

Einführung

*Lieber Gott,
wenn ich nur noch eine Stunde zu leben habe,
dann erlaube mir bitte, diese Zeit im Mathematik-
unterricht zu verbringen,
so dass es scheint, als dauere sie ewig.*

Gebet eines gelangweilten Studenten

Die Uhr war stehen geblieben, und ich schlief gerade ein.

Im Jahr 1971 saß ich am Ende meines Mathematikstudiums an der University of California in Los Angeles in einem Kurs mit dem Titel *Maß und Integration*. Ich langweilte mich. Obwohl Mathematik mein Hauptfach war, war dieser Kurs völlig uninteressant für mich. Ich empfand damals eine starke Vorliebe für die Mathematik, die ich bis heute bewahrt habe. Den größten Teil meines Erwachsenenlebens habe ich Mathematik am El Camino College gelehrt. Dieser Kurs war in meinem Hauptfach verpflichtend, und ich wollte ihn einfach hinter mich bringen. Als ich auf die Uhr starrte, hatte ich nicht die geringste Ahnung, dass ich gerade in ein wahrhaft bemerkenswertes Theorem eingeführt wurde.

Der Professor war dabei, seine Vorlesung abzuschließen, und zeichnete in seiner Zusammenfassung eine massive Kugel (einen Ball) an die Tafel. Er behauptete, er habe eben den Beweis erbracht, dass die Kugel in fünf Teile zerlegt und dann wieder

wie in einem Puzzle zusammengesetzt werden könne – und zwar so, dass zwei Kugeln daraus würden, die in Gestalt und Volumen mit dem Original identisch seien.

Ich erinnerte mich sofort an diese roten Bälle aus Schwamm, die ein Zauberer verwendet. Er nimmt einen Ball in die Hand und schließt sie. Wenn er sie wieder öffnet, dann sind da zwei Bälle. Oder Tauben? Er setzt eine Taube in einen Kasten, schließt den Deckel, öffnet ihn wieder, und heraus fliegen zwei Tauben! Also nahm ich an, da wäre irgendeine Art von Scherz oder ein Trick dabei; ich hatte nicht aufgepasst und daher keine Vorstellung von der Zielsetzung des Professors (Abbildung 1).

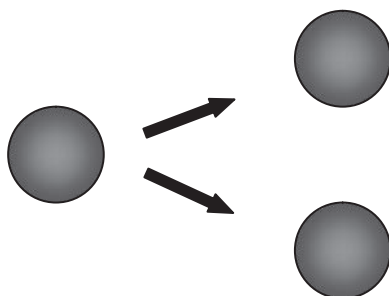


Abb. 1 Zwei Kugeln aus einer.

Er fuhr fort. „Das ist also das Banach-Tarski-Theorem oder auch Banach-Tarski-Paradoxon. Eine Variante dieses Satzes behauptet, dass ein Festkörper von beliebiger Größe, zum Beispiel der einer Erbse, in endlich viele Teile zerlegt und dann wieder zusammengesetzt werden kann, so dass irgendein anderer Festkörper von bestimmter Form und bestimmtem Volumen, zum Beispiel der Sonne, entsteht. Konsequenterweise bezeichnet man dieses paradoxe Theorem von Stefan Banach und Alfred Tarski manchmal auch als das *Erbse-und-Sonne-Paradoxon*“ (Abbildung 2).

Ist es vorstellbar, aus einer Mücke einen Elefanten zu machen? Es war doch nicht der 1. April! Oder war das ein Witz? Und wenn ja, worin bestand die Pointe? Ich hatte keine Lust, eine möglicherweise beschämende Frage zu stellen, also schaute ich einfach im Raum umher, um zu sehen, wie all die anderen reagierten.

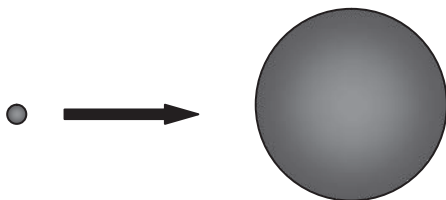


Abb. 2 Die Erbse und die Sonne.

Ein Student zu meiner Rechten hob die Hand. „Diese Ergebnisse sind doch ganz eindeutig Unsinn, oder? Sie wollen doch nicht ernsthaft behaupten, dass man einen Apfel in fünf Teile zerlegen kann und dann die Stücke zu zwei Äpfeln zusammensetzen kann, oder doch? Wollen Sie wirklich sagen, man könne etwas aus Nichts erschaffen?“

Inzwischen hatte ich aufgehört, auf die Uhr zu schauen, und blickte aufmerksam den Professor an. Ich erwartete, er würde jetzt eine humorige Pointe liefern und den Kurs beenden oder erklären, warum der Beweis des Theorems in der Tat fehlerhaft war. Stattdessen tat er die Frage des Studenten mit einer blasierten Antwort ab.

„Also, wissen Sie, da kann man halt nichts machen. Ergebnisse wie dieses sind normal, wenn wir mit nicht messbaren Mengen, mit dem Auswahlaxiom usw. arbeiten. Der Beweis ist gültig, und das Theorem ist richtig.“

Damit endete die Stunde, und ich verließ den Hörsaal ziemlich verwirrt.

Das war meine Einführung in das bemerkenswerte Banach-Tarski-Theorem. Jan Mycielski bezieht sich in seinem Vorwort zu Stan Wagon's *The Banach-Tarski Paradox* auf dieses Theorem, wenn er schreibt: „Dies ist, wie ich glaube, das überraschendste Ergebnis in der theoretischen Mathematik“ (Wagon 1985, S. xi). Aus offensichtlichen Gründen folgten der Veröffentlichung des Theorems im Jahr 1924 heftige Kontroversen unter den Mathematikern. Wie konnte man ein solches Ergebnis akzeptieren, das dem gesunden Menschenverstand so eklatant widersprach?

Als die Allgemeinheit von dem Theorem erfuhr, verschärfte sich die Auseinandersetzung. Einmal forderte sogar ein wütender Bürger vom Gesetzgeber des Staates Illinois, dass dieses

Theorem in den Schulen von Illinois nicht gelehrt werden dürfe (Addison 1983, S. 28). So entwickelten sich zwei Lager – das eine akzeptierte die so schön jeder Intuition widersprechenden Ergebnisse, das andere verwarf sie als bedeutungslos.

Für die Allgemeinheit wurde über dieses Thema wenig geschrieben, obwohl die Zahl der Artikel in Fachzeitschriften rapide anstieg. Tatsächlich finden diejenigen, die keinen Universitätsabschluss in Mathematik haben, nur wenig Interessantes in Bibliotheken und im Internet. Die Folge ist, dass der Kern des Satzes völlig missverstanden wird. Studenten fragten mich: „Ist es wahr, dass Mathematiker Materie verdoppeln können? Sie haben irgendein Theorem bewiesen, wonach wir Verdopplungsmaschinen bauen könnten. Ist das richtig?“

Es entspricht dem Geist dieses Buches, dieses Thema durch einen eher journalistischen und nicht so sehr durch einen intensiv mathematischen Blick zugänglich zu machen. Kapitel 1 behandelt historische Fragen, indem eine *Besetzungsliste* der Protagonisten präsentiert wird. Die Stars sind Georg Cantor, der Begründer der modernen Mengenlehre, Stefan Banach und Alfred Tarski in den Hauptrollen, Kurt Gödel, der führende Logiker des 20. Jahrhunderts, und schließlich Paul Cohen, Mathematikprofessor an der Stanford University, der die Angelegenheit zum Abschluss bringt.

Kapitel 2 bietet eine Sammlung von Tricks aus der Unterhaltungsmathematik, darunter die geometrische Zerlegung und Wiederausammensetzung von Zeichnungen, wobei auf scheinbar magische Weise etwas gewonnen wird oder verloren geht. Obwohl die Beispiele raffiniert konstruiert sind, muss betont werden, dass sie im Vergleich zum mathematisch einwandfreien Banach-Tarski-Theorem lediglich Unterhaltungswert besitzen.

Kapitel 3 präsentiert die erforderliche Mathematik, um das Theorem vollständig wertschätzen zu können. Die mathematische Formalsprache bleibt hierbei außen vor, da das Buch für ein allgemeines Publikum geschrieben ist, das über eine mathematische Grundbildung in Algebra und Geometrie verfügt. Leser, die daran interessiert sind, das Thema weiterzuverfolgen, und die den entsprechenden mathematischen Hintergrund besitzen, werden die Bibliografie als hilfreich empfinden.

Kapitel 4 nenne ich neckisch „Baby BT“ (Baby Banach-Tarski-Paradoxa). Darunter verstehe ich mathematische Kuriositäten,

die einen offensichtlichen Gewinn durch Zerlegung und Zusammensetzung mit sich bringen. Mathematisch gesehen liegen sie irgendwo zwischen den Puzzle-Unterhaltungen in Kapitel 2 und dem Banach-Tarski-Theorem.

In Kapitel 5 werden die Behauptung und der Beweis des Banach-Tarski-Theorems geliefert. Die mathematische Formalsprache bleibt – um ein breiteres Publikum anzusprechen – wiederum ausgespart. Dies geschieht jedoch nicht auf Kosten der mathematischen Korrektheit.

In Kapitel 6 wird das Paradoxon aufgelöst. In gewisser Hinsicht verliert ein Paradoxon seine Rätselhaftigkeit, wenn es erst einmal aufgelöst ist; aber eine Diskussion des schönen Theorems ohne eine Erklärung seines Zaubers ist nicht vollständig. Magier und Mathematiker behandeln ähnliche Geheimnisse auf gegensätzliche Weise: Zauberer enthüllen ihre Geheimnisse niemals; Mathematiker versuchen, sie aufzudecken und klarzustellen.

Sind die Konsequenzen des Banach-Tarski-Theorems physikalisch real, oder sind die Mathematiker nur verrückt geworden? In Kapitel 7 gibt es einige Antworten auf diese Fragen.

Kapitel 8 schließt die Präsentation mit einem Blick in die Vergangenheit und Zukunft mathematischer Entdeckungen ab.

Als ein Dozent, der sein Leben lang Mathematik unterrichtet, empfinde ich mehr Respekt für Fragen als für Antworten. Daher wäre ich zufrieden, wenn die Leser die Lektüre dieses Buches mit mehr Fragen beendeten, als sie zu Beginn hatten.

Len Wapner