

2.5 Lösungen

L 2.1

Es gilt gemäß 2.48a:

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{\kappa_z}{\varepsilon_z} t\right). \quad (\text{L 2.1})$$

Eingesetzt in 2.43 ergibt sich unter Beachtung von 2.48a:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{\kappa_z}{\varepsilon_z} t\right) \quad (\text{L 2.2})$$

$$\rightarrow \sigma_z(x, y, z, t) = \rho_0 z \exp\left(-\frac{\kappa_z}{\varepsilon_z} t\right) + \sigma_{z0}(x, y, t) \quad (\text{L 2.3})$$

Eingesetzt in 2.42 erhalten Sie:

$$\begin{aligned}
 \text{rot } \vec{S}_\sigma &= \left[\frac{\kappa_z}{\varepsilon_z} \rho_0 z \exp\left(-\frac{\kappa_z}{\varepsilon_z} t\right) - \frac{\kappa_z}{\varepsilon_z} \rho_0 z \exp\left(-\frac{\kappa_z}{\varepsilon_z} t\right) \right] \vec{e}_z \\
 &\quad + \left(\frac{\kappa_z}{\varepsilon_z} \sigma_{z0} + \frac{\partial \sigma_{z0}}{\partial t} \right) \vec{e}_z \\
 &= \left(\frac{\kappa_z}{\varepsilon_z} \sigma_{z0} + \frac{\partial \sigma_{z0}}{\partial t} \right) \vec{e}_z
 \end{aligned} \tag{L 2.4}$$

$$\text{rot } \vec{S}_\sigma = -\frac{\partial S_{\sigma y}}{\partial z} \vec{e}_x + \frac{\partial S_{\sigma x}}{\partial z} \vec{e}_y + \left(\frac{\partial S_{\sigma y}}{\partial x} - \frac{\partial S_{\sigma x}}{\partial y} \right) \vec{e}_z \tag{L 2.5}$$

$$\rightarrow \frac{\partial S_{\sigma y}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial S_{\sigma x}}{\partial z} = 0 \quad (\text{L 2.6})$$

$$\begin{aligned} \rightarrow S_{\sigma y} &= S_{\sigma y}(x, y, t) \\ \rightarrow S_{\sigma x} &= S_{\sigma x}(x, y, t) \end{aligned} \quad (\text{L 2.7})$$

$$\rightarrow \frac{\partial S_{\sigma y}}{\partial x} - \frac{\partial S_{\sigma x}}{\partial y} = \frac{\kappa_z}{\varepsilon_z} \sigma_{zo} + \frac{\partial \sigma_{zo}}{\partial t} \quad (\text{L 2.8})$$

Aus 2.44 folgt:

$$\text{div } \dot{\vec{S}}_{\sigma} = 0 = \frac{\partial \dot{S}_{\sigma x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{S}_{\sigma y}}{\partial y} \quad (\text{L 2.9})$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 \dot{S}_{\sigma x}}{\partial x^2} = - \frac{\partial^2 \dot{S}_{\sigma y}}{\partial x \partial y} \quad (\text{L 2.10})$$

$$\frac{\partial^2 \dot{S}_{\sigma y}}{\partial y^2} = - \frac{\partial^2 \dot{S}_{\sigma x}}{\partial x \partial y}$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 \dot{S}_{\sigma y}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \dot{S}_{\sigma x}}{\partial x \partial y} = \frac{\kappa_z}{\epsilon_z} \frac{\partial \dot{\sigma}_{z0}}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{\sigma}_{z0}}{\partial x} \quad (\text{L 2.11})$$

$$\frac{\partial^2 \dot{S}_{\sigma y}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \dot{S}_{\sigma x}}{\partial y^2} = \frac{\kappa_z}{\epsilon_z} \frac{\partial \dot{\sigma}_{z0}}{\partial y} + \frac{\partial \ddot{\sigma}_{z0}}{\partial y}$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 \dot{S}_{\sigma y}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \dot{S}_{\sigma y}}{\partial y^2} = \frac{\kappa_z}{\epsilon_z} \frac{\partial \dot{\sigma}_{z0}}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{\sigma}_{z0}}{\partial x} \quad (\text{L 2.12})$$

$$\frac{\partial^2 \dot{S}_{\sigma x}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \dot{S}_{\sigma x}}{\partial y^2} = - \frac{\kappa_z}{\epsilon_z} \frac{\partial \dot{\sigma}_{z0}}{\partial y} + \frac{\partial \ddot{\sigma}_{z0}}{\partial y}$$

Aus 2.41 erhält man

$$\text{rot } \vec{\sigma} = -\mu_0 \varepsilon_z \left(\dot{S}_{\sigma x} \vec{e}_x + \dot{S}_{\sigma y} \vec{e}_y \right) \quad (\text{L 2.13})$$

$$\text{rot } \vec{\sigma} = \frac{\partial \sigma_z}{\partial y} \vec{e}_x - \frac{\partial \sigma_z}{\partial x} \vec{e}_y . \quad (\text{L 2.14})$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial y} &= -\mu_0 \varepsilon_z \dot{S}_{\sigma x} \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial x} &= \mu_0 \varepsilon_z \dot{S}_{\sigma y} \end{aligned} \quad (\text{L 2.15})$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad \frac{\partial \sigma_{z0}}{\partial y} &= -\mu_0 \varepsilon_z \dot{S}_{\sigma x} \\ \frac{\partial \sigma_{z0}}{\partial x} &= \mu_0 \varepsilon_z \dot{S}_{\sigma y} \end{aligned} \quad (\text{L 2.16})$$

Aus L 2.12 und L 2.16 folgt:

$$\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_z} \left(\frac{\partial^2 \sigma_{z0}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{z0}}{\partial y^2} \right) = \frac{\kappa_z}{\varepsilon_z} \dot{\sigma}_{z0} + \ddot{\sigma}_{z0} \quad .$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 \sigma_{z0}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{z0}}{\partial y^2} = \mu_0 \kappa_z \dot{\sigma}_{z0} + \mu_0 \varepsilon_z \ddot{\sigma}_{z0} \quad (\text{L 2.17})$$

L 2.17 stellt die so genannte Telegraphengleichung für die Flächenladungsdichte σ_{z0} dar [2.4].

Setzt man umgekehrt L 2.16 in L 2.12 ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 S_{\sigma y}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_{\sigma y}}{\partial y^2} &= \mu_0 \kappa_z \dot{S}_{\sigma y} + \mu_0 \varepsilon_z \ddot{S}_{\sigma y} \\ \frac{\partial^2 S_{\sigma x}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_{\sigma x}}{\partial y^2} &= \mu_0 \kappa_z \dot{S}_{\sigma x} + \mu_0 \varepsilon_z \ddot{S}_{\sigma x} \end{aligned} \quad (\text{L 2.18})$$

L 2.18 zeigt die Telegraphengleichungen für die Komponenten der Flächenstromdichte $S_{\sigma x}$ und $S_{\sigma y}$.

Sie wollen sich nun der Lösung der Telegraphengleichung widmen. Dazu schreibt man in allgemeiner Darstellung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \mu_0 \kappa_z \dot{U} + \mu_0 \varepsilon_z \ddot{U} \quad (\text{L 2.19})$$

mit

$$U \in \left\{ \sigma_{z0}, S_{\sigma x}, S_{\sigma y} \right\} .$$

Als Lösungsansatz kommt z.B.

$$U = \hat{U} \exp \left[j\omega t - \gamma (x + y) \right] \quad (\text{L 2.20})$$

mit den Konstanten $\hat{U}$ und γ sowie der Kreisfrequenz ω und der imaginären Einheit $j = \sqrt{-1}$ für den eingeschwungenen Zustand in Frage. Wird L 2.20 in L 2.19 eingesetzt, so folgt

$$2 \gamma^2 U = (j\omega \mu_o \kappa_z - \omega^2 \mu_o \varepsilon_z) U$$

oder

$$\gamma^2 = \frac{1}{2} (j\omega \mu_o \kappa_z - \omega^2 \mu_o \varepsilon_z) . \quad (\text{L 2.21})$$

Die so genannte Ausbreitungskonstante γ wird zerlegt in die Dämpfungskonstante α und die Phasenkonstante β :

$$\gamma = \alpha + j\beta . \quad (\text{L 2.22})$$

Für γ^2 gilt dann

$$\gamma^2 = (\alpha + j\beta)^2 = (\alpha^2 - \beta^2) + j 2\alpha\beta \quad (\text{L 2.23})$$

Durch Vergleich von L 2.23 mit L 2.21 erhält man zwei Bestimmungsgleichungen für α und β :

$$\begin{aligned}\alpha^2 - \beta^2 &= -\frac{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_z}{2} \\ 2\alpha\beta &= \frac{\omega \mu_0 \kappa_z}{2} .\end{aligned}\quad (\text{L 2.24})$$

Aus dem Vorstehenden ergeben sie die reellen Werte:

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_z}}{2} \sqrt{-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\kappa_z}{\omega \varepsilon_z}\right)^2}} \\ \beta &= \frac{\omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_z}}{2} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\kappa_z}{\omega \varepsilon_z}\right)^2}} .\end{aligned}\quad (\text{L 2.25})$$

Damit gelten die typgleichen Lösungen für σ_{z0} , $S_{\sigma x}$, $S_{\sigma y}$ der Form

$$U = \hat{U} \exp \left[j\omega t - (\alpha + j\beta) \cdot (x + y) \right] \quad (\text{L 2.26})$$

mit

$$U \in \left\{ \sigma_{z0}, S_{\sigma x}, S_{\sigma y} \right\},$$

wenn nur die Ausbreitung für $x \geq 0$, $y \geq 0$ vorausgesetzt wird.

L 2.2

$$\Delta W_{\text{Emax}} = \sigma \Delta E_x = \sigma \Delta \hat{E}_x \cos \omega t \quad (\text{L 2.27})$$

$$\Delta W_{\text{Mmin}} = -\mu_0 S_\sigma \Delta H_y = -\mu_0 S_\sigma \Delta \hat{H}_y \cos (\omega t - \delta)$$

$$\frac{\partial \Delta W_{\text{Emax}}}{\partial t} + 2 \frac{\kappa_n}{\varepsilon_n} \Delta W_{\text{Emax}} + \frac{\partial \Delta W_{\text{Mmin}}}{\partial t} = 0$$

$$\rightarrow -\sigma \omega \Delta \hat{E}_x \sin \omega t + 2 \frac{\kappa_n}{\varepsilon_n} \sigma \Delta \hat{E}_x \cos \omega t$$

$$+ \mu_0 S_\sigma \omega \Delta \hat{H}_y \sin (\omega t - \delta) = 0 \quad (\text{L 2.28})$$

$$\begin{aligned}
 &\rightarrow \frac{1}{2} \left(2 \frac{\kappa_n}{\varepsilon_n} + j\omega \right) \sigma \Delta \hat{E}_x \exp(j\omega t) \\
 &+ \frac{1}{2} \left(2 \frac{\kappa_n}{\varepsilon_n} - j\omega \right) \sigma \Delta \hat{E}_x \exp(-j\omega t) \quad (\text{L 2.29})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ \mu_0 S_\sigma \omega \Delta \hat{H}_y \sin(\omega t - \delta) = 0 \\
 &\rightarrow - \sqrt{\left(2 \frac{\kappa_n}{\varepsilon_n} \right)^2 + \omega^2} \sigma \Delta \hat{E}_x \sin\left(\omega t - \arctan \frac{2 \kappa_n}{\omega \varepsilon_n} \right) \\
 &+ \mu_0 S_\sigma \omega \Delta \hat{H}_y \sin(\omega t - \delta) = 0 \quad (\text{L 2.30})
 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \frac{\Delta \hat{E}_x}{\Delta \hat{H}_y} = \frac{\omega \mu_0}{\sqrt{\left(2 \frac{\kappa_n}{\varepsilon_n}\right)^2 + \omega^2}} \frac{S_\sigma}{\sigma} \quad (\text{L 2.31})$$

$$\delta = \arctan \frac{2 \kappa_n}{\omega \varepsilon_n} \quad (\text{L 2.32})$$

L 2.3

□ Grundgesetz der Magnetostatik

$$\operatorname{div} \vec{B} = \mu_0 \operatorname{div} \vec{H} = 0 \quad (\text{L 2.33})$$

$$\rightarrow \operatorname{div} \vec{H} = 0 \quad (\text{L 2.34})$$

Für die E_m -Moden gilt mit L 2.34:

$$\frac{\partial H_{xv}}{\partial x} = 0 \text{ für } v = 1, 2. \quad (\text{L 2.35})$$

L 2.35 ist erfüllt, da H_{xv} für $v = 1, 2$ nicht von x abhängt, wie 2.179 zeigt.

□ Grundgesetz der Elektrostatik

$$\text{div } \vec{D} = \text{div } \underline{\underline{\epsilon}} \vec{E} = 0 \quad (\text{L 2.36})$$

$$y \leq -\rho_K : \quad \epsilon_{y2} \frac{\partial E_{y2}}{\partial y} + \epsilon_{z2} \frac{\partial E_{z2}}{\partial z} = 0 \quad (\text{L 2.37})$$

$$\rightarrow \left(-\beta_y k_{yz}'' + k_{yz}'' \beta_y \right) \frac{A}{\omega} \exp \left(k_{yz}'' y - j \beta_{yz} \right) = 0 \quad (\text{L 2.38})$$

$$0 = 0$$

$$y \geq \rho_K : \quad \epsilon_{y2} \frac{\partial E_{y2}}{\partial y} + \epsilon_{z2} \frac{\partial E_{z2}}{\partial z} = 0$$

$$\rightarrow \left(\beta_y k_{yz}'' - k_{yz}'' \beta_y \right) \frac{B}{\omega} \exp \left(-k_{yz}'' y - j \beta_{yz} z \right) = 0 \quad (\text{L 2.39})$$

$$0 = 0$$

$$-\rho_K \leq y \leq \rho_K : \quad \epsilon_y \frac{\partial E_{y1}}{\partial y} + \epsilon_z \frac{\partial E_{z1}}{\partial z} = 0 \quad (\text{L 2.40})$$

$$\rightarrow \left[-\beta_y k_{yz} \left(-C \sin(k_{yz} y) + D \cos(k_{yz} y) \right) \right. \quad (\text{L 2.41})$$

$$\left. -k_{yz} \beta_y \left(C \sin(k_{yz} y) - D \cos(k_{yz} y) \right) \right] \frac{\exp(-j \beta_y z)}{\omega} = 0$$

$$0 = 0$$

L 2.4

$$\beta_y \approx \frac{\omega}{c} \sqrt{n_{y2}^2 \frac{1 + \frac{n_{y2}^2}{n_y^2}}{1 + \frac{n_{y2}^4}{n_y^4}}} \approx \frac{2 \pi \cdot 19 \cdot 10^{14}}{3 \cdot 10^8} \sqrt{1,46^2 \frac{1 + \frac{1,46^2}{1,47^2}}{1 + \frac{1,46^4}{1,47^4}}} \text{ m}^{-1} \quad (\text{L 2.42})$$

$$\underline{\underline{\beta_y \approx 4 \mu\text{m}^{-1}}} \quad (\text{L 2.43})$$

$$k_{yz} \approx \frac{\omega}{c} n_y^2 \sqrt{\frac{n_y^2 - n_{y2}^2}{n_y^4 + n_{y2}^4}} \approx \frac{2 \pi \cdot 19 \cdot 10^{14}}{3 \cdot 10^8} 1,47^2 \sqrt{\frac{1,47^2 - 1,46^2}{1,47^4 + 1,46^4}} \text{ m}^{-1} \quad (\text{L 2.44})$$

$$\underline{\underline{k_{yz} \approx 0,5 \mu\text{m}^{-1}}} \quad (\text{L 2.45})$$

$$k_{yz}'' \approx \frac{n_{y2}^2}{n_y^2} k_{yz} \approx \frac{1,46^2}{1,47^2} \cdot 0,5 \mu\text{m}^{-1} \quad (\text{L 2.46})$$

$$\underline{\underline{k_{yz}'' \approx 0,5 \mu\text{m}^{-1}}} \quad (\text{L 2.47})$$

$$k_{yz} \rho_K = \frac{\pi}{4}$$

$$\rho_K = \frac{\pi}{4 k_{yz}} \approx \frac{\pi}{4 \cdot 0,5} \mu\text{m} \quad (\text{L 2.48})$$

$$\underline{\underline{\rho_K \approx 1,57 \mu\text{m}}} \quad (\text{L 2.49})$$

Optische Netzwerke

Ein feldtheoretischer Zugang

Thiele, R.

2008, X, 273 S. Mit 904 Formeln und 29 Aufgaben mit

Lösungen., Softcover

ISBN: 978-3-8348-0406-8