mathrm{z} w_\mathrm{y}\big)\,\vec{\mathbf{e}}_\mathrm{x} + \big(v_\mathrm{z} w_\mathrm{x} - v_\mathrm{x} w_\mathrm{z}\big)\,\vec{\mathbf{e}}_\mathrm{y} + \big(v_\mathrm{x} w_\mathrm{y} - v_\mathrm{y} w_\mathrm{x}\big)\,\vec{\mathbf{e}}_\mathrm{z}} \qquad (1.6)$$

oder übertragen auf die Spaltenschreibweise

$$\begin{pmatrix} v_\mathrm{x} \\ v_\mathrm{y} \\ v_\mathrm{z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_\mathrm{x} \\ w_\mathrm{y} \\ w_\mathrm{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_\mathrm{y}\, w_\mathrm{z} - v_\mathrm{z}\, w_\mathrm{y} \\ v_\mathrm{z}\, w_\mathrm{x} - v_\mathrm{x}\, w_\mathrm{z} \\ v_\mathrm{x}\, w_\mathrm{y} - v_\mathrm{y}\, w_\mathrm{x} \end{pmatrix} . \tag{1.7}$$

Um diese Gleichungen nicht jedes Mal herleiten oder nachschlagen zu müssen, empfiehlt sich hier eine **Merkregel**, die auf der Regel von Sarrus für Determinanten basiert:

$$\left|\begin{array}{ccc} \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{x} & \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{y} & \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{z} \\ v_\mathrm{x} & v_\mathrm{y} & v_\mathrm{z} \\ w_\mathrm{x} & w_\mathrm{y} & w_\mathrm{z} \end{array}\right| \begin{array}{cc} & \\ v_\mathrm{x} & \\ w_\mathrm{x} & w_\mathrm{y} \end{array} \qquad \text{bzw.} \qquad \left|\begin{array}{ccc} \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{x} & \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{y} & \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{z} \\ v_\mathrm{x} & v_\mathrm{y} & v_\mathrm{z} \\ w_\mathrm{x} & w_\mathrm{y} & w_\mathrm{z} \end{array}\right| \begin{array}{cc} \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{x} & \vec{\mathbf{e}}_\mathrm{y} \\ v_\mathrm{x} & \\ & \end{array}$$

Man multipliziert jeweils die drei Komponenten, die auf einer Diagonalen stehen, miteinander. Dabei werden die drei Diagonalen im ersten Falle positiv, im zweiten hingegen negativ gewichtet. Anschließend sind alle sechs Terme vorzeichenrichtig zu summieren! Damit erhält man die rechte Seite von (1.6).

Geometrisch lässt sich der Betrag des Kreuzproduktes $\|\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}\|$ als Fläche des Parallelogramms deuten, welches durch $\vec{\mathbf{v}}$ und $\vec{\mathbf{w}}$ aufgespannt wird:

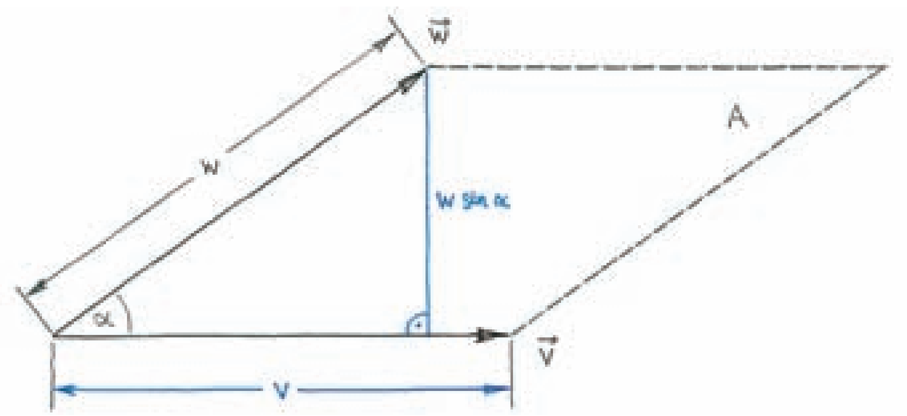


Abb. 1.4 Zur geometrischen Deutung des Kreuzproduktes

Denn wie man leicht nachvollzieht, ist

$$\begin{aligned} \|\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}\| &= v \cdot w \sin\alpha \\ &= \text{Basislänge} \cdot \text{Höhe} \\ &= A\,. \end{aligned}$$

Für das Kreuzprodukt gelten die Gesetze

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}} &= -(\vec{\mathbf{w}} \times \vec{\mathbf{v}}) && \text{(antikommutativ)}, \\ c\,(\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}) = (c\,\vec{\mathbf{v}}) \times \vec{\mathbf{w}} &= \vec{\mathbf{v}} \times (c\,\vec{\mathbf{w}}) && \text{(Assoziativgesetz mit Skalar)}, \\ \vec{\mathbf{u}} \times (\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}}) &= \vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{w}} && \text{(Distributivgesetz)}. \end{aligned}$$

1.2.4 Spatprodukt $\quad \mathbb{E}^3,\ \mathbb{E}^3,\ \mathbb{E}^3 \to \mathbb{R}$

... ist im Prinzip nichts Neues, wie wir gleich sehen werden. Es werden drei Vektoren miteinander multipliziert, und das Ergebnis ist ein Skalar. Die Bezeichnung „Spat..." leitet sich von der Kristallstruktur des Flussspats ab (vgl. Abb. 1.5).

Das Spatprodukt (= *mixed product, scalar triple product*)

$$(\,\vec{\mathbf{u}}\ \vec{\mathbf{v}}\ \vec{\mathbf{w}}\,) := (\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}) \cdot \vec{\mathbf{w}}$$

ist eine Kombination aus Kreuzprodukt und Skalarprodukt. Die Klammer auf der rechten Seite dient vor allem der Übersichtlichkeit; sie könnte ohne Weiteres weggelassen werden, da die Reihenfolge der Verknüpfungen eindeutig ist[3]. Man berechnet es am schnellsten mit der Determinante

$$(\,\vec{\mathbf{u}}\ \vec{\mathbf{v}}\ \vec{\mathbf{w}}\,) = \begin{vmatrix} u_\mathrm{x} & u_\mathrm{y} & u_\mathrm{z} \\ v_\mathrm{x} & v_\mathrm{y} & v_\mathrm{z} \\ w_\mathrm{x} & w_\mathrm{y} & w_\mathrm{z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_\mathrm{x} & v_\mathrm{x} & w_\mathrm{x} \\ u_\mathrm{y} & v_\mathrm{y} & w_\mathrm{y} \\ u_\mathrm{z} & v_\mathrm{z} & w_\mathrm{z} \end{vmatrix}$$

und erhält

$$\boxed{\begin{aligned} &(\,\vec{\mathbf{u}}\ \vec{\mathbf{v}}\ \vec{\mathbf{w}}\,) = \\ &\quad = u_\mathrm{x}\,v_\mathrm{y}\,w_\mathrm{z} + u_\mathrm{y}\,v_\mathrm{z}\,w_\mathrm{x} + u_\mathrm{z}\,v_\mathrm{x}\,w_\mathrm{y} - u_\mathrm{x}\,v_\mathrm{z}\,w_\mathrm{y} - u_\mathrm{y}\,v_\mathrm{x}\,w_\mathrm{z} - u_\mathrm{z}\,v_\mathrm{y}\,w_\mathrm{x} \end{aligned}}\ . \tag{1.8}$$

Geometrisch beinhaltet das Spatprodukt das Volumen des durch $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}$ aufgespannten Parallelepipeds (= Spat):

Da $\vec{\mathbf{A}} := \vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}$ wegen $\|\vec{\mathbf{A}}\| = A$ gewissermaßen als „Flächenvektor" zu interpretieren ist und $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{w}}$ aus Projektionsgründen die Multiplikation der Fläche A des Basisparallelogramms mit der Höhe $h = w \cos\alpha$ darstellt, ist

$$\begin{aligned} (\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}) \cdot \vec{\mathbf{w}} &= \vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{w}} \\ &= A\,w\,\cos\alpha \\ &= A\,h \\ &= V \end{aligned}$$

das Volumen des Parallelepipeds.

[3] Probieren Sie es aus!

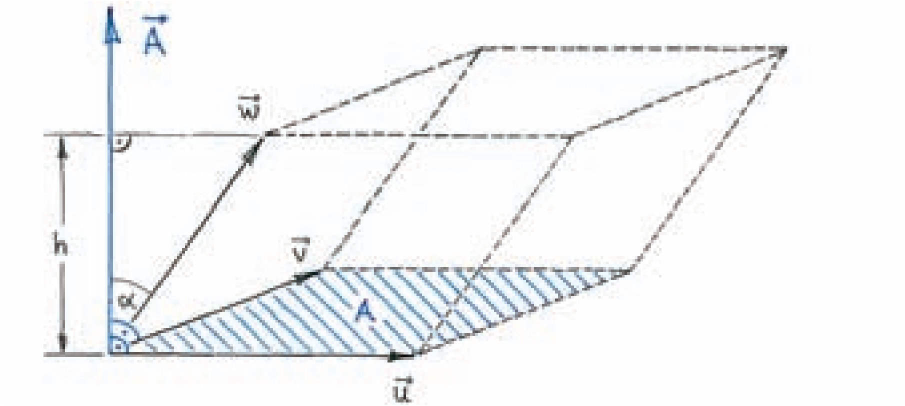


Abb. 1.5 Zur geometrischen Deutung des Spatproduktes

1.2.5 Betrag eines Vektors $\mathbb{E}^n \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$

In der Mathematik findet man hierfür die Bezeichnung „EUKLIDische Vektornorm". Denn diese stellt die EUKLIDische Schrägentfernung zwischen dem Fußpunkt und der Spitze eines Vektorpfeils dar, also seine „Länge" bzw. seinen „Betrag". Somit handelt es sich um eine sehr anschauliche Größe.

Es schadet nicht, bei dieser Gelegenheit zur Kenntnis zu nehmen, dass es außer der EUKLIDischen Vektornorm noch weitere Normen – insbesondere für abstrakte Vektorräume – gibt, die (meistens) alles andere als anschaulich sind. Gemeinsam ist allen Normen, dass sie drei Normaxiome (s. u.) erfüllen müssen.

Der Betrag eines Vektors (= *length/magnitude of a vector*) lässt sich mithilfe des Skalarproduktes ermitteln. Dazu multipliziert man den Vektor kurzerhand mit sich selbst:

$$\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{v}} \;=\; \|\vec{\mathbf{v}}\| \; \|\vec{\mathbf{v}}\| \;\; \underbrace{\cos\left[\sphericalangle\; \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{v}}\,\right]}_{=1} \;.$$

Wir bekommen sofort

$$\begin{aligned} \|\vec{\mathbf{v}}\| &= \sqrt{\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{v}}} \qquad (1.9) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

und speziell im dreidimensionalen Fall

$$\|\vec{\mathbf{v}}\| \;=\; \sqrt{v_{\mathrm{x}}^2 + v_{\mathrm{y}}^2 + v_{\mathrm{z}}^2} \;. \qquad (1.10)$$

Man erkennt hier den „Pythagoras“ in der räumlichen Ausführung. Denn die Komponenten stellen aufgrund ihrer orthogonalen Anordnung die Katheten dar. Wie wir im folgenden Kapitel sehen werden, ändert sich der Betrag bzw. die Norm eines Vektors auch bei Transformationen nicht! Es handelt sich daher um die (einzige) Invariante des Vektors (lat. *invarians* = unveränderlich).

Es gelten die **Normaxiome**:

$$\left.\begin{array}{r} \|\vec{\mathbf{v}}\| \geqslant 0 \\ \|\vec{\mathbf{v}}\| = 0 \iff \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{0}} \end{array}\right\} \quad \text{(Definitheit),}$$

$$\left.\begin{array}{r} \|c\,\vec{\mathbf{v}}\| = |c|\,\|\vec{\mathbf{v}}\| \\ \text{speziell: } \|-\vec{\mathbf{v}}\| = \|\vec{\mathbf{v}}\| \end{array}\right\} \quad \text{(Homogenität),}$$

$$\|\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}}\| \leqslant \|\vec{\mathbf{v}}\| + \|\vec{\mathbf{w}}\| \quad \text{(Dreiecksungleichung).}$$

1.2.6 Orthogonale Transformationen

Transformationen zwischen Koordinaten bzw. Basisvektoren werden zwar – wie angekündigt – in Teil I noch nicht benötigt, tragen aber erheblich zum Verständnis der elementaren Vektorrechnung bei. Wir beschränken uns hier mit $n = 2$ auf den einfachsten Fall. Die Erweiterung auf höhere Dimensionen ist im Wesentlichen formaler Natur (vgl. Abschnitt 7.3).

Definitionsgemäß sind zwei Vektoren $\vec{\mathbf{v}}$ und $\vec{\mathbf{v}}^*$ *gleich*, also

$$\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}^*\,,$$

wenn sie in Betrag und Richtung übereinstimmen. Dabei ist es völlig gleichgültig, bezüglich welcher Basis diese Vektoren dargestellt werden. Wir wollen nun für die Darstellung ebendieser zwei verschiedene Vektorbasen im gleichen Raum vorsehen (vgl. Abb. 1.6), d. h.

$$\vec{\mathbf{v}} = v_1\,\vec{\mathbf{e}}_1 + v_2\,\vec{\mathbf{e}}_2 \qquad \text{und} \qquad \vec{\mathbf{v}}^* = v_1^*\,\vec{\mathbf{e}}_1^* + v_2^*\,\vec{\mathbf{e}}_2^*\,.$$

Da beide Vektoren voraussetzungsgemäß gleich sind, gilt

$$v_1\,\vec{\mathbf{e}}_1 + v_2\,\vec{\mathbf{e}}_2 = v_1^*\,\vec{\mathbf{e}}_1^* + v_2^*\,\vec{\mathbf{e}}_2^*\,. \tag{1.11}$$

Ebenso könnte man sich vorstellen, dass ein und derselbe Vektor $\vec{\mathbf{v}}$ zunächst mit der Basis $\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2$ und anschließend mit der um den Winkel φ gedrehten Basis $\vec{\mathbf{e}}_1^*, \vec{\mathbf{e}}_2^*$ dargestellt wird. Aber spätestens mit (1.11) wird klar, dass sich mit Drehung der Basis auch die Koordinaten verändern. Es ist daher[4]

[4] Von Trivialfällen, wie etwa der Drehung um 360°, sei hier abgesehen.

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} v_1^* \\ v_2^* \end{pmatrix} ,$$

also $\underline{\mathbf{v}} \neq \underline{\mathbf{v}}^*$. Ausgangspunkt war aber $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}^*$. Beides ist richtig!

Man sieht an dieser Stelle, wie wichtig es ist, sich klarzumachen, dass die Spaltendarstellung immer nur eine „Repräsentation" des zugrunde liegenden Vektors bezüglich einer bestimmten Basis ist!

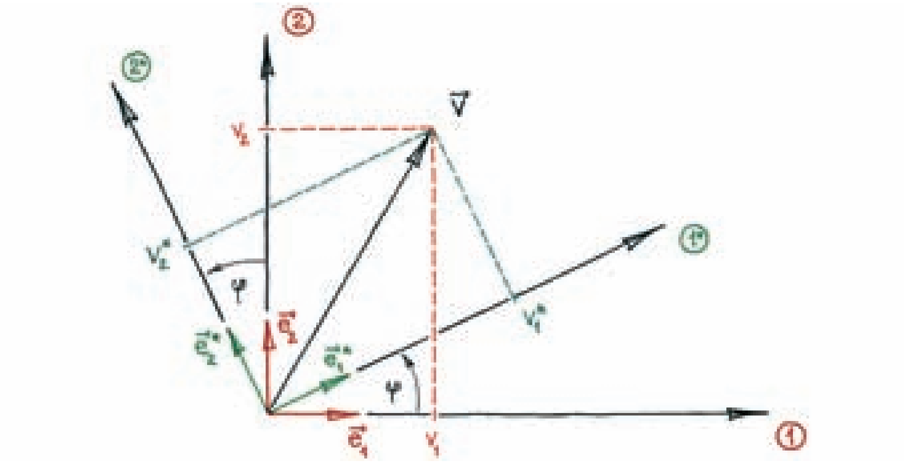


Abb. 1.6 Änderung der Vektorbasis $\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2 \to \vec{\mathbf{e}}_1^*, \vec{\mathbf{e}}_2^*$

Die Frage ist nun, wie wir aus (1.11) eine **Koordinatentransformation** ableiten. Man kann sich natürlich der trigonometrischen Zusammenhänge bedienen, was nach Abbildung 1.6 nahe liegend ist. Weitaus einfacher ist es aber, die Projektionseigenschaft des Skalarproduktes (1.4) auszunutzen. Dazu multiplizieren wir (1.11) der Reihe nach skalar mit allen vier Basisvektoren $\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_1^*, \vec{\mathbf{e}}_2^*$, also

$$v_1 \underbrace{\vec{\mathbf{e}}_1 \cdot \vec{\mathbf{e}}_1}_{=1} + v_2 \underbrace{\vec{\mathbf{e}}_1 \cdot \vec{\mathbf{e}}_2}_{=0} = v_1^* \, \vec{\mathbf{e}}_1 \cdot \vec{\mathbf{e}}_1^* + v_2^* \, \vec{\mathbf{e}}_1 \cdot \vec{\mathbf{e}}_2^* \quad \text{usw.}$$

und erzeugen so die Gleichungen

$$\begin{aligned}
v_1 &= (\vec{\mathbf{e}}_1 \cdot \vec{\mathbf{e}}_1^*)\, v_1^* + (\vec{\mathbf{e}}_1 \cdot \vec{\mathbf{e}}_2^*)\, v_2^* , \\
v_2 &= (\vec{\mathbf{e}}_2 \cdot \vec{\mathbf{e}}_1^*)\, v_1^* + (\vec{\mathbf{e}}_2 \cdot \vec{\mathbf{e}}_2^*)\, v_2^* , \\
v_1^* &= (\vec{\mathbf{e}}_1^* \cdot \vec{\mathbf{e}}_1)\, v_1 + (\vec{\mathbf{e}}_1^* \cdot \vec{\mathbf{e}}_2)\, v_2 , \\
v_2^* &= (\vec{\mathbf{e}}_2^* \cdot \vec{\mathbf{e}}_1)\, v_1 + (\vec{\mathbf{e}}_2^* \cdot \vec{\mathbf{e}}_2)\, v_2 .
\end{aligned}$$

Die geklammerten Skalarprodukte fassen wir als Transformationskoeffizienten auf und schreiben abkürzend

$$\boxed{v_1^* = a_{11}\, v_1 + a_{12}\, v_2 , \qquad v_2^* = a_{21}\, v_1 + a_{22}\, v_2} \tag{1.12}$$

und

$$\boxed{v_1 \;=\; a^*_{11}\, v^*_1 \;+\; a^*_{12}\, v^*_2 \;, \qquad v_2 \;=\; a^*_{21}\, v^*_1 \;+\; a^*_{22}\, v^*_2} \;. \tag{1.13}$$

Diese Gleichungen stellen bereits die Koordinatentransformation dar! Für die Koeffizienten gilt unter Verwendung von $\cos[90° \pm \varphi] = \mp \sin\varphi$

$$
\begin{aligned}
\vec{\mathbf{e}}^*_1 \cdot \vec{\mathbf{e}}_1 =: a_{11} \quad &\leadsto \quad a_{11} = \cos[\sphericalangle\, \vec{\mathbf{e}}^*_1, \vec{\mathbf{e}}_1\,] = \cos\varphi\,,\\
\vec{\mathbf{e}}^*_1 \cdot \vec{\mathbf{e}}_2 =: a_{12} \quad &\leadsto \quad a_{12} = \cos[\sphericalangle\, \vec{\mathbf{e}}^*_1, \vec{\mathbf{e}}_2\,] = \cos[90° - \varphi] = \sin\varphi\;,\\
\vec{\mathbf{e}}^*_2 \cdot \vec{\mathbf{e}}_1 =: a_{21} \quad &\leadsto \quad a_{21} = \cos[\sphericalangle\, \vec{\mathbf{e}}^*_2, \vec{\mathbf{e}}_1\,] = \cos[90° + \varphi] = -\sin\varphi\,,\\
\vec{\mathbf{e}}^*_2 \cdot \vec{\mathbf{e}}_2 =: a_{22} \quad &\leadsto \quad a_{22} = \cos[\sphericalangle\, \vec{\mathbf{e}}^*_2, \vec{\mathbf{e}}_2\,] = \cos\varphi
\end{aligned}
$$

sowie

$$
\begin{aligned}
\vec{\mathbf{e}}_1 \cdot \vec{\mathbf{e}}^*_1 =: a^*_{11} \quad &\leadsto \quad a^*_{11} = \cos[\sphericalangle\, \vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}^*_1\,] = \cos\varphi\,,\\
\vec{\mathbf{e}}_1 \cdot \vec{\mathbf{e}}^*_2 =: a^*_{12} \quad &\leadsto \quad a^*_{12} = \cos[\sphericalangle\, \vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}^*_2\,] = \cos[90° + \varphi] = -\sin\varphi\,,\\
\vec{\mathbf{e}}_2 \cdot \vec{\mathbf{e}}^*_1 =: a^*_{21} \quad &\leadsto \quad a^*_{21} = \cos[\sphericalangle\, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}^*_1\,] = \cos[90° - \varphi] = \sin\varphi\,,\\
\vec{\mathbf{e}}_2 \cdot \vec{\mathbf{e}}^*_2 =: a^*_{22} \quad &\leadsto \quad a^*_{22} = \cos[\sphericalangle\, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}^*_2\,] = \cos\varphi\;.
\end{aligned}
$$

Da das Skalarprodukt kommutativ ist, ergibt sich sofort

$$a^*_{11} = a_{11}\,, \quad a^*_{12} = a_{21}\,, \quad a^*_{21} = a_{12}\,, \quad a^*_{22} = a_{22}\,. \tag{1.14}$$

Koordinatentransformationen lassen sich auch in Matrixschreibweise notieren, wie es in der linearen Algebra allgemein üblich ist. Anstelle von (1.12) steht nun (Zeile mal Spalte!)

$$\begin{pmatrix} v^*_1 \\ v^*_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

oder noch kürzer

$$\underline{\mathbf{v}}^* = \underline{\underline{\mathbf{A}}}\; \underline{\mathbf{v}} \tag{1.15}$$

mit der **Transformationsmatrix**

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} .$$

Auf gleiche Weise erhalten wir aus (1.13)

$$\underline{\mathbf{v}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^*\; \underline{\mathbf{v}}^*$$

mit

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^* := \begin{pmatrix} a^*_{11} & a^*_{12} \\ a^*_{21} & a^*_{22} \end{pmatrix} .$$

Durch Multiplikation „von links“ mit $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ gemäß

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}\ \underline{\mathbf{v}} \;=\; \underline{\underline{\mathbf{A}}}\ \underline{\underline{\mathbf{A}}}^*\ \underline{\mathbf{v}}^*$$

und Vergleich mit

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}\ \underline{\mathbf{v}} \;=\; \underline{\mathbf{v}}^* \tag{1.15}$$

wird sofort klar, dass es sich bei $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^*$ um die zu $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ inverse Matrix handelt. Es ist also

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^* \;=\; \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} \qquad \text{bzw.} \qquad \underline{\underline{\mathbf{A}}}\ \underline{\underline{\mathbf{A}}}^* \;=\; \underline{\underline{\mathbf{E}}}\,.$$

Erfolgt eine solche Koordinatentransformation – so wie es hier der Fall ist – von einem Orthogonalsystem in ein anderes Orthogonalsystem, so erhalten wir aufgrund der Beziehungen (1.14), die wir bereits hergeleitet hatten, die inverse Transformationsmatrix

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^* \;=\; \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}} \tag{1.16}$$

ohne besonderen Rechenaufwand durch Transponierung. Man spricht dann von einer **„orthogonalen“ Matrix**, die mit den Eigenschaften[5]

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}\ \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}} \;=\; \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}}\ \underline{\underline{\mathbf{A}}} \;=\; \underline{\underline{\mathbf{E}}}\,, \qquad \det \underline{\underline{\mathbf{A}}} \;=\; \pm 1$$

ausgestattet ist. Häufig wird auch die Darstellung in Abhängigkeit des Drehwinkels benötigt. Diese erhält man durch Einsetzen der zuvor ermittelten Transformationskoeffizienten zu

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} \;=\; \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \underline{\underline{\mathbf{A}}}^* = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\,. \tag{1.17}$$

Es stellt sich nun noch die Frage, ob man nicht auf ebenso einfache Weise eine **Basistransformation** formulieren kann. Das ist in der Tat möglich! Denn nach (1.5) ist

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{e}}_1 &= (\vec{\mathbf{e}}_1 \cdot \vec{\mathbf{e}}_1^*)\,\vec{\mathbf{e}}_1^* + (\vec{\mathbf{e}}_1 \cdot \vec{\mathbf{e}}_2^*)\,\vec{\mathbf{e}}_2^*\,,\\
\vec{\mathbf{e}}_2 &= (\vec{\mathbf{e}}_2 \cdot \vec{\mathbf{e}}_1^*)\,\vec{\mathbf{e}}_1^* + (\vec{\mathbf{e}}_2 \cdot \vec{\mathbf{e}}_2^*)\,\vec{\mathbf{e}}_2^*\,,\\
\vec{\mathbf{e}}_1^* &= (\vec{\mathbf{e}}_1^* \cdot \vec{\mathbf{e}}_1)\,\vec{\mathbf{e}}_1 + (\vec{\mathbf{e}}_1^* \cdot \vec{\mathbf{e}}_2)\,\vec{\mathbf{e}}_2\,,\\
\vec{\mathbf{e}}_2^* &= (\vec{\mathbf{e}}_2^* \cdot \vec{\mathbf{e}}_1)\,\vec{\mathbf{e}}_1 + (\vec{\mathbf{e}}_2^* \cdot \vec{\mathbf{e}}_2)\,\vec{\mathbf{e}}_2\,.
\end{aligned}$$

Die Richtigkeit dieser Gleichungen erfährt man sofort, indem man testweise z. B.

$$\vec{\mathbf{e}}_1 \cdot \vec{\mathbf{e}}_1^* \;=\; (\vec{\mathbf{e}}_1 \cdot \vec{\mathbf{e}}_1^*)\ \underbrace{\vec{\mathbf{e}}_1^* \cdot \vec{\mathbf{e}}_1^*}_{=1} + (\vec{\mathbf{e}}_1 \cdot \vec{\mathbf{e}}_2^*)\ \underbrace{\vec{\mathbf{e}}_2^* \cdot \vec{\mathbf{e}}_1^*}_{=0} \quad\Longrightarrow\quad \vec{\mathbf{e}}_1 \cdot \vec{\mathbf{e}}_1^* \;=\; \vec{\mathbf{e}}_1 \cdot \vec{\mathbf{e}}_1^*$$

[5] Zur Herleitung vgl. Abschnitt 7.3

bildet. Mit den oben definierten Transformationskoeffizienten erhalten wir die Basistransformation zu

$$\boxed{\vec{\mathbf{e}}_1^* \;=\; a_{11}\,\vec{\mathbf{e}}_1 \;+\; a_{12}\,\vec{\mathbf{e}}_2\;, \qquad \vec{\mathbf{e}}_2^* \;=\; a_{21}\,\vec{\mathbf{e}}_1 \;+\; a_{22}\,\vec{\mathbf{e}}_2} \tag{1.18}$$

und

$$\boxed{\vec{\mathbf{e}}_1 \;=\; a_{11}^*\,\vec{\mathbf{e}}_1^* \;+\; a_{12}^*\,\vec{\mathbf{e}}_2^*\;, \qquad \vec{\mathbf{e}}_2 \;=\; a_{21}^*\,\vec{\mathbf{e}}_1^* \;+\; a_{22}^*\,\vec{\mathbf{e}}_2^*}\;. \tag{1.19}$$

Abschließend überzeugen wir uns noch von $\|\,\vec{\mathbf{v}}^*\| = \|\,\vec{\mathbf{v}}\,\|$. Es ist mit (1.12)

$$\begin{aligned}\|\,\vec{\mathbf{v}}^*\| \;&=\; \sqrt{v_1^{*2} \;+\; v_2^{*2}}\\ &=\; \sqrt{(a_{11}^2 + a_{21}^2)\,v_1^2 \;+\; 2\,(a_{11}\,a_{12} + a_{21}\,a_{22})\,v_1\,v_2 \;+\; (a_{12}^2 + a_{22}^2)\,v_2^2}\;,\end{aligned}$$

und mit

$$\begin{aligned}&a_{11}^2 \;+\; a_{21}^2 \;=\; \cos^2\varphi + \sin^2\varphi \;=\; 1\;,\\ &a_{11}\,a_{12} \;+\; a_{21}\,a_{22} \;=\; \cos\varphi\,\sin\varphi \;-\; \sin\varphi\,\cos\varphi \;=\; 0\;,\\ &a_{12}^2 \;+\; a_{22}^2 \;=\; \sin^2\varphi + \cos^2\varphi \;=\; 1\end{aligned}$$

erhält man tatsächlich

$$\begin{aligned}\|\,\vec{\mathbf{v}}^*\| \;&=\; \sqrt{v_1^2 \;+\; v_2^2}\\ &=\; \|\,\vec{\mathbf{v}}\,\|\;.\end{aligned}$$

Ein Hinweis sei an dieser Stelle noch erlaubt: Für Koordinatentransformationen existieren zwei unterschiedliche geometrische Interpretationen (vgl. [13], Abschnitt 1.8.1):

- Bei der **passiven Interpretation** bleibt der durch $\vec{\mathbf{v}}$ im (Vektor-)Raum fixierte Punkt unverändert. Mit Wechsel[6] der den Raum aufspannenden Basis ergeben sich dann lediglich „neue“ Koordinaten für denselben[7] Punkt. Das ist genau das, was wir in diesem Abschnitt behandelt haben. Die passive Interpretation wird in Ingenieurwesen und Geodäsie meist bevorzugt, da dort häufig „feste Realitäten“ in verschiedenen Koordinatensystemen betrachtet werden.
- Die **aktive Interpretation** sieht dagegen ein raumfestes Koordinatensystem vor. Der durch die „alten“ Koordinaten beschriebene Punkt geht mit den transformierten Koordinaten in einen „neuen“ Punkt über. Eine Basistransformation ist hier überflüssig. Formal kann man aber auch die Koordinaten der Basisvektoren (wie bei jedem anderen Vektor auch) transformieren. Im Falle von orthogonalen Transformationen ergibt sich dann ein Bild, als wenn man den „Raum samt Inhalt“ gedreht hätte. Auf die aktive Interpretation trifft man häufig in der mathematischen Literatur[8].

[6] Ausgedrückt durch eine Basistransformation, die auch nichtorthogonal sein darf.
[7] (1.11) wird daher auch als **Invarianzbedingung** bezeichnet, vgl. [9], Abschnitt 1.3.
[8] Vgl. z. B. [7], Abschnitt 4.5.

1.3 Vektorielle Schreibweisen im Vergleich

Die **symbolische Schreibweise** von Vektoren

$\vec{\mathbf{u}},\ \vec{\mathbf{v}},\ \vec{\mathbf{w}},\ \ldots$

beinhaltet keine Informationen über Basis bzw. Koordinatensystem. Liegt eine Vektorgleichung in symbolischer Schreibweise vor, hat man es mit der abstraktesten Darstellung zu tun, die überhaupt möglich ist. Es ist dann noch völlig offen, wie später mal das Koordinatensystem im Raum liegt. Denn ein solches braucht man, da in der symbolischen Schreibweise keine Zahlenrechnungen ausgeführt werden können. Die **Komponentenschreibweise**

$$\vec{\mathbf{v}} = v_1\,\vec{\mathbf{e}}_1 + \ldots + v_n\,\mathbf{e}_n$$

setzt die Wahl einer Basis $\vec{\mathbf{e}}_1,\ \ldots,\ \mathbf{e}_n$ zwingend voraus. Diese bleibt stets sichtbar in der Gleichung enthalten. Das ist vor allem vorteilhaft beim Wechsel der Basis, wie wir im vorangegangenen Abschnitt gesehen haben. Beim Bilden gewöhnlicher und partieller Ableitungen von Vektoren, bezüglich derer die Basis nicht fest ist, führt die Komponentenschreibweise direkt auf die Anwendung der Produktregel.

Nachteilig an der Komponentenschreibweise ist, dass sie sich für das praktische Rechnen als etwas sperrig erweist. Stellt man jedoch alle in einer Gleichung vorkommenden Vektoren mit einer einheitlichen Basis dar, erhält man ein System aus n skalaren Gleichungen, die sich dann parallel berechnen lassen.

Andererseits lassen sich diese n Gleichungen auch in die **Spaltenschreibweise** überführen. An die Stelle eines Vektors $\vec{\mathbf{v}}$ tritt dann seine „Repräsentation“ bezüglich der gewählten Basis in Gestalt der Spaltenmatrix

$$\underline{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix},$$

meist auch als Spaltenvektor bezeichnet. Man wird es in der ingenieurmäßigen Praxis nicht immer als notwendig erachten, einen Spaltenvektor mit einem eigenen Symbol (hier: $\underline{\mathbf{v}}$) zu versehen. Es ist aber trotzdem sinnvoll, den Unterschied zwischen dem eigentlichen Vektor $\vec{\mathbf{v}}$ und seiner Spaltenmatrix $\underline{\mathbf{v}}$ nicht einfach zu ignorieren. Anstatt beide kurzerhand gleichzusetzen – wie man es häufig antrifft –, verwendet man besser die Relation „entspricht“ und schreibt

$$\vec{\mathbf{v}} \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

1.4 Zur physikalischen Verschieblichkeit von Vektoren

Es geht hier darum, dass mit „Verschieblichkeit“ bei vektoriellen Größen in Physik und Ingenieurwissenschaften in aller Regel etwas anderes gemeint ist als in der Mathematik. Es ist von Vorteil, wenn man frühzeitig darüber aufgeklärt wird.

In Abbildung 1.1 hatten wir es mit zwei Translationen $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ und $\overrightarrow{\mathrm{P'Q'}}$ zu tun, die nach Betrag und Richtung gleich waren. Es handelt sich in einem solchen Fall definitionsgemäß um gleiche Vektoren. Folglich lassen sich Vektoren im Raum verschieben – unabhängig davon, ob die betrachteten Vektoren geometrische oder physikalische Realitäten darstellen. Es können daher beispielsweise auch Kraftvektoren im Raum frei verschoben werden, vorausgesetzt, der „Raum“ wird von Kraftkoordinaten aufgespannt, wie es in Abbildung 1.7 a mit[9]

$$\overrightarrow{\mathbf{F}_i} \;=\; F_{\mathrm{x},i}\,\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{x}} \;+\; F_{\mathrm{y},i}\,\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{y}}$$

gezeigt wird. Es kommt in diesem Zusammenhang aber leicht zu Missverständnissen, da man in der ingenieurmäßigen Praxis die „Verschiebung eines Kraftvektors im Raum“ nicht im vorgenannten Sinn versteht. Es geht vielmehr darum, dass der Angriffspunkt des Kraftvektors, also der geometrische Ort der Kraftwirkung, verschoben werden soll. Das ist etwas völlig anderes!

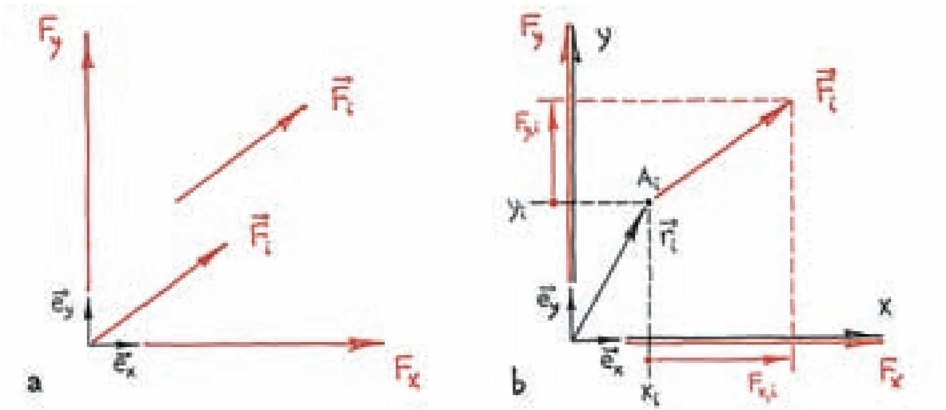


Abb. 1.7 Zur „Verschieblichkeit“ des Kraftvektors $\overrightarrow{\mathbf{F}_i}$

In Abbildung 1.7 b wirkt die Kraft $\overrightarrow{\mathbf{F}_i}$ am Angriffspunkt A_i, dessen Lage durch den Ortsvektor

$$\overrightarrow{\mathbf{r}_i} \;=\; x_i\,\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{x}} \;+\; y_i\,\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{y}}$$

[9] Der Einfachheit halber beschränkt sich die Darstellung auf den ebenen Fall.

wiedergeben wird. Dafür schreiben wir kurz $\overrightarrow{\mathbf{F}_i}\,[\mathrm{A}_i]$. Es leuchtet unmittelbar ein, dass die Frage, ob der Angriffspunkt einer Kraft (oder einer anderen Belastungsgröße) verschoben werden darf [10], eine rein physikalische ist und durch die Translationseigenschaft entsprechend der mathematischen Vektordefinition nicht geklärt werden kann.

Die beiden Vektoren $\overrightarrow{\mathbf{F}_i}$ und $\overrightarrow{\mathbf{r}_i}$ befinden sich – wie wir anhand von Abbildung 1.7 leicht nachvollziehen können – in zwei völlig verschiedenen „Welten"! Der Komponentendarstellung dieser Vektoren entnehmen wir auch: Das Einzige, was sie gemeinsam haben, ist die Basis. Eigentlich müssten alle Kräftesysteme in einem doppelten Koordinatensystem für Orts- und Kraftkoordinaten wie in Abbildung 1.7 b dargestellt werden. Solcher Aufwand ist aber nicht üblich. Man beschränkt sich in der Praxis auf die Ortskoordinaten und weiß, dass sich die Kraftkoordinaten auf die gleichen Raumrichtungen beziehen.

In diesem Zusammenhang unterscheidet man:

- **Gebundene Vektoren**, deren Angriffspunkte nicht verschoben werden dürfen.
- **Linienflüchtige Vektoren**. Deren Angriffspunkte dürfen nur entlang der eigenen Wirkungslinie verschoben werden.
- **Freie Vektoren** sind dagegen solche, deren Angriffspunkte beliebig verschoben werden dürfen.

Der **Angriffspunkt** ist – wie bereits deutlich wurde – der geometrische Wirkungsort eines Kraftvektors oder einer anderen Belastungsgröße. Es ist gleichgültig, ob man solch einen Vektor mit seinem Fußpunkt oder seiner Spitze am Angriffpunkt anträgt:

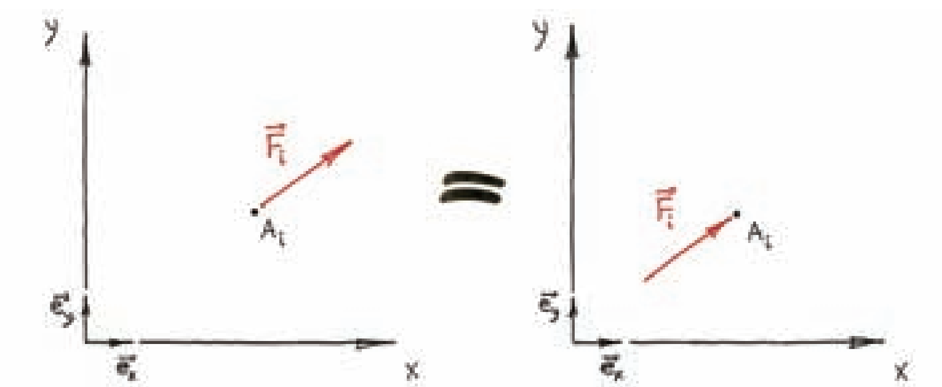


Abb. 1.8 Kraftvektor $\overrightarrow{\mathbf{F}_i}$ und Angriffspunkt A_i

[10] Damit ändert sich natürlich auch der zugehörige Ortsvektor!

1.5 Ergänzende Bemerkungen[11]

Die vorstehende Einführung in die Vektorrechnung dient dazu, die Anfänger in den Ingenieurwissenschaften auch bei unterschiedlicher Vorbildung schnell in eine Art „Arbeitsbereitschaft“ zu versetzen, die für den Zugang zur Technischen Mechanik unabdinglich ist. Es gibt darüber hinaus noch vieles, insbesondere über Vektorräume, was der Erwähnung wert ist, hier aber aus verschiedenen Gründen nicht gebracht werden kann. Ein paar ergänzende Bemerkungen sind für die Einordnung des behandelten Stoffes vielleicht doch hilfreich.

Ohne uns darin besonders zu vertiefen, haben wir im vorangegangenen Einführungskapitel den betrachten Vektorraum über dem reellen Zahlenkörper $\mathbb{R}$ aufgebaut. Dieser n-dimensionale Vektorraum über $\mathbb{R}$ beinhaltet, dass uns gemäß der Vektordarstellung (1.1) für *jede* Koordinate v_i wegen

$$v_i \in \mathbb{R} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

der Körper $\mathbb{R}$ gewissermaßen einmal „zur Verfügung“ steht. Bei n Koordinaten folgt daraus n-facher „Gebrauch“ von $\mathbb{R}$. Dafür schreibt man das kartesische Produkt

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n\text{-mal}} .$$

Der $\mathbb{R}^n$ ist zunächst nichts weiter als die Menge aller n-Tupel

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

reeller Zahlen, also ein n-dimensionaler Punktraum. In Verbindung mit den Vektorraum-Axiomen (1) bis (8) sprechen wir von einem **affinen Raum**. Die affinen Eigenschaften beruhen auf Parallelverschiebung von Vektoren. Es können daher nur Längen paralleler Vektoren verglichen werden.

Bei affinen Räumen fehlt aber ein allgemeiner Abstandsbegriff, der speziell für uns in der Mechanik und allgemein in der Analysis in vieler Hinsicht von Vorteil ist: Der „Abstand zwischen zwei beliebigen Punkten“ des Raumes. Man nennt diesen Abstand (= *distance*) **Metrik** und spricht, wenn eine solche dort definiert ist, von einem metrischen Raum. Für eine Metrik $d(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}})$ gelten die drei Metrikaxiome:

$$\left.\begin{aligned} d(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}) &\geqslant 0 \\ d(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{v}} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(Definitheit),}$$

$$d(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}) = d(\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{u}}) \qquad \text{(Symmetrie),}$$

$$d(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}) \leqslant d(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{w}}) + d(\vec{\mathbf{w}}, \vec{\mathbf{v}}) \qquad \text{(Dreiecksungleichung).}$$

[11] Vgl. hierzu auch [1], Abschnitt 4.5.1.

Insbesondere im dreidimensionalen Raum unserer Anschauung identifizieren wir Raumpunkte mit sogenannten **Ortsvektoren**, deren Fußpunkte stets im Koordinatenursprung liegen. Das heißt, wir ordnen dem Punkt P einen Ortsvektor

$$\vec{\mathbf{r}} = \overrightarrow{0\mathrm{P}}$$

zu. Das war im vorherigen Abschnitt bereits deutlich geworden.

Wir stellen uns die drei Vektoren $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}$ als Vektoren im dreidimensionalen Raum unserer Anschauung vor. Dann wird unmittelbar einsichtig, dass die drei Metrikaxiome Eigenschaften festlegen, die jeder „vernünftige“ Abstandsbegriff haben wird. Der Abstand d kann aufgrund des ersten Metrikaxioms nicht negativ sein. Der Grenzfall $d = 0$ ist mit identischen Raumpunkten verbunden. Wir können also auch $d \in \mathbb{R}_0^+$ schreiben. Nach dem zweiten Metrikaxiom ist es von P nach Q genauso „weit“ wie umgekehrt von Q nach P. Dem dritten Metrikaxiom entnehmen wir: Es gibt zwischen zwei Punkten einen (kürzesten) Abstand. Alle „Umwege“ über einen dritten Punkt sind „weiter“ oder im Grenzfall „gleich weit“.

Die Metrikaxiome haben eine gewisse Ähnlichkeit zu den in Abschnitt 1.2.5 aufgeführten Normaxiomen. In der Tat besteht zwischen den Begriffen *Norm* und *Metrik* eine Beziehung. Formal gesehen ist ein normierter Vektorraum zwar noch kein metrischer Vektorraum, aber wir können ihn durch die *kanonische Metrikdefinition*

$$d(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}) := \|\vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{v}}\| \tag{1.20}$$

jederzeit dazu machen. Mit der EUKLIDischen Norm (1.9), wie sie in Abschnitt 1.2.5 mithilfe des Skalarproduktes eingeführt wurde, erhalten wir sofort die EUKLIDische Metrik

$$d(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}) = \left(\sum_{i=1}^{n} (u_i - v_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.21}$$

Wir versehen den $\mathbb{R}^n$ mit dieser Metrik und sprechen fortan vom **EUKLIDschen Vektorraum $\mathbb{E}^n$**. Mechanisch bedeutsam sind der uns bestens vertraute dreidimensionale EUKLIDische Vektorraum $\mathbb{E}^3$ mit der EUKLIDischen Schrägentfernung

$$d(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}) = \sqrt{(u_\mathrm{x} - v_\mathrm{x})^2 + (u_\mathrm{y} - v_\mathrm{y})^2 + (u_\mathrm{z} - v_\mathrm{z})^2} \qquad \text{(„Pythagoras“)}$$

sowie die EUKLIDische Ebene $\mathbb{E}^2$.

Wir nehmen somit zur Kenntnis, dass der EUKLIDische Vektorraum mit affinen Eigenschaften entsprechend der Vektorraum-Axiome (1) bis (8) sowie metrischen Eigenschaften ausgestattet ist, die auf der Einführung des Skalarproduktes beruhen (Projektionseigenschaft).

http://www.springer.com/978-3-8274-1838-8

Grundkurs Technische Mechanik
Statik der Starrkörper, Elastostatik, Dynamik
Mestemacher, F.
2008, XIV, 440 S. 244 Abb. in Farbe., Softcover
ISBN: 978-3-8274-1838-8