

3.10 Lösungen zu den Aufgaben

L 3.1

$$\frac{\partial^2 E_x(y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x(y, z)}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} n_x^2 E_x(y, z) = 0 \quad (\text{L 3.1})$$

$$E_x(y, z) = J_{11}^d(z) E_x(y, 0) \quad (\text{L 3.2})$$

$$\begin{aligned} \rightarrow J_{11}^d(z) \frac{\partial^2 E_x(y, 0)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 J_{11}^d(z)}{\partial z^2} E_x(y, 0) \\ + \frac{\omega^2}{c^2} n_x^2 J_{11}^d(z) E_x(y, 0) = 0 \end{aligned} \quad (\text{L 3.3})$$

$$\frac{\partial^2 E_x(y, 0)}{\partial y^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} n_1^2 \sin^2 \varphi E_x(y, 0) \quad (\text{L 3.4})$$

$$\rightarrow \left[\frac{\partial^2 J_{11}^d(z)}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} (n_x^2 - n_1^2 \sin^2 \varphi) J_{11}^d(z) \right] E_x(y, 0) = 0 \quad (\text{L 3.5})$$

Für beliebiges $E_x(y, 0)$ muss gelten:

$$\frac{\partial^2 J_{11}^d(z)}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} (n_x^2 - n_1^2 \sin^2 \varphi) J_{11}^d(z) = 0. \quad (\text{L 3.6})$$

$$\frac{n_y^2}{n_z^2} \frac{\partial^2 E_y(y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y(y, z)}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} n_y^2 E_y(y, z) = 0 \quad (\text{L 3.7})$$

$$E_y(y, z) = J_{22}^d(z) E_y(y, 0) \quad (\text{L 3.8})$$

$$\frac{n_y^2}{n_z^2} J_{22}^d(z) \frac{\partial^2 E_y(y, 0)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 J_{22}^d(z)}{\partial z^2} E_y(y, 0) \quad (\text{L 3.9})$$

$$+ \frac{\omega^2}{c^2} n_y^2 J_{22}^d(z) E_y(y, 0) = 0$$

$$\frac{\partial^2 E_y(y, 0)}{\partial y^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} n_1^2 \sin^2 \varphi E_y(y, 0) \quad (\text{L 3.10})$$

$$\left[\frac{\partial^2 J_{22}^d(z)}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} n_y^2 \left[1 - \left(\frac{n_1}{n_z} \right)^2 \sin^2 \varphi \right] J_{22}^d(z) \right] E_y(y, 0) = 0 \quad (\text{L 3.11})$$

Für beliebiges $E_y(y, 0)$ folgt

$$\frac{\partial^2 J_{22}^d(z)}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} n_y^2 \left[1 - \left(\frac{n_1}{n_z} \right)^2 \sin^2 \varphi \right] J_{22}^d(z) = 0. \quad (\text{L 3.12})$$

$$\frac{\partial^2 E_z(y, z)}{\partial y^2} + \frac{n_z^2}{n_y^2} \frac{\partial^2 E_z(y, z)}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} n_z^2 E_z(y, z) = 0 \quad (\text{L 3.13})$$

$$E_z(y, z) = J_{33}^d(z) E_z(y, 0) \quad (\text{L 3.14})$$

$$\begin{aligned} \rightarrow & J_{33}^d(z) \frac{\partial^2 E_z(y, 0)}{\partial y^2} + \frac{n_z^2}{n_y^2} \frac{\partial^2 J_{33}^d(z)}{\partial z^2} E_z(y, 0) \\ & + \frac{\omega^2}{c^2} n_z^2 J_{33}^d(z) E_z(y, 0) = 0 \end{aligned} \quad (\text{L 3.15})$$

$$\frac{\partial^2 E_z(y, 0)}{\partial y^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} n_1^2 \sin^2 \varphi E_z(y, 0) \quad (\text{L 3.16})$$

$$\rightarrow \left[\frac{\partial^2 J_{33}^d(z)}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} n_y^2 \left[1 - \left(\frac{n_1}{n_z} \right)^2 \sin^2 \varphi \right] J_{33}^d(z) \right] E_z(y, 0) = 0 \quad (\text{L 3.17})$$

Für beliebiges $E_z(y, 0)$ gilt:

$$\frac{\partial^2 J_{33}^d(z)}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} n_y^2 \left[1 - \left(\frac{n_1}{n_z} \right)^2 \sin^2 \varphi \right] J_{33}^d(z) = 0. \quad (\text{L 3.18})$$

L 3.2

Isotrope $\frac{\lambda}{4}$ -Platte:

$$\begin{aligned} n_1 &= n_x = n_y = n_z = n_3 \\ n_2 &= n_{x2} = n_{y2} = n_{z2} \end{aligned} \quad (\text{L 3.19})$$

$$J_{11}^R(L) = 1: \quad \frac{\omega_x}{c} n_1 \cos \varphi_x L = m_x 2\pi; \quad m_x = 1, 2, 3, \dots$$

$$J_{22}^R(L) = J_{33}^R(L) = j: \quad \frac{\omega_y}{c} n_1 \cos \varphi_y L = (2m_y + 1) \frac{\pi}{2}; \quad m_y = 1, 3, 5, \dots$$

(L 3.20)

$$\omega_x = \frac{\pi C}{4 \rho_K \sqrt{\frac{n_1^2 - n_2^2}{2}}} \quad (\text{L 3.21})$$

$$\omega_y = \frac{\pi C}{4 \rho_K n_1^2 \sqrt{\frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^4 + n_2^4}}}$$

$$\cos \varphi_x = \frac{1}{n_1} \sqrt{\frac{n_1^2 + n_2^2}{2}} \quad (\text{L 3.22})$$

$$\cos \varphi_y = \sqrt{\frac{n_1^2 n_2^2 + n_2^4}{n_1^4 + n_2^4}}$$

L 3.21 und L 3.22 eingesetzt in L 3.20:

$$\rightarrow \sqrt{\frac{n_1^2 + n_2^2}{n_1^2 - n_2^2}} L = m_x \cdot 8 \rho_K \quad (\text{L 3.23})$$

$$\sqrt{\frac{n_1^2 + n_2^2}{n_1^2 - n_2^2}} L = (4 m_y + 2) \frac{n_1}{n_2} \rho_K .$$

Aus L 3.23 folgt:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{8 m_x}{4 m_y + 2} . \quad (\text{L 3.24})$$

Beachten Sie: $n_1 > n_2 \rightarrow 8 m_x > 4 m_y + 2!$

L 3.24 eingesetzt in L 3.23:

$$\rightarrow \frac{L}{\rho_K} = 8 m_x \sqrt{\frac{64 m_x^2 - (4 m_y + 2)^2}{64 m_x^2 + (4 m_y + 2)^2}}. \quad (\text{L 3.25})$$

Differenzbildung der Gleichungen L 3.21 und Einsetzen von L 3.24 ergibt, aufgelöst nach ρ_K :

$$\rho_K = \frac{\pi c}{4 n_1 (\omega_x - \omega_y)} \left[\frac{\sqrt{128} m_x}{\sqrt{64 m_x^2 - (4 m_y + 2)^2}} - \sqrt{\frac{4096 m_x^4 + (4 m_y + 2)^4}{4096 m_x^4 - 64 m_x^2 (4 m_y + 2)^2}} \right]. \quad (\text{L 3.26})$$

Einsetzen von L 3.24 in L 3.22 ergibt:

$$\cos \varphi_x = \frac{1}{\sqrt{128} m_x} \sqrt{64 m_x^2 + (4 m_y + 2)^2} \quad (\text{L 3.27})$$

$$\cos \varphi_y = \sqrt{\frac{64 m_x^2 (4 m_y + 2)^2 + (4 m_y + 2)^4}{4096 m_x^4 + (4 m_y + 2)^4}}.$$

Bei der $\frac{\lambda}{4}$ -Platte mit

$$\underline{J}_{\text{erw}}^R(L) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -j & 0 \\ 0 & 0 & -j \end{pmatrix} \quad (\text{L 3.28})$$

ist $m_y = 1, 3, 5, \dots$ durch $m_y = 0, 2, 4, \dots$ zu ersetzen.

L 3.3

Die charakteristische Gleichung für einen symmetrischen Dielektrizitätstensor lautet:

$$\begin{aligned} &\lambda^3 - (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \lambda^2 \\ &+ (\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xy}^2 - \varepsilon_{xz}^2 - \varepsilon_{yz}^2) \lambda \\ &- \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} - 2 \varepsilon_{xy}\varepsilon_{xz}\varepsilon_{yz} + \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{yy}\varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{zz}\varepsilon_{xy}^2 = 0 \end{aligned}$$

Speziell für den Dielektrizitätstensor nach A 3.2 folgt:

$$\lambda^3 - 6,75 \varepsilon_0 \lambda^2 + 15 \varepsilon_0^2 \lambda - 11 \varepsilon_0^3 = 0.$$

Daraus erhält man die Eigenwerte:

$$\lambda_1 = 2,75 \varepsilon_0, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 2 \varepsilon_0. \quad (\text{L 3.29})$$

Die Hauptbrechzahlen sind für ein uniaxiales Medium

$$n_x = 1,658, \quad n_y = n_z = 1,414 \quad (\text{L 3.30})$$

mit

$$\lambda_1 = \varepsilon_x = n_x^2 \varepsilon_0, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \varepsilon_y = \varepsilon_z = n_y^2 \varepsilon_0 = n_z^2 \varepsilon_0$$

Die Eigenvektoren ergeben sich aus:

$$\lambda_1 = 2,75 \varepsilon_0 :$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad (\text{L 3.31})$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 2 \varepsilon_0 :$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{2,3} \\ y_{2,3} \\ z_{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{a}_{2,3} = \begin{pmatrix} x_{2,3} \\ y_{2,3} \\ -(x_{2,3} + y_{2,3}) \end{pmatrix}$$

Die Orthogonalisierung ergibt:

$$\vec{a}'_1 \cdot \vec{a}_2 = 0 = x_1 [x_2 + y_2 - (x_2 + y_2)] \quad \text{wahr}$$

$$\vec{a}'_1 \cdot \vec{a}_3 = 0 = x_1 [x_3 + y_3 - (x_3 + y_3)] \quad \text{wahr}$$

$$\begin{aligned} \vec{a}'_2 \cdot \vec{a}_3 &= 0 = x_2 x_3 + (x_2 + y_2)(x_3 + y_3) + y_2 y_3 \\ &= 2 x_2 x_3 + 2 y_2 y_3 + x_2 y_3 + x_3 y_2 \end{aligned}$$

$$x_1 = x_2 = x_3 = 1:$$

$$y_2 = -\frac{2+y_3}{1+2y_3}$$

$$y_3 = 0 \rightarrow y_2 = -2$$

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{L 3.32})$$

Die orthonormalen Eigenvektoren sind:

$$\vec{n}_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_2 = \frac{\sqrt{6}}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{L 3.34})$$

Aus L 3.34 folgt die orthogonale Transformationsmatrix:

$$\underline{A} = (\vec{n}_1 \vec{n}_2 \vec{n}_3) = \frac{\sqrt{6}}{6} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & -2 & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad (\text{L 3.35})$$

$$\underline{A}^{-1} = \underline{A}' = \begin{pmatrix} \vec{n}'_1 \\ \vec{n}'_2 \\ \vec{n}'_3 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{6}}{6} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & -2 & 1 \\ \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Probe: $\underline{\varepsilon}_d = \underline{A}' \underline{\varepsilon} \underline{A}$

$$\begin{aligned}
 \underline{\varepsilon}_d &= \frac{\varepsilon_0}{24} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & -2 & 1 \\ \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & -2 & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \\
 &= \frac{\varepsilon_0}{24} \begin{pmatrix} 11\sqrt{2} & 11\sqrt{2} & 11\sqrt{2} \\ 8 & -16 & 8 \\ 8\sqrt{3} & 0 & -8\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & -2 & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \\
 &= \frac{\varepsilon_0}{24} \begin{pmatrix} 66 & 0 & 0 \\ 0 & 48 & 0 \\ 0 & 0 & 48 \end{pmatrix} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} 2,75 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

L 3.4

Eigenwerte: Ohne Vorfaktor $\varepsilon_0 / 4$:

$$\lambda_1 = 7, \quad \lambda_2 = 10 - \sqrt{3}, \quad \lambda_3 = 10 + \sqrt{3} \quad (\text{L 3.36})$$

Es handelt sich um ein biaxiales Medium.

Eigenvektoren:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1+j & 1+j \\ 1-j & 2 & 1+j \\ 1-j & 1-j & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ -1 \end{pmatrix} \quad (\text{L 3.37})$$

$$\lambda_2 = 10 - \sqrt{3} :$$

$$\begin{pmatrix} -1+\sqrt{3} & 1+j & 1+j \\ 1-j & -1+\sqrt{3} & 1+j \\ 1-j & 1-j & -1+\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-\sqrt{3}-j}{2} \\ \frac{1+j\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

(L 3.38)

$$\lambda_3 = 10 + \sqrt{3}:$$

$$\begin{pmatrix} -1-\sqrt{3} & 1+j & 1+j \\ 1-j & -1-\sqrt{3} & 1+j \\ 1-j & 1-j & -1-\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{3}-j}{2} \\ \frac{1-j\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

(L 3.39)

Unitarisierung der Eigenvektoren:

$$\vec{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \vec{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-\sqrt{3}-j}{2} \\ \frac{1+j\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{3}-j}{2} \\ \frac{1-j\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

(L 3.40)

Unitäre Transformationsmatrix:

$$\underline{\underline{B}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ j & \frac{-\sqrt{3}-j}{2} & \frac{\sqrt{3}-j}{2} \\ -1 & \frac{1+j\sqrt{3}}{2} & \frac{1-j\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \quad (\text{L 3.41})$$

$$\underline{\underline{B}}^{-1} = \underline{\underline{B}}^* = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & -j & -1 \\ 1 & \frac{-\sqrt{3}+j}{2} & \frac{1-j\sqrt{3}}{2} \\ 1 & \frac{\sqrt{3}+j}{2} & \frac{1+j\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{L 3.42})$$

Diagonaler Tensor:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_d = \underline{\underline{B}}^* \underline{\underline{\varepsilon}} \underline{\underline{B}} = \frac{\varepsilon_0}{4} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad (\text{L 3.43})$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_d = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} n_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_z^2 \end{pmatrix}$$

mit den Hauptbrechzahlen

$$n_x = 1,3229, \quad n_y = 1,4377, \quad n_z = 1,7126$$

L 3.5

Mit L 3.41 und L 3.42 sowie Gleichung A 3.4 folgt aus

$$\underline{J}_{\text{erw}} = \underline{B} \underline{J}_{\text{erw}}^{\text{d}} \underline{B}^* \quad (\text{L 3.44})$$

die erweiterte Jones-Matrix

$$\underline{J}_{\text{erw}} = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{pmatrix}, \quad (\text{L 3.45})$$

wobei

$$J_{11} = J_{22} = J_{33} = \frac{1}{3} \left(J_{11}^d + J_{22}^d + J_{33}^d \right)$$

$$J_{12} = \frac{1}{3} \left(-j J_{11}^d - \frac{\sqrt{3}-j}{2} J_{22}^d + \frac{\sqrt{3}+j}{2} J_{33}^d \right)$$

$$J_{13} = \frac{1}{3} \left(-J_{11}^d + \frac{1-j\sqrt{3}}{2} J_{22}^d + \frac{1+j\sqrt{3}}{2} J_{33}^d \right) \quad (\text{L 3.46})$$

$$J_{21} = \frac{1}{3} \left(j J_{11}^d - \frac{\sqrt{3}+j}{2} J_{22}^d + \frac{\sqrt{3}-j}{2} J_{33}^d \right)$$

$$J_{23} = \frac{1}{3} \left(-j J_{11}^d - \frac{\sqrt{3}-j}{2} J_{22}^d + \frac{\sqrt{3}+j}{2} J_{33}^d \right)$$

$$J_{31} = \frac{1}{3} \left(-J_{11}^d + \frac{1+j\sqrt{3}}{2} J_{22}^d + \frac{1-j\sqrt{3}}{2} J_{33}^d \right)$$

$$J_{32} = \frac{1}{3} \left(j J_{11}^d - \frac{\sqrt{3}+j}{2} J_{22}^d + \frac{\sqrt{3}-j}{2} J_{33}^d \right).$$

gilt.

Diskussion:

1. Ist $\underline{J}_{\text{erw}}^{\text{d}}$ unitär, so ist wegen $\underline{B}$ unitär für einen hermiteschen Dielektrizitätstensor $\underline{\varepsilon}$ auch $\underline{J}_{\text{erw}}$ unitär. Den Beweis dieser Aussage enthält Aufgabe A 3.6.
2. Sind die Hauptdiagonalelemente J_{11}^{d} , J_{22}^{d} , J_{33}^{d} gleich, dann besitzt $\underline{J}_{\text{erw}}$ Diagonalform, wovon man sich durch Berechnung von L 3.46 überzeugen mag.

L 3.6

Es soll gelten:

$$\underline{J}_{\text{erw}}^{d'*} = \underline{J}_{\text{erw}}^{d-1} \quad (\text{L 3.47})$$

$$\underline{B} = \underline{B}^{'*-1}, \quad \underline{B}^{'*} = \underline{B}^{-1}. \quad (\text{L 3.48})$$

Dann folgt mit dem Ansatz

$$\underline{J}_{\text{erw}} = \underline{B} \underline{J}_{\text{erw}}^d \underline{B}^{'*} \quad (\text{L 3.49})$$

über

$$\underline{J}_{\text{erw}}^{-1} = \underline{B}^{'*-1} \underline{J}_{\text{erw}}^{d-1} \underline{B}^{-1} \quad (\text{L 3.50})$$

auch

$$\underline{J}_{\text{erw}}^{-1} = \underline{B} \underline{J}_{\text{erw}}^{d'*} \underline{B}^{'*} = \left(\underline{B} \underline{J}_{\text{erw}}^d \underline{B}^{'*} \right)^{'*} = \underline{J}_{\text{erw}}^{'*}. \quad (\text{L 3.51})$$

L 3.7

Da der Realteil von $\underline{\varepsilon}$ identisch ist mit Gleichung A 3.2, gilt für die Eigenwerte nach L 3.29:

$$\varepsilon'_x = 2,75 \varepsilon_0, \quad \varepsilon'_y = \varepsilon'_z = 2 \varepsilon_0. \quad (\text{L 3.52})$$

Die Transformationsmatrix $\underline{A}$ lautet dann gemäß L 3.35:

$$\underline{A} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & -2 & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}. \quad (\text{L 3.53})$$

Für die zu $\underline{A}$ transponierte Matrix $\underline{A}'$ gilt:

$$\underline{A}' = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & -2 & 1 \\ \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}. \quad (\text{L 3.54})$$

Der Imaginärteil von $\underline{\varepsilon}$ ist

$$\underline{\varepsilon}'' = 0,025 \varepsilon_0 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{L 3.55})$$

Mit L 3.53, L 3.54 und L 3.55 folgt:

$$\Delta \varepsilon_x = \vec{n}_1' \underline{\underline{\varepsilon}}'' \vec{n}_1 = \frac{0,025}{3} \varepsilon_0 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\Delta \varepsilon_x = 0,075 \varepsilon_0}} \quad (\text{L 3.56})$$

$$\Delta \varepsilon_y = \vec{n}_2' \underline{\underline{\varepsilon}}'' \vec{n}_2 = \frac{0,025}{6} \varepsilon_0 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\Delta \varepsilon_y = 0}} \quad (\text{L 3.57})$$

$$\Delta \varepsilon_z = \vec{n}_3' \underline{\varepsilon}'' \vec{n}_3 = \frac{0,025}{2} \varepsilon_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\Delta \varepsilon_z = 0}} \quad (\text{L 3.58})$$

Damit lautet die näherungsweise Diagonalform

$$\underline{\varepsilon}_d = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} 2,75 - j0,075 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (\text{L 3.59})$$

Optische Netzwerke

Ein feldtheoretischer Zugang

Thiele, R.

2008, X, 273 S. Mit 904 Formeln und 29 Aufgaben mit

Lösungen., Softcover

ISBN: 978-3-8348-0406-8