

# 1 Einführung und didaktischer Hintergrund

„Die Naturphilosophie ist in dem großen Buch zu finden, das jederzeit offen vor unseren Augen liegt: Ich habe das Weltall im Sinn. Wir werden es aber nicht lesen können, bevor wir die Sprache nicht gelernt und uns mit den Zeichen vertraut gemacht haben, in denen es geschrieben ist. Es ist dies die Sprache der Mathematik und die Schriftzeichen sind Dreiecke, Kreise und andere geometrische Gebilde, ohne deren Kenntnis der Inhalt nicht verstanden werden kann.“

GALILEO GALILEI, 1623 (in: *Il Saggiatore*; nach SIMONYI, 2001, S. 212)

Fragen der Art

## Wie viele Zahnärzte gibt es in Deutschland?

– sogenannte FERMI-Probleme (vgl. Abschnitt 3) – spielen im Mathematikunterricht bislang eine geringe Rolle. Die Frage lässt sich – sofern man sie nicht als Recherche-Aufgabe versteht – nicht so rasch beantworten. Man kann überlegen, wie viele Menschen in Deutschland leben und wie viele Zahnärzte jene benötigen mögen. Dann kann man hochrechnen, wie viele Patienten ein Zahnarzt durchschnittlich behandeln kann und kommt zu einem mehr oder weniger guten Schätzwert.<sup>1</sup> Kurz: Zur Beantwortung der Frage kann man einen Bezug zwischen der Realität und der Mathematik herstellen, also **mathematisch modellieren**. GALILEI erkannte diese Wechselbeziehung zwischen der Natur und der Mathematik, die er in obigem Zitat mit anderen Worten ausdrückt.

Ebenso bietet die mittlerweile viel beschriebene „Tanken-Aufgabe“ (siehe z.B. BLUM und LEISS, 2005, S. 18 oder mit einer sehr ausführlichen Analyse des Schwierigkeitsprofils der Aufgabe auch LEISS, 2007, Teil III) eine Pro-

---

<sup>1</sup>Detailliert wird diese Fragestellung in Abschnitt 3.2 verfolgt.

blemstellung, bei der eine reale Situation mit mathematischen Hilfsmitteln beschrieben werden kann, um zu einer möglichen Problemlösung zu gelangen:<sup>2</sup>

*„Herr Stein wohnt in Trier, 20 km von der Grenze zu Luxemburg entfernt. Er fährt mit seinem VW Golf zum Tanken nach Luxemburg, wo sich direkt hinter der Grenze eine Tankstelle befindet. Dort kostet der Liter Benzin nur 1,05 €, im Gegensatz zu 1,30 € in Trier. Lohnt sich die Fahrt für Herrn Stein?“*

Bei dieser anspruchsvollen Modellierungsaufgabe können neben mathematischen auch etliche nicht-mathematische Aspekte (Umweltschutz, Fahrzeit) eine Rolle spielen.

Bis vor Kurzem waren derartige Problemstellungen durch Rahmenrichtlinien kaum vorgesehen; sie tauchten höchstens in Präambeln am Rande auf. Seit der Verabschiedung der Bildungsstandards für die verschiedenen Schulstufen durch die Kultusministerkonferenz 2003 bzw. 2004 wird das mathematische Modellieren für die Primarstufe wie auch für alle Schulformen der Sekundarstufe I als ein wesentlich zu fördernder allgemeiner Kompetenzbereich im Mathematikunterricht betont (vgl. Tabelle 1.1). Was darunter konkreter für die einzelnen Schulstufen zu verstehen ist, wird in Abschnitt 1.4 aufgezeigt.

Dass die mathematische Modellierung bzw. die Behandlung realitätsbezogener Aufgaben im Mathematikunterricht immer noch eine recht geringe Stellung inne hat, ist an sich verwunderlich: KAISER (1995, S. 66f.) stellt übersichtlich die Diskussion um Realitätsbezüge im Mathematikunterricht in ihrer historischen Entwicklung seit etwa 1900 sowohl international als auch

---

<sup>2</sup>GREEFRATH und LAAKMANN (2007) stellen eine für den Unterricht aufbereitete Unterrichtsreihe zum Tanken-Kontext dar, bei der die Methode des Gruppenpuzzles eingesetzt wird.

### Kompetenzbereiche in der Primarstufe

- Problemlösen
- Kommunizieren
- Argumentieren
- **Modellieren**
- Darstellen

### Kompetenzbereiche in der Sekundar- stufe I

- Mathematisch argumentieren
- Probleme mathematisch lösen
- **Mathematisch modellieren**
- Mathematische Darstellungen verwenden
- Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen
- Kommunizieren

**Tab. 1.1:** Kompetenzbereiche der Bildungsstandards Mathematik

national dar.<sup>3</sup> Seit den 70er Jahren des 20. Jahrhunderts werde danach im deutschsprachigen Raum auf breiter Ebene innerhalb der Mathematikdidaktik über Modellierungen diskutiert; international habe die Diskussion bereits einige Jahre früher begonnen.

Einen Überblick über die aktuelle Diskussion geben BLUM et al. (2007). HERGET et al. (2007b) resümieren zehn Jahre ISTRON-Arbeit<sup>4</sup> und werfen einen Blick auf aktuelle Schulbücher sowie Prüfungsaufgaben. Sie stellen fest: „Es tut sich was.“ Parallel zur Diskussion über Modellierungen in der Mathematikdidaktik wurden zahlreiche Unterrichtseinheiten entwickelt und dokumentiert, die einzelne Modellierungskontexte aufzeigten bzw. als Grundlage für empirische Untersuchungen dienten. Zwar werden mittlerweile deutlich mehr Anwendungen im Mathematikunterricht thematisiert, Modellierungen als reflektiertes Ganzes spielen aber wohl kaum eine Rolle im üblichen Mathematikunterricht (vgl. MAASS, 2004, S. 29f.).

<sup>3</sup>SCHUPP (1988) beschreibt zudem ausführlich, welche Rolle der anwendungsorientierte Unterricht seit dem 19. Jahrhundert im Mathematikunterricht spielte.

<sup>4</sup>Die ISTRON-Gruppe hat sich als einen Schwerpunkt gesetzt, Realitätsbezüge im Mathematikunterricht zu fördern und gibt seit den 1990er Jahren entsprechende Tagungsbände heraus, die vielfältige Modellierungskontexte aufzeigen (Näheres unter <http://www.math-edu.de/Anwendungen/anwendungen.html>).

KAISER (1995, S. 76) unterscheidet verschiedene Arten von Realitätsbezügen im Mathematikunterricht:

- *Eingekleidete mathematische Probleme*, bei denen mathematische Begriffe/Verfahren in vermeintliche Anwendungskontexte „eingekleidet“ werden (vgl. auch HENN, 2000)  
Hierzu zählen in der Regel auch *Textaufgaben*, wenn jene lediglich verlangen, als Text gegebene Zusammenhänge in „mathematische Zeichenreihen (Term oder Gleichung)“ zu übersetzen und damit wesentliche Aspekte einer ernsthaften Modellierung ausblenden bzw. vorgeben (vgl. FRANKE, 2003a, S. 33).
- *Veranschaulichungen* mathematischer Begriffe, z.B. negative Temperaturen oder Schulden zur Veranschaulichung negativer Zahlen
- *Anwendungen* mathematischer *Standardverfahren*, bei denen bekannte mathematische Verfahren zur Lösung realer Probleme eingesetzt werden müssen; z.B. bei Verpackungsoptimierungen (vgl. Abschnitt 5.2)
- *Modellierungen*,<sup>5</sup> d.h. komplexe Problemlösungsprozesse, bei denen die Beziehung zwischen Realität und Modellebene bewusst in den Blick genommen wird

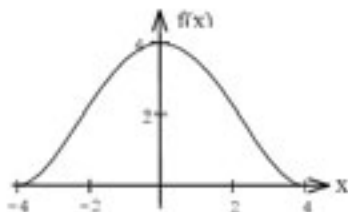
Während in letzter Zeit auch Anwendungen und Modellierungen in Schulbüchern Einzug halten, galt dies zuvor lediglich für Textaufgaben, Standardmodelle, z.B. aus der Physik, oder umstrittene **eingekleidete Aufgaben**. Letztere können Schülern – ohne entsprechende Reflexion – kaum ein angemessenes Bild von Mathematik und ihrer Beziehung zur Welt vermitteln. Ein typisches Beispiel einer eingekleideten Aufgabe ist die in Abbildung 1.1 dargestellte Beispielaufgabe auf Grundkursfach-Niveau aus den *aktuellen* Einheitlichen Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung (EPA) – Mathematik (KMK, 2002, S. 9).

Der Hinweis auf den Giebel verfolgt keinerlei Ziele, die nicht auch ohne diesen „Realitätsbezug“ zu erreichen wären. Insbesondere sind sämtliche Überlegungen zur Mathematisierung bereits mit der Aufgabenstellung gege-

---

<sup>5</sup>KAISER verwendet den Begriff „Modellbildungen“, der hier nicht verwendet wird, um den Terminus an die aktuelle Diskussion anzupassen.

„Der symmetrische Giebel eines Renaissancehauses soll rekonstruiert werden. Der obere Giebelrand ist in der Abbildung in einem Koordinatensystem dargestellt.



Eine gerade, ganzrationale Funktion  $f$  beschreibt im entsprechenden Intervall den oberen Giebelrand. Die  $x$ -Achse ist Tangente an den Graphen der Funktion  $f$  in den Punkten  $P_1(-4|0)$  und  $P_2(4|0)$ . Die maximale Höhe des Giebels über der Dachkante beträgt 4,0 m (siehe Abbildung).

Begründen Sie, dass die Funktion  $f$  eine Funktion mindestens 4. Grades sein muss.

Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion  $f$ .

**Abb. 1.1:** Eingekleidete Aufgabe aus den Einheitlichen Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung – Mathematik (KMK, 2002, S. 9)

ben. Der Zweck, der mit dem Abdruck der Aufgabe in den EPA verfolgt wird, ist der, unterschiedliche Vorstrukturierungen bei Aufgaben auf Grund- bzw. Leistungskurs-Niveau zu veranschaulichen. Wahrscheinlich kann man im Mathematikunterricht nicht völlig auf eingekleidete Aufgaben verzichten, weil Schüler daran die wechselseitige Übersetzung von Text und mathematischen Darstellungsebenen (Formeln, Tabellen, Graphen) trainieren können. Gleichzeitig können die Aufgaben Beispiele aufzeigen, wo mathematische Begriffe und Verfahren in unserer Umwelt angewandt werden können (vgl. LAMBERT, 2007). Verfolgt man derartige Ziele im Unterricht, ist es jedoch notwendig, die Einkleidung bewusst herauszustellen und gar nicht erst den Eindruck aufkommen zu lassen, die Situation sei realistisch mathematisiert („Authentizität“; vgl. Abschnitt 1.7.1).

Anhand eines anschaulichen Beispiels einer „eingekleideten“ Textaufgabe analysiert WINTER (1994), wie naiv wir im Mathematikunterricht oftmals mit Modellierungen umgehen und welches Potenzial dabei ignoriert wird:<sup>6</sup>

*„Vater ist jetzt 84 kg schwer. In den vergangenen 6 Wochen hat er 7 kg abgenommen. Wie schwer war er vor 6 Wochen?“*

Wenn man diesen Kontext wirklich ernst nimmt, sollten auch die darin verwendeten Daten in den eigenen Erfahrungshorizont der Schüler eingeordnet werden (WINTER, 1994, S. 10f.):

- „Was heißt es, dass der Vater heute 84 kg schwer ist?“  
Kann man das mit etwas aus seinem Erfahrungsbereich vergleichen? – Das entspricht 84 Kilopaketen Zucker oder 84 Literflaschen Wasser oder einem Stapel von 840 100-g-Tafeln Schokolade.

Dann könnte man die nun mit Vorstellung verknüpften Daten mit anderen Daten vergleichen:

- „Ist das außergewöhnlich schwer? Wie viel wiegen normalerweise 35 Jahre alte Männer?“
- Muss man Einschränkungen für das Realmodell eines Mannes machen: „Wie schwer sind normalerweise 179 cm große Männer von 35 Jahren?“

Und dann kann man auch noch die gesamte Situation mathematisch explorieren (Was steckt noch alles darin?):

- „Kann man vielleicht vom Gewicht auf das Alter schließen? [...] Gilt vielleicht: ‚je älter, um so schwerer‘?“
- „Wie groß ist der Vater? Kann man vielleicht vom Gewicht auf die Größe schließen? [...] Gilt vielleicht: ‚je größer, um so schwerer‘?“

Und abschließend kann man dann noch fachübergreifende Perspektiven hinter dieser Aufgabe entdecken:

---

<sup>6</sup>SCHMIDT (1992) und GIGERENZER (2004) beschreiben anhand zahlreicher Beispiele, dass die Mathematik eben nur ein Hilfsmittel für Modellierungen ist und dabei etliche Aspekte ausblenden muss, was nicht selten zu fragwürdigen Folgerungen führt.

- Ist der Mann über-/untergewichtig? Wovon hängt das ab?
- „Ist Übergewicht/Untergewicht ungesund?“
- „Ist Schwergewichtigkeit vorteilhaft, angenehm, schön?“ Wann/wofür?
- „Kann man am eigenen Gewicht etwas ändern? Warum tut man das (oder nicht), wenn es geht?“
- Kann man Übergewichtigkeit in einen gesellschaftlichen Kontext einbetten? Wie viele Menschen sind übergewichtig? Woran liegt das? („Übergewichtigkeit als Folge von Überernährung und Bewegungsarmut wegen Übermotorisierung in reichen Industrieländern vs. Untergewichtigkeit als Folge von Unterernährung oder einseitiger Ernährung in armen Entwicklungsländern“)
- usw.

Aus dieser Perspektive zeigt sich besonders gut, dass die Mathematik nur einseitig geeignet ist, Kontexte zu modellieren und zahlreiche andere Aspekte außer Acht gelassen werden. Andererseits ist das auch gerade ihre Stärke: Sie reduziert die auf den zweiten Blick komplexe Situation auf wesentliche Merkmale, für die sie Methoden zur Verfügung stellt, und blendet alle anderen aus.

Auf den dritten Blick klammert unser obiges Beispiel übrigens nicht nur gesellschaftliche Perspektiven aus, sondern auch situative, die durchaus relevant sein könnten:

- Wann wurde das Gewicht des Vaters gemessen? Ist das evtl. morgens und abends unterschiedlich?
- Wie „gut“ war die Waage?
- Was heißt eigentlich 84 kg numerisch? Möglich wäre hier ein Zahlenwert im Intervall  $[83,5 \text{ kg}; 84,5 \text{ kg}]$ .

In der Regel werden Sachaufgaben nicht derart detailliert auf ihren Bezug zur „wirklichen Welt“ hin durchleuchtet. WINTERS Analyse zeigt dennoch plastisch, welches Potenzial in vielen Textaufgaben steckt, wenn man sich wirklich ernsthaft mit ihnen auseinandersetzt.

Mittlerweile gibt es zahlreiche im Unterricht erprobte Kontexte, bei denen Schüler erfolgreich mathematisch modellieren können. Viele derartige Beispiele werden in den folgenden Kapiteln dieses Buches zusammengestellt. MAASS (2004, S. 159) hat in einer umfangreichen empirischen Studie mit

Schülern ab Klasse 7 nachgewiesen, dass Schülern Modellierungskompetenzen vermittelt werden können.

Gegenwärtig laufen zwei weitere mathematikdidaktische Forschungsprojekte, die sich mit der Förderung von Modellierungskompetenzen im Mathematikunterricht beschäftigen (vgl. BORROMEO FERRI et al., 2006): Das Projekt DISUM (Didaktische Interventionsformen für einen selbstständigkeitsorientierten aufgabengesteuerten Unterricht in Mathematik) an der Universität Kassel (W. BLUM, R. MESSNER, R. PEKRUN, D. LEISS, S. SCHUKAJLOW) sowie das Projekt KOM<sup>2</sup> (Kognitionspsychologische Analysen von Modellierungsprozessen im Mathematikunterricht) an der Universität Hamburg (R. BORROMEO FERRI, G. KAISER).<sup>7</sup>

## 1.1 Was ist Modellierung?

In obiger Motivation der Thematik wurde bereits angedeutet, was Modellierung im Mathematikunterricht bedeuten kann. Bevor nun die Bedeutung des Modellierens über den Unterricht hinaus aufgezeigt wird, soll der Begriff „Modell“ präzisiert werden.

Ein **Modell** ist eine vereinfachende Darstellung der Realität, die „nur gewisse, einigermaßen objektivierbare Teilaspekte“ berücksichtigt (vgl. BLECHMAN et al., 1984, S. 144ff. oder HENN, 2002, S. 5). Dieser Begriff ist vergleichsweise offen gewählt, damit er möglichst vielseitig verwendet werden kann. Modelle in diesem Sinne gehen deutlich über Anschauungsmodelle hinaus (z.B. ein Würfelmodell, ein Tetraedermodell oder ein Galtonbrett als Modell für eine Binomialverteilung).

Diese flexible Definition des Begriffs „Modell“ lässt unterschiedliche Varianten von Modellen zu (HENN, 2000, S. 10; vgl. auch DAVIS und HERSH, 1988, S. 161ff.):

- Modelle, die vorhersagen (z.B. die Wettervorhersage)

---

<sup>7</sup>siehe zum DISUM-Projekt auch  
<http://www.mathematik.uni-kassel.de/~disum/home/home.php>



- Modelle, die erklären (z.B. warum der Bumerang zurückkommt, weshalb Planeten sich bewegen, wie sie es tun)
- Modelle, die beschreiben (z.B. die Kettenlinie oder Landkarten)
- Modelle, die vorschreiben (z.B. Schnittmuster einer Schneiderei, Kochrezepte, Einkommensteuer-Tarife)

Mit den ersten drei Varianten versucht man Aspekte der Realität unter bestimmten Blickrichtungen möglichst genau abzubilden; daher nennt man sie auch **deskriptive Modelle**. Modelle des vierten Typs nennt man auch **normative Modelle** (vgl. FÖRSTER, 1997, S. 125).

Ein alltägliches Beispiel für ein deskriptives Modell ist ein Stadtplan. Die Perspektivität des Modells wird dann deutlich, wenn man unterschiedliche Pläne einer Stadt nebeneinander hält: Es gibt Pläne der Kanalisation oder der Gas- und Stromversorgung. Es gibt evtl. einen abstrakten U-Bahn-Netzplan, bestimmt aber einen Buslinienplan. Es gibt maßstabsgetreue Straßenkarten. Es gibt evtl. politische Karten oder solche über die Herkunft/Religion der Einwohner der verschiedenen Stadtteile. Es gibt evtl. karikierte Stadtkarten usw. Je nachdem, welche Karte man wählt, lassen sich ganz unterschiedliche Fragen damit beantworten.

Modelle stecken also nicht bereits in der Realität, sondern sie werden von uns mit ganz bestimmten Absichten konstruiert. Dieser Aspekt ist auch für den Unterricht von großer Bedeutung, da folglich nicht trennscharf zwischen „richtigen“ und „falschen“ Modellen unterschieden werden kann. Unterscheiden kann man hingegen zwischen „angemessenen“ und „weniger angemessenen“ Modellen, und zwar jeweils im Hinblick auf eine bestimmte Fragestellung. Für manche Situationen mag es sinnvoll sein, Menschen als Zylinder zu modellieren (z.B. Simulation eines Crashes mit Dummys), aber für viele andere Situationen ist dieses geradezu abwegig. Somit lassen sich Situationen der Realität immer mittels *unterschiedlicher* Modelle modellieren.

Im Zentrum jedes Modellierungsvorhabens stehen also die wechselseitigen Beziehungen zwischen der Mathematik und dem „Rest der Welt“ (POLLAK nach BLUM, 1996, S. 18). Dabei muss man sich, wenn man *ehrlich* modellieren möchte, wirklich auf die Realität einlassen.

Jenseits der Mathematikdidaktik gibt es bereits seit Langem „Modelle“. GALILEI (1564–1642) war einer der Ersten, die erkannten, dass man die Rea-

lität vereinfachen muss, um sie mit mathematischen Mitteln beschreiben zu können. VON WEIZSÄCKER (1990, S. 107) charakterisierte dies wie folgt:

„Galilei tat seinen großen Schritt, indem er wagte, die Welt so zu beschreiben, wie wir sie nicht erfahren. Er stellte Gesetze auf, die in der Form, in der er sie aussprach, niemals in der wirklichen Erfahrung gelten und die darum niemals durch eine einzelne Beobachtung bestätigt werden können, die aber dafür mathematisch einfach sind. So öffnete er den Weg für eine mathematische Analyse, die die Komplexheit der wirklichen Erscheinungen in einzelne Elemente zerlegt.“

Hierin wird das Wesen der Modellierung weit über physikalische Modellierungen der Natur hinaus gut deutlich; auf den Punkt gebracht:<sup>8</sup>

### **Vereinfachung ist eine Tugend von Modellen, kein Nachteil.**

GALILEI wählte diejenigen Größen der Realität aus, die zu ihrer Beschreibung von Bedeutung waren und konstruierte mathematische Zusammenhänge zwischen ihnen, welche die beobachtbare Natur möglichst „gut“ abbildeten, also modellierten. ISAAC NEWTON (1642–1727) führte etwas später das Konzept der Differential- und Integralrechnung ein. Heutige Modelle oder Theorien in der Physik kommen zumindest in der klassischen Physik mit sehr wenigen Modellannahmen (Axiomen) aus und beschreiben nahezu alle Phänomene, denen wir im Alltag begegnen, genau (Mechanik, Elektrodynamik, Optik). Grundlage sind jeweils wenige Differentialgleichungen<sup>9</sup>, also erfolgreiche mathematische Modelle.

Heutzutage gibt es auch in etlichen anderen Wissenschaftsbereichen Bestrebungen, Zusammenhänge wo immer möglich zu mathematisieren (vgl. HOYNINGEN-HUENE, 1983). Insbesondere gilt dies für die Modellierung von Populationen und deren Wechselwirkungen in der Ökologie (vgl. Ab-

---

<sup>8</sup>nach einem Vortrag von WOLFGANG EBENHÖH, ICBM Oldenburg

<sup>9</sup>Differentialgleichungen sind Gleichungen, deren Lösungen nicht einfach nur Zahlen sind, sondern ganze Funktionen (vgl. Abschnitt 5.3).

schnitt 5.3). Im Gegensatz zur physikalischen Natur sind jedoch in vielen anderen Forschungsbereichen Modelle uneinheitlich und vage, z.B. die Vorhersage von Börsenkursen in der Wirtschaft, ökologische Modellierungen oder die Vorhersage von Krankheiten in der Medizin. Modellannahmen sind dann oftmals nur durch gesunden Menschenverstand begründbar. Denn je lebensnäher Probleme sind, desto komplexer sind die zugrunde liegenden Strukturen, und Zusammenhänge in Form von Gleichungen lassen sich nicht objektiv finden. Natürlich gibt es darüber hinaus auch Bereiche, für die mathematische Modelle grundsätzlich *nicht* geeignet sind, z.B. das Verfassen von Romanen oder die Herstellung von Kunstwerken.

Dort, wo mathematische Modelle sinnvoll sind, zeigt sich die mathematische Modellierung zunehmend als ein integraler, aber doch eigenständiger Bereich der Forschungsarbeit (siehe Abbildung 1.2).<sup>10</sup> Wird diese Interdisziplinarität nicht ernst genommen, kann es zu falschen Modellierungen oder zumindest zu überinterpretierten Modellen kommen (vgl. die Beispiele zur Populationsdynamik auf Seite 279 und Seite 301).



**Abb. 1.2:** Mathematische Modellierung nach EBENHÖH

Die mathematische Modellierung gewinnt deshalb eine zunehmend größere Bedeutung, weil mithilfe mathematischer Modelle Simulationen durchgeführt werden können, die oftmals erheblich kostengünstiger sind als Realexperimente. Häufig lassen sich durch **Simulationen** auch Szenarien erproben, die real gar nicht eintreten können oder sollen, z.B. Schutzmaßnahmen gegen

<sup>10</sup>in Anlehnung an einen Vortrag von WOLFGANG EBENHÖH, ICBM Oldenburg

Waldbrände, Zukunftsvoraussagen zur Rentenversicherung oder die Planung von Projekten mit Umweltrisiken, die abgeschätzt werden sollen. Weil viele Probleme in der heutigen Welt immer komplexer werden, wächst die Bedeutung der mathematischen Modellierung, um möglichst objektive Entscheidungsgrundlagen zu gewinnen (oder sogar vorzutäuschen; vgl. SCHMIDT, 1992 und GIGERENZER, 2004). Dass heute sowie in absehbarer Zukunft Computerkapazitäten relativ kostengünstig und reichlich zur Verfügung stehen, kommt diesem Aspekt entgegen.

Anhand eines einfachen Beispiels lässt sich andeuten, wie vielfältig die Situationen sein können, die sich mit einer mathematischen Gleichung bzw. Funktion modellieren lassen (siehe Tabelle 1.2).

$y$	$m$	$x$	$b$
Kosten für ein Mietauto	Kosten pro km	gefahrte km	Grundgebühr
Handygebühr	Kosten pro Zeiteinheit	Telefonierdauer	Grundpreis
Höhe einer abbrennenden Kerze	pro Zeiteinheit abbrennende Höhe (negatives $m$ )	Brenndauer	Höhe zum Zeitpunkt $x = 0$
Flughöhe eines Fallschirmspringers	Fallgeschwindigkeit (negatives $m$ )	Falldauer	Höhe beim Absprung
Temperatur in Fahrenheit	$\frac{9}{5}$	Temperatur in ° Celsius	32

**Tab. 1.2:** Verschiedene Situationen, die sich mit dem mathematischen Modell  $y = m \cdot x + b$  beschreiben lassen

Selbstverständlich idealisiert die Funktion in den verschiedenen Situationen unterschiedlich, z.B. werden Tarife in der Regel nicht stetig, sondern diskret abgerechnet (pro ganzer Sekunde oder Minute), und auch ein Modell zur Beschreibung der Fallhöhe eines Fallschirmspringers idealisiert, weil er in der Zeit unmittelbar nach dem Sprung beschleunigt fällt, also die Fallgeschwindigkeit zunimmt.

Aber selbst wenn man die Mathematisierung in Form von Gleichungen erfolgreich bewältigt hat, heißt das noch nicht, dass man mit diesem Modell beliebig genau zukünftiges Verhalten vorhersagen kann. Sogar in der Physik gibt es solche Beispiele: Man kennt genau die physikalischen Gesetze, die dem

Wetter zugrunde liegen; sie hängen ab von Temperatur, Luftdruck, Windgeschwindigkeit und Luftfeuchtigkeit. Eine Wettervorhersage ist dennoch nur für wenige Tage in die Zukunft zuverlässig. Dies hängt damit zusammen, dass theoretisch für Zukunftsprognosen ein genauer Anfangszustand bekannt sein müsste, d.h. die *exakten* Wetterdaten für *jeden* Punkt der Erde und sogar in beliebiger Höhe bzw. Meerestiefe. Darüber hinaus müsste man wissen, welche weiteren Größen relevant sind. Selbst schnellste Computer könnten solche Daten – wenn man sie denn überhaupt erheben könnte – nicht bewältigen. Insofern muss man sich auf *Näherungen* beschränken, die dann natürlich auch nur eingeschränkte Genauigkeit besitzen.

Viele weitere komplexe Systeme reagieren sensibel auf Änderungen der Anfangsbedingungen. Sie werden mithilfe der **Chaostheorie** erforscht. Wir sind es gewohnt, dass kleine Änderungen der Anfangsbedingungen auch nur kleine Wirkungen nach sich ziehen – Mathematiker bezeichnen ein solches Verhalten als „stetig“. Bei **dynamischen Systemen** muss dieses jedoch nicht gegeben sein. Kleinste Änderungen von Anfangsbedingungen können beträchtlich unterschiedliche Folgen nach sich ziehen. Bei manchen Festen lassen Kinder Luftballons steigen, an denen sie zuvor ihre Adressen befestigt haben, um zufällige Brieffreundschaften zu knüpfen. Obwohl dabei unter Umständen hunderte Luftballons mit ähnlichen Startbedingungen (Datum, Uhrzeit, Wetter) aufsteigen, können sie an völlig unterschiedlichen Stellen landen. Jeder kennt auch die Situation, dass man beim Mensch-ärgere-dich-nicht-Spiel verzweifelt auf eine „6“ wartet. Und wie man sich auch bemüht, die Anfangsbedingungen zu beeinflussen, kann man die eben geworfene „6“ nicht wiederholen. Und das, obwohl auch hier eigentlich die mathematische Modellierung durchaus bekannt ist. Man muss lediglich *genau* Winkel und Position der Hand, die Abwurfgeschwindigkeit des Würfels, Richtung und Geschwindigkeit der Luftzüge, eventuelle Temperatur- und Luftdruckschwankungen und die exakte Position von Staub auf dem idealen Würfel sowie auf dem absolut glatten Tisch berücksichtigen ... Wie schon beim Wetter ist dies gar nicht möglich.

## 1.2 Philosophische Aspekte mathematischer Modellierungen: Warum passt die Mathematik auf die Welt?

„Wie ist es möglich, daß die Mathematik, die doch ein von aller Erfahrung unabhängiges Produkt des menschlichen Denkens ist, auf die Gegenstände der Wirklichkeit so vortrefflich paßt? Kann dann die menschliche Vernunft ohne Erfahrung durch bloßes Denken Eigenschaften der wirklichen Dinge ergründen?“

ALBERT EINSTEIN, 1921 (EINSTEIN, 2001, S. 133)

EINSTEIN gab selbst eine Antwort (ebd.):

„Insofern sich die Sätze der Mathematik auf die Wirklichkeit beziehen, sind sie nicht sicher, und insofern sie sicher sind, beziehen sie sich nicht auf die Wirklichkeit.“

In der Philosophie der Mathematik bezeichnet man die von EINSTEIN ange deutete Frage als **Anwendungsproblem**. Es ist nach wie vor nicht befriedigend gelöst und wird aktuell weiterhin diskutiert (vgl. THIEL, 1995, S. 30–48 und WILHOLT, 2004). Bevor ein möglicher Erklärungsansatz für das Anwendungsproblem vorgestellt wird, soll die Erstaunlichkeit der Anwendbarkeit anhand einiger Beispiele etwas weiter hervorgehoben werden.

Zunächst ist es erforderlich, zu überlegen, was eigentlich mathematische Gegenstände sind. Den Standpunkt, den EINSTEIN in seinem Zitat einnimmt, bezeichnet man in der Philosophie der Mathematik als *Platonismus* (vgl. DAVIS und HERSH, 1996, S. 334ff.). Dabei gelten mathematische Objekte als existent. Mathematiker *entdecken* folglich Zusammenhänge zwischen *realen* mathematischen Gegenständen. Man kann sich die mathematischen Objekte als *Ideen* veranschaulichen. Wenn wir z.B. im Unterricht über Dreiecke sprechen, meinen wir keine realen Dreiecke, sondern abstrakte Ideen von Dreiecken. Misst man nämlich bei einem gezeichneten Dreieck die Innenwinkel nach und addiert sie, so wird sich in der Regel nicht die aufgrund des Winkelsummensatzes zu erwartende Summe von  $180^\circ$  ergeben. Anders ist das in unserer abstrakten Vorstellung. Wir können uns ein Dreieck mit unendlich dünnen Seitenlinien *vorstellen*, an dem wir den Beweis des Winkelsummensatzes nachvollziehen, und dann akzeptieren, dass die abstrakte Idee des Dreiecks eine Innenwinkelsumme von  $180^\circ$  haben *muss*. Dass wir uns die

Vorgänge anhand einer Zeichnung veranschaulichen, spielt dabei keine Rolle. Dieser Übergang von gezeichneten zu abstrakten Objekten ist bekanntlich für Schüler eine beträchtliche Hürde.

Weshalb eignen sich nun die mathematischen Objekte so vorzüglich als Modelle für viele Phänomene der uns umgebenden Welt?

Einen konstruktiven Standpunkt nehmen DAVIS und HERSH (1996, S. 67ff.) ein. Sie legen dar, die Anwendungen der Mathematik werden „*per fiat*“<sup>11</sup> geschaffen. Dies sieht so aus, dass die Mathematiker im Laufe ihrer Tätigkeit eine Vielzahl an Begriffen und Strukturen entwickeln. Die Mathematiker selbst versuchen, sich ihre Konzepte mit dem, was in der Umwelt vorhanden ist, zu veranschaulichen. Und dann wird im Laufe von Modellierungsprozessen versucht, die zu modellierenden Phänomene mit den *verfügbaren* mathematischen Konzepten zu beschreiben. Manchmal gelingt es, „passende“ Beziehungen herzustellen und manchmal gelingt es nicht, weil Modell und Realität (evtl. erst auf den zweiten Blick) doch nicht – im Hinblick auf die Zielsetzung der Modellierung – kompatibel sind. Manchmal ist es möglich, ein Modell, welches noch nicht angemessen ist, weiterzuentwickeln zu einem Modell, welches den Anforderungen genügt. Dabei mag durchaus „neue“ Mathematik geschaffen werden (vgl. WUSSING, 1989): Zum Beispiel hat die Analysis im 16. Jahrhundert wichtige Impulse aus dem Bedürfnis heraus erhalten, bestimmte mechanische Zusammenhänge zu modellieren (z.B. Beschleunigungsvorgänge, Wurfbewegungen, Planetenbewegungen). Wesentliche Ursprünge der Wahrscheinlichkeitsrechnung entstanden ebenfalls im 17. Jahrhundert aus dem Bedürfnis heraus, Glücksspiele zu mathematisieren. Und auch die Theorie der linearen Optimierung bekam Anfang des 20. Jahrhunderts wesentliche Impulse von ökonomisch-technischen Problemen.

DAVIS und HERSH (1996, S. 69f.) verdeutlichen ihre Mathematik „*per fiat*“ anhand verschiedener Beispiele zur Addition, von denen hier zwei aufgegriffen werden sollen:

**Problem A:** „Eine Büchse Thunfisch kostet 1,95 DM. Wie viel kosten zwei Büchsen Thunfisch?“

---

<sup>11</sup>*fiat* (lat.): Es werde.

Natürlich drängt sich als Mathematisierung der Fragestellung eine einfache Addition auf, also kosten zwei Büchsen Thunfisch 3,90 DM. Was ist aber nun, wenn der Händler einen Rabatt einräumt und zwei Büchsen etwa schon für 3,50 DM verkauft? Sollte man sagen, dass 3,90 DM der „richtige“ Preis wäre? Was ist, wenn die eine Büchse gerade das Mindesthaltbarkeitsdatum erreicht hat und der Händler sie einem guten Kunden kostenlos mit dazu gibt? In Werbeprospekten sieht man in heutiger Zeit zahlreiche Rabatt-Aktionen: „Wenn Sie für mindestens 500 € Möbel kaufen, erhalten Sie einen Kaffeeautomaten gratis mit dazu.“

Während und nach den Kriegen gab es in Zeiten knapper Lebensmittel sogenannte Lebensmittelmarken. Man brauchte dann z.B. für ein Brot eine Lebensmittelmarke *und* einen bestimmten Geldbetrag. Streng genommen handelt es sich dabei sogar um eine „zweidimensionale Preisauszeichnung“.

**Problem B:** *„Eine Bank, welche die Kreditwürdigkeit eines Kunden abschätzt, gibt zwei Punkte für Hausbesitz, fügt einen Punkt hinzu, wenn das Jahreseinkommen 45 000 DM übersteigt, fügt einen weiteren Punkt hinzu, wenn in den letzten fünf Jahren nicht umgezogen wurde, zieht einen Punkt ab, wenn Vorstrafen vorliegen, zieht einen weiteren Punkt ab, wenn der Kunde unter 25 ist usw. Was bedeutet diese Summe?“*

Bei diesem Problem kann man eigentlich die verschiedenen Summanden gar nicht vergleichen. Das Ergebnis der Addition hängt wesentlich von der Größe der einzelnen Summanden ab, die jedoch scheinbar willkürlich und nicht transparent gewichtet sind. Es handelt sich um ein komplexes System, das – mangels geeigneterer Modelle – zunächst nur qualitativ „irgendwie“ modelliert werden soll, weil eine Entscheidungsgrundlage für die folgende Frage gesucht wird (vgl. Abschnitt 1.1): Bekommt der Kunde den Kredit?

In den aufgezeigten Beispielen ist die einfache Addition das naheliegende mathematische Modell. Es wird aber deutlich, dass auch eine so naheliegende Mathematisierung einer Validierung nicht unbedingt standhalten muss. Wir



versuchen dieses jedoch erst einmal „per fiat“ und hoffen, dass die Modellierung angemessen ist.

Es wird hier zwar etwas überspitzt, aber dennoch realistisch das mathematische Modell der Addition auf Alltagssituationen angewandt. Insbesondere Grundschüler haben bereits bei solchen Mathematisierungen Probleme, weshalb Relevanz und Grenzen der Modellierung durchaus an Beispielen thematisiert werden sollten (vgl. Abschnitt 2.1 sowie USISKIN, 2007).

Die Beispiele von DAVIS und HERSH machen plausibel, dass die Realität häufig mithilfe von Mathematik modelliert werden kann; man sucht eben so lange, bis man ein geeignetes Modell findet. Die Beispiele zeigen jedoch noch nicht, weshalb es grundsätzlich *möglich* ist, „passende“ mathematische Modelle zu finden. In der Tat wird die Frage aus der Überschrift dieses Unterkapitels nun recht philosophisch ausgelegt. Aber auch dann gibt es mögliche Ansätze für Antworten (VOLLMER, 1988, S. 102): „Mathematik ist eine Strukturwissenschaft. Die Realität ist strukturiert und trennbar. Deshalb ist Mathematik auf die Realität [...] anwendbar.“

Mathematik ist dabei sehr allgemein als eine **Strukturwissenschaft** charakterisiert. Gemeint ist, dass in der Mathematik *Beziehungen* zwischen mathematischen Objekten untersucht werden. Dabei spielt es keine Rolle, ob die Beziehungen z.B. geometrischer, algebraischer oder analytischer Art sind (vgl. das Zitat von GALILEI auf S. 1).

Daneben erläutert VOLLMER etwas konkreter Voraussetzungen, welche unsere Umwelt erfüllen muss, damit sie mithilfe mathematischer Strukturen modelliert werden kann (VOLLMER, 1988, S. 100):

- a) „Es muss möglich sein, *Ähnlichkeiten* (und Identitäten) zu finden: gleiche Individuen und Eigenschaften (damit Objekte *erkannt* und verglichen, Klassen und Begriffe gebildet werden können), gleiche Beziehungen (damit Regelmäßigkeiten erkannt werden können), gleiche Beziehungen zwischen Beziehungen (damit allgemeine Gesetze aufgefunden werden können) usw.
- b) Die Teile der Welt müssen (wenigstens teilweise) voneinander getrennt und unterschieden werden können. Es muss also näherungsweise abgeschlossene oder *trennbare Systeme* geben. [...]
- c) Die Beziehungen zwischen den Teilen der Welt dürfen nicht beliebig *komplex* sein.

- d) Unsere ‚Um‘-Welt muss eine gewisse *Stabilität* besitzen. Andernfalls wäre nicht genügend Zeit für die Evolution von Sternen, Planeten, Organismen und von fühlenden und intelligenten Wesen.
- e) Einige Teile der Welt müssen *mit unserer Peripherie wechselwirken*; die Welt muss auf unsere Erfahrungsebene ‚projizierbar‘ sein [...]“

Diese letzten philosophischen Betrachtungen sind vom Abstraktionsniveau her höchstens für Oberstufenschüler zu leisten. Dennoch zeigen sie deutlich, worauf es bei Modellen ankommt. Diejenigen Phänomene unserer Umwelt, die nicht den eben genannten Bedingungen genügen, kann man sicher nicht mit mathematischen Methoden angemessen modellieren.

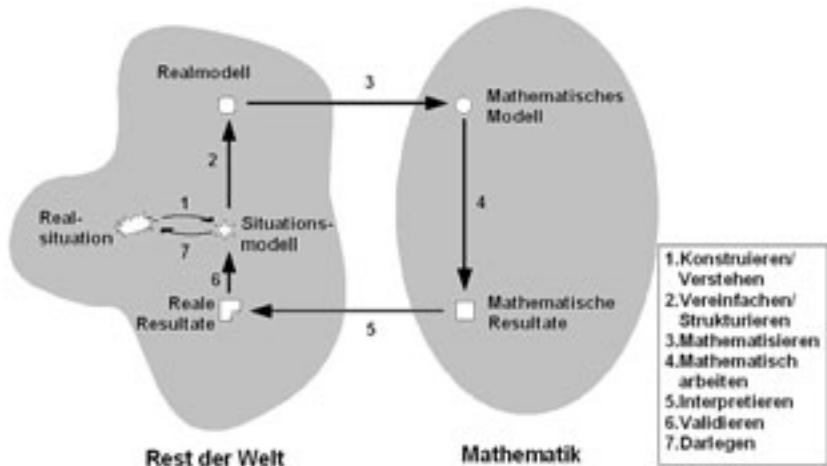
## 1.3 Modellierungskreislauf und didaktische Reduktionen

Früher verstand man unter dem Terminus „Modellieren“ lediglich die Konstruktion eines Modells (vgl. BLECHMAN et al., 1984, S. 144). Insbesondere in der Mathematikdidaktik verwendet man den Begriff des Modellierens allgemeiner als Bezeichnung für den gesamten Problemlösungsprozess, für den die Modellierung verwendet wird (vgl. BLUM, 1993b). Bei so verstandenen Modellierungen lassen sich gewisse Phasen unterscheiden, die jeweils mehr oder weniger gründlich durchdacht werden müssen, aber in der Regel nicht wirklich starr verfolgt werden, wie weiter unten in diesem Abschnitt ausgeführt wird. Diese Phasen lassen sich anschaulich in Kreislaufschemas visualisieren. Verschiedene solcher Schemata, die in der Mathematikdidaktik gebräuchlich sind, unterscheiden sich etwa dadurch, was als „mathematische Modellierung“ verstanden wird; dies reicht von der engen Deutung, dass nur die Mathematisierung einer realen Situation betrachtet wird, bis zu komplexen Problemlösungssituationen, die insgesamt betrachtet werden.<sup>12</sup> Innerhalb der deutschsprachigen Mathematikdidaktik hat sich mittlerweile

---

<sup>12</sup>Für eine Übersicht über die internationale Diskussion vgl. BLUM et al. (2007, Part I).

der Modellierungskreislauf in Abbildung 1.3 bewährt, welcher im aktuellen Projekt DISUM (vgl. Seite 8) eingesetzt wird.<sup>13</sup>



**Abb. 1.3:** Modellierungs„kreislauf“ nach BLUM und LEISS (z.B. BLUM, 2006, S. 9)

Vorzug dieses Modellierungskreislaufs ist, dass diejenigen Prozesse differenziert werden, die potenzielle kognitive Hürden für Schüler darstellen (vgl. SCHUKAJLOW, 2006). Insofern bietet dieses Schema strategische Hilfen für Lehrer, die mögliche Probleme ihrer Schüler bereits bei der Planung mathematischer Modellierungen antizipieren möchten.

Für Schüler ist dieses Schema häufig bereits zu komplex, weshalb später didaktisch reduzierte Schemata vorgestellt werden sollen. Zuvor werden jedoch die einzelnen Phasen dieses Modellierungs„kreislaufs“ anhand eines Beispiels veranschaulicht:<sup>14</sup>

<sup>13</sup>Je nachdem, wie viele Teilphasen man unterscheidet (z.B. zwischen Situationsmodell und Realmodell), kann das Modell weiter ausdifferenziert oder verdichtet werden (vgl. BORROMEO FERRI und KAISER, 2006).

<sup>14</sup>LEISS (2007, S. 29–36 und S. 123–132) veranschaulicht die Phasen dieses Modellierungs„kreislaufs“ anhand der „Tanken“-Aufgabe (vgl. Seite 2).

Wir betrachten eine herkömmliche **Konservendose** mit einem Inhalt von 400 ml. Es soll untersucht werden, ob der Metallbedarf für die Dose optimal ist.<sup>15</sup>

Die einzelnen Schritte des Modellierungsprozesses können dann wie folgt aussehen:

## 1. Konstruieren/Verstehen

Die gegebene Situation bzw. Aufgabe muss zunächst verstanden werden. Schüler müssen an dieser Stelle die nötigen Informationen der oft in Textform gegebenen Aufgabe entnehmen. Insbesondere muss im Falle der Konservendose die Fragestellung verstanden werden, was also ein „optimaler“ Metallbedarf ist.<sup>16</sup> Schüler entwickeln dabei eine *Vorstellung* von der Situation der Aufgabe („mentale Repräsentation“; vgl. Abschnitt 1.5).

Um uns die Aufgabe zu veranschaulichen, betrachten wir eine reale Konservendose oder zumindest die entsprechende Abbildung 1.4. Dies ist unser **Situationsmodell**.

---

<sup>15</sup>Das Informations-Zentrum Weißblech e.V., Düsseldorf, hat Informationen über Herstellung, Verwendung und Nutzen von Lebensmittelverpackungen aus Weißblech zusammengestellt:

<http://www.weissblech.de/fileadmin/Download/markenlehrbrief.pdf>.

Bei der Gelegenheit sei auch auf empfehlenswerte Internet-Seiten der Firma Ball Packaging Europe hingewiesen, die dort z.B. den Produktionsprozess, Anmerkungen zur historischen Entwicklung sowie zu mathematischen Aspekten der Dosenoptimierung zusammenstellen: [http://www.ball-europe.de/382\\_260\\_DEU\\_PHP.html](http://www.ball-europe.de/382_260_DEU_PHP.html).

<sup>16</sup>Im Folgenden werden wir die benötigte Metalloberfläche modellieren und die Frage nach dem Optimum als eine Extremwertsuche im mathematischen Sinne interpretieren. Damit nehmen wir Idealisierungen vor, die für den Mathematikunterricht günstig erscheinen. Denkbar wäre z.B. auch die Frage nach dem „optimalen“ Metall für die Konservendose im Hinblick auf unterschiedliche Materialeigenschaften oder eine Interpretation der Frage unter ästhetischen Gesichtspunkten: Gibt es besonders „schöne“ Konservendosenabmessungen? – Stichwort: Goldener Schnitt (vgl. <http://www.wikipedia.de> unter „Goldener Schnitt“)



**Abb. 1.4:** Situationsmodell einer Konservendose

## 2. Vereinfachen/Strukturieren

Wir haben das Ziel, unser Situationsmodell zu mathematisieren, und zwar soll es um die Oberfläche bei gegebenem Volumen gehen. Wir haben folglich eine konkrete Leitfrage für die Modellierung, die uns helfen soll, „wichtige“ von „unwichtigen“ Größen oder Informationen zu trennen. Bei der Schaffung eines Realmodells berücksichtigen wir jedoch neben diesen speziellen Aspekten der jeweiligen Modellierung auch subjektive Faktoren:

- Welche „Mathematik“ kenne ich in diesem Zusammenhang?
- Welche Ideen habe ich?
- Welche Analogien/Beziehungen sehe ich?
- Wie viel Motivation habe ich/Wie viel Zeit möchte ich investieren?
- etc.

In der Regel benötigt man für die Konstruktion eines Realmodells auch mehr oder weniger tiefgreifende Kenntnisse über den Kontext der Realsituation. Hier zeigt sich somit wieder die Interdisziplinarität der mathematischen Modellierung (vgl. Abschnitt 1.1).

Die Konstruktion von Realmodellen unterliegt stets einem Kompromiss zwischen der Einfachheit des Modells und der Adäquatheit für die Problemstellung. In der Regel sind nämlich umfangreichere Modelle auch komplexer und aufwendiger (vgl. BLECHMAN et al., 1984, S. 160ff.). Da sich der Aufwand zunächst in Grenzen halten soll und wir uns recht gut mit der Geometrie von Zylindern auskennen, wählen wir den naheliegenden Zylinder als (erstes) **Realmodell** (siehe Abbildung 1.5) und sehen somit von Knickfalten, dem verwendeten welligen Blech, aber auch von der Dicke des Bleches ab. Diese Wahl ist jedoch nicht zwingend, da sie erstens voraussetzt, Zylinder mathematisieren zu können (ab etwa Klasse 10) und zweitens schon recht ungenau ist (siehe 6. Validierung). Daher erfordert die Konstruktion

eines Realmodells wie auch eines mathematischen Modells eigentlich immer ein Stück **Kreativität**.



**Abb. 1.5:** Realmodell einer Konservendose

Bei strenger Trennung zwischen Realmodell und mathematischem Modell könnte man evtl. das hier betrachtete pragmatische Realmodell bereits als Teil eines mathematischen Modells deuten, weil die Konservendose nicht nur durch die Vernachlässigung der Knickfalze vereinfacht wurde, sondern durch das gleichzeitige Ignorieren des welligen Bleches ein geometrischer Körper, also ein mathematisches Objekt, als Modell entstanden ist. Diese Auffassung scheint jedoch für den Schulunterricht wenig hilfreich zu sein, da der Modellierungskreislauf an sich bereits eine *Idealisierung* von Modellierungsprozessen darstellt (vgl. Seite 33ff.).

Liegen für eine vollständige Mathematisierung einer Situation noch nicht genügend Daten vor, kann zur Phase der Strukturierung und Vereinfachung durchaus auch eine erste Phase der Datenbeschaffung (Recherche oder Messung) gehören.

Im Mathematikunterricht bietet sich nur relativ selten die Gelegenheit, den Klassenraum zu verlassen, um „echte“ Daten in der „wirklichen“ Welt zu recherchieren, zu messen, zu erfragen (vgl. auch die Stau-Modellierung in Abschnitt 2.2). Wenn sich eine solche Gelegenheit bei einem Modellierungsproblem bietet, kann man sie durchaus nutzen. Schüler können zu diesem Zweck z.B. eigene Konservendosen von zu Hause mitbringen und jene modellieren. Wir Menschen lernen in Kontexten, und Schüler erkennen Mathematik viel eher dann als eine relevante Wissenschaft, wenn sie sie in Kontexten anwenden und nicht nur darüber lesen.

### 3. Mathematisieren

Mathematische Modelle bestehen häufig aus Funktionen oder (konsistenten) Gleichungen; diese müssen durchaus nicht immer bewusst in algebraischer

Darstellung gegeben sein, sondern können als Graph, Tabelle oder in sprachlicher Form vorliegen. In der Grundschule gilt auch die Entwicklung einer Rechenvorschrift zu einer gegebenen Situation bereits als mathematisches Modell. Jenseits des Mathematikunterrichts werden quantitative Modelle oftmals durch Differentialgleichungen beschrieben (vgl. Abschnitt 5.3).

Als Realmodell sind wir von einem Zylinder ausgegangen, der sich bei der Konservendose quasi aufdrängt. Dieser geometrische Körper ist streng genommen ein Objekt der Mathematik und nicht des „Rests der Welt“. Insofern lassen sich die Phasen 2. Vereinfachen/Strukturieren und 3. Mathematisieren oftmals nicht trennscharf unterscheiden, wenn einem mathematischen Modell geometrische Figuren oder Körper zugrunde liegen.

Uns geht es um die Oberfläche der Dose bei einem gegebenen Volumen. Also stellen wir die entsprechenden Formeln auf. Je nach Vorkenntnissen der Schüler kann es sich dabei um anspruchsvolles problemlösendes Arbeiten handeln, insbesondere dann, wenn Modelle komplizierter werden.<sup>17</sup>

$$O(r, h) = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + h \cdot (2 \cdot \pi \cdot r)$$

$$V(r, h) = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Mit den beiden Gleichungen sowie der **Nebenbedingung**  $V(r, h) \stackrel{!}{=} 400$  ist uns eine vollständige Mathematisierung gelungen, wir haben ein **mathematisches Modell**. Wenn wir als Maßeinheit Zentimeter wählen, müssen wir die Einheiten nicht explizit berücksichtigen.

Selbstverständlich ist dies nicht das einzige mögliche mathematische Modell. Man könnte z.B. den Durchmesser und nicht den Radius der Dose betrachten und käme zu anderen Gleichungen für dieselbe Situation, die in diesem einfachen Fall jedoch äquivalent wären.

Im Abschnitt 1.2 haben wir gesehen, dass Anwendungen der Mathematik nach DAVIS und HERSH (1996) „per fiat“ geschaffen werden, dass also in erster Linie versucht wird, bekannte mathematische Werkzeuge zum Einsatz zu bringen bzw. weiterzuentwickeln. Als Lehrer wird man den Schülern nur

---

<sup>17</sup>Hilfreiche didaktische und methodische Anregungen zum Problemlösen und zur Verwendung geeigneter Heuristiken findet man bei BRUDER (2002).

solche Kontexte präsentieren, welche sie mit den ihnen zur Verfügung stehenden Mitteln angemessen modellieren können. Dabei ist zu empfehlen, auch mathematische Modelle zum Einsatz kommen zu lassen, deren Behandlung im Unterricht längere Zeit zurückliegt. Denn wenn die Schüler lediglich die gerade thematisierten, und damit auf der Hand liegenden, mathematischen Werkzeuge anzuwenden brauchen, handelt es sich streng genommen gar nicht um eine Modellierung. Andererseits werden auch Schüler vorwiegend solche Begriffe und Verfahren einsetzen, die sie bereits kennen oder mit ihrem Vorwissen entwickeln können. In einem konstruktiven Mathematikunterricht ist dabei durchaus gewollt, dass die Schüler andere Modelle verwenden als vom Lehrer antizipiert. Gerade diese Vielfalt eignet sich besonders, um intensiv über mathematische Modellierungen zu reflektieren (vgl. Abschnitt 1.5).

## 4. Mathematisch arbeiten

In dieser Phase geht es um die „Lösung“ des Problems im mathematischen Modell. Dazu müssen geeignete mathematische Werkzeuge ausgewählt oder entwickelt werden.

Uns interessiert die Frage der optimalen Oberfläche bei *gegebenem* Volumen; dies führt zu einer einschränkenden Bedingung für  $r$  und  $h$ , die ausgenutzt werden soll ( $r > 0$ ):

$$\begin{aligned} \pi \cdot r^2 \cdot h &= 400 \\ \iff h &= \frac{400}{\pi \cdot r^2} \end{aligned}$$

Jetzt haben wir die Nebenbedingung so umgeformt, dass wir sie in die Formel für die Oberfläche einsetzen können und eine **Zielfunktion** erhalten, die lediglich noch von *einer* Variablen abhängt:

$$O(r) = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + \frac{400}{\pi \cdot r^2} \cdot (2 \cdot \pi \cdot r) = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + \frac{800}{r}$$

Für die mathematische Lösung unserer Aufgabe müssen wir diese Funktion auswerten. Dazu gibt es – je nach Vorkenntnissen oder Vorlieben der Schüler – unterschiedliche Möglichkeiten. Entweder wendet man den Kalkül der Differentialrechnung an, man setzt neue Technologien wie z.B. den grafikfähigen Taschenrechner zur numerischen Bestimmung des Minimums ein oder



man probiert schlicht systematisch. Numerisch erhält man für die Stelle des (für  $r > 0$  einzigen) Minimums  $r \approx 3,993$ , der zugehörige Funktionswert ist  $O(3,993) \approx 300,5$ . Dass es sich tatsächlich um ein Minimum handelt, sieht man leicht am zugehörigen Graphen der Funktion  $O(r)$ . Aus der Nebenbedingung berechnet man auch schnell  $h \approx 7,986$ .

Damit haben wir ein **mathematisches Resultat**.<sup>18</sup>

Es kommt vor, dass Modellierungsprobleme durch einen „Trick“ besonders schnell oder elegant gelöst werden können. Manchmal sind solche Lösungen mathematisch kaum anspruchsvoll und stehen in der Gefahr, herabgewertet zu werden. Sofern jedoch angemessene Resultate erzielt werden, sind diese Lösungen im Hinblick auf das Ziel der Modellierung als vollwertig anzuerkennen. Ein Beispiel, bei dem durch eine unkonventionelle Mathematisierung die Anzahl der Matches in einem Tennisturnier sehr rasch ermittelt wird, ist auf Seite 143 dargestellt.

## 5. Interpretieren

Es geht darum, das mathematische Resultat wieder auf die Realsituation bzw. das reale Modell zu beziehen. Weil wir unsere Variablenbezeichnungen gleich so gewählt haben, dass sie einen Zusammenhang mit den gewählten Größen suggerieren, fällt die Interpretation nicht schwer, wobei wir Einheiten nun allerdings ausdrücklich wieder verwenden: Bei einem festen Volumen von 400 ml hat ein Zylinder – denn das war unser Realmodell, über das wir lediglich Aussagen treffen können – für einen Radius von  $r \approx 3,993$  cm und eine Höhe  $h \approx 7,986$  cm eine minimale Oberfläche von  $300,5 \text{ cm}^2$ . Dieses ist unser **reales Resultat**.

---

<sup>18</sup>Hinweise zum pragmatischen Runden fehlerbehafteter Daten findet man bei Voss (1999).

## 6. Validieren

Das reale Resultat kann man nun auf unterschiedliche Weisen überprüfen bzw. bewerten. Bei „einfachen“ Modellierungsvorhaben ist es oftmals möglich, durch eine Plausibilitätsprüfung zumindest die Größenordnung der realen Resultate zu kontrollieren.<sup>19</sup> Bei komplexeren Modellierungen wird man versuchen, die realen Resultate an unabhängig bestimmten sicheren Fakten zu überprüfen; z.B. kann man Modelle für die Wettervorhersage auf frühere Daten anwenden und kontrollieren, ob die Voraussagen eingetroffen sind. Bei offeneren Modellierungsproblemen im Unterricht kommt es häufig vor, dass Situationen unterschiedlich modelliert werden. Stimmen die Resultate dennoch einigermaßen überein, stiftet dies Vertrauen in die Modellierungen. Wir können also **zwei unterschiedliche Perspektiven der Validierung** unterscheiden, die man durchaus explizit trennen kann:<sup>20</sup>

- Überprüfen der realen Resultate im Hinblick auf die Realsituation. Dies umschließt auch die Reflexion getroffener Modellannahmen im Hinblick auf das Ziel der Modellierung.
- Vergleichen und Bewerten *unterschiedlicher* Modellierungen für *eine* Realsituation.<sup>21</sup>

Zahlreiche Anregungen zur Prüfung von Modellierungsergebnissen werden in einer zusammenhängenden Darstellung unmittelbar im Anschluss an diese Modellierung der Konservendose ab Seite 29 aufgeführt. Unter anderem wird dort die Prüfung der Größenordnung der realen Resultate vorgeschlagen, die im Falle unserer Modellierung einer optimalen Konservendose sicherlich Erfahrungswerten ähneln. Da aber eine reale Konservendose vorliegt, kann auch direkt nachgemessen werden: Die realen Abmessungen sind  $d = 7,5 \text{ cm}$  bzw.  $r = 3,75 \text{ cm}$  und  $h = 10,9 \text{ cm}$  (inklusive Rand). Also weicht das reale Resultat

---

<sup>19</sup>Dabei handelt es sich häufig um eine unabhängige und sehr grobe alternative Modellierung der gleichen Situation.

<sup>20</sup>Anregung von GILBERT GREEFRATH auf der ISTRON-Tagung am 22. September 2007 in Münster

<sup>21</sup>Die zweite Variante lässt sich im Mathematikunterricht besonders produktiv nutzen, um gemeinsam mit Schülern *über* Modellierungsprozesse zu reflektieren (vgl. Abschnitt 1.5).

tat von den tatsächlich vorliegenden Abmessungen deutlich ab. Es zeigt sich jedoch, dass ein Realmodell mit einem Radius von 3,75 cm eine Oberfläche besäße, die nur um knapp 0,4 % von unserer minimalen Zylinder-Oberfläche abweicht. Insofern ist die Modellierung insgesamt bereits recht erfolgreich.

Nun wird der Kreislaufcharakter des Modellierungsprozesses deutlich. Wäre uns die Abweichung zu groß, könnten wir jetzt überprüfen, ob das Situationsmodell korrekt war oder ob man ein geeigneteres Realmodell finden kann, das z.B. die überstehenden Knickfalze mit berücksichtigt. Dann kann man jenes mathematisieren und kommt unter Umständen zu einem „angemesseneren“ Resultat. Weil es hier lediglich um die Veranschaulichung der einzelnen Phasen des Modellierungskreislaufs gehen soll, wird dieses nicht durchgeführt (vgl. aber DANCKWERTS und VOGEL, 2006, S. 170ff. und S. 196ff.).

Die Phase der Validierung wurde in der Vergangenheit bei vielen Modellierungen im Mathematikunterricht vernachlässigt (vgl. JABLONKA, 1996 und LEISS et al., 2007, S. 245). Weil quasi alle Modellierungen aus einer ganz bestimmten Perspektive vorgenommen werden, führen unterschiedliche Perspektiven in der Regel auch zu unterschiedlichen Modellen – es werden verschiedene Einflussgrößen unterschiedlich bewertet, Idealisierungen werden unterschiedlich beurteilt, Zielsetzungen sind verschieden.<sup>22</sup> In der Validierungsphase sollten die zugrunde liegenden Standpunkte daher durchaus noch einmal aufgezeigt und für die Bewertung der Ergebnisse herangezogen werden, um die Realsituation nicht aus dem Blick zu verlieren. An unserem Beispiel der Konservendosenmodellierung könnten Schüler exemplarisch Modellierungen mit folgenden Blickrichtungen arbeitsteilig durchführen und miteinander vergleichen:

- Perspektive des Herstellers von Konservendosen
- Perspektive des Nutzers der Konservendose
- Perspektive eines Logistik-Unternehmers, der Konservendosen transportiert
- Perspektive eines Verkäufers im Supermarkt

---

<sup>22</sup>Ein Beispiel, bei dem reale Resultate *eines* mathematischen Modells aus unterschiedlichen Perspektiven unterschiedlich zu beurteilen sind, ist in Abschnitt 4.1.5 anhand der Fahrradgangschaltung ausgeführt.

Zur Validierung gehört in der Praxis auch die Diskussion des Gültigkeitsbereichs der mathematisierten Größen: Wie gravierend wirken sich Rundungen oder Abweichungen vom theoretischen Ergebnis aus? In unserem Konservendosenbeispiel wirken sich Abweichungen kaum aus, weil die Zielfunktion in der Umgebung des Minimums sehr geringe Steigung hat. Von dem mathematisch minimalen Ergebnis  $r \approx 3,993 \text{ cm}$  kann man um ungefähr  $0,40 \text{ cm}$  abweichen, ohne dass die erforderliche Zylinderoberfläche um mehr als  $1\%$  steigt. Folglich kann der Hersteller durchaus noch andere Kriterien heranziehen, um die Dosenabmessungen festzulegen.

Mit der Thematisierung außermathematischer Bewertungskriterien zur Entscheidung für oder gegen bestimmte Modellierungen kann man in gewissem Rahmen einer Verabsolutierung mathematischer Methoden und damit unkritischer Wissenschaftsgläubigkeit vorbeugen (vgl. JABLONKA, 1996). In den Medien sollen häufig Entscheidungen mit „handfesten“ Zahlen begründet werden. Wenn man jene aber einmal kritisch hinterfragt, bemerkt man nicht selten, dass deren Aussagekraft äußerst begrenzt ist. Insbesondere bei Themen großer sozialer Relevanz ist eine Beschränkung auf mathematische Methoden, die Sinn- und Bewertungsfragen unberücksichtigt lassen, doch zweifelhaft und oft einseitig bzw. subjektiv: z.B. Militäreinsätze, Ökologie und Umwelt, Ökonomie (vgl. Fußnote 6 auf Seite 6).

## 7. Darlegen/Erklären

Diese letzte Phase hat im Gegensatz zu den vorherigen eine überwiegend didaktische Funktion. Im Unterricht sollen Schüler gewählte Modellannahmen und Ergebnisse selbstverständlich in irgendeiner Form dokumentieren bzw. präsentieren. Dabei müssen sie ihre Ergebnisse nachvollziehbar darstellen und im Idealfall auch ihr Vorgehen erläutern. Dieses kommt realistischen Modellierungen jenseits des Unterrichts durchaus nahe: Wird eine mathematische Modellierung von Mathematikern als Dienstleistern geliefert, müssen sie ihre Ergebnisse natürlich dem Auftraggeber in angemessener und verständlicher Weise präsentieren.

Es werden also in dieser Phase des Modellierungskreislaufs vornehmlich kommunikative und argumentative Kompetenzen angesprochen (vgl. Abschnitt 1.4).

BLECHMAN et al. (1984, S. 200ff.) zeigen mehrere Möglichkeiten auf, wie parallel zum Modellierungsprozess und während der Validierungsphase das Modell auf Adäquatheit geprüft werden kann. Zunehmende Bedeutung gewinnen diese Möglichkeiten bei Modellierungen, die man anschließend nicht unmittelbar mit der Realität vergleichen kann, wie es außerhalb des Unterrichts in der Regel der Fall ist. Deutlich wird, dass gerade bei komplexen Modellierungsproblemen die Phase der Validierung hoch anspruchsvoll ist und in der Schule sicherlich kaum alle der folgenden Techniken selbstständig von Schülern zu leisten sind. Gleichwohl sollten Schüler in ihrer Schullaufbahn einige dieser Heuristiken kennen lernen:

## Kontrolle der Dimension

Für diese in den Naturwissenschaften vielfältig genutzte Methode betrachtet man konsequent die Maßeinheiten (Dimensionen) berechneter Größen. Sucht man mit einer Modellierung eine bestimmte Länge und erhält als Einheit der Lösung  $\text{cm}^2$ , kann irgendetwas nicht stimmen.

## Kontrolle der Größenordnung

Bereits für die Grundschule wird gefordert, dass die Schüler Ergebnisse auf Plausibilität prüfen können sollen (vgl. Abschnitt 1.4.2). Ein hilfreiches Mittel zur Prüfung eines Ergebnisses ist ein Überschlagen der erwarteten Größenordnung. Hierbei kann durchaus sehr grob geschätzt werden. Weicht das berechnete Ergebnis dennoch deutlich von dem erwarteten ab, könnten Fehler vorliegen.

Die **Fehleranalyse**, die für Naturwissenschaftler, die mit quantitativen Modellen hantieren, obligatorisch ist, geht quasi rückwärts vor: Auf der Grundlage eines Modells wird abgeschätzt, wie groß relative bzw. absolute Fehler sein werden. Auf diese Weise gewinnt man einerseits Angaben über sinnvolle Rundungen, andererseits aber auch Hinweise auf die Genauigkeit des Modells, was zur Bewertung der gesamten Modellierung im Hinblick auf die Realsituation herangezogen werden kann. Möchte man z.B. die Finanzierung eines Eigenhauses modellieren, wird man in der Regel mit einer Fehlertoleranz von 100 000 € nicht einverstanden sein. In Abschnitt 4.4.5 wird

am Beispiel der Modellierung der Länge eines aufgewickelten Kabels gezeigt, wie eine quantitative Fehleranalyse aussehen kann (vgl. auch HUMENBERGER, 1999).

Die Validierung oder Rückinterpretation sollte im Grunde bei jeder Aufgabe mit außermathematischem Kontext automatisch von den Schülern bedacht werden. Viele Schüler sind mit Ergebnissen wie „Die Strecke ist 1,7385246 m lang.“ einverstanden und machen sich keinerlei Gedanken über sinnvolle Rundungen.<sup>23</sup>

## Kontrolle des Charakters der Abhängigkeiten

Diese Methode lässt sich auf Realmodelle und mathematische Modelle anwenden, indem man die Bedeutung erhaltener Zusammenhänge auf Plausibilität prüft, z.B.: Wenn eine Kerze abbrennt, müsste sie kürzer werden. Ein Modell  $h(t) = h_0 + l \cdot t$  muss bei positivem  $l$  also falsch sein (vgl. Tabelle 1.2 auf Seite 12).

## Kontrolle extremer Situationen und Randbedingungen

Viele Modellierungen lassen sich prüfen, indem man das Verhalten des mathematischen Modells an besonderen Werten überprüft. Eine „Konservendose“ mit riesigem Radius und festem Volumen ist quasi eine unendlich ausgedehnte Kreisscheibe und hat eine entsprechend große Oberfläche. Dieses liefert auch unser mathematisches Modell:  $O(r) = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + \frac{800}{r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \infty$ .

Eine „Konservendose“ mit  $r = 0$  bei konstant gehaltenem Volumen entspricht einem unendlich hohen Stab. Das mathematische Modell liefert auch dafür eine unendlich große Oberfläche:  $O(r) \xrightarrow{r \downarrow 0} \infty$ , die jedoch am Realmodell durchaus nicht mehr unmittelbar einsichtig ist.

---

<sup>23</sup>Ausführlich werden praktikable, aber fundierte Regeln zum sinnvollen Runden dargestellt von Voss (1999).

## **Kontrolle der mathematischen Abgeschlossenheit und Widerspruchsfreiheit**

Ergibt sich bei der Arbeit im mathematischen Modell eine Mehrdeutigkeit, z.B. aufgrund verschiedener möglicher Lösungen, obwohl nur eine erwartet wird, oder zeigen sich Widersprüche zwischen verschiedenen Gleichungen, die sich nicht gleichzeitig erfüllen lassen, kann dieses erneut auf ein unzureichendes Modell hindeuten. Möglicherweise wurden Zusammenhänge bei der Mathematisierung des Realmodells übersehen oder unzulässigerweise unbewusst vorausgesetzt.

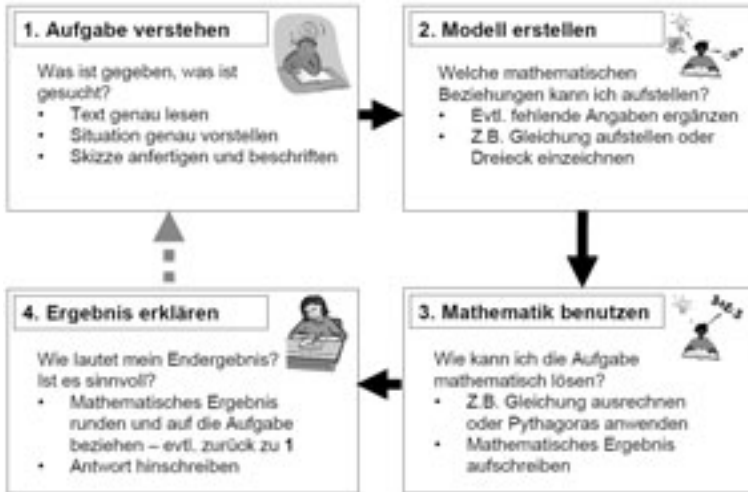
## **Kontrolle der Stabilität des Modells**

Problematisch zu modellieren sind dynamische Systeme, die sensibel auf Veränderungen reagieren (vgl. Abschnitt 1.1). Man möchte erreichen, dass geringfügig geänderte Startbedingungen auch nur geringfügige Auswirkungen auf die Resultate nach sich ziehen. Fast immer wird man mit gerundeten Zahlen arbeiten und auch da wäre es fatal, wenn nur geringfügig geänderte Zahlen deutlich andere Ergebnisse zur Folge hätten. Insofern kann eine Prüfung, wie veränderte Startwerte die Modellierung beeinflussen, möglicherweise unzureichende Modelle identifizieren. In der Schule werden Modelle jedoch in der Regel nicht so komplex sein, dass instabile Systeme entstehen. Auch bei der Modellierung der Konservendose sahen wir, dass vom Optimum geringfügig abweichende Dosenabmessungen kaum Einfluss auf den Bedarf an Oberflächenmaterial haben.

Am Beispiel einer mathematischen Modellierung bei der Computertomographie in Abschnitt 4.3 werden wir sehen, dass geringfügig andere Messwerte sogar zwischen Existenz und Nichtexistenz einer theoretischen Lösung entscheiden können, was besondere Anforderungen an die mathematischen Methoden stellt.

Nachdem nun ausführlich die einzelnen Phasen des Modellierungskreislaufs vorgestellt wurden, sollen vereinfachte Modellierungskreisläufe diskutiert werden, die z.T. von Schülern selbst benutzt werden können, um ihr Vorgehen zu systematisieren und zu reflektieren.

Das DISUM-Projekt umfasst die Schuljahrgänge 8 bis 10 aller Schulstufen.<sup>24</sup> Teilweise wurde Schülern ein aus vier Schritten bestehender „Lösungsplan“ angeboten, der in Abbildung 1.6 dargestellt ist.



**Abb. 1.6:** „Lösungsplan“ für Modellierungsaufgaben  
(Aus: BLUM, 2006, S. 21, Abb. 6, © Verlag Franzbecker, Hildesheim)

Dieser „Lösungsplan“ für Schüler unterscheidet sich von demjenigen für die Lehrer in mehrfacher Hinsicht:

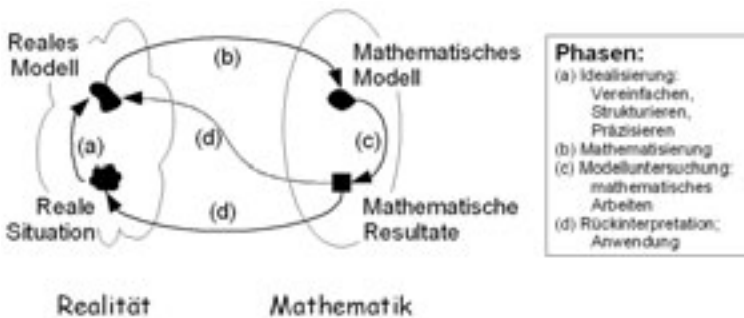
- Es werden statt abstrakter Schlagworte für Schüler verständliche Aufträge verwendet und durch konkrete Fragestellungen ergänzt.
- Aufgabe und Realsituation werden identifiziert, weil Schülern „Realsituationen“ im Unterricht doch überwiegend als „Aufgaben“ begegnen.
- Es gibt lediglich ein „Modell“, das nicht differenziert wird in Situationsmodell, Realmodell sowie mathematisches Modell, weil Schülern deren Unterscheidung häufig Schwierigkeiten bereitet. Bei komplexen Problemen ist eine Abgrenzung oftmals gar nicht trennscharf möglich.
- Interpretation und Validierung werden ebenfalls nicht differenziert.

<sup>24</sup>vgl. Seite 8



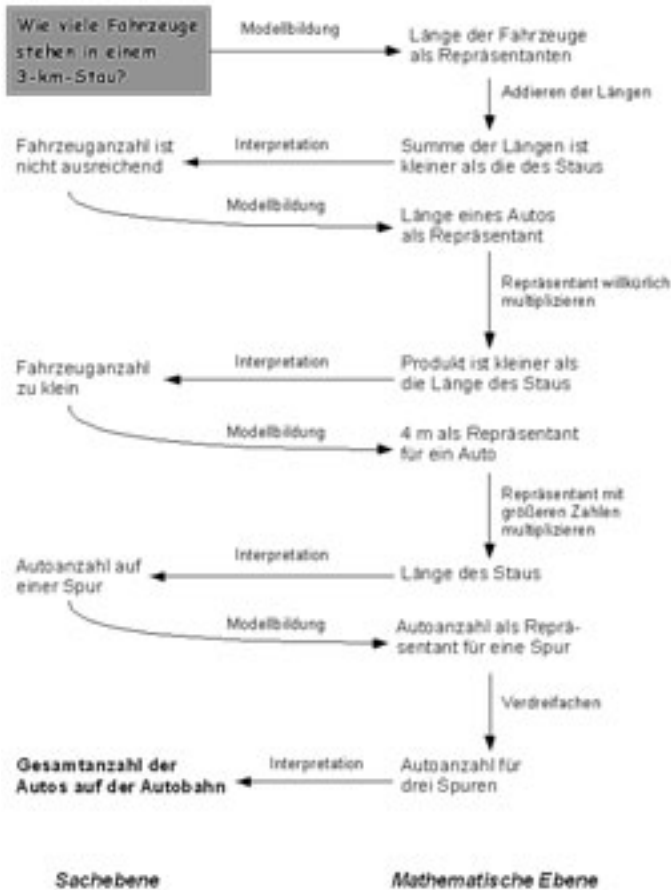
- Der Pfeil von Schritt 4. zum Schritt 1., der ein erneutes Durchlaufen des Modellierungskreislaufs andeutet, ist schwächer gedruckt als andere Pfeile, weil im Unterricht sicherlich nur in besonderen Ausnahmefällen ein zweites Durchlaufen des Modellierungskreislaufs möglich und nötig ist.

Diese didaktische Reduktion des Modellierungskreislaufs deckt sich weitgehend mit den empirischen Ergebnissen von MAASS (2004, S. 289f.). Sie betont ausdrücklich, dass bereits „in Klasse 7/8 eine Vermittlung von Wissen über diesen [Modellierungs-] Prozess mithilfe eines Kreislaufschemas möglich ist.“ Sie empfiehlt ebenfalls, bei der Behandlung von Modellierungen im Mathematikunterricht zunächst auf die Trennung zwischen Realmodell und mathematischem Modell zu verzichten. Anders als im Projekt DISUM plädiert sie allerdings dafür, die Schritte Interpretieren und Validieren zu trennen, um Schülern den Unterschied zwischen den beiden Phasen bewusst zu machen (MAASS, 2004, S. 162). In der Sekundarstufe II ist ein Kreislaufschema durchaus sinnvoll, das zwischen Realmodell und mathematischem Modell trennt, wie z.B. dasjenige in Abbildung 1.7, bei dem im Gegensatz zum differenzierten Kreislauf in Abbildung 1.3 nicht zwischen Realsituation und Situationsmodell unterschieden wird.



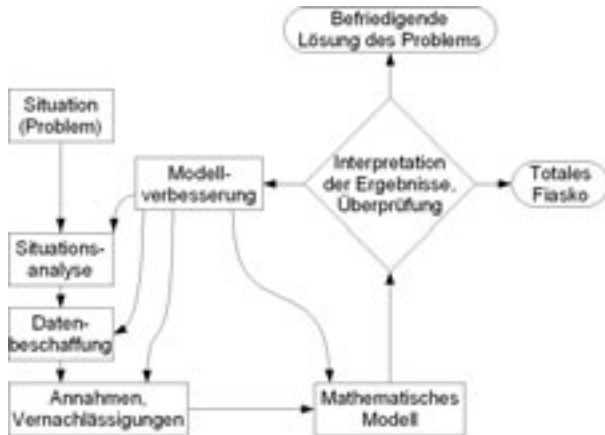
**Abb. 1.7:** Modellierungskreislauf nach BLUM (1985, S. 200)

PETER-KOOP (2003) beschreibt anschaulich, wie Schüler einer 4. Grundschulklasse die Frage „Wie viele Autos stehen in einem 3-km-Stau?“ bearbeiten (vgl. Abschnitt 2.2). Sie analysiert dabei, dass auch Grundschulkinder mit ihrer Denkweise nicht dem Verlauf des Modellierungskreislaufs folgen, sondern die gegebene Realsituation immer wieder in den Blick nehmen und



**Abb. 1.8:** Modellierungsprozess nach PETER-KOOP (2003, S. 127)

Rechenergebnisse interpretieren. Auf diese Weise gestalten die Schüler ihren Lösungsprozess effektiver, weil kaum Zeit für Rechnungen vergeudet wird, die sich später als unzureichend herausstellen würden. PETER-KOOP (2003, S. 127) stellt den Modellierungsprozess des Stau-Problems wie hier in Abbildung 1.8 dar, woraus besonders gut die wechselseitigen Phasen des Interpretierens und Modellbildens hervorgehen. BÜCHTER und LEUDERS (2005, S. 76) sprechen in diesem Zusammenhang von einer „Modellierungsspirale“.



**Abb. 1.9:** Modellierungsprozess nach FISCHER und MALLE (1989, S. 101)

Andererseits ist dieses ganzheitliche Vorgehen der Kinder, die immer wieder zwischen (mathematischem) Modell und Realsituation hin- und herspringen, ein Indiz dafür, dass abstrakte Phasen eines Modellierungskreislaufs, wie er z.B. in Abbildung 1.7 dargestellt ist, kaum für Grundschüler nachvollziehbar in eigenen Modellierungen getrennt und identifiziert werden können. Man kann zwar mit Grundschülern konkrete Lösungswege vergleichen und diskutieren, evtl. auch den Begriff „Modell“ aktiv verwenden, aber wohl nur in seltenen Fällen einen abstrakten Modellierungskreislauf erörtern. Inwieweit derartige Diskussionen mit Schülern der Grundschule möglich sind und welche Kompetenzen tatsächlich erreicht werden können, sind offene Forschungsfragen, die weiterer Untersuchung bedürfen.

Zum Abschluss dieses Abschnitts soll noch eine weitere alternative Darstellung des Modellierungsprozesses betrachtet werden. Sie ist ebenfalls etwas komplexer, da sie die Vernetzung der einzelnen Phasen der Modellierung erneut betont. Während der einzelnen Phasen im oben dargestellten Modellierungsbeispiel rückte immer wieder die Zielsetzung der Modellierung in den Blick, die so aus dem vereinfachten Phasenmodell in Abbildung 1.3 auf Seite 19 nicht hervorgeht. Würde man jedoch nicht während der Bildung des Realmodells, des mathematischen Modells oder bei der mathematischen Arbeit die Fragestellung im „Hinterkopf“ behalten, könnte man in eine völlig

„falsche“ Richtung arbeiten, die sich erst spät als uneffektiv erweisen würde. Das in Abbildung 1.9 dargestellte Schema des Modellierungsprozesses nach FISCHER und MALLE (1989, S. 101) behebt diese Idealisierung; es hat dafür den Nachteil, den zugrunde liegenden *Kreisprozess* kaum deutlich werden zu lassen.

In diesem Schema kann man ferner erkennen, dass es durchaus Ergebnis eines Modellierungsprozesses sein kann, eine angemessene Modellierung auszuschließen („Totales Fiasko“). Zum Beispiel würden exakte Modelle zur Vorhersage menschlichen Verhaltens Politikern wesentlich ruhigere Nächte vor Wahlen bescheren, universelle Modelle des Lernens und Lehrens könnten uns Lehrern sogar die berufliche Daseinsberechtigung entziehen.

## 1.4 Legitimation der Behandlung von Modellierungen im Mathematikunterricht

Zunächst soll aus einer allgemeindidaktischen Perspektive heraus begründet werden, warum die Behandlung mathematischer Modellierungen für einen allgemeinbildenden Mathematikunterricht erforderlich ist, bevor die Bildungsstandards genauer in den Blick genommen werden.

Es mag so scheinen, als würde bei dieser Legitimation des Modellierens für den Mathematikunterricht aus didaktischer und formaler Sicht die Perspektive der Schüler ausgeblendet werden. Jene hängt aber doch beträchtlich von der jeweiligen „**Unterrichtskultur**“ (vgl. HEYMANN, 1996, S. 262ff.) ab, die unter anderem durch folgende Aspekte gekennzeichnet ist:

- Wie wird im Unterricht kommuniziert und miteinander umgegangen (Schüler untereinander und mit dem Lehrer)?
- Gibt es einen konstruktiven Austausch über unterschiedliche Lösungs-ideen?
- Werden Fehler als Lernanlass gesehen?
- Darf man einmal „ins Unreine“ denken und Situationen erkunden?
- Können viele Schüler aktiv werden?
- Stehen Verfahren oder Verständnis im Vordergrund?

Die Schülerperspektive wird deswegen im Folgenden nicht vertieft, weil sie doch sehr vom konkreten Unterricht und den ausgewählten Modellierungskontexten abhängt. Ganz allgemein lassen sich diesbezüglich aber doch zwei wesentliche Argumente finden. Sofern der Unterricht nämlich Anforderungen an zeitgemäßen Mathematikunterricht erfüllt (vgl. z.B. Abschnitt 1.7 und BLUM, 2006, S. 21), gibt es neben den im Folgenden diskutierten allgemeinbildenden und formalen Gründen auch Motive aus Schülersicht, Realitätsbezüge in die Mathematik zu integrieren (BLUM, 2006, S. 11, vgl. aber auch MAASS, 2004, S. 26f.):

- „Realitätsbezüge helfen Schülern beim Mathematiklernen, sie dienen zum besseren Verstehen und Behalten von mathematischen Inhalten und können diese motivieren (,lernpsychologische‘ Gründe).
- Nur mit Realitätsbezügen lässt sich ein adäquates Mathematikbild bei Schülern aufbauen (,kulturbezogene‘ Gründe).“

Insbesondere geht es bei diesen Motiven also um eine Vernetzung von Inhalten innerhalb der Mathematik, aber auch um eine Vernetzung mathematischer Strukturen mit außermathematischen Kontexten. MAASS (2004, S. 155) hat in ihrer Studie zum Modellieren unter anderem Vorstellungen von Schülern über die Relevanz und den Nutzen von Mathematik untersucht. Sie stellte dabei fest, dass viele Schüler im Verlauf der Durchführung der Studie eine deutlich positivere Einstellung zum Nutzen von Mathematik entwickelten, während Mathematik zu Beginn der Studie von vielen als „nutzlos und irrelevant“ angesehen wurde.

Hinter vielen Bereichen des alltäglichen Lebens liegen beträchtliche mathematische Bezüge verborgen (erinnert sei nur an Routenplaner oder kryptographische Methoden im Internet), ohne dass dies dem Nutzer bewusst wird. Man spricht in diesem Zusammenhang nach NISS auch vom „**Relevanzparadoxon**“ (vgl. MAASS, 2004, S. 9). Zur Vermittlung eines angemessenen Bildes von Mathematik gehört auch, dieses Paradoxon wenigstens teilweise aufzudecken, um zu zeigen, welche Rolle Mathematik in unserer modernen Welt spielt.

### 1.4.1 Allgemein- und fachdidaktische Perspektive

HEYMANN (1996) hat ein vieldiskutiertes Konzept veröffentlicht, mit dessen Hilfe ermöglicht werden soll, bestimmte Inhalte oder Fächer auf ihren allgemeinbildenden Charakter hin zu untersuchen. Er identifiziert dazu sieben Aufgaben allgemeinbildender Schulen (vgl. HEYMANN, 1996, S. 47):

- **Lebensvorbereitung**

HEYMANN versteht darunter einerseits die Vermittlung nötiger Qualifikationen für die Bewältigung des Alltags als allgemein gebildeter Mensch und andererseits die Ermöglichung der Entfaltung individueller Fähigkeiten und Kräfte.

- **Stiftung kultureller Kohärenz**

HEYMANN versteht darunter den Erwerb einer „reflektierten kulturellen Identität“ im Hinblick auf die eigene, aber auch auf andere Kulturen; hierzu gehören auch Wertvorstellungen.

- **Weltorientierung**

HEYMANN (1996, S. 79): „Die Schüler sollen einen Überblick haben, die Erscheinungen um sich herum einzuordnen wissen, sie zueinander in Beziehung setzen können, über ihren engeren Erfahrungshorizont hinaus über die Welt ‚Bescheid wissen‘.“

Speziell für den Mathematikunterricht muss der gebildete und mündige Bürger Argumentationen, die auf Zahlen basieren, kritisch verstehen und um die Grenzen der Mathematisierbarkeit wissen (vgl. auch SCHMIDT, 1992).

- **Anleitung zum kritischen Vernunftgebrauch**

HEYMANN versteht darunter, dass Schüler zu kritisch denkenden Menschen erzogen werden, die ihr Potenzial nutzen.

- **Entfaltung von Verantwortungsbereitschaft**

- **Einübung in Verständigung und Kooperation**

- **Stärkung des Schüler-Ichs**

HEYMANN (1996, S. 117) zielt hiermit auf die „Entwicklung von Selbstbewusstsein, Selbstvertrauen, personaler Identität, auf die Fähigkeit, eigene Ziele, Wünsche und Vorstellungen klar zu erkennen und handelnd zu verwirklichen [...]“.“

Ernst gemeinte Modellierungskontexte, die im Mathematikunterricht behandelt werden, sind außermathematisch relevant und können insofern auf das Leben vorbereiten. Dies betrifft jedoch in der Regel höchstens wenige Schüler, denen in ihrem späteren Berufsleben der Kontext erneut begegnet (z.B. die Finanzmathematik). Folglich tragen speziellere Modellierungskontexte kaum inhaltlich zur allgemeinen Lebensvorbereitung im Sinne HEYMANNs bei.

Zur Aufgabe der Stiftung kultureller Kohärenz schlägt HEYMANN (1996, S. 174) sechs **zentrale Ideen** für den Mathematikunterricht vor, die im Rahmen eines Spiralcurriculums die Kohärenz der Mathematik betonen, aber auch Charakteristisches im Vergleich zu anderen Fächern herausstellen sollen:

- Idee der Zahl
- Idee des Messens
- Idee des räumlichen Strukturierens
- Idee des funktionalen Zusammenhangs
- Idee des Algorithmus
- Idee des mathematischen Modellierens

Wegen der deutlichen Parallelen zu inhaltlichen Leitideen der deutschen Bildungsstandards sollen diese nicht weiter konkretisiert werden. Für unser Thema relevant ist jedoch, dass HEYMANN mit seinem Vorschlag dem mathematischen Modellieren als einer von sechs zentralen Ideen eine herausragende Rolle zukommen lässt. Er versteht das mathematische Modellieren ähnlich wie hier in Abschnitt 1.1 beschrieben.

Die Aufgabe der Weltorientierung ist die zweite, die das mathematische Modellieren auf allgemein didaktischer Basis im Sinne HEYMANNs legitimiert. Schüler sollen erkennen, wo Mathematik in unserer Welt verborgen ist, welche Rolle sie inne hat und welchen Grenzen sie unterliegt. Hierin findet sich die wesentliche Legitimation des mathematischen Modellierens für den allgemeinbildenden Mathematikunterricht. HEYMANN schließt auch „unehrliche“ Anwendungen aus (z.B. „eingekleidete Aufgaben“ ohne entsprechende Reflexion; vgl. Seite 4), welche die Rolle der Mathematik eher verschleiern (HEYMANN, 1996, S. 194ff.); darin stimmt die hier vertretene Position mit seiner überein.

Ein zeitgemäßer Mathematikunterricht (vgl. z.B. BLUM, 2006, S. 21 und Abschnitt 1.7) vermag auch die weiteren von HEYMANN identifizierten Aufgaben zu erfüllen. Dies hängt jedoch konkret von der gelebten Unterrichtskultur ab (vgl. Seite 36) und soll insofern hier nicht genauer vertieft werden.

Mit HEYMANNS Konzept haben wir das mathematische Modellieren *allgemeindidaktisch* legitimieren können. Aus *fachdidaktischer* Sicht hat es jedoch ebenfalls seine volle Berechtigung. WINTER (2003) hat dazu drei Grunderfahrungen identifiziert, die ein allgemeinbildender Mathematikunterricht ermöglichen soll; diese Grunderfahrungen sind in der deutschsprachigen Diskussion innerhalb der Mathematikdidaktik weithin akzeptiert und wiedererkennbar in Bildungsstandards sowie Einheitlichen Prüfungsanforderungen für das Abitur formuliert (vgl. z.B. KMK, 2003, S. 6 und KMK, 2002, S. 3):

- (G1)** „Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,
- (G2)** mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,
- (G3)** in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten (heuristische Fähigkeiten), die über die Mathematik hinaus gehen, zu erwerben.“

Auch in dieser Auflistung wesentlicher Grunderfahrungen nimmt das mathematische Modellieren implizit einen großen Stellenwert ein. WINTER (2003, S. 7) konkretisiert nämlich die Erfahrung (G1) weiter: „Interessant und wirklich unentbehrlich für Allgemeinbildung sind Anwendungen der Mathematik erst, wenn in Beispielen aus dem gelebten Leben erfahren wird, wie mathematische Modellbildung funktioniert und welche Art von *Aufklärung* durch sie zustande kommen kann, und Aufklärung ist Bürgerrecht und Bürgerpflicht (und wird durchaus nicht in den Schoß geworfen).“

Als Beispiele für Erscheinungen aus der Lebenswelt, führt WINTER unter anderem elementarmathematische Fragen der Altersvorsorge und des



Versicherungs- und Steuerwesens wie auch Zinsberechnungen bei Geldgeschäften an („politisch-aufklärerische Arithmetik“).

Es ist deutlich geworden, dass auf der Grundlage der aktuellen didaktischen Diskussion die mathematische Modellierung im Mathematikunterricht einen hohen Stellenwert einnehmen sollte. Aus den drei Grunderfahrungen WINTERS lässt sich aber ebenso gut entnehmen, dass keinesfalls jeder Begriff oder jedes Verfahren im Mathematikunterricht in einen Realitätsbezug eingebettet werden sollte. Die Anwendungsmöglichkeit ist *ein* Aspekt mathematischer Bildung. Sie sollte daher nur bewusst und sinnvoll in ein Curriculum integriert im Mathematikunterricht eingesetzt werden, dann aber richtig und „authentisch“ (vgl. Abschnitt 1.7). Für einen ausgewogenen Mathematikunterricht sind z.B. innermathematische Überlegungen und intelligente Übungsphasen ebenso wichtig.

Die zitierten didaktischen Analysen wurden aufgegriffen bei der Konzeption der Bildungsstandards für die unterschiedlichen Schulstufen, welche die Förderung von Modellierungskompetenzen im Mathematikunterricht nunmehr auch formal verlangen. Das relativ schlechte Abschneiden deutscher Schüler bei internationalen Vergleichsstudien (TIMSS, PISA) führte zu durchgreifenden Veränderungen in der deutschen Schullandschaft. Unter anderem wurden Bildungsstandards beschlossen. Intendiert ist damit ein Übergang von der bisher üblichen *Inputorientierung* (Lehrer: „Wir haben ... behandelt.“) zu einer *Outputorientierung* (Lehrer: „Meine Schüler wissen/können ...“). „Bildungsstandards greifen allgemeine Bildungsziele auf und benennen Kompetenzen als Regelstandards, die Schülerinnen und Schüler bis zu einer bestimmten Jahrgangsstufe an zentralen Inhalten erworben haben sollen. Sie konzentrieren sich auf Kernbereiche eines Faches“ (KMK, 2003, S. 3). Neben den zu fördernden Kompetenzen enthalten die Bildungsstandards jeweils einige die Intentionen veranschaulichende Beispielaufgaben. Die Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss (Jahrgangsstufe 10) (KMK, 2003) wurden im Dezember 2003 von der Kultusministerkonferenz beschlossen. Mit den Beschlüssen haben sich die Länder verpflichtet, die Bildungsstandards für den Mittleren Schulabschluss mit Beginn des Schuljahres 2004/05 als Grundlage der Anforderungen für den Mittleren Schulabschluss zu übernehmen (vgl. KMK, 2003, S. 4). Die Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangs-

stufe 4) (KMK, 2004a) sowie die Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss (Jahrgangsstufe 9) (KMK, 2004b) wurden im Oktober 2004 von der Kultusministerkonferenz beschlossen und sollten mit Beginn des Schuljahres 2005/06 von den Bundesländern als Grundlagen der fachspezifischen Anforderungen für den Unterricht im Primarbereich bzw. für den Hauptschulabschluss übernommen werden (vgl. KMK, 2004a, S. 3 bzw. KMK, 2004b, S. 3).

Die Bildungsstandards unterscheiden drei Anforderungsbereiche der allgemeinen mathematischen Kompetenzen, um deutlich zu machen, dass alle Kompetenzen auf unterschiedlichen Niveaus zu fördern sind (KMK, 2003, S. 15).<sup>25</sup>

**„Anforderungsbereich I: Reproduzieren.** Dieses Niveau umfasst die Wiedergabe und direkte Anwendung von grundlegenden Begriffen, Sätzen und Verfahren in einem abgegrenzten Gebiet und einem wiederholenden Zusammenhang.

**Anforderungsbereich II: Zusammenhänge herstellen.** Dieses Niveau umfasst das Bearbeiten bekannter Sachverhalte, indem Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten verknüpft werden, die in der Auseinandersetzung mit Mathematik auf verschiedenen Gebieten erworben wurden.

**Anforderungsbereich III: Verallgemeinern und reflektieren.** Dieses Niveau umfasst das Bearbeiten komplexer Gegebenheiten u.a. mit dem Ziel, zu eigenen Problemformulierungen, Lösungen, Begründungen, Folgerungen, Interpretationen oder Wertungen zu gelangen.“

Bei dem folgenden Überblick über anzustrebende Kompetenzen bzgl. des mathematischen Modellierens wird für alle drei Schulstufen immer wieder der Bezug zum Modellierungskreislauf deutlich (vgl. Abschnitt 1.3).

In Niedersachsen werden die Bildungsstandards für ganz Deutschland durch sogenannte **Kerncurricula** konkretisiert. Wo die Bildungsstandards recht allgemein zu erreichende Kompetenzen identifizieren, werden diese im

---

<sup>25</sup>In den Bildungsstandards für den Primarbereich sind die Anforderungsbereiche sinngemäß ebenfalls ausgeführt (vgl. KMK, 2004a, S. 13).

Folgenden am niedersächsischen Beispiel konkretisiert. Zugleich erfolgt damit eine didaktische Reduktion, weil die niedersächsischen Kerncurricula Kompetenzen jeweils für Doppeljahrgänge (1/2, 3/4, 5/6, 7/8, 9/10) festlegen.

### 1.4.2 Modellieren in den Bildungsstandards für den Primarbereich

Die Bildungsstandards für den Primarbereich unterscheiden fünf **allgemeine mathematische Kompetenzen**:<sup>26</sup>

- Problemlösen
- Kommunizieren
- Argumentieren
- Modellieren

Dies wird wie folgt konkretisiert:

- „Sachtexten und anderen Darstellungen der Lebenswirklichkeit die relevanten Informationen entnehmen,
- Sachprobleme in die Sprache der Mathematik übersetzen, innermathematisch lösen und diese Lösungen auf die Ausgangssituation beziehen,
- zu Termen, Gleichungen und bildlichen Darstellungen Sachaufgaben formulieren.“

- Darstellen

Bezüglich der inhaltlichen Kompetenzen stellen die Bildungsstandards **mathematische Leitideen** heraus, die „für den gesamten Mathematikunterricht [...] von fundamentaler Bedeutung sind“ und ein mathematisches Curriculum spiralförmig durchziehen (vgl. das Konzept von HEYMANN in Abschnitt 1.4.1):

---

<sup>26</sup>Im Hinblick auf die Ziele dieses Kapitels wird in der Aufzählung nur der Bereich der Modellierungskompetenzen vollständig wiedergegeben.

**Zahlen und Operationen** – im Hinblick auf die mathematische Modellierung gehört dazu insbesondere das Rechnen in Kontexten:

- „Sachaufgaben lösen und dabei die Beziehungen zwischen der Sache und den einzelnen Lösungsschritten beschreiben,
- das Ergebnis auf Plausibilität prüfen,
- bei Sachaufgaben entscheiden, ob eine Überschlagsrechnung ausreicht oder ein genaues Ergebnis nötig ist,
- Sachaufgaben systematisch variieren.“

**Raum und Form** – im Hinblick auf die mathematische Modellierung gehört dazu insbesondere:

- „geometrische Figuren erkennen, benennen und darstellen“ (u.a. Modelle von Körpern und ebenen Figuren herstellen und untersuchen)
- „Flächen- und Rauminhalte vergleichen und messen“ (durch Vergleichen mit Einheitsflächen bzw. Einheitswürfeln)

**Muster und Strukturen** – im Hinblick auf die mathematische Modellierung gehört dazu insbesondere das Erkennen, Beschreiben und Darstellen funktionaler Beziehungen:

- „funktionale Beziehungen in Sachsituationen erkennen, sprachlich beschreiben (z.B. Menge – Preis) und entsprechende Aufgaben lösen,
- funktionale Beziehungen in Tabellen darstellen und untersuchen,
- einfache Sachaufgaben zur Proportionalität lösen.“

**Größen und Messen** – im Hinblick auf die mathematische Modellierung gehört dazu insbesondere:

- „Größenvorstellungen besitzen
  - Standardeinheiten aus den Bereichen Geldwerte, Längen, Zeitspannen, Gewichte und Rauminhalte kennen,
  - Größen vergleichen, messen und schätzen,
  - Repräsentanten für Standardeinheiten kennen, die im Alltag wichtig sind, [...]

- im Alltag gebräuchliche einfache Bruchzahlen im Zusammenhang mit Größen kennen und verstehen.“
- „mit Größen in Sachsituationen umgehen
  - mit geeigneten Einheiten und unterschiedlichen Messgeräten sachgerecht messen,
  - wichtige Bezugsgrößen aus der Erfahrungswelt zum Lösen von Sachproblemen heranziehen,
  - in Sachsituationen angemessen mit Näherungswerten rechnen, dabei Größen begründet schätzen,
  - Sachaufgaben mit Größen lösen.“

**Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit** – im Hinblick auf die mathematische Modellierung gehört dazu insbesondere:

- „Daten erfassen und darstellen
  - in Beobachtungen, Untersuchungen und einfachen Experimenten Daten sammeln, strukturieren und in Tabellen, Schaubildern und Diagrammen darstellen,
  - aus Tabellen, Schaubildern und Diagrammen Informationen entnehmen.“
- „Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen in Zufallsexperimenten vergleichen
  - Grundbegriffe kennen (z.B. sicher, unmöglich, wahrscheinlich),
  - Gewinnchancen bei einfachen Zufallsexperimenten (z.B. bei Würfelspielen) einschätzen.“

Obwohl innerhalb der Grundschule nur vergleichbar wenige mathematische Werkzeuge zur Modellierung von Realsituationen zur Verfügung stehen, sind die anzustrebenden Kompetenzen doch bereits umfangreich. Alle Modellierungen müssen sich mit elementaren arithmetischen Operationen, ikonischen Veranschaulichungen (vgl. die Beispiele zur Modellierung von Turnierplänen in Abschnitt 2.5) oder einfachen geometrischen Figuren bewältigen lassen. Viele Modellierungsprozesse in der Grundschule erfordern daher ein situationsgerechtes Abschätzen von Größen (vgl. Seite 110ff.). Mehrfach wird erwähnt, dass Schüler Plausibilitätsbetrachtungen durchführen und begründen können sollen. Hierfür eignen sich besonders sogenannte FERMI-Aufgaben,

Erwartete Kompetenzen am Ende des Schuljahrgangs 2	Erwartete Kompetenzen am Ende des Schuljahrgangs 4
<p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>■ gewinnen Daten durch Zählen und Messen.</li> <li>■ spielen Rechengeschichten, stellen sie zeichnerisch dar und schreiben Aufgaben dazu.</li> <li>■ beschreiben Sachprobleme in der Sprache der Mathematik.</li> <li>■ formulieren Rechengeschichten zu einfachen Termen.</li> </ul>	<p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>■ messen und schätzen Repräsentanten von Größen und überschlagen Rechnungen um Daten zu gewinnen.</li> <li>■ entnehmen Sachtexten und anderen Darstellungen der Lebenswirklichkeit die relevanten Informationen und tragen diese weitgehend selbstständig aus geeigneten Medien der Bibliothek zusammen.</li> <li>■ beschreiben Sachprobleme in der Sprache der Mathematik, lösen sie innermathematisch und beziehen die Ergebnisse auf die Ausgangssituation.</li> <li>■ formulieren Sachaufgaben zu Termen, Gleichungen und bildlichen Darstellungen.</li> </ul>

**Tab. 1.3:** Kompetenzen zum mathematischen Modellieren in der Grundschule laut niedersächsischem Kerncurriculum (NIEDERSÄCHSISCHES KULTUSMINISTERIUM, 2006a, S. 17)

die im Abschnitt 3 explizit als Modellierungskontexte für den Mathematikunterricht ab der Grundschule vorgestellt werden.

Der Kompetenzbereich „Modellieren“ der Bildungsstandards für die Primarstufe umfasst **alle wesentlichen Schritte des Modellierungskreislaufs** (vgl. Abschnitt 1.3), wenn eine Reflexion über diesen Kreislauf sicherlich auch nur eingeschränkt möglich sein wird. Dennoch berichtet PETER-KOOP (2003, S. 128) davon, dass sogar Viertklässler bei der Diskussion unterschiedlicher Lösungswege eines FERMI-Problems („Wie viele Autos stehen in einem 3-km-Stau?“; vgl. Abschnitt 2.2) zunehmend den „Lösungsprozess“ ins Zentrum ihrer Diskussion stellten.

Die Bildungsstandards für den Primarbereich beschreiben erwartete Kompetenzen im Vergleich zu denen für weiterführende Schulen ausführlich. Dennoch ist in Tabelle 1.3 der Kompetenzbereich „Modellieren“ anhand des niedersächsischen Kerncurriculums (NIEDERSÄCHSISCHES KULTUSMINISTERIUM, 2006a, S. 17) für den Mathematikunterricht an Grundschulen konkre-

tisiert, um aufzuzeigen, wie die Teilkompetenzen in Niedersachsen für die beiden Doppeljahrgänge didaktisch reduziert werden.<sup>27</sup>

### 1.4.3 Modellieren in den Bildungsstandards für den Abschluss nach der Sekundarstufe I

Wie schon die Bildungsstandards für den Primarbereich unterscheiden die Bildungsstandards für Abschlüsse nach der Sekundarstufe I zwischen allgemeinen und inhaltlichen Kompetenzen. Insgesamt werden die schon an der Grundschule zu fördernden **allgemeinen Kompetenzen** auf höherem Abstraktionsniveau gefordert, es kommt jedoch ein weiterer Kompetenzbereich hinzu (K5) (siehe KMK, 2003, S. 9ff.):<sup>28</sup>

**(K1)** Mathematisch argumentieren

**(K2)** Probleme mathematisch lösen

**(K3)** Mathematisch modellieren

„Dazu gehört:

- den Bereich oder die Situation, die modelliert werden soll, in mathematische Begriffe, Strukturen und Relationen übersetzen,
- in dem jeweiligen mathematischen Modell arbeiten,
- Ergebnisse in dem entsprechenden Bereich oder der entsprechenden Situation interpretieren und prüfen.“

**(K4)** Mathematische Darstellungen verwenden

**(K5)** Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen

---

<sup>27</sup>Die niedersächsischen Kerncurricula sind frei im Internet verfügbar:  
<http://www.cuvo.nibis.de>.

<sup>28</sup>Erneut wird hier nur der Kompetenzbereich K3 („Mathematisch modellieren“) vollständig wiedergegeben.

**(K6) Kommunizieren**

Formal gelten die hier angeführten Kompetenzen für den Mittleren Schulabschluss nach Klasse 10. Die Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss (Jahrgangsstufe 9; KMK, 2004b) unterscheiden sich hiervon jedoch nicht bezüglich der allgemeinen Kompetenzen. Für die inhaltlichen Kompetenzen stellen die Bildungsstandards erneut **mathematische Leitideen** heraus, die ein mathematisches Curriculum spiralförmig durchziehen (vgl. das Konzept von HEYMANN in Abschnitt 1.4.1). Bei den inhaltlichen Kompetenzen gibt es einige Unterschiede zwischen den Bildungsstandards für den Mittleren Schulabschluss und denen für den Hauptschulabschluss, die vor allem das Abstraktionsniveau sowie im Jahrgang 10 behandelte Themen betreffen; insbesondere gilt dies für die „Leitidee Funktionaler Zusammenhang“ (L4) (vgl. KMK, 2004b):<sup>29</sup>

**(L1) Leitidee Zahl** – im Hinblick auf die mathematische Modellierung gehört dazu insbesondere, dass die Schülerinnen und Schüler

- Zahlen der Situation angemessen darstellen, unter anderem in Zehnerpotenzschreibweise.
- zur Kontrolle Überschlagsrechnungen und andere Verfahren nutzen.
- Rechenergebnisse entsprechend dem Sachverhalt sinnvoll runden.
- Ergebnisse in Sachsituationen *unter Einbeziehung einer kritischen Einschätzung des gewählten Modells und seiner Bearbeitung* prüfen und interpretieren.

**(L2) Leitidee Messen** – im Hinblick auf die mathematische Modellierung gehört dazu insbesondere, dass die Schülerinnen und Schüler

- Einheiten und Größen situationsgerecht auswählen (insbesondere für Zeit, Masse, Geld, Länge, Fläche, Volumen und Winkel).
- Größen mithilfe von Vorstellungen über geeignete Repräsentanten schätzen.

---

<sup>29</sup>Kursiv hervorgehoben sind dabei Teilkompetenzen, die so in den Bildungsstandards für den Hauptschulabschluss (Jahrgangsstufe 9) *nicht* enthalten sind.



- in ihrer Umwelt gezielt Messungen vornehmen, Maßangaben aus Quellenmaterial entnehmen, damit Berechnungen durchführen und die Ergebnisse sowie den gewählten Weg in Bezug auf die Sachsituation bewerten.

**(L3) Leitidee Raum und Form** – im Hinblick auf die mathematische Modellierung gehört dazu insbesondere, dass die Schülerinnen und Schüler

- geometrische *Strukturen* in der Umwelt erkennen und beschreiben.
- *Eigenschaften und Beziehungen geometrischer Objekte (wie Symmetrie, Kongruenz, Ähnlichkeit, Lagebeziehungen) beschreiben und begründen und diese im Rahmen des Problemlösens zur Analyse von Sachzusammenhängen nutzen.*

**(L4) Leitidee Funktionaler Zusammenhang** – im Hinblick auf die mathematische Modellierung gehört dazu insbesondere, dass die Schülerinnen und Schüler

- Funktionen als Mittel zur Beschreibung quantitativer Zusammenhänge nutzen.
- funktionale Zusammenhänge erkennen und beschreiben und diese in sprachlicher, tabellarischer oder graphischer Form sowie gegebenenfalls als Term darstellen.
- unterschiedliche Darstellungen funktionaler Zusammenhänge (wie lineare, proportionale und antiproportionale) *analysieren, interpretieren* und vergleichen.
- *realitätsnahe Probleme im Zusammenhang mit linearen, proportionalen und antiproportionalen Zuordnungen lösen.*
- *insbesondere lineare und quadratische Funktionen sowie Exponentialfunktionen bei der Beschreibung und Bearbeitung von Problemen anwenden.*
- *die Sinusfunktion zur Beschreibung von periodischen Vorgängen verwenden.*
- *zu vorgegebenen Funktionen Sachzusammenhänge angeben, die mithilfe dieser Funktionen beschrieben werden können.*

**(L5) Leitidee Daten und Zufall** – im Hinblick auf die mathematische Modellierung gehört dazu insbesondere, dass die Schülerinnen und Schüler

- graphische Darstellungen und Tabellen von statistischen Erhebungen auswerten.
- *statistische Erhebungen planen.*
- systematisch Daten sammeln, sie in Tabellen erfassen und graphisch darstellen, auch unter Verwendung geeigneter Hilfsmittel (wie Software).
- Daten unter Verwendung von Kenngrößen interpretieren.
- *Argumente, die auf einer Datenanalyse basieren, reflektieren und bewerten.*
- Zufallserscheinungen in alltäglichen Situationen beschreiben.

Weil am Ende der Sekundarstufe I wesentlich breitere mathematische Kenntnisse vorhanden sind, können allgemeine mathematische Kompetenzen auf höherem abstrakterem Niveau gefordert werden, als es für die Grundschule der Fall ist. Insbesondere erkennt man deutlich, dass mit dem Kompetenzbereich (K3) „Mathematisch modellieren“ im Grunde der gesamte Modellierungskreislauf abgedeckt wird (vgl. Abschnitt 1.3), wenn hier auch eine Reflexion über den Modellierungsprozess nicht ausdrücklich vorgesehen ist. Allerdings wird diese Reflexion bei Kompetenzen innerhalb der „Leitidee Zahl“ (L1) sowie bei dem im Folgenden dargestellten Modellieren auf dem Anforderungsbereich III zumindest angedeutet.

Die Bildungsstandards für den Mittleren Schulabschluss konkretisieren die bereits auf Seite 42 allgemein beschriebenen **Anforderungsbereiche für das mathematische Modellieren** wie folgt (KMK, 2003, S. 16):

**Anforderungsbereich I: Reproduzieren.** „Dazu gehört

- vertraute und direkt erkennbare Modelle nutzen
- einfachen Erscheinungen aus der Erfahrungswelt mathematische Objekte zuordnen
- Resultate am Kontext überprüfen“

**Anforderungsbereich II: Zusammenhänge herstellen.** „Dazu gehört

- Modellierungen, die mehrere Schritte erfordern, vornehmen
- Ergebnisse einer Modellierung interpretieren und an der Ausgangssituation prüfen
- einem mathematischen Modell passende Situationen zuordnen“

**Anforderungsbereich III: Verallgemeinern und Reflektieren.** „Dazu gehört

- komplexe oder unvertraute Situationen modellieren
- verwendete mathematische Modelle (wie Formeln, Gleichungen, Darstellungen von Zuordnungen, Zeichnungen, strukturierte Darstellungen, Ablaufpläne) reflektieren und kritisch beurteilen“

Wie schon im vorigen Abschnitt geschehen, wird in Abbildung 1.4 anhand des niedersächsischen Kerncurriculums für die Realschule konkretisiert, wie am Beispiel Niedersachsens die Kompetenzen zum mathematischen Modellieren für die Doppeljahrgänge 5/6, 7/8 sowie 9/10 didaktisch reduziert werden können (NIEDERSÄCHSISCHES KULTUSMINISTERIUM, 2006c, S. 14f.).<sup>30</sup> Das niedersächsische Kerncurriculum für die Hauptschule unterscheidet sich bei der allgemeinen Kompetenz „Modellieren“ quasi nicht von dem für die Realschule.

An niedersächsischen Gymnasien (vgl. NIEDERSÄCHSISCHES KULTUSMINISTERIUM, 2006b, S. 17f.) sollen Schüler darüber hinaus in der Lage sein, zusätzliche mathematische Werkzeuge zur Ermittlung von Lösungen in mathematischen Modellen zu verwenden und insgesamt über Modellierungen zu reflektieren. Am Ende der Klasse 8 sollen sie Annahmen für Modellierungen „reflektieren“ und ggf. „variieren“ können. Am Ende von Klasse 10 sollen sie ferner verschiedene Modelle im Hinblick auf die Realsituation „analysieren und bewerten“ können.

### 1.4.4 Modellieren in den Einheitlichen Prüfungsanforderungen für das Abitur

In den vorangehenden Abschnitten wurde die Rolle mathematischer Modellierungen laut den Bildungsstandards für die Grundschule sowie für die Sekundarstufe I dargestellt. Der Vollständigkeit halber soll noch kurz auf ihren Stellenwert in der Sekundarstufe II des Gymnasiums eingegangen werden,

---

<sup>30</sup>Die niedersächsischen Kerncurricula sind frei im Internet verfügbar:  
<http://www.cuvo.nibis.de>.

Ende Schuljahrgang 6	zusätzlich Ende Schuljahrgang 8	zusätzlich Ende Schuljahrgang 10
Die Schülerinnen und Schüler <ul style="list-style-type: none"> <li>■ entnehmen Informationen aus vertrauten Alltagssituationen und einfachen Texten</li> <li>■ formulieren naheliegende Fragen zu vertrauten Situationen</li> </ul>	Die Schülerinnen und Schüler <ul style="list-style-type: none"> <li>■ formulieren Fragen zu unterschiedlichen Aspekten von Situationen</li> </ul>	Die Schülerinnen und Schüler <ul style="list-style-type: none"> <li>■ entnehmen Informationen aus komplexen, nicht vertrauten Situationen</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>■ strukturieren Daten</li> <li>■ wählen naheliegende Modelle</li> <li>■ nennen zu bekannten mathematischen Modellen Alltagssituationen</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ strukturieren Zusammenhänge</li> <li>■ wählen Modelle und begründen ihre Wahl</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ nähern sich der Realsituation durch Verknüpfung mehrerer Modelle genauer an</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>■ lösen Aufgaben unter Anwendung mathematischer Modelle</li> </ul>		<ul style="list-style-type: none"> <li>■ nutzen zur Lösung einer komplexen Aufgabe mehrere Modelle und verknüpfen sie</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>■ prüfen die Plausibilität der Lösung</li> <li>■ wählen ggf. ein anderes Modell</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ interpretieren das Ergebnis in Bezug auf die Realsituation</li> <li>■ beschreiben die Grenzen mathematischer Modelle an Beispielen</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ vergleichen ihr Modell mit möglichen anderen Modellen</li> </ul>

**Tab. 1.4:** Kompetenzen zum mathematischen Modellieren in der Realschule laut niedersächsischem Kerncurriculum (NIEDERSÄCHSISCHES KULTUSMINISTERIUM, 2006c, S. 14f.)

und zwar anhand der Einheitlichen Prüfungsanforderungen für das Abitur im Fach Mathematik (KMK, 2002).

„Ziel des Lernens und Arbeitens [in der gymnasialen Oberstufe] ist die Allgemeine Hochschulreife, die zum Studium an einer Hochschule berechtigt, aber auch den Weg in eine berufliche Ausbildung ermöglicht.“ Insbesondere soll eine vertiefte allgemeine und wissenschaftspropädeutische Bildung ver-

mittelt werden. Der Unterricht ist „fachbezogen, fachübergreifend und fächerverbindend angelegt“. Er strebt zunehmend mehr Selbstständigkeit und Eigenverantwortung der Schüler an. (vgl. KMK, 2000, S. 3ff.).

Die *fächerübergreifende* Vereinbarung der Kultusministerkonferenz hebt ausdrücklich hervor, dass für die Ausprägung der Studierfähigkeit drei Kompetenzbereiche von herausgehobener Bedeutung sind (KMK, 2000, S. 4f.). Dies sind zum einen die sprachliche Ausdrucksfähigkeit und die Fähigkeit, komplexe fremdsprachliche Sachtexte verständlich zu lesen, zum anderen der sichere Umgang mit mathematischen Symbolen und Modellen:

„Angestrebt wird die Fähigkeit, Gegenstandsbereiche und Theoriebildungen, die einer Mathematisierung zugänglich sind und in denen Problemlösungen einer Mathematisierung bedürfen, mit Hilfe geeigneter Modelle aus unterschiedlichen mathematischen Gebieten zu erschließen und darzustellen und die Probleme mit entsprechenden Verfahren und logischen Ableitungen zu lösen.“

Die Kultusministerkonferenz misst dem mathematischen Modellieren somit einen besonderen Stellenwert für die Allgemeine Hochschulreife bei. Dieses spiegelt sich in den Einheitlichen Prüfungsanforderungen für das Abitur im Fach Mathematik ebenfalls wider (KMK, 2002, S. 4): Die Anforderungen für die Abiturprüfung verlangen als einen notwendigen Kompetenzbereich das mathematische Modellieren zur Lösung realitätsnaher Probleme und schlüsseln diesen wie folgt auf:

- „Beschreiben der Ausgangssituation und der Modellannahme
- Mathematisieren
- Lösen in dem gewählten mathematischen Modell
- Interpretieren der Ergebnisse im Ausgangskontext
- kritisches Reflektieren der Ergebnisse und der Vorgehensweise“

Sehr deutlich treten hier die verschiedenen Phasen des Modellierungskreislaufs hervor (vgl. Abschnitt 1.3). Im Gegensatz zu den Bildungsstandards bis zur Sekundarstufe I wird jedoch erstmals explizit die Fähigkeit der Reflexion der Vorgehensweise, und damit des Modellierungskreislaufs als Ganzes, verlangt.

Wie auch schon die Bildungsstandards identifizieren die Einheitlichen Prüfungsanforderungen für das Abitur inhaltliche **Leitideen** als fundamentale mathematische Konzepte. Sie stimmen überwiegend mit den entsprechenden inhaltlichen Leitideen der verschiedenen Bildungsstandards überein:

- Leitidee Funktionaler Zusammenhang
- Leitidee Grenzprozesse/Approximation
- Leitidee Modellieren
- Leitidee Messen
- Leitidee Algorithmus
- Leitidee Räumliches Strukturieren/Koordinatisieren
- Leitidee Zufall

Grundkursfach	Leistungskursfach
Untersuchung realitätsnaher Probleme mithilfe von Funktionen	
Extremalprobleme	
Wachstumsprozesse	
Anpassung von Funktionen an vorgegebene Bedingungen	Zusammenhang zwischen diskreten und stetigen Modellierungen
Anwendung von Matrizen bei mehrstufigen Prozessen [...]	auch Fixpunktproblem
ein Verfahren der beurteilenden Statistik	
Simulation von Zufallsexperimenten	

**Tab. 1.5:** „Leitidee Modellieren“ laut Einheitlichen Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung – Mathematik (KMK, 2002, S. 7)

In Tabelle 1.5 wird die Leitidee Modellieren inhaltlich konkretisiert, um Unterschiede zwischen Grund- und Leistungskursen deutlich zu machen.

## 1.5 Nachdenken über Modellierungsprozesse – Metakognition

Nachdem die Förderung von Modellierungskompetenzen auf breiter Basis legitimiert ist, gelangen wir nun zum konkreteren Umgehen mit ihnen: Wie

kann man einen Unterricht gestalten, um Modellierungskompetenzen nachhaltig zu fördern?

Obwohl erst die Einheitlichen Prüfungsanforderungen für das Abitur im Fach Mathematik (vgl. Abschnitt 1.4.4) eine kritische Reflexion von Modellierungsprozessen als Ganzes vorsehen, ist diese doch auch in unteren Jahrgangsstufen für einen bewussten und nachhaltigen Kompetenzzuwachs anzustreben. Dabei wird über das eigene und das Vorgehen anderer nachgedacht und somit Denken reflektiert. Diese **Metakognition** ist eine „Grundqualifikation zur Durchführung von Lernprozessen, eine Schlüsselkompetenz für Lernen“ (KAISER und KAISER, 2006, S. 188) und folglich von besonderer Bedeutung für Unterricht. Laut SJUTS (2003, S. 18) versteht man unter Metakognition das „Denken über das eigene Denken“ sowie die „Steuerung des eigenen Denkens“.

Zur Metakognition gehört unter anderem die „vor, während und nach einer Aufgabenbearbeitung liegende Tätigkeit des Planens, Überwachens und Prüfens, bei denen eine Person sich gewissermaßen selbst über die Schulter blickt“ („Prozedurale Metakognition“, SJUTS, 2003, S. 19). Um sich aber diese Prozesse bewusst zu machen und mit anderen darüber sprechen zu können, bedarf es eines entsprechenden Vokabulars („mentale Repräsentation“, vgl. SJUTS, 2002). Hilfreich erscheint dazu, mit Schülern einen angemessen didaktisch reduzierten Modellierungskreislauf (siehe Abschnitt 1.3) zu erörtern bzw. gemeinsam zu erarbeiten. Einen solchen Modellierungskreislauf kann man später z.B. auf einer Folie parat haben und zur Verortung der Modellierungsschritte im Kreislaufmodell, aber auch zur Vernetzung, immer mal wieder projizieren, wenn *über* einen Modellierungsprozess gesprochen wird.

Zur Metakognition gehört aber auch ein „diagnostisches Wissen, das jemand über das eigene Denken und das anderer Personen besitzt“, das „bewertende Wissen über Aufgaben und Anforderungen sowie das strategische Wissen über Lösungswege und Erfolgsaussichten“ („Deklarative Metakognition“, SJUTS, 2003, S. 18). Während Schüler in der Grundschule schon wegen der geringeren „Kapazität“ des Kurzzeitgedächtnisses kaum in der Lage sind, einen gesamten Problemlösungsablauf zu *planen* (vgl. FRANKE, 2003a, S. 83),

sind sie durchaus fähig, verschiedene *konkrete* Lösungswege miteinander zu vergleichen (vgl. PETER-KOOP, 2003, S. 128).<sup>31</sup>

PETER-KOOP (2003, S. 126f.) analysiert ferner, dass die Grundschulkin-der in der von ihr untersuchten Klasse bei der Bearbeitung von FERMI-Problemen nicht linear dem Modellierungskreislauf folgten, sondern „multi-zyklisch“ auch Zwischenergebnisse immer wieder im Hinblick auf die Realsituation interpretierten und bei Diskrepanzen die Mathematisierung anpassten. Insofern lassen sich schon bei Grundschulkindern Ansätze metakognitiver Kompetenzen nachweisen (vgl. die Darstellung des entsprechenden Modellierungsprozesses auf Seite 34 sowie für Drittklässler auch WINKEL, 2006).

Nun wird sich aber metakognitive Kompetenz beim Modellieren ebenso wie im sonstigen (Mathematik-)Unterricht nicht von selbst einstellen. „Voraussetzung dafür, dass jemand Metakognition betreibt, sind Bereitschaft und Gespür. Es müssen somit Motivation und Willenskraft für den Einsatz metakognitiver Strategien vorliegen. [...] Ebenso ist ein Gespür für das Leistungsvermögen eigener kognitiver Aktivitäten unerlässlich“ („Motivationale Metakognition“, SJUTS, 2003, S. 19). Diese motivationale Komponente kann nur durch den Lehrer angeleitet und angeregt werden, indem geeignete Aufgaben gestellt werden, die metakognitive Überlegungen verlangen, verschiedene Lösungen und Lösungsstrategien aktiv verglichen und bewertet werden und indem eine förderliche Unterrichtskultur (vgl. Seite 36) gepflegt wird. „Über die Analyse von Kommunikationsprozessen – [...] von Gesagtem, Gemeintem und Gehörtem – erfolgt ein Nachdenken über Mathematik und Mathematik-Verstehen“ (SJUTS, 2003, S. 23).<sup>32</sup>

Besonders deutlich zeigt sich die Effektivität metakognitiver Kompetenzen beim Lösen von Problemen: Im Gegensatz zu Anfängern nutzen Experten in hohem Maße metakognitive Kompetenzen. „Während Anfänger häufig planlos experimentieren und nach einiger Zeit ohne Erfolg abbrechen, überwachen Experten ihre Lösungsstrategien und kommen mit gleichem oder auch gerin-

---

<sup>31</sup>Einen Überblick über Erkenntnisse der Entwicklungspsychologie zum problemlösenden Denken gibt FUNKE (2003, S. 205ff.).

<sup>32</sup>MARXER (2005) stellt konkrete Aufgaben vor, die von Schülern verlangen, Lösungen sowie Lösungswege fertig gelöster Aufgaben zu validieren.



gerem Fachwissen zu einer Lösung“ (MAASS, 2004, S. 34f.; vgl. auch KAISER und KAISER, 2006, Kap. 2.1).

TANNER und JONES (1993, S. 229) belegen, dass Kenntnisse allein nicht ausreichen, um erfolgreich zu modellieren: Schüler müssen den Modellierungsprozess reflektieren, um prozessbezogene Kompetenzen zu erwerben. MAASS (2004, S. 36) fasst einige Maßnahmen zusammen, wie man als Lehrer im Unterricht metakognitive Kompetenzen bei mathematischen Modellierungen anregen kann:

1. „Vermittlung von Metawissen über Modellierungsprozesse, also von deklarativen Metakognitionen
2. Diskussionen unterschiedlicher Vorstellungen von Schülerinnen und Schülern über Modellierungsprozesse im Unterricht
3. Produktiver Umgang mit Fehlern von Lernenden sowie Fehleranalyse
4. Aufforderung zum Planen, Überwachen und Prüfen des eigenen Vorgehens – auch anhand der Kreislaufdarstellung des Modellierungsprozesses
5. Vergleich und Diskussion unterschiedlicher Lösungen und Reflexion über mögliche Gründe
6. Aufzeigen von positiven Beispielen der Selbstkontrolle beim Modellieren“
7. Anregung zur Selbstüberwachung („Monitoring“) durch den Lehrer, indem er fragt, warum und mit welchem Ziel Schüler etwas tun

Die Einführung der Bildungsstandards wurde als notwendig erachtet, weil empirische Studien gezeigt hatten, dass landläufiger Unterricht sich in Deutschland als „inputorientiert“ charakterisieren lassen konnte: Es kam darauf an, was im Unterricht „dran“ gewesen ist. Ziel muss aber sein, dass die Schüler etwas „können“. Unterricht stellt dann das aktive Verstehen der Begriffe, Verfahren und Strategien in den Vordergrund. Metakognition ist dafür ein „konstitutives Merkmal“ (SJUTS, 2003, S. 23). Ein Unterricht, in dem alle Teilnehmer (Schüler wie Lehrer) in ihrem Denken ernst genommen werden, zeichnet sich durch „Diskursivität“ aus:

„Der diskursive Unterricht nimmt die Unterschiedlichkeit der Lernenden ernst; er setzt sich intensiv mit ihren mentalen Konstruktionen und Modellen auseinander. Ein solcher Unterricht verdient auch die Bezeichnung konstruktivistisch, da er auf die

individuellen kognitiven Aktivitäten abhebt. Die Lernenden haben ihre Wissenskonstrukte offen zu legen und sie einer Bewährung auszusetzen, gegebenenfalls zu differenzieren und zu modifizieren“ (SJUTS, 2003, S. 23).

TANNER und JONES (1993) zeigen in ihrer Untersuchung, an der Schüler zwischen 11 und 16 Jahren teilnahmen, dass metakognitive Kompetenzen über Modellierungsprozesse signifikant gefördert werden können, wenn der Unterricht darauf angelegt ist, das eigene Vorgehen und dasjenige der Mitschüler wirklich zu verstehen und zu bewerten. In der Untersuchung sollten Schüler in Verbindung mit Modellierungsaufgaben grundsätzlich die Strategien beschreiben, die sie eingesetzt haben, um die Probleme zu lösen, begründen, wie sie die Strategien ausgewählt haben und ferner ihr Vorgehen evaluieren („Strategiekonferenz“; vgl. Abschnitt 1.5.3).

Neben dieser grundsätzlichen Diskursivität des Unterrichts, welche die gelebte Unterrichtskultur (vgl. Seite 36), also den Umgang miteinander, prägt, gibt es methodische Maßnahmen, die im Unterricht besonders geeignet sind, metakognitive Kompetenzen zu fördern. Zum Abschluss dieses Unterkapitels sollen exemplarisch methodische Anregungen aufgezeigt werden.

### **1.5.1 Ich-Du-Wir-Prinzip zur kognitiven Aktivierung aller Schüler**

Es ist grundsätzlich sinnvoll, Aufgaben zu stellen, die nicht *einen* bestimmten Lösungsweg vorschreiben, es sei denn, dass bestimmte Rechenfertigkeiten geübt werden sollen (vgl. Abschnitt 1.7). Wenn mit unterschiedlichen Lösungsansätzen, Strategien oder Ergebnissen zu rechnen ist, bietet sich oftmals eine Arbeit in Kleingruppen an. LEISS et al. (2007, S. 226) betonen die sogenannte „Ko-Konstruktion“ von Problemlösungen als ein Merkmal für die „Effizienz der ‚neuen Aufgabenkultur‘“. Sie führen weiter aus, „dass das Ziel zwar die individuelle Aufgabenlösung durch jeden Schüler ist, jedoch durch den Austausch von Lösungsideen wechselseitige Unterstützungen bei der Konstruktion der Lösungen stattfinden („Ko-Konstruktion“) und so die Qualität der Aufgabenbearbeitung gesteigert wird“. Insbesondere lassen sich bei solchen kooperativen Unterrichtsformen wegen eines kognitiven Austausches zwischen den Schülern komplexere Aufgaben eher bewältigen. Häufi-

ger hat man bei Kleingruppenarbeiten jedoch das Problem, dass sich ein leistungsstarker Schüler hervortut und die anderen Schüler der Kleingruppe höchstens noch „hinterherdenken“ können. Als eine Methode, die dieses Problem vermeidet, hat sich das „Ich-Du-Wir-Prinzip“ (auch: „Think-Pair-Share“) bewährt (vgl. BARZEL, 2006 und BARZEL et al., 2007, S. 118ff.). Für diese Methode werden ggf. zunächst Kleingruppen gebildet und die Sitzordnung entsprechend angepasst.<sup>33</sup> Das Verfahren läuft dann so ab, dass nach der Aufgabenstellung und evtl. einer ersten Klärung von Unklarheiten alle Schüler *still für sich* („Ich“) nach ersten Ideen, Lösungsansätzen oder klärungsbedürftigen Fragen suchen und ihre Ideen möglichst schriftlich festhalten; für diese Phase wird zuvor eine bestimmte Zeit, z.B. drei Minuten, festgelegt. Mit diesem einfachen methodischen Trick sind wirklich *alle* Schüler aufgefordert, aktiv zu werden und sich mit dem Problem auseinanderzusetzen. Sollte sich später doch nicht vermeiden lassen, dass ein Schüler die kognitive Führung in der Kleingruppe übernimmt, haben doch die anderen Schüler eher eine Chance, den Gedanken zu folgen, weil sie sich bereits eigenständig mit der Problemstellung auseinandersetzen mussten.<sup>34</sup>

Anschließend werden die Gedanken wieder für eine vorher definierte kurze Zeitspanne *mit einem Partner* („Du“) in der Kleingruppe ausgetauscht und besprochen.<sup>35</sup> Bezüglich der Förderung metakognitiver Kompetenzen steht in diesem Diskurs also das Mitteilen *eigener* und das Verstehen *anderer* Gedanken im Vordergrund. Wurden die Gruppen anfangs mit einem Kartenspiel als Zufallsgruppen gebildet, kann man sogar auch die Teil-Partnergruppen per Zufall festlegen: In der Gruppe der Könige tun sich jeweils die roten und die schwarzen Könige zusammen. Auf diese Weise arbeiten die Schü-

---

<sup>33</sup>Gruppen kann man z.B. per Los (etwa mit Quartett- oder Skat-Spielkarten: alle Könige gehören zu einer Gruppe usw.) bilden.

<sup>34</sup>Mithilfe weiterer „Tricks“ kann man die Dominanz einzelner Schüler gegenüber einer aktiven Beteiligung aller Gruppenteilnehmer noch weiter zurückdrängen: Man kann Rollen für die Gruppenteilnehmer festlegen: etwa einen Zeitwächter, einen Protokollanten, einen Präsentator und einen Gesprächsleiter, der darauf achtet, dass jeder angemessen (und nicht mehr) zu Wort kommt. Nach und nach sollten die Rollen in unterschiedlichen Gruppenarbeitsphasen getauscht werden, sodass jeder jede Rolle kennen lernt.

<sup>35</sup>Bei ungeraden Schülerzahlen muss man selbstverständlich flexibel reagieren.

ler bei wiederholtem Einsatz der Methode mit unterschiedlichen Mitschülern zusammen und soziale sowie kommunikative Kompetenzen werden gefördert.

In der dritten Phase werden die Ideen der Partner *in der gesamten Kleingruppe* („Wir“) ausgetauscht und diskutiert. In der Kleingruppe geht es dann an die gemeinsame Lösung der Aufgabe, für die nun ein breites Fundament vorbereitet wurde, das alle Gruppenteilnehmer umfasst. Für die anschließende Präsentation der Kleingruppenergebnisse haben sich Plakate oder projizierbare Folien bewährt, weil jene schnell präsentiert und verglichen werden können und ggf. auch in der Folgestunde parat sind, falls die Diskussion der verschiedenen Lösungswege nicht mehr in der Stunde gelingen sollte (vgl. zum Einsatz von Folien durch Schüler in Unterricht oder Hausaufgabe auch FELSCHER und WEBER, 2007).

Auf diese Weise werden metakognitive Kompetenzen sowohl innerhalb der Kleingruppen als auch bei einer späteren Diskussion im Plenum gefördert, wenn es darum geht, unterschiedliche Lösungsstrategien zu verstehen bzw. offen zu legen und zu begründen.

Eine Variation dieser Methode, bei der die Ergebnisse nicht im Plenum präsentiert werden, sondern jeder Schüler die Ergebnisse seiner Gruppe („Expertengruppe“) in einer neuen Gruppe („Stammgruppe“) als Experte vorstellen muss, ist das sogenannte „**Gruppenpuzzle**“ (auch: „Jigsaw-Methode“). Dabei ist zu gewährleisten, dass in jeder Stammgruppe mindestens ein Experte aus jeder Expertengruppe sitzt. Weil jeder Schüler für die Vermittlung von Ergebnissen verantwortlich ist, führt diese Methode zu einer intensiven Auseinandersetzung mit Problemen und deren Lösung. Hilfreich ist ein Arbeitsauftrag für die zweite Runde, durch den die Synthese oder Reflexion der verschiedenen Ergebnisse angeregt wird.<sup>36</sup>

---

<sup>36</sup>Vertiefende Hinweise zu dieser Methode findet man bei BARZEL et al. (2007, S. 96ff.).

### 1.5.2 Lerntagebücher zum Reflektieren des eigenen Lernprozesses

Eine andere Methode, die ebenfalls alle Schüler zur gedanklichen Auseinandersetzung mit dem Lerngegenstand anregt, ist der Einsatz von Lerntagebüchern. Die schweizer Didaktiker GALLIN und RUF haben mit ihren zahlreichen Veröffentlichungen für die Verbreitung der Lerntagebücher im Mathematikunterricht gesorgt (z.B. GALLIN und RUF, 2003). Das „Lerntagebuch“ als Oberbegriff für vergleichbare Varianten („Reisetagebuch“, „Logbuch“, „Forschungsheft“, vgl. HUSSMANN, 2003b oder BARZEL et al., 2007, S. 130f.) betont den Prozesscharakter der Mathematik. Anhand motivierender Problemstellungen/Aufgaben (vgl. Abschnitt 1.7) setzen sich Schüler ihren Fähigkeiten entsprechend mit einem Lerngegenstand auseinander und dokumentieren dabei ihren *subjektiven* Lernweg. Dabei müssen sie über genuin metakognitive Kompetenzen verfügen, weil sie sich verschiedene Aspekte der Probleme und ihre individuelle Auseinandersetzung damit bewusst machen müssen:

- subjektive Präzisierung der Problemstellung, Veranschaulichungen der Problemstellung
- Unklarheiten
- Planungsüberlegungen zur Problembearbeitung/-lösung
- nachvollziehbare Beschreibung des Vorgehens mitsamt Motiven und Irrwegen
- eigene Fehler und wie sie behoben werden
- offene Fragen während oder nach der Bearbeitung
- Reflexion über eingesetzte Strategien
- subjektive „Merksätze“: „Was habe ich gelernt?“, „Was möchte ich mir merken?“
- für leistungsstärkere Schüler (als Binnendifferenzierung): „Wie kann ich das Problem mathematisch weiterentwickeln?“
- Selbstevaluation des eigenen Lernprozesses

In seiner Idealform stellt das Lerntagebuch eine Möglichkeit des individuellen Dialogs zwischen Schüler und Lehrer über die Sache bereit: Schüler notieren – evtl. in einer gesonderten Spalte – subjektive Kommentare, Unverstandenes oder konkrete Fragen, die der Lehrer dann gezielt beantworten kann.

Dazu sollten die Lerntagebücher regelmäßig eingesammelt werden. Weil auf diese Weise wirklich individuelle Förderung stattfindet, ist das Lerntagebuch ein ideales, aber anspruchsvolles Werkzeug, das in hohem Maße kommunikative Kompetenzen entwickelt und fördert, weil subjektiv Mathematik kommuniziert wird. GALLIN und RUF (2003) berichten überzeugend vom Einsatz der Methode in der Grundschule wie auch in der Sekundarstufe I. Sie setzten das Lerntagebuch allerdings parallel zum gesamten Unterricht ein, wodurch dessen Einsatz für den Lehrer sehr zeitaufwendig wird. Denkbar ist durchaus, das Lerntagebuch nur in bestimmten Phasen des Unterrichts führen zu lassen, z.B. parallel zu einer etwas umfangreicheren Modellierung. Natürlich können die Schüler nicht von selbst ein Lerntagebuch führen; das Reflektieren des eigenen Denkens muss geübt werden („Metakognition“; siehe oben in diesem Unterkapitel). Aber auch für den Lehrer ist der Einsatz von Lerntagebüchern gewöhnungsbedürftig, weil geeignete Probleme gestellt werden müssen (vgl. Abschnitt 1.7): Die Aufgaben sollten offen sowie authentisch sein und zudem Motivierungspotenzial besitzen, damit die Schüler sich wirklich darauf einlassen und überhaupt die Möglichkeit haben, sich auf eigenen Wegen mit einer Sache auseinanderzusetzen.

HUSSMANN (2003b, S. 83) schlägt als eine reduzierte Variante des Lerntagebuchs ein **Forschungsheft** vor, das nicht mehr den gesamten Lernweg mit allen Irrwegen dokumentieren und reflektieren soll, sondern lediglich Ankerpunkte des Lernprozesses strukturiert darstellt:

- „**Aha-Erlebnisse**, an denen dem Lernenden etwas klar wurde,
- **typische Beispiele**, an denen ein Begriff oder eine Lösungstechnik besonders deutlich werden,
- **Wissenslücken**, die sich in der Problembearbeitung zeigten und auf ‚träges Wissen‘ aus den vergangenen Jahren hinweisen,
- **typische Fehler**,
- **offene Fragen**,
- **Definitionen, Sätze und Beweise.**“

Für derartige Forschungsvorhaben identifiziert HUSSMANN „intentionale Probleme“ als geeignete Lernauslöser (vgl. Abschnitt 1.7.2).

### 1.5.3 Strategiekonferenzen

Die beiden in den vorangehenden Abschnitten vorgestellten Methoden sind teilweise anspruchsvoll und Schüler müssen entsprechend vorbereitet werden: Als eine Form diskursiven Unterrichts, bei dem Denkprozesse und Argumentationen der Schüler im Zentrum stehen, haben in Grundschulen sogenannte „Strategiekonferenzen“ oder „Rechenkonferenzen“ Verbreitung gefunden (vgl. DRÖGE et al., 2003c, S. 240ff. und PETER-KOOP, 2000). Darunter verstehen DRÖGE et al. (2003c, S. 240) „eine Gruppenaktivität, bei der es um eine argumentationshaltige Interaktion zwischen Schülern geht“, um Schüler auf ihrem Weg zu unterstützen, „vom planlosen Problemlöseverhalten zu systematischen Vorgehensweisen zu kommen“.

Je nach Komplexität der Probleme und eingesetzten Sozialformen für deren Bearbeitung kann man Strategiekonferenzen im Klassenverband oder nach und nach auch in Kleingruppen einsetzen. Im Zentrum der Strategiekonferenzen steht der Austausch und das Verständnis von Lösungswegen. Die Methode ist also besonders dann sinnvoll, wenn Schüler entlang unterschiedlicher Lösungswege die gleiche Problemstellung bearbeitet haben. Findet die Strategiekonferenz mit der gesamten Klasse statt, werden in der Regel die Kleingruppen ihre Lernprodukte vorstellen. Findet die Strategiekonferenz selbst in Kleingruppen statt, stellen die einzelnen Schüler ihre vorherigen Lernprodukte vor. Während dieser Vorstellung sind die übrigen Schüler unbedingt aufmerksam. Erst anschließend werden im Gruppengespräch „die Lernwege besprochen und Vor- und Nachteile der Vorgehensweisen abgewogen“ (DRÖGE et al., 2003c, S. 240). Die Durchführung dieser Methode ist für Schüler anspruchsvoll. DRÖGE et al. (2003c, S. 240) schlagen daher mögliche Fragen als Diskussionsgrundlage vor, die zunächst durch eine zielgerichtete Moderation durch den Lehrer, nach und nach aber auch durch einen Schüler als „Konferenzleiter“ zugrunde gelegt werden können. Bei diesen Verfahrensschritten identifiziert man unschwer Problemlöseheurismen (vgl. BRUDER, 2002):

1. „Bestandsaufnahme: Welche Angaben in der Aufgabe sind wichtig?
2. Versprachlichung des Lösungswegs: Beschreibt euren Lösungsweg.
3. Schwierigkeitsanalyse: Was war besonders schwierig?

4. Beurteilung von Lösungsgedanken: Welches war der Einfall, der euch besonders weit gebracht hat?
5. Veranschaulichung des Lösungswegs: Habt ihr euren Weg in irgendeiner Form veranschaulicht?
6. Transfer: Habt ihr schon einmal eine ähnliche Aufgabe gelöst?
7. Reflexion der Lösung: Wie habt ihr eure Lösung kontrolliert?“

Ferner scheint bei der Diskussion alternativer Lösungswege sinnvoll:

8. Synopse: Wie unterscheiden sich die Lösungswege?
9. Evaluation: Welche Vor- und Nachteile haben die verschiedenen Lösungswege?

Erfahrungen mit dieser Methode im Mathematikunterricht der Grundschule sind positiv (PETER-KOOP, 2000, S. 34):

„Die Gelegenheit, die (verschiedenen) Lösungen kritisch nach eigenen Maßstäben, über die man sich immer wieder verständigen musste, zu evaluieren, wurde von den Kindern sehr ernst genommen, wobei jede Gruppe aus beiden Perspektiven – die der Begutachter und die der Begutachteten – argumentieren musste. Dies führte dazu, dass berechtigte Kritik behutsam vorgetragen wurde und gelungene Lösungen und Lösungsansätze mit viel Lob bedacht wurden.“

## 1.6 Mit welchen Fehlern beim mathematischen Modellieren sollte man rechnen?

In Abschnitt 1.3 wurde bereits darauf hingewiesen, dass der umfangreiche Modellierungskreislauf aus dem DISUM-Projekt gerade diejenigen Phasen identifiziert, bei denen Schülerfehler auftreten können. Wir blicken jetzt etwas genauer auf die einzelnen Phasen, um zu lokalisieren, an welchen Stellen man mit Fehlern der Schüler rechnen muss und wie man diese evtl. durch geeignete Maßnahmen vermeiden kann (vgl. MAASS, 2004, S. 160 und ausführlich für Sachaufgaben in der Grundschule FRANKE, 2003a, S. 96ff.). Je



nach Modellierungskontext und Komplexität gewählter Modelle ist natürlich mit unterschiedlichen Schwierigkeiten zu rechnen. Zunächst muss man sich bewusst sein, dass Modellierungsvorhaben in der Regel komplexer sind als innermathematische Problemaufgaben, weil zusätzlich zu mathematischen auch andere, insbesondere fachübergreifende Kompetenzen, eingebracht werden müssen.

Andererseits ist der Modellierungskreislauf gerade so ausgelegt, dass er die konstruktive Rolle von Fehlern bei Problemlösungsprozessen herausstellt. Mängel sollen bei der Validierung möglichst aufgedeckt werden, um bei einer erneuten Modellierung der gleichen Situation vermieden zu werden (zweites Durchlaufen des Modellierungskreislaufs).

## 1. Konstruieren/Verstehen

Hier ist die gegebene Aufgabe zu verstehen, die in Textform, durch eine Abbildung, mündlich oder mithilfe authentischer Materialien gegeben sein kann.

- Wenn die Aufgabe anspruchsvoll für die Schüler formuliert ist, z.B. aufgrund zu langer Sätze, unklarer Fremdworte, sind Schwierigkeiten denkbar, die der mathematischen Modellierung, die an dieser Stelle auf ganz andere Kompetenzen abzielt, im Wege stehen. Schüler mit Sprachschwierigkeiten sind dabei besonders betroffen (z.B. mangelndes Hörverständnis, Textverständnis). Hilfen können redundante Visualisierungen sein, ein Nacherzählen/Nachspielen der Situation oder eine Klärung des Kontexts im Plenum.<sup>37</sup>

Irreführend sind in diesem Zusammenhang auch Signalwörter, die auf bestimmte Rechenoperationen hindeuten, z.B.: „*Im Winterschlussverkauf hat Firma Hackenspiel 340 Strumpfpaaire verkauft. Das sind 65 Strumpfpaaire weniger als vor einem Jahr.*“ (RADATZ, 1983, S. 212 nach FRANKE,

---

<sup>37</sup>Viele weitere Bearbeitungshilfen für die Grundschule findet man bei FRANKE (2003a, S. 84ff.) sowie DRÖGE et al. (2003b, S. 255ff.).

2003a, S. 104). Viele Schüler assoziieren „weniger“ mit einer Subtraktionsaufgabe und rechnen  $340 - 65$ .

- Ist Schülern ein Text zu unübersichtlich oder sind sie nicht in der Lage, relevante Informationen zu entnehmen (z.B. bei der Modellierung im Kontext der Computertomographie in Abschnitt 4.3), kann man sie anregen, Wesentliches zu markieren, evtl. sogar mit unterschiedlichen Farben.
- Schüler versuchen in der Regel, Textaufgaben der Reihe nach, also in Leserichtung, in ein Situationsmodell zu übertragen. Gerade bei komplexeren Problemkontexten, die nur ganzheitlich zu verstehen sind, kommt es so möglicherweise zu Fehlern, z.B. „Bei den Bundesjugendspielen zählen Uta und Meike und Silke ihre weitesten Würfe zusammen und kommen zusammen auf 80 m. Silke hat 29 m weit geworfen. Das sind 3 m weiter als Meikes Wurf und auch mehr als Utas weitester Wurf. Wie weit hat Meike, wie weit hat Uta geworfen?“ (KLÖCKNER, 1996 nach FRANKE, 2003a, S. 110) Die Aufgabe wurde aufgrund der Komplexität der Situation, aber auch wegen mehrerer Signalwörter, die falsche Rechenoperationen induzierten, nur von 54 % der untersuchten Viertklässler richtig gelöst.

Dass Schüler Situationsmodelle systematisch parallel zu Aufgabenstellungen konstruieren, zeigt sich auch in höheren Klassen, wie COHORS-FRESENBORG und KAUNE (2005) bei Schülern des 13. Jahrgangs nachweisen.

- Geht die Modellierung von einem Bild aus, kann es passieren, dass Schüler nicht alle wesentlichen Aspekte entnehmen können (z.B. bei FERMI-Problemen; vgl. Abbildung 3.2 auf Seite 151). Grundsätzlich müssen Schüler zwar auch solche Kompetenzen erwerben. Soll dennoch die Schwierigkeit reduziert werden, ist es möglich, erforderliche Angaben zusätzlich hervorzuheben.
- Teilweise treten in dieser ersten Phase Probleme auf, weil Schüler mit der Sachstruktur nicht hinreichend vertraut sind; wer z.B. nicht weiß, was Zinsen sind, wird Probleme mit der Modellierung von Geldanlagen haben.
- Bei der Konstruktion eines Situationsmodells, das erst mit zunehmendem Alter bewusster ablaufen kann, kommt es häufig vor, dass Schüler einen gegebenen Kontext anders auslegen, als er gemeint war, oder Rahmenbe-

dingungen voraussetzen, die nicht explizit gegeben sind. In solchen Fällen modellieren sie ihr eigenes Situationsmodell.

- Basieren zugrunde liegende Begriffe auf komplexen Zusammenhängen, können zudem Schwierigkeiten auftreten (z.B. bei Modellierungen mit Bezug zur Mechanik, wenn der Unterschied zwischen Geschwindigkeit und Beschleunigung nicht hinreichend klar ist; vgl. auch die verwendeten Begriffe bei der Modellierung des Verkehrsflusses in Abschnitt 5.1).
- Besonders in der Grundschule kann es vorkommen, dass Kinder sich nicht lange genug auf eine Aufgabe konzentrieren, sondern gleich „drauf los“ rechnen. In solchen Fällen kann es helfen, bewusst Phasen zu unterscheiden. KRETSCHMANN und DOBRINDT (2003) haben Schüler in einer 4. Grundschulklasse Kapitänsaufgaben (s.u.) bearbeiten lassen und dabei Modellierungskompetenzen mithilfe von Signalkarten gezielt und erfolgreich fördern können. Die entsprechenden Signalkarten wurden gemeinsam mit den Schülern formuliert und entsprechen im Groben den einzelnen Phasen unseres Modellierungskreislaufs, sind jedoch noch kleinschrittiger formuliert.

## 2. Vereinfachen/Strukturieren

Ausgehend vom Situationsmodell ist ein zweckmäßiges Realmodell zu konstruieren. Viele dabei mögliche Fehler können bei einem zweiten Durchlaufen des Modellierungskreislaufs durchaus selbstständig von Schülern aufgedeckt und behoben werden.

- Bei ersten Modellierungsvorhaben mit Schülern – insbesondere auch bei FERMİ-Problemen (vgl. Abschnitt 3) – kommt es häufig vor, dass die Schüler sich nicht „trauen“ zu idealisieren oder grob abzuschätzen, wenn sie es aus dem bisherigen Mathematikunterricht gewohnt sind, dass Ergebnisse immer möglichst „genau“ sein müssen.
- Bei komplexeren Modellierungen (z.B. „Bestimme die Oberfläche eines Menschen.“) kommt es vor, dass Schüler ein Realmodell aufstellen, das entscheidende Aspekte der Realsituation vernachlässigt.
- Bei der Konstruktion eines Realmodells müssen bestimmte idealisierende Annahmen darüber getroffen werden, welche Aspekte vernachlässigt werden können. Hierbei kommt es vor, dass Schüler nicht zutreffende An-

nahmen voraussetzen. Häufig findet sich dieser Fehler bei stochastischen Modellierungen oder Simulationen, wenn bestimmte Wahrscheinlichkeitsverteilungen von Zufallsvariablen angenommen werden, die nicht richtig sind. Auf diese Weise wird dann die reale Situation verzerrt abgebildet.

- Bei überbestimmten Aufgaben, in denen mehr Daten gegeben sind, als benötigt werden, müssen die relevanten Daten identifiziert werden. Viele Schüler versuchen dann verzweifelt, alle verfügbaren Daten bei der Modellierung zu berücksichtigen, was zu Fehlern führen kann. Um dies zu vermeiden, kann man dazu auffordern, zunächst explizit zu überlegen, welche gegebenen Daten wirklich relevant sind („*Unterstreicht wichtige Worte und Zahlenangaben!*“).

Beispiele sind auch die berühmten unsinnigen „Kapitänsaufgaben“ (BARUK, 1989, S. 29): Z.B. wird die Aufgabe „*Auf einem Schiff befinden sich 26 Schafe und 10 Ziegen. Wie alt ist der Kapitän?*“ von vielen Schülern der Grundschule mit „36 Jahre“ beantwortet (vgl. FRANKE, 2003a, S. 98f.).

- Sind die Schüler nicht gewohnt, dass innerhalb eines Themengebiets auch länger zurückliegende Inhalte aufgegriffen werden, fallen ihnen möglicherweise geeignete, aber zurückliegende „Modelle“ nicht ein.
- Gerade bei Kindern mit Rechenschwierigkeiten kommt es häufig vor, dass Grundvorstellungen von Zahlen und Rechenoperationen nicht voll ausgebildet sind. Für die Bearbeitung von Sachaufgaben oder bei mathematischen Modellierungen ist ein tragfähiges Zahlkonzept aber unverzichtbar. GERSTER (2003) analysiert nötige Zahlkonzepte für die elementare Arithmetik sowie mögliche Maßnahmen zur Förderung.

Grundvorstellungen von Zahlen bereiten jedoch auch in höheren Jahrgangsstufen noch Probleme, z.B. mit Aufgaben wie „ $\frac{7}{2}$  Liter Apfelsaft sollen in 0,7-Liter-Flaschen abgefüllt werden. Wie viele Flaschen benötigt man?“

### 3. Mathematisieren

Das Realmodell muss mathematisiert werden. Dabei können vielfältige Fehler auftreten, die aber erneut im Zuge der weiteren Modellierung durchaus selbstständig behoben werden können:

- Manchmal werden Situationen zunächst unangemessen modelliert. Treffen Schüler z.B. im Kontext proportionaler Zuordnungen unvorbereitet auf die folgende Aufgabe, wenden nicht wenige den Dreisatz an und antworten mit 32 Minuten bzw. 8 Minuten, was prinzipiell unangemessen ist: *Zwei Pianisten spielen George Gershwins „Rhapsody in Blue“ von 1924 in 16 Minuten. Wie lange brauchen vier Pianisten?*

Einige physikalische Zusammenhänge (z.B. die Gravitation oder die Coulombkraft) lassen sich durch eine Formel  $F \sim \frac{1}{r^2}$  modellieren. Eine naheliegende Modellierung wäre aber evtl.  $F \sim \frac{1}{r}$ , weil sie „einfacher“ ist. Dieses letztlich unangemessene Modell könnte beim Vergleich mit realen Daten aufgedeckt werden und als modifiziertes Modell in einem weiteren Modellierungsprozess berücksichtigt werden. Aber auch der Vergleich mit den experimentellen Daten *beweist* noch nicht den Exponenten 2; wer sagt denn, dass nicht  $F \sim \frac{1}{r^{2,00047}}$  gilt? – Um zwischen den nur geringfügig voneinander abweichenden Modellen eine Entscheidung zu treffen, müsste man bereits einen beträchtlichen experimentellen Aufwand betreiben. Von den Anforderungen an die Modellierung hängt allerdings ab, ob eine solche Genauigkeit überhaupt erforderlich ist.

- Es werden falsche/unpassende Formeln verwendet (z.B. falsche Oberflächen-/Volumenformel für den Zylinder bei der Modellierung der Konservendose).
- Bei Textaufgaben (insbesondere in der Grundschule) müssen die Schüler die gegebene Situation mit mathematischen Operationen (insbesondere arithmetischen Operationen) assoziieren. Hierbei können Übersetzungsfehler vorkommen (z.B. werden Minus und Geteilt verwechselt – bei beiden Operationen wird das Ergebnis (in  $\mathbb{N}$ ) kleiner). Dass solche Übersetzungen auch für erfahrene Rechner durchaus schnell unübersichtlich werden können, zeigt die eingekleidete Aufgabe von LIETZMANN: „*1  $\frac{1}{2}$  Hühner legen in 1  $\frac{1}{2}$  Tagen 1  $\frac{1}{2}$  Eier. Wie viel Eier legen dann 4 Hühner in 9 Tagen?*“

## 4. Mathematisch arbeiten

In dieser rein innermathematischen Phase treten je nach erforderlichen mathematischen Kompetenzen vielfältigste Fehler auf. Bezüglich des Einsatzes

von Technologien können weitere Schwierigkeiten auftreten, wenn Schüler Befehle nicht kennen bzw. deren Semantik oder Syntax nicht hinreichend geläufig sind.

Neben solchen Fehlern können aber gerade bei der Verwendung von numerischen Algorithmen auch Probleme auftreten, wenn sich z.B. Rundungsfehler „aufschaukeln“ oder ein Algorithmus instabil ist. Bei der Modellierung dynamischer Systeme mithilfe von Differenzgleichungen können sich diese Probleme unter Umständen dramatisch auswirken (vgl. die Beispiele in Abschnitt 5.3.3).

- Manchmal fallen den Schülern erforderliche Lösungsstrategien/mathematische Verfahren nicht mehr ein. In solchen Fällen helfen strategische Hilfen mit Hinweisen auf neue Technologien, die Formelsammlung, das Mathematikbuch, Zurückblättern im Heft usw.
- Innerhalb des mathematischen Modells kann es zu Fehlern beim Umrechnen von Einheiten kommen, teilweise wird schlicht mit Zahlenwerten gerechnet und Maßeinheiten werden völlig ignoriert.

In den Naturwissenschaften ist die konsequente Umrechnung der Einheiten parallel zur Rechnung eine wirksame Hilfe zum Aufdecken systematischer Fehler (sogenannte Dimensionsprobe; vgl. Seite 29). Sehr viele Schüler tun sich damit jedoch bis zur Sekundarstufe II schwer. In solchem Fall können viele Rechenfehler oder falsche algebraische Umformungen kaum selbstständig aufgedeckt werden.

- Wenn die Schüler ein zu kompliziertes mathematisches Modell wählen, kann es passieren, dass sie die innermathematische Lösung nicht bewältigen können oder eine solche gar nicht mehr möglich ist. Entweder kann dann der Einsatz neuer Technologien helfen (vgl. Abschnitt 1.8) oder der Lehrer kann rechtzeitig mittels strategischer Hilfen auf die Notwendigkeit einer einfacheren Modellierung hinweisen, um die Schüler nicht zu frustrieren. ZECH (2002, Abschnitt 11.4) diskutiert systematisch geeignete strategische Hilfen.

Ab und an ist es jedoch durchaus sinnvoll, solche Irrwege gehen zu lassen. Zu einem realistischen Bild von Mathematik gehört auch die Erkenntnis, dass es bisher ungelöste sowie überhaupt unlösbare Probleme

gibt.<sup>38</sup> Die Mathematik ist mitnichten eine abgeschlossene und „fertige“ Wissenschaft, wie viele Menschen glauben, die Mathematik im Unterricht lediglich als „Produkt“ und nicht als „Prozess“ kennen gelernt haben (vgl. DAVIS und HERSH, 1996).

- Ist das mathematische Modell kompliziert oder unübersichtlich und sind viele Zwischenschritte zur Lösung notwendig, können Schüler den Überblick verlieren. Bei solchen Problemen können strategische Heuristiken (vgl. die Liste auf Seite 63), aber auch die Verwendung einer Darstellung des Modellierungskreislaufs helfen, die einzelnen Phasen des Prozesses zu identifizieren und das Vorgehen zu planen.

## 5. Interpretieren

In dieser Phase müssen mathematische Resultate im Hinblick auf die Realsituation bzw. das Realmodell interpretiert werden. Fehler in den bisher dargestellten Phasen der Modellierung können teilweise selbstständig von Schülern während der Interpretation/Validierung aufgedeckt werden. Fehler, die erst nach der Bestimmung mathematischer Resultate auftreten, können dagegen sogar dazu führen, korrekte Ergebnisse zu verwerfen.

- Manchmal werden mathematische Lösungen überinterpretiert. Dieses kommt auch in der Grundschule vor, wenn Kinder „irgendetwas“ rechnen und das Ergebnis dann so interpretieren, dass es zur Sachsituation „passt“ (vgl. FRANKE, 2003a, S. 100ff.).
- Häufiger wird beobachtet, dass Schüler bei der Interpretation mathematischer Ergebnisse inkonsequent interpretieren und dabei Hinweise auf Fehler nicht selbstständig bemerken. Viele Schüler überschlagen zu erwartende Ergebnisse einer Modellierungsaufgabe. Wird etwa eine Länge in der Größenordnung 10 cm erwartet, dann werden z.B. negative Vorzeichen in der mathematischen Lösung ignoriert oder ein mathematisches Ergebnis von 120 wird zu 12 cm („Da habe ich wohl in mm gerechnet

---

<sup>38</sup>Viele prominente nach wie vor ungelöste mathematische Vermutungen hat BASIEUX (2005) in einem gut lesbaren populärwissenschaftlichen Buch zusammengestellt.

...“). Ähnlich ist es, wenn Bruchteile ignoriert werden, wo nur natürliche Zahlen sinnvoll sind ( $3\frac{1}{2}$  Personen werden zu 4). Auf diese Weise wird die Validierungsphase schon vorweggenommen und somit eine Möglichkeit zum Aufdecken eigener Fehler verschenkt.

Um diesen Problemen entgegenzuwirken, ist es hilfreich, Selbstvertrauen in die eigenen Ergebnisse zu vermitteln und wirklich die Phasen der Interpretation und Validierung explizit zu trennen, um Widersprüche als Hinweise auf Fehler oder ungeeignete Modelle zu nutzen.

- Fehler treten häufiger auf, wenn innerhalb des mathematischen Modells mit unterschiedlichen Einheiten gerechnet wurde und diese bei der Rückinterpretation wieder zusammengeführt werden müssen. Folgt jedoch anschließend eine kritische Validierungsphase, so fallen zumindest Ergebnisse gravierend falscher Größenordnung auf.
- Wenn das mathematische Modell Wertebereiche besitzt, die im Hinblick auf die Realsituation nicht sinnvoll sind, kann die Interpretation anspruchsvoll sein. Besonders schwierig wird es etwa bei der Modellierung von Krediten (vgl. Abschnitt 4.2.5), weil dem mathematischen Modell zwar natürliche Zahlen zugrunde liegen, aber bei der Bestimmung der Laufzeit eines Kredites mithilfe eines grafikfähigen Taschenrechners auch nicht-ganzzahlige Ergebnisse auftreten können, die sinnvoll interpretiert werden müssen.
- In der Grundschule kann es bei nachlassender Konzentration passieren, dass Schüler zwar richtig rechnen und das Ergebnis korrekt interpretieren, die eigentliche Fragestellung aber nicht mehr beantworten.

## 6. Validieren

Während dieser Phase sind reale Resultate daraufhin zu prüfen, ob sie tatsächlich Lösungen des realen Problems sind. Dabei ist sensibel zu analysieren, welche Idealisierungen bei der Bildung des Realmodells und des mathematischen Modells vorgenommen wurden und inwiefern diese für das reale Resultat relevant sind.

- In unserem Beispiel der Konservendosenmodellierung in Abschnitt 1.3 ist das reale Resultat tatsächlich die optimale Lösung im Hinblick auf das Realmodell, nämlich den Zylinder. Weil aber jener bereits diverse Aspekte



der realen Situation (Knickfalze, gewellte Seiten-, Deck- und Bodenfläche) idealisierte, erfordert die Bewertung des Resultats im Hinblick auf die konkrete Konservendose weitere Untersuchungen; zumindest muss man sich der eingeschränkten Gültigkeit bewusst sein. Ebenso unzureichend ist es, das Resultat auf der Grundlage des mathematischen Modells zu bewerten. Das Beispiel der Modellierung von Fahrrad-Gangschaltungen in Abschnitt 4.1.4 zeigt, wie mathematische Resultate Allgemeingültigkeit suggerieren können, die im Hinblick auf die Realsituation nicht angemessen ist.

- Fehlen Schülern Kriterien zur Überprüfung ihrer Ergebnisse, erfolgt diese Phase teilweise oberflächlich und Ergebnisse werden lediglich z.B. als „ungenau“ bezeichnet (vgl. die Kriterien ab Seite 29).
- Grundsätzlich kann zur Validierungsphase auch ein Ausblick gehören, wie Situationsmodell, Realmodell oder das mathematische Modell im Hinblick auf die Zielsetzung der Modellierung verbessert werden können, falls der Modellierungsprozess aus Zeitgründen nicht noch einmal durchlaufen werden soll. Häufiger benennen Schüler zwar Mängel oder Ungenauigkeiten, vernachlässigen aber einen solchen Ausblick.

Bei der Validierung kommt es auf die Gepflogenheiten im Unterricht beim Umgang mit Modellierungen an. Sehr häufig enthalten Aufgaben im Mathematikunterricht implizite Vereinbarungen, die nicht explizit in jeder Aufgabe formuliert sind: Was soll ein Schüler z.B. bei einer Aufgabe „*Nimm Stellung!*“ alles schreiben? (vgl. Seite 92)

- Wenn sich nach der Validierungsphase ein veränderter Modellierungsprozess anschließt, um angemessenere Ergebnisse zu erzielen, kann es passieren, dass Schüler Realmodell und mathematisches Modell aus dem ersten Modellierungskreislauf verbessern, aber dabei die Realsituation aus den Augen verlieren. Man bekommt dann evtl. ein „schöneres“ oder „genaueres“ mathematisches Modell, das die Realsituation gar nicht mehr adäquat modelliert. Ein Beispiel für eine solche Situation wird in Abschnitt 4.4.3 vorgestellt.

Eine kritische Kultur gegenüber Ergebnissen (eigenen und denen anderer) sollte allerdings grundsätzlich im Unterricht gepflegt werden, und zwar nicht nur bei Modellierungen, sondern auch bei innermathematischen Aufgaben: Es ist günstiger, eigene Fehler zu erkennen, als diese nicht zu bemerken.

## 7. Darlegen/Erklären

In dieser letzten Phase geht es schwerpunktmäßig um kommunikative Kompetenzen. Möglicherweise müssen die Phasen des Modellierungsprozesses für eine bestimmte Zielgruppe nachvollziehbar dokumentiert werden. Dabei kommt es nicht selten vor, dass Schüler bestimmte Aspekte unterschlagen oder für andere unverständlich aufschreiben bzw. veranschaulichende Skizzen vernachlässigen. Nötig ist die Kompetenz, sich in andere Personen hineinversetzen zu können. Die Antizipation von Denkprozessen aus einer anderen Perspektive gelingt vielen Schülern allerdings nicht ohne Weiteres (vgl. Abschnitt 1.5).

Bezüglich methodischer Kompetenzen kann man Schüler im Unterricht schon frühzeitig gewissermaßen evaluieren lassen, ob sie Präsentationen von Mitschülern für angemessen halten (vgl. die Bemerkungen zu Strategiekonferenzen in Abschnitt 1.5.3).

### Fehler, die den gesamten Modellierungsprozess betreffen

- Wenn Schülern wesentliche Phasen des Modellierungsprozesses nicht hinreichend bewusst sind, „vergessen“ sie teilweise einzelne Phasen, insbesondere gilt dies für die Interpretation und Validierung. Helfen mag, immer mal wieder den Modellierungsprozess als Ganzes in einer didaktisch reduzierten Darstellung des Modellierungskreislaufs (vgl. Abschnitt 1.3) ins Bewusstsein zu rufen und Etappen einer bewältigten Modellierung darin zu lokalisieren.
- Häufiger verlieren Schüler den Überblick über ihr Handeln, wenn sie nicht systematisch vorgehen und z.B. mehrfach zwischen den einzelnen Phasen des Modellierungskreislaufs hin- und herspringen. Hilfreich ist dann eine strengere Orientierung am Modellierungsschema. Dass dieses auch für Grundschüler eine deutliche Hilfe sein kann, zeigen KRETSCHMANN und DOBRINDT (2003).
- Oft fällt Schülern eine Trennung zwischen Situationsmodell, Realmodell und mathematischem Modell schwer. Didaktisch reduzierte Darstellungen des Modellierungskreislaufs fassen diese daher zu *einem* „Modell“ zusammen.

men und erzwingen keine Differenzierung der oft ohnehin nicht trennscharf zu bestimmenden Phasen (vgl. Abschnitt 1.3).

- Wenn Rechnungen zu unübersichtlich werden bzw. noch gar nicht bewältigt werden können oder gerade jüngere Schüler das Ziel der Rechnung aus den Augen verlieren, brechen sie manchmal frustriert ab. Hier kann man den Modellierungskreislauf durchaus flexibel interpretieren („multizyklische Modellierung“; vgl. Seite 34): Eine vorzeitige Evaluation des Vorgehens zeigt, dass man zu keinem Ergebnis kommt. Auch Schüler sollten wissen, dass man in solchen Fällen mit stärkeren Modellannahmen eine einfacher zu bewältigende Modellierung versuchen kann.
- Sollen Schüler selbstständig komplexere Modellierungen durchführen, benötigen sie genügend Zeit. Die Beschränkung auf eine Schulstunde ist daher oft ein Problem. Dies gilt auch für projektartige Modellierungen über mehr als eine Schulstunde, weil die Schüler zwischendurch in ihrem Gedankengang unterbrochen werden. Natürlich sollen Schüler auch komplexere Modellierungen kennen lernen. Manchmal reicht es aber auch, nur bestimmte Phasen des Modellierungsprozesses in den Blick zu nehmen. Anregungen findet man in Abschnitt 1.7.3.
- Viele Aspekte lassen sich nicht adäquat mit mathematischen Methoden modellieren. Nun wird man solche im Mathematikunterricht nur selten thematisieren. Es kommt aber dennoch vor, dass Schüler versuchen, mathematische Modelle gewissermaßen universell einzusetzen. Der Autor hat bereits häufiger bei der Behandlung proportionaler Zuordnungen (auch in Klassenarbeiten) „unsinnige“ Aufgaben gestellt wie: *Drei Eier brauchen sieben Minuten, um hart zu kochen. Wie lange brauchen fünf Eier?* Bei unreflektiertem Vorgehen wenden Schüler hier durchaus den Dreisatz an.

Es ist zu erkennen, dass bei mathematischen Modellierungen neben den „üblichen“ Fehlern im Mathematikunterricht zahlreiche weitere Hürden zu überwinden sind. Nicht auf Flüchtigkeit basierende Fehler passieren selten zufällig, sondern häufig systematisch. Ein Unterrichtsdiskurs, der Wert auf das Verstehen der zugrunde liegenden Denkprozesse legt (vgl. Abschnitt 1.5), versteht daher **Fehler als Chance zum Lernen**. Bearbeiten Schüler Modellierungsprozesse in Kleingruppen und gehen sie kritisch sowie konstruktiv mit Fehlern um, werden bereits viele Fehler innerhalb der Kleingruppe aufgedeckt und geklärt.

## 1.7 Gestaltung von Modellierungsaufgaben

Aufgaben stellen ein Grundgerüst jedes Mathematikcurriculums dar. Insofern werden Schülern viele Modellierungen in Form von Aufgaben begegnen. Daher werden zunächst einige allgemeine Anforderungen an Aufgaben- und Problemkontexte dargestellt. Im Abschnitt 1.7.3 wird ferner konkretisiert, wie man einzelne Phasen des Modellierungsprozesses im Unterricht fokussieren kann, um gezielt Modellierungskompetenzen zu fördern.

Vielfach werden Modellierungsaufgaben in den Mathematikunterricht eingebunden, wenn benötigte mathematische Werkzeuge (gerade) erarbeitet wurden. Damit wird jedoch ein wesentlicher Schritt des Modellierungskreislaufs, die Konstruktion eines mathematischen Modells, deutlich entlastet (vgl. Seite 22ff.). HARDER (2007) stellt ein Projekt vor, in dem im Rahmen eines gesonderten „Modellierungskurses“ entsprechende Kompetenzen der Schüler gefördert wurden. An einem Einstiegsbeispiel (sinngemäß: „Wie viel Wasser verschwendet ein tropfender Wasserhahn in einem Jahr?“) seien wesentliche Phasen des Modellierungskreislaufs herausgearbeitet worden (vgl. Abschnitt 1.3). Anschließend hätten die Schüler in Kleingruppen auf der Grundlage einer geschlossenen Aufgabenstellung den Verlauf des Strahls einer Wasserfontäne mit Parabeln modelliert. Den Abschluss des Projekts bildete eine arbeitsteilige Gruppenarbeit, in der die folgenden Kontexte modelliert worden seien (vgl. HARDER, 2007, S. 33):

- „Wie viele Autos stehen in einem 10 km langen Stau auf der Autobahn? [vgl. Abschnitt 2.2; G.H.]
- Wie lang ist das auf einer Kabeltrommel aufgewickelte Kabel? [vgl. Abschnitt 4.4; G.H.]
- Wie verändert sich der Sauerstoffgehalt in unserem Klassenraum im Laufe einer Unterrichtsstunde? [vgl. KOLLER, 1995 nach HARDER, 2007, S. 35; G.H.]
- Halten Zahnpastatuben die Vorgaben für Mogelpackungen ein? [vgl. BÜCHTER et al., 2007, Aufgabe E3; G.H.]
- Wie stapelt man Sauerkrautdosen am besten? [vgl. BÜCHTER und LEUDERS, 2005, S. 46f.; G.H.]“

In Niedersachsen steht die Förderung prozessbezogener Kompetenzen im Vordergrund (NIEDERSÄCHSISCHES KULTUSMINISTERIUM, 2006b, S. 8). Die

übliche Struktur, den Mathematikunterricht nach inhaltlichen Themen zu gliedern, darf daher durchaus aufgebrochen werden, um themenübergreifende prozessbezogene Kompetenzen besonders herauszustellen, z.B. in einer eigenen Unterrichtseinheit „Mathematisch modellieren“, in der auch länger zurückliegende Werkzeuge eingesetzt werden können.

### 1.7.1 Anforderungen an Aufgaben

Zu unterscheiden sind im Mathematikunterricht Aufgaben, an denen die Schüler lernen sollen, und Aufgaben, an denen Schüler zeigen sollen, was sie können.<sup>39</sup> Aufgaben zur Leistungsüberprüfung erfordern, dass Schüler möglichst genau wissen, was von ihnen verlangt wird. Schon aus Zeitgründen wird man in Klassenarbeiten in der Regel höchstens einzelne Modellierungskompetenzen abfragen können (vgl. Abschnitt 1.7.3). Soll im Unterricht Neues gelernt werden, müssen die Aufgaben und Problemstellungen anderen Anforderungen genügen. Solche wesentlichen Anforderungen werden im Folgenden aufgeführt (vgl. BÜCHTER und LEUDERS, 2005, Kapitel 3):

### Authentizität

Der Begriff der Authentizität wird in der Didaktik mit unterschiedlichen Konnotationen verwendet (vgl. JAHNKE, 2005 und LAMBERT, 2007). In enger Formulierung werden unter authentischen Kontexten nur solche verstanden, die wirkliche Probleme der Realität, möglichst aus der Lebenswelt der Schüler, aufwerfen und mit mathematischen Methoden gelöst werden können. In den meisten Fällen sind aber solche Probleme entweder mit Mitteln der elementaren Arithmetik modellierbar, dann gehören sie zum Sachrechnen in der Grundschule, oder sie lassen sich mit schulischen Mitteln in angemessener Zeit gar nicht bearbeiten. ERICHSON (1998, S. 6) charakterisiert den Begriff „authentisch“ für den Mathematikunterricht an Grundschulen durch

---

<sup>39</sup>Viele konstruktive Anregungen zur Entwicklung eigener Mathematikaufgaben oder zu deren bewusster Auswahl findet man bei BÜCHTER und LEUDERS (2005).

„Orientierung an außerschulischer Normalität“ und beschränkt sich damit auf realitätsbezogene Aufgaben (vgl. auch ERICHSON, 2002). Eine allgemeinere Auffassung ist diejenige, „authentisch“ im Sinne von „glaubwürdig“ oder „intellektuell ehrlich“ (BLUM, 1996, S. 25) zu interpretieren. Es können nämlich durchaus auch „interessante“ innermathematische Problemstellungen „glaubwürdig“ sein. JAHNKE (in HERGET et al., 2001, S. 7) zeigt zwei Perspektiven auf, die für die Konstruktion von Aufgaben hilfreich sind:

„Authentisch **von der Sache her** ist eine Problemstellung, wenn sie inner- oder außermathematisch relevant ist; dies setzt auch voraus, dass es sich tatsächlich um originäres mathematisches Denken – auf welcher Niveaustufe auch immer – handelt und nicht um dessen curriculare Simulation oder formale Imitation, nicht um dessen Verschleifung in Plantagenaufgaben, die ihren mathematischen Sinn längst ausgehaucht haben. Authentisch **von den Lernenden her**, also *für* die Lernenden, ist eine Problemstellung, wenn diese sich ihrer tatsächlich annehmen, sich auf sie einlassen, wobei dieser zweite Punkt unterrichtlich der entscheidende ist.“

Allen Auffassungen von Authentizität gemeinsam ist jedoch, dass „eingekleidete Aufgaben“ wie z.B. die Giebelaufgabe aus den Einheitlichen Prüfungsanforderungen für das Abitur (siehe Seite 5) *nicht* authentisch sind. Für authentische Aufgaben ist ebenfalls unerlässlich, dass Realbezüge nicht nur als „Aufreißer“ gelten und weder während der Rechnung noch danach wieder in den Blick genommen werden. Der Rückbezug zur Realität ist bei authentischen Aufgaben obligatorisch.

## Offenheit

Viele Aufgaben in heutigen Mathematik-Schulbüchern sind „geschlossen“. D.h., dass im Wesentlichen nur *ein* Lösungsweg erwartet wird, der bereits vorher mehr oder weniger bekannt ist (vgl. auch die Äußerungen zu „eingekleideten Aufgaben“ auf Seite 4). Außerhalb des Mathematikunterrichts sind Probleme jedoch in der Regel „offen“ – sonst wären sie keine: Zunächst muss das Problem konkretisiert werden. Ein Weg, mit dem eine Lösung ge-

wonnen werden kann, liegt nicht auf der Hand. Es gibt nicht „das“ Ergebnis, sondern man muss evtl. verschiedene Aspekte betrachten, um mehr oder weniger befriedigende Lösungen gegeneinander abzuwägen. Für authentische Modellierungen ist also auch eine gewisse Offenheit nötig.

Die meisten „Anwendungsaufgaben“ im Mathematikunterricht sind nicht offen, da häufig *die* sinnvolle Mathematik, die man zur Lösung benutzen kann, im Schulbuch auf der Seite vorher zu finden ist oder in der vorangehenden Unterrichtsstunde behandelt wurde. Dann wird den Schülern jedoch die Bildung des realen und des mathematischen Modells, und damit ein wichtiger Schritt des Modellierungsprozesses, vorenthalten.

Im Abschnitt 1.5 wurden Anregungen für einen Mathematikunterricht dargestellt, der metakognitive Kompetenzen fördert. Bearbeiten Schüler offene Aufgaben, setzen sie unterschiedliche Lösungsstrategien ein und gelangen zu unterschiedlichen Ergebnissen. Es ist produktiv, diese Vielfalt im Unterricht rückblickend zu nutzen. Schüler können dann nämlich Kompetenzen über das konkrete Problem hinaus erwerben, und zwar sowohl inhaltlicher als auch prozessbezogener Art.

HERGET et al. (2001) bieten mit ihrer empfehlenswerten Aufgabensammlung eine Vielzahl von „**produktiven Aufgaben**“ für den Unterricht in der Sekundarstufe I an und charakterisieren sie wie folgt (HERGET et al., 2001, S. 3):

„Produktive Aufgaben

- sind komplexer als die üblichen, meist auf *eine* Lösung und *einen* Lösungsweg zugeschnittenen Aufgaben,
- sind auf die Diskussion und Reflexion unterschiedlicher Lösungen und unterschiedlicher Lösungswege angelegt,
- trauen den Schülerinnen und Schülern in einem weit gesteckten, aber klar begrenzten Rahmen selbstständige Leistungen zu,
- ermuntern zu unterschiedlichen Zugangsweisen:
  - Probieren, Experimentieren, Messen, ...
  - Produzieren, Skizzieren, Zeichnen, ...
  - Argumentieren, Belegen, Begründen, ...
  - Begriffliches Deduzieren, Analysieren, mit symbolischen Kalkülen Arbeiten, ... “

Konkrete Anregungen zum Öffnen herkömmlicher Schulbuchaufgaben bietet auch HERGET (2000a).

## Differenzierungsvermögen

In allen Schulstufen haben wir es mit einer hohen Heterogenität der Schüler zu tun: Die Schüler verfügen über unterschiedlich viel Motivation und Vorwissen, ihre mathematischen Kompetenzen sind sehr verschieden und nicht selten gibt es Schüler mit Sprachproblemen. Im unterrichtlichen Umgang miteinander ist es selbstverständlich, dass Schüler ihren Fähigkeiten entsprechend ernstgenommen werden: schwächere Schüler bekommen mehr Hilfestellungen durch Mitschüler oder den Lehrer, leistungsstärkere Schüler bekommen zusätzliche „Knobelaufgaben“ als Herausforderung. Man kann jedoch auch Aufgaben so stellen, dass diese in sich Differenzierungspotenzial bergen. Dann können die Schüler Aufgaben z.B. unter unterschiedlich hohem Einsatz neuer Technologien bearbeiten (vgl. Abschnitt 1.8) – evtl. arbeiten nur die leistungsstärkeren Schüler in einem mathematischen Modell rein algebraisch, andere Schüler lösen ein Problem zeichnerisch oder durch geschicktes, systematisches Probieren. Ferner können unterschiedlich anspruchsvolle Realmodelle zur Modellierung einer Situation herangezogen werden. Vergleich und Reflexion dieser unterschiedlichen Arbeitsweisen im anschließenden Auswertungsgespräch im Plenum sind hoch produktiv, insbesondere im Hinblick auf den Modellierungsprozess. Die Aufgabe des Lehrers liegt dann neben der Vorbereitung der Lernumgebungen auch darin, beim Herumgehen während der Arbeitsphase diejenigen Schülerlösungen zu identifizieren, die sich mit Gewinn vorstellen lassen. Bewährt haben sich dabei Blankofolien, die man Schülern frühzeitig geben kann, um ihre Ideen, Ansätze oder Lösungen für eine effektive anschließende Präsentation zu notieren.

## Anforderungsniveau und Verständlichkeit

Beim Modellieren sollen Schwerpunkte des Unterrichts bei den prozessbezogenen Kompetenzen liegen. Daher sind inhaltliche Barrieren aufgrund zu anspruchsvoller Realmodelle oder mathematischer Modelle hinderlich. Min-



destens sollte die Realsituation so präsentiert oder diskutiert werden, dass alle Schüler die Problemstellung erfassen können; anderenfalls ist eine angemessene Modellierung kaum zu leisten.

Manchmal kann es sinnvoll sein, auch komplexere Anwendungen von Mathematik im Unterricht zu thematisieren, um Teilschritte eines Modellierungsprozesses zu vertiefen oder um moderne Anwendungen von Mathematik aufzuzeigen und damit die Verflechtung der Mathematik mit anderen Wissenschaftsbereichen (und umgekehrt) aufzudecken („Relevanzparadoxon“; vgl. Seite 37). Bei derartigen Kontexten (z.B. der Computertomographie in Abschnitt 4.3) können die Schüler dann jedoch den vollständigen Modellierungsprozess gar nicht selbstständig durchlaufen. Dennoch ist es möglich, die Aufgaben auf bestimmte Aspekte des Modellierungskreislaufs auszurichten (vgl. Abschnitt 1.7.3).

Viele Kontexte können im Rahmen eines Spiralcurriculums sogar mehrfach aufgegriffen werden und den Lernzuwachs erfahrbar machen: Zunächst wird das Problem mit einfachen Mitteln modelliert, später dann auch etwas komplizierter und (eventuell) „besser“. Dieses wird beispielhaft aufgezeigt in den Abschnitten 2.2 und 5.1, wo am Beispiel des Straßenverkehrs eine Modellierung einmal für die Grundschule und einmal für die Sekundarstufe vorgestellt wird.

### 1.7.2 Intentionale Probleme als Lernanlass

Betont man das eigenverantwortliche Lernen der Schüler im Mathematikunterricht, bedarf es dazu besonderer Problemstellungen, die eben dieses selbstständige Lernen initiieren. Die schweizer Didaktiker GALLIN und RUF prägten den Begriff „**Kernidee**“: Damit meinen sie die für eine Person subjektiv interessanten, Fragen aufwerfenden Ideen, die in einem Thema verborgen sind. Ein Problem ist jedoch, dass die Schüler unter Umständen sehr unterschiedliche Kernideen zu einem Thema haben: Die Lehrperson „muss die Schülerinnen und Schüler dafür gewinnen, über die in ihnen wirksamen Kernideen nachzudenken, und sie muss sie anregen und anleiten, Kernideen zu generieren, die eine fachliche Auseinandersetzung ermöglichen“ (GALLIN und RUF, 2003, Band 1, S. 59). Da der Unterricht aber nicht nur ein offenes Entdecken immer neuer Themengebiete ist, sondern wir als Lehrer bestimmte

Kompetenzen der Schüler gezielt fördern wollen, müssen wir ganz bestimmte Probleme ansprechen. HUSSMANN (2003a, S. 23ff.) nennt solche Probleme, welche die vom Lehrer intendierten Aspekte einer Sache mit den Interessen der Schüler verbinden, „**intentionale Probleme**“; sie „bereiten den Weg für eine selbstständige und genetische Erschließung des neuen Stoffgebietes.“ HUSSMANN versteht diese Art von Problemen also als Auslöser entdeckenden Lernens für ein neues Unterrichtsthema. Insbesondere müssen die intentionalen Probleme fundamentale Konzepte eines Stoffgebiets implizit enthalten, damit die Schüler sich bereits selbstständig mit wesentlichen Ideen des Themas auseinandersetzen.

Anhand intentionaler Probleme sollen Schüler selbstständig neue mathemathikhaltige Fragen, die sie interessieren, identifizieren und verfolgen. Dabei „entdecken“ sie wesentliche Aspekte der entsprechenden mathematischen Theorie. Es kann durchaus sein, dass Schüler dabei zunächst eigene Bezeichnungen oder Verfahren entwickeln, welche in der Mathematik nicht üblich sind. Es geht jedoch darum, den Kern der Thematik kennen zu lernen und darin explorativ zu wirken. Dieses verbietet dem Lehrer geradezu, die erst mit Inhalt zu füllenden neuen Begriffe bereits mit den Problemstellungen zu liefern.

HUSSMANN (2003a, S. 30) fasst wesentliche Aspekte wie folgt zusammen:  
„Intentionale Probleme

- sind Lernauslöser selbstständigen Lernens
- motivieren, sich mit Mathematik auseinander zu setzen
- sind offen, unstrukturiert, authentisch
- bieten durchgehende Motivation und Kontinuität
- sind komplex, so dass sie soziales und kooperatives Lernen erforderlich machen
- lassen sich unter vielfältigen Perspektiven bearbeiten
- führen auf unterschiedlichen Lösungswegen zu unterschiedlichen Lösungen
- weisen über sich hinaus auf allgemeine mathematische Begriffe [dieser Aspekt wird bei Modellierungsprozessen oft zu Recht vernachlässigt; G.H.]
- tragen alle bereichsspezifischen Grundvorstellungen des zu erarbeitenden Gebietes in sich [dies kann sich bei Modellierungsprozessen sowohl auf den

Kontext der realen Situation als auch auf fundamentale mathematische Ideen beziehen; G.H.]

- spiegeln die Interessen und Kernideen der Lehrperson bzgl. der jeweiligen Wissensdomäne wider.“

HUSSMANN selbst stellt intentionale Probleme vor, die den Schülern den Blick auf ganze Unterrichtseinheiten öffnen; seine Beispiele für die Sekundarstufe II (vgl. HUSSMANN, 2003a) bieten Sequenzen intentionaler Probleme für die Themenbereiche Integralrechnung, Differentialrechnung, Vektorrechnung, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Explorative Datenanalyse, führen also in recht umfangreiche Komplexe ein. Modellierungskontexte, wie wir sie hier im Auge haben, stellen im Vergleich eher kleinere Unterrichtsvorhaben dar. Insofern können – hier etwas enger verstandene – „intentionale Probleme“ nicht so offen konzipiert sein, wie es HUSSMANN vorschwebt. Im Gegensatz zu seinem Verständnis sollen die Schüler bei mathematischen Modellierungen in der Regel keine neuen mathematischen Begriffe kennen lernen, sondern sich voll auf den Modellierungsprozess konzentrieren können.

### 1.7.3 Betonung einzelner Phasen des Modellierungsprozesses

Modellierungsprozesse können außerordentlich komplex sein, weil viele Teilkompetenzen erforderlich sind, die gleichwohl im Unterricht gefördert und an geeigneten Stellen mit Schülern identifiziert werden sollten. Die folgende Aufzählung stammt aus einer unveröffentlichten Arbeit von BLUM und KAISER (nach MAASS, 2004, S. 32f.) und bringt die erforderlichen **Teilkompetenzen** gut auf den Punkt; gleichzeitig konkretisiert sie deutlich die Aufzählungen aus den Bildungsstandards in Abschnitt 1.4.<sup>40</sup>

---

<sup>40</sup>In der Aufzählung von 1997 wird der Begriff „Fähigkeiten“ verwendet, in heutigem Sprachgebrauch trifft der Begriff „Kompetenzen“ die Intentionen vermutlich besser.

Die Aufzählung differenziert nicht zwischen unterschiedlichen Niveaus der Kompetenzen. KEUNE (2004) stellt ein Kompetenzmodell für das mathematische Modellieren vor, das kognitive Merkmale in den Vordergrund stellt.

- a. *„Fähigkeit zum Verständnis eines realen Problems und zum Aufstellen eines realen Modells:*

Fähigkeit

- auf die Situation bezogene Annahmen zu machen bzw. Situation zu vereinfachen;
- die eine Situation beeinflussenden Größen zu erkennen bzw. zu explizieren und Schlüsselvariablen zu identifizieren;
- Beziehungen zwischen den Variablen herzustellen;
- nach verfügbaren Informationen zu suchen und relevante von irrelevanten Informationen zu trennen;

- b. *Fähigkeiten zum Aufstellen eines mathematischen Modells aus einem realen Modell:*

Fähigkeit

- die relevanten Größen und Beziehungen zu mathematisieren;
- falls nötig die relevanten Größen und ihre Beziehungen zu vereinfachen bzw. ihre Anzahl und Komplexität zu reduzieren;
- adäquate mathematische Notationen zu wählen und Situationen ggf. graphisch darzustellen;

- c. *Fähigkeiten zur Lösung mathematischer Fragestellungen innerhalb eines mathematischen Modells:*

Fähigkeit

- heuristische Strategien anzuwenden wie Aufteilung des Problems in Teilprobleme, Herstellung von Bezügen zu verwandten oder analogen Problemen, Reformulierung des Problems, Darstellung des Problems in anderer Form, Variation der Einflussgrößen bzw. der verfügbaren Daten usw.;
- mathematisches Wissen zur Lösung des Problems anzuwenden;

- d. *Fähigkeit zur Interpretation mathematischer Resultate in einem realen Modell bzw. einer realen Situation:*

Fähigkeit

- mathematische Resultate in außermathematischen Situationen zu interpretieren;
- für spezielle Situationen entwickelte Lösungen zu verallgemeinern;

- Problemlösungen unter angemessener Verwendung mathematischer Sprache darzustellen bzw. über die Lösungen zu kommunizieren;
- e. *Fähigkeit zur Infragestellung der Lösung und ggf. erneuten Durchführung eines Modellierungsprozesses:*

Fähigkeit

- gefundene Lösungen kritisch zu überprüfen und zu reflektieren;
- entsprechende Teile des Modells zu revidieren bzw. den Modellierungsprozess erneut durchzuführen, falls Lösungen der Situation nicht angemessen sind;
- zu überlegen, ob andere Lösungswege möglich sind, bzw. Lösungen auch anders entwickelt werden können;
- Modelle grundsätzlich in Frage zu stellen.“

Diese ausführliche Aufzählung deutet an, wie komplex mathematische Modellierungen sein können. Keinesfalls lassen sich diese Teilkompetenzen alle gleichzeitig fördern. Bei komplexen Modellierungsvorhaben im Unterricht sollten daher deutliche Schwerpunkte gesetzt werden, um jeweils gezielt bestimmte mit Modellierungsprozessen verbundene Aspekte zu thematisieren.

Im weiteren Verlauf dieses Unterkapitels wird exemplarisch veranschaulicht, wie man dieses durch entsprechende Aufgabenformulierungen erreichen kann.<sup>41</sup> Dadurch kann man andererseits auch den Blick auf bestimmte Teilkompetenzen richten, um Schwierigkeiten in einem Modellierungsprozess zu umgehen (vgl. Abschnitt 1.6). Zahlreiche der Formulierungen verlangen **Schülereigenproduktionen**, bei denen Schüler sich das eigene Vorgehen bzw. Denken bewusst machen müssen (vgl. Abschnitt 1.5); gleichzeitig gewinnt der Lehrer dadurch eine sichere Grundlage für die Diagnose von Modellierungskompetenzen. Teilweise werden die Aufgaben anhand der Modellierung einer Konservendose veranschaulicht (vgl. Abschnitt 1.3). Mögliche

---

<sup>41</sup>vgl. konkretisierend für die Grundschule auch KAUFMANN (2006b)

LEISS (2007) hat in seiner Dissertation detailliert Lehrerinterventionen untersucht, mit denen Lehrer das mathematische Modellieren einzelner Schüler begleiten.

Aufgabenvorschläge werden dazu den Phasen des Modellierungskreislaufs zugeordnet, die sie besonders betonen können:<sup>42</sup>

## 1. Konstruieren/Verstehen

Geeignet sind heuristische Fragen zum Aufgabenverständnis. Gerade für junge Schüler, die Schwierigkeiten mit dem Textverständnis haben, mögen solche Fragen hilfreich sein (vgl. auch die Aufzählung auf Seite 63).

- *Worum geht es in der Aufgabe? Formuliere mit eigenen Worten.*
- *Wie kann man sich die Situation veranschaulichen? Betrachte eine reale Konservendose.*

Man kann die Komplexität der Aufgabe teilweise auch dadurch reduzieren, dass man die Abbildung einer Konservendose abdruckt oder reale Konservendosen mit in den Unterricht bringt.

- In der Grundschule mag es bei Sachproblemen sinnvoll sein, die Situation als Rollenspiel nachspielen oder zumindest mit Material darstellen zu lassen.
- Um ein Problembewusstsein zu schaffen, ist es manchmal sinnvoll, ein „Initialmaterial“ zur Verfügung zu stellen, z.B. ein Foto von einem „interessanten“ Objekt anzubieten mit dem Auftrag: *Welche Fragen lassen sich mit Mitteln der Mathematik sinnvoll klären?* Dies sind dann Aufträge vom Typ „*Erfinde eine Aufgabe!*“.
- Umgekehrt ist es möglich, bestimmte Situationsmodelle reflektieren zu lassen, z.B.: *Julia soll eine Konservendose modellieren und nimmt die Cola-Dose für die große Pause aus ihrer Schultasche, um sich die Situation zu veranschaulichen.*  
*Was hältst du davon?*

---

<sup>42</sup>Zahlreiche weitere, ausführlich dargestellte Bearbeitungshilfen für das Sachrechnen in der Grundschule findet man bei FRANKE (2003a, S. 84ff.).

## 2. Vereinfachen/Strukturieren

Zu dieser Phase kann man entweder Fragen stellen, die den Schülern Hilfen bei der Suche nach einem Realmodell bieten:

- *Welche Daten sind relevant? Musst du weitere Daten recherchieren/schätzen?* (z.B. bei FERMI-Problemen, vgl. Abschnitt 3 und HUMENBERGER, 2003)

Hier kann man durchaus auch methodische Hilfen geben: *Unterstreiche wesentliche Begriffe und Zahlen.*

- *Worauf kommt es bei der Fragestellung an?*
- *Welche Aspekte kann man evtl. zunächst vernachlässigen?* (Knickfalze der Konservendose)

Man kann die Frage umgekehrt auch so formulieren, dass ein vorgegebenes Realmodell erläutert werden muss, z.B. wenn die Schüler kaum selbstständig auf ein angemessenes Modell kommen können:<sup>43</sup>

- *Karsten schlägt vor, einen Zylinder als Realmodell zu verwenden. Nimm Stellung!*

## 3. Mathematisieren

Erneut kann man vorwärts- und rückwärtsweisende Aufträge/Fragen unterscheiden:

- *Identifiziere diejenigen Größen bei der Konservendose, die für die Mathematisierung relevant sind. Welche Beziehungen zwischen den relevanten Größen gelten?*
- Manchmal können Schüler eine Mathematisierung nicht selbstständig leisten. Dann kann man das mathematische Modell vorgeben und begründen lassen, z.B.: *Erläutere das mathematische Modell mithilfe geeigneter Skizzen.*

---

<sup>43</sup>Ein Beispiel ist die Modellierung des Verfahrens der Computertomographie in Abschnitt 4.3.

- Es kann passieren, dass Modellierungskontexte äußerst komplex sind (z.B. die Computertomographie in Abschnitt 4.3). Wenn die Modellierung den Schülern dennoch vorgestellt werden soll, weil sie z.B. besonders prägnant ist, kann es in Ausnahmesituationen auch sinnvoll sein, den Schülern sowohl ein Realmodell als auch ein mathematisches Modell vorzugeben, das sie dann erläutern sollen (*Nimm Stellung!*) und mit dem sie auf eine mathematische Lösung hin arbeiten sollen (*Setze den Modellierungsprozess fort!*).
- Beim Rückwärtsarbeiten kann man eine mathematische Modellierung vorgeben und geeignete Realmodelle/Realsituationen erarbeiten lassen. Besonders beim Kontext der linearen Funktionen ist dies ein häufig eingesetzter Aufgabentyp<sup>44</sup>, z.B.: *Betrachte das mathematische Modell, das durch die Gleichung  $y = 10 \cdot x - 3$  gegeben ist. Beschreibe zwei mögliche Realsituationen, die durch dieses Modell sinnvoll mathematisiert werden.*
- Denkbar ist auch, ein mathematisches Modell etwa in Form von Gleichungen vorzugeben und dieses im Hinblick auf eine bestimmte Realsituation erläutern zu lassen, z.B.: *Welches Realmodell liegt dem gegebenen mathematischen Modell zugrunde? Begründe!*

## 4. Mathematisch arbeiten

Dies ist die Phase, die am ehesten der „reinen“ Mathematik entspricht. Daher sind hier natürlich alle Varianten üblicher Fragen möglich. Insbesondere durch den Einsatz neuer Technologien lassen sich bestimmte Aspekte mathematischer Arbeit besonders betonen oder entlasten (vgl. Abschnitt 1.8).

Falls das Arbeiten im mathematischen Modell zu anspruchsvoll oder zu trivial ist und deswegen andere Phasen des Modellierungsprozesses betont werden sollen, kann man eine mathematische Lösung grob abschätzen lassen oder anders herum auch vorgeben, z.B.:

*Jonas erhält als mathematisches Resultat 4.*

*Überprüfe, ob das Ergebnis mathematisch plausibel ist!*

---

<sup>44</sup>vgl. die Tabelle auf Seite 12



## 5. Interpretieren

Soll eine Interpretation des mathematischen Resultats besonders ins Auge gefasst werden, kann man Jonas' mathematische Lösung von oben heranziehen:

*Was bedeutet das Ergebnis im Hinblick auf unser Problem?*

Dieser Aufgabentyp lässt sich selbst dann einsetzen, wenn alle vorhergehenden Schritte des Modellierungsprozesses vom Lehrer aus didaktischen Gründen vorgegeben wurden (vgl. die Modellierung der Computertomographie in Abschnitt 4.3).

Derartige Arbeitsaufträge sind gerade dann sinnvoll, wenn es evtl. mehrere verschiedene mathematische Resultate gibt, von denen nicht alle (z.B. diejenigen außerhalb eines sinnvollen Definitionsbereichs) für das reale Modell in Frage kommen. Anspruchsvoll kann diese Art Auftrag sein, wenn etwa die verwendeten Einheiten nicht sinnvoll oder einheitlich sind und Größen zunächst im Hinblick auf das Realmodell entsprechend umgerechnet werden müssen.

Bei der Interpretation des mathematischen Resultats ist es oft hilfreich, die Rundung der Zahlen genauer zu betrachten. Schüler sind leicht geneigt, eher mehr Dezimalstellen aufzuschreiben als sinnvoll. Wenn die Werte im Realmodell gerundet sind, kann man diesen Schritt durchaus verlangen, z.B.: *Untersuche, wie viele Dezimalstellen des mathematischen Resultats sicher bzw. sinnvoll sind.*

## 6. Validieren

Einerseits geht es in dieser Phase um die Prüfung der Plausibilität der Ergebnisse (*Kann das angehen?*). Andererseits geht es aber bei der Reflexion auch um eine Validierung des Vorgehens bei der konkreten Modellierung.

Zahlreiche Fragen können diese Bewertung der realen Resultate bzw. des Modellierungsprozesses anstoßen, z.B.:

- *Hast du die ursprünglichen Fragen beantwortet?*
- *Kann das stimmen?*
- *Gib zwei Möglichkeiten an, wie du überprüfen kannst, ob dein Resultat sinnvoll ist.*

- *Bewerte das reale Resultat.*
- *Untersuche, wie anfällig das Ergebnis gegenüber Rundungen und Ungenauigkeiten ist.*
- *Beurteile die Genauigkeit.*
- *An welchen Stellen des Modellierungsprozesses kann man die Genauigkeit des Ergebnisses besonders beeinflussen?*
- *Was wissen wir damit noch nicht?*
- *Was ließe sich noch verbessern?*
- *Wie würdest du vorgehen, wenn du das Problem noch einmal lösen solltest?*
- *Kann man die Vorgehensweisen in den entscheidenden Phasen kompakt auf den Punkt bringen? Was waren zentrale Ideen?*
- *Welche Voraussetzungen hast du getroffen? Waren sie nötig? Wo hast du sie benutzt?*

Liegen verschiedene Lösungen von unterschiedlichen Schülern vor, kann man diese gegenüberstellen (vgl. die Anmerkungen zu „Strategiekonferenzen“ in Abschnitt 1.5.3):

- *Vergleiche die Lösungswege: welcher ist sinnvoller/eleganter, welcher ist umständlicher usw.?*
- *Sind andere Modelle denkbar?*
- *Wo hattet ihr Schwierigkeiten, wie habt ihr sie behoben?*

Liegen solche Lösungen nicht aus dem Unterricht vor, ist es alternativ möglich, einige Modelle vorzugeben und diskutieren zu lassen: *Erläutere Vorteile und Nachteile der verschiedenen Modelle.*

Wie bei unserem Modellierungsprozess in Abschnitt 1.3 geschehen, kann man die Schüler ein vorliegendes Ergebnis auch mit einer realen Situation vergleichen lassen: *Untersuche die Abweichung des realen Resultats von den wirklichen Dosenabmessungen im Hinblick auf die Fragestellung.*

Weitere Fragen können sich auf die Genauigkeit des Resultats beziehen. Dabei kann sich ergeben, dass die Genauigkeit noch nicht ausreicht. Also muss man mit einem verbesserten Modell noch einmal den Prozess durchlaufen. Es könnte sich aber ebenfalls herausstellen, dass das Ergebnis viel „zu genau“ für die Realsituation ist und der Aufwand für die Modellierung zu hoch gewählt war. Bei FERMI-Problemen (vgl. Abschnitt 3) reicht oft eine sehr grobe Abschätzung.

Auch Grundschüler sollten bereits behutsam an die Phase der Validierung herangeführt werden, damit sie Aufgaben nicht unkritisch und unreflektiert schematisch bearbeiten. DRÖGE et al. (2003b, S. 260) schlagen vor, zu Sachaufgaben wie *„Ein Holztransporter wird mit sieben Brettern beladen. Jedes Brett ist 4 m lang. Wie viele Meter Bretter hat er geladen?“* Fragen zu stellen, welche das Nachdenken über die Aufgabe anregen: *Ist das sinnvoll, was du hier berechnen sollst? Was meinst du? Erkläre!*

Indem Kapitänsaufgaben eingesetzt werden (vgl. Seite 68), werden Kinder dazu motiviert, grundsätzlich über Aufgabenstellungen nachzudenken. Derartige Aufgaben lassen sich auch didaktisch nutzen, wenn Schüler zu bestimmten Sachkontexten selbst Kapitänsaufgaben entwickeln oder falls sie aus Kapitänsaufgaben *sinnvolle* Aufgaben konstruieren sollen (vgl. DRÖGE et al., 2003a, S. 205).

MARXER (2005) stellt dar, wie Schüler anhand fertig gelöster Aufgaben lediglich den Lösungsweg und die Lösung selbst im Hinblick auf die zugrunde liegende Fragestellung validieren sollen. Dabei handelt es sich um Aufgabentypen, die Fähigkeiten der Metakognition fördern (vgl. Abschnitt 1.5).

## 7. Darlegen/Erklären

In dieser Phase geht es eigentlich um methodische Kompetenzen der Schüler. Dennoch ist es durchaus von Zeit zu Zeit sinnvoll, gegebene Präsentationen von Modellierungsvorhaben im Hinblick auf die Qualität der Präsentation (z.B. in Form eines Plakats) bewerten zu lassen. Nicht sinnvoll scheint dagegen zu sein, Schülern die vollständige Modellierung abzunehmen, um den Modellierungsprozess lediglich selbstständig auf andere Weise präsentieren zu lassen.

Andererseits kann man nach einer (Teil-)Modellierung den Auftrag erteilen, das Vorgehen für eine spezielle Zielgruppe zu dokumentieren: *Fertige ein Gutachten für einen (nicht besonders mathematisch gebildeten) Hersteller von Konservendosen an.*

Abschließend ist es sinnvoll, den gesamten Modellierungsprozess abstrakter reflektieren zu lassen:

- Können wir die einzelnen Phasen eines vorgegebenen Modellierungskreislaufs identifizieren?
- Können wir ein eigenes, abstraktes Phasenschema für unsere Modellierung entwickeln?

In den obigen Beispielen tauchen mehrfach zu vorliegenden – fehlerhaften oder korrekten – Lösungen oder Lösungsansätzen „*Nimm Stellung!*“- oder „*Begründe!*“-Aufgaben auf (vgl. KAUNE, 2005). Solche Formulierungen haben sich zur Förderung metakognitiver Kompetenzen (vgl. Abschnitt 1.5) bewährt, denn die Schüler müssen sich in Gedankengänge anderer Menschen hineinversetzen, sie verstehen, interpretieren und sich dazu äußern. Der soziale Austausch zwischen Schülern, in dem sie Möglichkeiten der Lösungsfindung und Interpretation sowie die Vielfalt von Darstellungen ihrer Überlegungen, Rechnungen und Ergebnisse erleben, wird auch bereits seit Langem für die Grundschule gefordert (vgl. MÜLLER, 1995, S. 43). Besonders ergiebig und motivierend ist es, wenn reale Schülereigenproduktionen vorgegeben werden. Diese kann man sich als Lehrer leicht aus Klassenarbeiten oder eingesammelten Hausaufgaben kopieren.

Setzt man solche Aufgaben im Unterricht oder auch in Klassenarbeiten ein, muss den Schülern der Operator „*Nimm Stellung!*“ natürlich geläufig sein, da er bei einer vorgegebenen Schülerlösung vielfältige Aspekte umfassen kann:

- Verstehen der Lösung
- Dokumentieren des Verständnisses
- Fehler/Vereinfachungen/alternative Lösungswege finden und benennen, evtl. Ursachen für Fehler lokalisieren
- evtl. Strategien zur Vermeidung eines Fehlers aufzeigen
- Fehler korrigieren
- einen gegebenen Lösungsweg mit einer eigenen Lösung/Lösungsidee vergleichen und beide bewerten
- zugrunde liegende Denkprozesse analysieren und artikulieren
- usw.

## 1.8 Einsatz neuer Technologien beim Modellieren

Wenn man bei einem Unterrichtsvorhaben den Schwerpunkt auf die Förderung von Modellierungskompetenzen legen möchte, sollten die benötigten mathematischen Begriffe oder Verfahren möglichst hinreichend gefestigt sein, um sich tatsächlich auf das Modellieren konzentrieren zu können. Es ist folglich nicht sinnvoll, *gleichzeitig* einen neuen Inhalt zu erarbeiten und den Modellierungskreislauf selbstständig reflektieren zu lassen. Anders ist das, wenn man mit einem außermathematischen Kontext einen neuen Inhalt motivieren möchte; dann wird man aber den Modellierungsprozess zunächst zurückstellen und ggf. erst später wieder darauf zurückkommen.

Wenn man nun ohnehin ein Modellierungsproblem mit bekannten Methoden behandeln möchte, kann man auch gleich neue Technologien nutzen und das mathematische Arbeiten wenigstens teilweise abgeben. Geeignet können hierfür – je nach Problemstellung – durchaus alle für den Mathematikunterricht relevanten Technologien sein, also hauptsächlich (vgl. WEIGAND und WETH, 2002 sowie HISCHER, 2000):

- grafikfähige Taschenrechner (GTR)
- Computeralgebrasysteme (CAS)
- dynamische Geometriesoftware (DGS)
- Tabellenkalkulation (TK)
- Stochastik- und Datenanalyse-Software wie z.B. FATHOM (vgl. BIEHLER et al., 2006 oder BIEHLER und HARTUNG, 2006)<sup>45</sup>
- weniger verbreitet:<sup>46</sup> Modellbildungssoftware wie Stella, Dynasys, MODUS, VENSIM
- sowie in einer etwas anderen Rolle für die Informationsbeschaffung, als Medium zur Präsentation oder zur Kommunikation: das Internet (vgl. WEIGAND und WETH, 2002, Kapitel VII)

---

<sup>45</sup>siehe auch <http://www.mathematik.uni-kassel.de/~fathom>

<sup>46</sup>Viele Hintergrundinformationen sowie die teilweise zumindest für Ausbildungszwecke frei verwendbare Software erhält man über <http://modsim.hupfeld-software.de/pmwiki/pmwiki.php>.

Vorzüge bei der Verwendung von Technologien liegen auf der Hand:

- „Rechenfehler“ werden vermieden, Schüler können sich auf den Rechenweg sowie auf die Interpretation von Ergebnis und Zwischenergebnissen im Hinblick auf die Situation konzentrieren.
- Rechnungen lassen sich an die Technologie delegieren und lenken nicht vom eigentlichen Modellierungsprozess ab.
- Nahezu beliebig komplizierte Gleichungen einer Variablen können algebraisch mit einem Computeralgebrasystem oder numerisch gelöst werden. Numerische Lösungen kann man entweder mithilfe entsprechender Algorithmen (Intervallhalbierung oder NEWTON-Verfahren) ermitteln. Sehr hilfreich ist ferner die Möglichkeit, Gleichungen der Form  $f(x) = g(x)$  als Schnitt zweier Funktionsgraphen zu interpretieren, den man z.B. im Grafikmenü eines grafikfähigen Taschenrechners mithilfe eines entsprechenden Befehls approximieren lassen kann, wie es auf Seite 194 eingesetzt wird.
- Es ist häufig möglich, in angemessener Zeit systematisch zu probieren und so zu durchaus sinnvollen Ergebnissen zu gelangen.
- Mathematische Modelle in Form von Funktionen oder Wertetabellen lassen sich visualisieren und so einfacher validieren. Modelliert man das Wachstum einer Fichte z.B. mittels einer linearen Funktion, so kann man einem einzelnen ausgerechneten Ergebnis evtl. noch nicht ansehen, dass es nur eingeschränkt sinnvoll ist. Die Betrachtung des Graphen zeigt jedoch, dass – zumindest bei unbeschränktem Definitionsbereich – die Fichte beliebig groß werden würde, was nicht sein kann (vgl. die Wachstumsmodellierungen in Abschnitt 5.3).
- Mit neuen Technologien lassen sich dynamische Abhängigkeiten visualisieren, etwa über Schieberegler bei dynamischer Geometriesoftware oder bei Tabellenkalkulationsprogrammen. Damit kann man dann auch mathematisch simulieren, wie die Variation einzelner Parameter sich auf Modellierungen auswirkt (vgl. WEIGAND und WETH, 2002, S. 85ff.).
- Man kann unter Verwendung neuer Technologien zahlreiche realitätsnahe Probleme/Kontexte im Mathematikunterricht thematisieren, die früher einer unterrichtlichen Behandlung nicht zugänglich waren, weil realistisches Datenmaterial kaum verarbeitet werden konnte. Für die Lösung von Problemen außermathematischer Kontexte reicht jedoch in quasi al-

len Fällen ein numerischer Wert bereits aus.<sup>47</sup> Schlimmstenfalls ist die Genauigkeit, und damit der Rechenaufwand, zu erhöhen.

- Sollte z.B. einmal eine Modellierung im Unterricht nicht für Schüler befriedigend gelingen, besteht im Internet-Zeitalter auch die Möglichkeit, Schüler Lösungen im Internet recherchieren oder per E-Mail Experten direkt befragen zu lassen und so die angewandte Mathematik aus der „wirklichen“ Welt ins Klassenzimmer zu holen; Experten sind fast immer bereit, über ihre Arbeit zu berichten, wenn Interesse gezeigt wird.

Die Hilfsmittel stehen hier also schwerpunktmäßig für das mathematische Arbeiten zur Verfügung. Für die Konstruktion von Modellen bzw. die Übersetzung von einem Realmodell zu einem mathematischen Modell sind *kreative Ideen* nötig, die technische Hilfsmittel nicht vollständig übernehmen können. Gerade bei einer Vielzahl von Daten bieten neue Technologien allerdings Hilfsmittel an, mit denen z.B. Hypothesen über qualitative bzw. funktionale Zusammenhänge als Realmodell bzw. mathematisches Modell aufgestellt werden können. Dabei kann man sich der Hilfsmittel der Explorativen Datenanalyse (EDA) bedienen.<sup>48</sup> Die Rückinterpretation bzw. Validierung der mathematischen Lösung kann von Hilfsmitteln nicht übernommen werden, auch hier besteht aber die Möglichkeit, z.B. im Internet Informationen zu recherchieren, um reale Resultate mit anderen Daten vergleichen zu können.

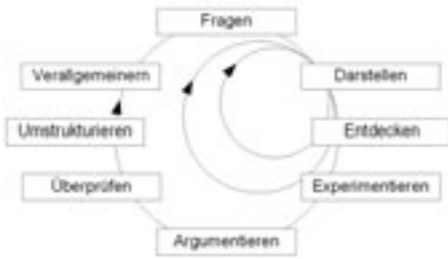
WEIGAND und WETH (2002, S. 56) beschreiben den Prozess mathematischen Entdeckens mithilfe neuer Technologien als das Durchlaufen verschiedener Schritte eines „**Entdeckungskreislaufs**“ (siehe Abbildung 1.10).

Parallelen zum Modellierungskreislauf fallen direkt auf. Allerdings ist in unserem Zusammenhang dieser Entdeckungskreislauf in zweierlei Hinsicht als Visualisierung ablaufender Prozesse denkbar: Einerseits muss beim mathematischen Modellieren ggf. ein mathematisches Modell *entdeckt* werden, andererseits muss innerhalb des mathematischen Modells eine Lösung *gesucht* werden. Liegen entsprechende Modelle oder Lösungsverfahren nicht

---

<sup>47</sup>siehe das EINSTEIN-Zitat auf Seite 14

<sup>48</sup>vgl. zur Explorativen Datenanalyse VOGEL und WINTERMANTEL (2003), RASFELD (2003) oder *mathematik lehren*, Heft 97 (1999)



**Abb. 1.10:** Entdeckungskreislauf nach WEIGAND und WETH (2002, S. 56)

auf der Hand, kann in beiden Phasen der Entdeckungskreislauf als Visualisierung erforderlicher Prozesse herangezogen werden.

Im Mathematikunterricht der **Grundschulen** wird man neue Technologien gewiss behutsam einsetzen. So ist auch ein Ziel des Mathematikunterrichts in der Grundschule, selbst Überschlagsrechnungen so weit vereinfachen zu können, dass die Schüler sie lösen können (vgl. Abschnitt 1.4.2). Schüler können dabei eine erstaunliche Kreativität entwickeln (vgl. PETER-KOOP, 2003). Sinnvoll ist jedoch auch der didaktisch-reflektierte Einsatz einfacher Taschenrechner im Mathematikunterricht der Grundschule, um z.B. bei Modellierungen – wie auch in den Sekundarstufen – den Blick von mathematischen Schwierigkeiten weg hin zum Modellierungsprozess an sich zu wenden.<sup>49</sup> Ohnehin nutzt der weitaus größte Teil der Grundschüler z.B. zur Kontrolle von Hausaufgaben einen Taschenrechner (vgl. DRÖGE et al., 2003a, S. 13).

<sup>49</sup>Didaktische Funktionen des Taschenrechners sowie mögliche Aufgabenformate für den Mathematikunterricht in der Grundschule diskutieren DRÖGE et al. (2003a, S. 13ff.), SPIEGEL (1988) und PADBERG (2005, S. 311–324). MEISSNER (2006) dokumentiert eine empirische Untersuchung zum Taschenrechnereinsatz in der Grundschule, der von Schülern „begeistert aufgenommen“ worden und „außerordentlich erfolgreich verlaufen“ sei.



## **Eine „zu früh“ gestellte „Anwendungsaufgabe“ wird unter Einsatz neuer Technologien zu einer „Modellierungsaufgabe“**

Für alle Schulstufen eignet sich die Methode, Aufgaben „zu früh“ zu stellen, um aus simplen „Anwendungsaufgaben“ offene Problemaufgaben werden zu lassen, bei denen Schüler zunächst einmal nicht wissen, wie sie eine Lösung bestimmen können. In der Grundschule funktioniert dieses z.B. mit Anwendungsaufgaben zu proportionalen Zuordnungen („Dreisatz“; vgl. z.B. DANNHORN, 1999), Divisionen (vgl. Abschnitt 2.2, Abschnitt 2.3 oder SELTER, 2001) oder auch mit elementarer Bruchrechnung.

Für eine Aufgabe, die in der Sekundarstufe II zu einer schlichten Anwendung von Verfahren zur Bestimmung von Rotationsvolumina mithilfe der Integralrechnung verkommen kann, soll dieses Prinzip des vorzeitigen Stellens einer Aufgabe einmal veranschaulicht werden. Erforderlich ist für die hier verwendeten Methoden allerdings, dass die Schüler wissen, wie man Volumina von Zylindern bestimmt. Mathematisch unredlicher gibt es alternativ die Möglichkeit, eine Formel für die Zylindervolumenberechnung in einer Formelsammlung nachschlagen zu lassen. Wir Mathematiker tun uns recht schwer mit solchen – unbewiesenen – Formeln. Die meisten Anwender von Mathematik – man denke nur an Anwender statistischer Verfahren – nutzen die Mathematik in der Regel auf eben diese Weise; für Beweise sind dann die „Experten“ zuständig. Insofern ist es durchaus möglich, auch einmal mit Schülern nach diesem Prinzip vorzugehen.<sup>50</sup> Des Weiteren sollten die Schüler mit einer Tabellenkalkulation einigermaßen umgehen können, es versteht sich von selbst, dass das entsprechende Tabellenblatt von den Schülern selbstständig erstellt wird.

---

<sup>50</sup>Darüber hinaus wird die Formelsammlung einmal für die Recherche wirklich unbekannter Formeln verwendet und nicht immer nur für etwas, das man eigentlich wissen sollte und nur „vergessen“ hat.

Anhand der Frage

„Wie viel Bier passt in ein Weizenbiereglas?“ (oder motivierender: „Stimmt die 0,5-l-Marke am Glas?“)



sollen die Möglichkeiten des Medieneinsatzes einmal etwas deutlicher aufgezeigt werden (vgl. WELLER, 2001).<sup>51</sup>

Die Aufgabe ist klar und einfach gestellt, die gegebene Abbildung enthält zudem bereits ein **Situationsmodell**.

Für ein **Realmodell** können z.B. einige Abmessungen des Bierglases ermittelt werden. Aufgrund der (angenommenen) Rotationssymmetrie des Glases messen wir in verschiedenen Höhen des Glases die Durchmesser und erhalten mithilfe einer Schieblehre etwa die Daten in Tabelle 1.6. Dieses Realmodell besteht also lediglich aus einer Tabelle von Messwerten in Verbindung mit der Abbildung des Weizenbiereglases.

$h$ in cm	0	6,5	18,5	22,2
$d$ in cm	6	4,8	7,8	7,4

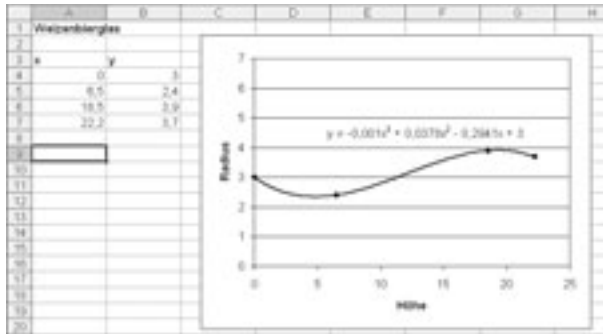
**Tab. 1.6:** Abmessungen des Weizenbiereglases

Für ein **mathematisches Modell** ist es hilfreich, den Rand des Glases detaillierter zu beschreiben. Weil dafür eine Funktion verwendet werden soll, legen wir das Glas gedanklich auf die Seite, um wie üblich die unabhängige Variable (hier  $h$ ) auf der  $x$ -Achse und die abhängige Variable (hier  $r$ ) auf der  $y$ -Achse abzutragen. Dieser Zwischenschritt ist natürlich nicht zwingend und passt unser Realmodell lediglich üblichen Gepflogenheiten beim Umgang mit Funktionsgraphen bzw. Rotationskörpern im Mathematikunterricht an.

<sup>51</sup>HENN (in GRAUMANN et al., 1995, S. 56ff.) stellt ein ganz ähnliches Problem – die Volumenbestimmung beim Rundfass – mit explizitem Bezug zum Modellierungskreislauf dar.

Selbstverständlich lässt sich die Modellierung ähnlich für einen aufrecht stehenden Körper durchführen.

Wir wollen also eine geeignete Randkurve bestimmen, die den Querschnitt des Glases beschreibt/modelliert.



**Abb. 1.11:** Radiusfunktion des Weizenbiertglases mit einer Tabellenkalkulation

In Abbildung 1.11 sind die ermittelten *Radien* sowie eine mögliche Radiusfunktion eingezeichnet.<sup>52</sup> Die Tabellenkalkulation ist in der Lage, automatisch die „Trendlinie“ (diese Ausgleichsfunktion ist hier als Polynomfunktion dritten Grades gewählt) zu zeichnen und die entsprechende Funktionsgleichung mit angeben zu lassen. Dieses Werkzeug der Tabellenkalkulation kann durchaus als Blackbox verwendet werden, wenn man die Regression nicht mit Schülern ausführlich diskutieren möchte. Heutige grafikfähige Taschenrechner können übrigens ebenfalls derartige kubische Regressionsfunktionen problemlos berechnen.<sup>53</sup>

Es ergibt sich als Regressionsfunktion/Trendlinie etwa

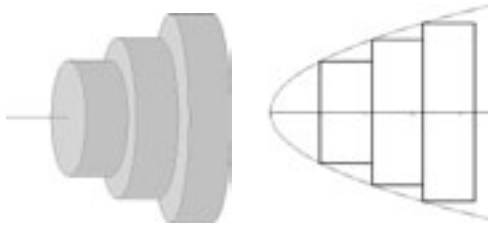
$$y(x) = -0,001 \cdot x^3 + 0,0378 \cdot x^2 - 0,2941 \cdot x + 3.$$

<sup>52</sup>Hier wird zur graphischen Darstellung der Diagrammtyp „Punkt (XY)“ verwendet.

<sup>53</sup>HOFFMANN (2004) zeigt, wie man mithilfe des TI-92/Voyage 200 das Konzept der linearen Regression im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I entwickeln kann, sodass Schüler in die Lage versetzt werden, den Taschenrechnerbefehl („Blackbox“) zu durchschauen („Whitebox“).

Sie macht den ersten Teil unseres **mathematischen Modells** aus, weil sie mit mathematischen Hilfsmitteln das obige Realmodell beschreibt.

Während man nun in der Oberstufe das Rotationsvolumen der Funktion bei Rotation um die  $x$ -Achse bestimmen wird, wollen wir uns auf Näherungsverfahren beschränken.



**Abb. 1.12:** Rotationsvolumen approximiert durch Zylinderscheiben (hier am Beispiel eines Paraboloids)

Zur Approximation des Rotationsvolumens einer Funktion  $f$  über einem Intervall  $[a, b]$  verwenden wir eine Näherung durch Zylinderscheiben (siehe Abbildung 1.12) und haben mit diesem geometrischen Ansatz auch den **zweiten Teil des mathematischen Modells** konstruiert, sodass wir an die innermathematische Lösung des Problems gehen können.

Jede Zylinderscheibe hat ein Volumen

$$V_i = h_i \cdot \pi \cdot r_i^2.$$

Wenn wir wie bei einer einfachen RIEMANN-Näherung für Integrale das Intervall  $[a, b]$  in äquidistante Stützstellen (Spalte **x** in der Tabelle in Abbildung 1.13) einteilen, sind alle Zylinderscheiben gleich dick. Die Radien  $r_i$  ergeben sich aus den Funktionswerten unserer Radiusfunktion an den Stützstellen (Spalte **y** in der Tabelle).

Formal gilt dann für die Approximation des Volumens:

$$V_{\text{ges}} \approx \sum_{i=0}^{n-1} h \cdot \pi \cdot f^2(a + i \cdot h)$$

mit der Zylinderscheibendicke  $h = \frac{b-a}{n}$ . Diese Formel wird man im Unterricht kaum thematisieren, da die Programmierung der Tabellenkalkulation anschaulicher nach und nach die verschiedenen Werte berechnen kann.

	A	B	C	D
1	Weizenbierglas			
2				
3	x	y		
4	0	3		
5	0,5	2,4		
6	10,5	3,9		
7	22,2	5,7		
8	0,5-l-Marke bei x=19,5			
9				
10	x	y	Volumen Zylinderscheibe	kumuliertes Volumen
11	0	=-0,001*A11^3+0,0378*A11^2-0,2941*A11+3	=0,1*Pi()*B11^2	=SUMME(\$C\$11:C11)
12	=A11+0,1	=-0,001*A12^3+0,0378*A12^2-0,2941*A12+3	=0,1*Pi()*B12^2	=SUMME(\$C\$11:C12)
13	=A12+0,1	=-0,001*A13^3+0,0378*A13^2-0,2941*A13+3	=0,1*Pi()*B13^2	=SUMME(\$C\$11:C13)

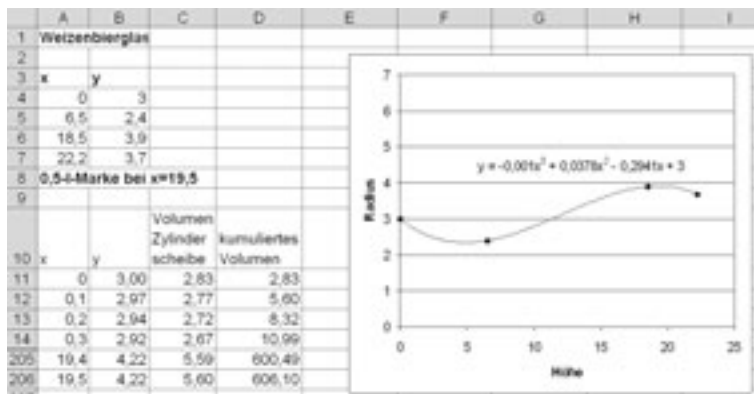
Abb. 1.13: Formeln zur Volumenapproximation

In Abbildung 1.13 sind die Formeln zur Berechnung des Volumens dargestellt, in Abbildung 1.14 die entsprechenden Zahlenwerte.<sup>54</sup> Die Spalte „Volumen Zylinderscheibe“ enthält die Scheibenvolumina, welche dann in der Spalte „kumuliertes Volumen“ addiert werden.

Das gesuchte Volumen von 600,49 cm<sup>3</sup> können wir unten im Tabellenblatt ablesen (Zelle D205), da die 0,5-l-Marke bei x = 19,5 cm aufgedruckt ist, der letzte relevante Zylinder also bei x = 19,4 cm beginnt. Damit haben wir das **mathematische Resultat** der Tabellenkalkulation auch schon gleich als **reales Resultat** interpretiert. Weil unser Realmodell in diesem Fall anschaulich mit zweckmäßigen Maßeinheiten gewählt war, bereitet diese Interpretation kein Problem.

Zur Validierung in der Sekundarstufe II: Unser Ergebnis weicht vom erwarteten beträchtlich ab. Dieses hängt aber nicht mit unserem Näherungsver-

<sup>54</sup>In der Tabelle wurde die Dicke der Zylinderscheiben mit 0,1 cm festgelegt. Alternativ könnte man diese auch als zusätzlichen Parameter einfügen. In der Tabelle würde dies lediglich die Stützstellen in Spalte A sowie die Formeln zur Berechnung der Zylindervolumina in Spalte C beeinflussen. Sollten Schüler die Schrittweite 0,1 als zu groß kritisieren, könnten sie jene dann einfach verringern und auf diese Weise untersuchen, inwieweit der Parameter das Ergebnis beeinflusst. Ganz nebenbei ließe sich dabei propädeutisch das Grenzwertkonzept diskutieren.



**Abb. 1.14:** Volumennäherung (es sind nicht alle Zeilen eingeblendet)

fahren zur Volumenbestimmung zusammen; eine genauere Rechnung ergibt nämlich

$$V_{\text{ges}} = \int_0^{19,5} \pi \cdot f^2(x) dx \approx 601,88 \text{ cm}^3.$$

Besonders anschaulich gelingt die **Validierung** des Modells (es könnte ja auch die 0,5-l-Marke falsch gesetzt sein), weil Schüler mit Litermaß und Wasser selbst messen können, ob angemessen modelliert wurde. Unsere Unterschiede sind aber doch systematischer Natur und hängen damit zusammen, dass wir z.B. die Glasstärke nicht berücksichtigt haben. Ein weiterer Grund für das unerwartete Ergebnis ist, dass wir die Koeffizienten der Regressionsfunktion gerundet haben, was sich bei größeren  $x$ -Werten deutlich auf die Radien auswirkt (**innermathematische Validierung**).

Wir könnten also zur Verbesserung des Modells in einen zweiten Durchlauf des Modellierungskreislaufs eintreten und z.B. statt der Außenmaße diesmal die Innenmaße des Glases bestimmen, um die Glasstärke zu berücksichtigen. Dazu muss man sich freilich zunächst einmal kreative Techniken zum Messen überlegen, weil die Innendurchmesser nicht mehr so einfach mit einer Schieblehre ermittelt werden können ...

Da wir an dieser Stelle lediglich an einem exemplarischen Einsatz neuer Technologien während eines Modellierungsvorhabens interessiert waren, soll dieses nicht weiter ausgeführt werden.



<http://www.springer.com/978-3-8274-1938-5>

Modellierung im Mathematikunterricht

Hinrichs, G.

2008, XII, 348 S. 102 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-8274-1938-5