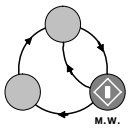
Martin Werner

Übungsteil zum Buch

Signale und Systeme

Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen

3. Auflage



© Martin Werner, Fulda 2008

Vorwort

Die zahlreichen, sehr positiven Reaktionen der Leser auf das Online verfügbare Übungsangebot gaben Anlass, das Übungsangebot weiter auszubauen und noch enger mit dem Buch *Signale und Systeme*[1] zu verbinden.

Mit der 3. Auflage wird das Ziel eines kompakten, übersichtlichen Lehrbuches mit einem umfangreichen Übungsangebot und der Möglichkeit des selbstbestimmten explorativen Lernens konsequent umgesetzt. Mit der 3. Auflage des Buches konnte erreicht werden:

- eine engere Verzahnung der Lehrinhalte des Buches mit den Übungen
- mehr Übungsaufgaben unterschiedlichen Niveaus
- eine kurze Einführung in MATLAB®[2]
- mehr MATLAB®-Übungen und Simulationsbeispiele

Der Übungsteil ist wie das Buch *Signale und Systeme* gegliedert, so dass die Übungen zu Kapitel 2.1 im Buch auch in Kapitel 2.1 des Übungsteils zu finden sind.

Zunächst werden jeweils die Aufgaben (✍) vorgestellt. Daran schließen sich die Lösungen (☑) an. Obwohl einige Aufgaben mehr als geführte, den Lehrstoff ergänzende Beispiele gedacht sind, wurde diese Aufteilung im gesamten Übungsteil gewählt, um in einem zweiten Durchgang eine Selbstkontrolle zu ermöglichen. Entscheiden Sie deshalb von Aufgabe zu Aufgabe selbst, ob ein schneller Blick in die Lösung für Sie angebracht ist.

Es werden MATLAB-Übungen (💻) angeboten, deren Bearbeitung einen Rechner mit entsprechender Software voraussetzt, siehe Hinweis in Abschnitt 1 „Erste Schritte in MATLAB“. Die Lösungen sind jedoch so gehalten, dass auch ohne eigenes Arbeiten am Rechner die wichtigsten Ergebnisse nachvollzogen werden können.

Alle Programmbeispiele sind in Englisch kommentiert, damit Sie gleich mit den internationalen Fachbegriffen vertraut werden. Das wird Ihnen auch helfen, die hervorragende Online-Dokumentation von MATLAB besser zu nutzen. Die Programmbeispiele sind online über den Vieweg Verlag www.vierweg+teubner.de verfügbar.

Fulda, Juli 2008 *Martin Werner*

[1] [Wer08] M. Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen*. 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008

[2] MATLAB® ist ein eingetragenes Warenzeichen der Firma The MathWorks, Inc., U.S.A. MATLAB ist als Studentenversion verfügbar und wird mit einer ausführlichen Online-Hilfe sowie Online-Einführungskursen ausgeliefert. Für mehr Informationen siehe www.mathworks.com oder www.mathworks.de .

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen*. 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

Inhaltsverzeichnis

1 Erste Schritte in MATLAB 1
1.1 Einführung 1
1.2 Programmstart und einfache Befehle 1
1.2.1 MATLAB-Entwicklungswerkzeug 1
1.2.2 Einfache arithmetische Ausdrücke 1
1.2.3 Konstanten und Variablen 3
1.2.4 MATLAB `help`-Kommando 3
1.2.5 Vektoren und Matrizen 4
1.2.6 Vordefinierte MATLAB-Funktionen und einfache Grafiken 7
1.2.7 MATALB-Programm im `Editor/Debugger –Window` 10
1.2.8 Verkettete Programme und Unterprogramme 11
1.2.9 MATLAB `Help` und MATLAB `Demo` 14

2 Grundbegriffe der Signal- und Systemtheorie 16
2.1 Klassifizierung von Signalen 16
2.1.1 Aufgaben 16
2.1.2 Lösungen 17
2.2 Standardsignale 20
2.2.1 Aufgaben 20
2.2.2 Lösungen 21
2.3 Klassifizierung von Systemen 22
2.3.1 Aufgaben 22
2.3.2 Lösungen 24
2.4 Übungen mit MATLAB 31

3 Lineare zeitinvariante Systeme 38
3.1 Zeitdiskrete LTI-Systeme 38
3.1.1 Aufgaben 38
3.1.2 Lösungen 40
3.2 Zeitkontinuierliche LTI-Systeme 44
3.2.1 Aufgaben 44
3.2.2 Lösungen 45
3.3 Übungen mit MATLAB zur Faltung 46

4 Systeme mit linearen Differenzengleichungen 53
4.1 Aufgaben 53
4.2 Lösungen 58

5 Systeme mit linearen Differenzialgleichungen 78
5.1 Aufgaben 78
5.2 Lösungen 79
5.3 Übungen mit MATLAB 92

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

6 *z*-Transformation und LTI-Systeme 93
6.1 Aufgaben 93
6.2 Lösungen 98

7 Laplace-Transformation und LTI-Systeme 112
7.1 Aufgaben 112
7.2 Lösungen 116
7.3 Übungen mit MATLAB 126

8 Fourier-Transformation für zeitkontinuierliche Signale 129
8.1 Aufgaben 129
8.2 Lösungen 132

9 Fourier-Transformation für zeitdiskrete Signale 144
9.1 Aufgaben 144
9.2 Lösungen 148
9.3 Übungen mit MATLAB 155

10 Diskrete Fourier-Transformation (DFT, FFT, DCT) 160
10.1 Aufgaben 160
10.2 Lösungen 160
10.3 Übungen mit MATLAB 161

11 **Digitale Verarbeitung analoger Signale** 171
11.1 Übungen mit MATLAB 171

12 Grundbegriffe aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung 173
12.1 Aufgaben 173
12.2 Lösungen 173
12.3 Übungen mit MATLAB 174

13 Stochastische Signale und LTI-Systeme 179
13.1 Aufgaben 179
13.2 Lösungen 182
13.3 Übungen mit MATLAB 185
13.4 Anhang zum Matched-Filter 194

14 Zustandsraumdarstellung 197
14.1 Aufgaben mit Lösungen 197
14.2 Übungen mit MATLAB 197

Übungsteil zum Buch – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

1 Erste Schritte in MATLAB

1.1 Einführung

Es liegt in der Natur der Sache, dass ein mächtiges Werkzeug wie MATLAB® weder auf wenigen Seiten beschrieben noch in den wichtigsten Funktionen schnell beherrscht werden kann. Dieser Abschnitt soll Sie deshalb bei den ersten Schritten in MATLAB unterstützen. Anhand einfacher Beispiele wird gezeigt, wie Sie arithmetische Ausdrücke verarbeiten, einfache Grafiken erzeugen, eigene Programme mit Unterprogrammen und Funktionen erstellen und benützen können. Die Möglichkeiten von MATLAB werden sich Ihnen mit zunehmender Übung erschließen. Die kommentierten Programmbeispiele zu den einzelnen Versuchen und die ausführliche Dokumentation von MATLAB werden Ihnen dabei helfen.

Anmerkungen: (i) MATLAB® ist ein eingetragenes Warenzeichen der Firma The MathWorks, Inc., U.S.A. MATLAB ist als Studentenversion verfügbar und wird mit einer ausführlichen Online-Hilfe sowie Online-Einführungskursen ausgeliefert. Für mehr Informationen siehe www.mathworks.com oder www.mathworks.de (ii) Über Bücher zur Signalverarbeitung mit MATLAB informiert die Webseite von The MathWorks mathworks.com/support/books/index.html. Eine Aufstellung mit ca. 50 deutschsprachigen Büchern kann ausgewählt werden. (iii) Für die Beispiele wurde MATLAB 7.3 (R2006b) unter Windows XP® verwendet.

1.2 Programmstart und einfache Befehle

1.2.1 MATLAB-Entwicklungsumgebung

Nach dem Start von MATLAB erscheint wie in Bild 1-1 die voreingestellte MATLAB-Bedienoberfläche `MATLAB Desktop` mit Menüleiste, Schaltknöpfen und drei geöffneten Fenstern: `Current Directory` ①, `Command History` ② und `Command Window` ③. Das Fenster `Workspace` ④ verbirgt sich unter dem Fenster `Current Directory`.

Abhängig von Ihrer Installation (Versionsnummer, Studentenversion und Zusatzpakete wie SIMULINK) können Ihre Bildschirmanzeigen von den Beispielen abweichen. Vom `MATLAB Desktop` aus haben sie Zugriff auf die Entwicklungsumgebung von MATLAB.

Anmerkungen: (i) Die Voreinstellung des `MATLAB Desktop` erreichen sie über die Menüleiste mit `Desktop` ☞ `Desktop Layout` ☞ `Default`. (ii) Das Arbeiten mit den Fenstern, den Menüleisten und Schaltelementen, geschieht in der PC-üblichen Art.

1.2.2 Einfache arithmetische Operationen

Wir beginnen mit der Voreinstellung in Bild 1-1. Für die ersten Schritte benötigen wir nur das `Command Window`. Der Übersichtlichkeit halber schließen Sie die anderen Fenster links durch Klicken mit der Maus auf das Symbol × am jeweiligen oberen Fensterrahmen rechts.

Im `Command Window` erscheint der MATLAB Prompt `>>`. Dort können Befehle direkt eingegeben werden. Im interaktiven Modus fasst MATLAB alle Eingaben als Befehle auf und führt sie nach Möglichkeit direkt aus.

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

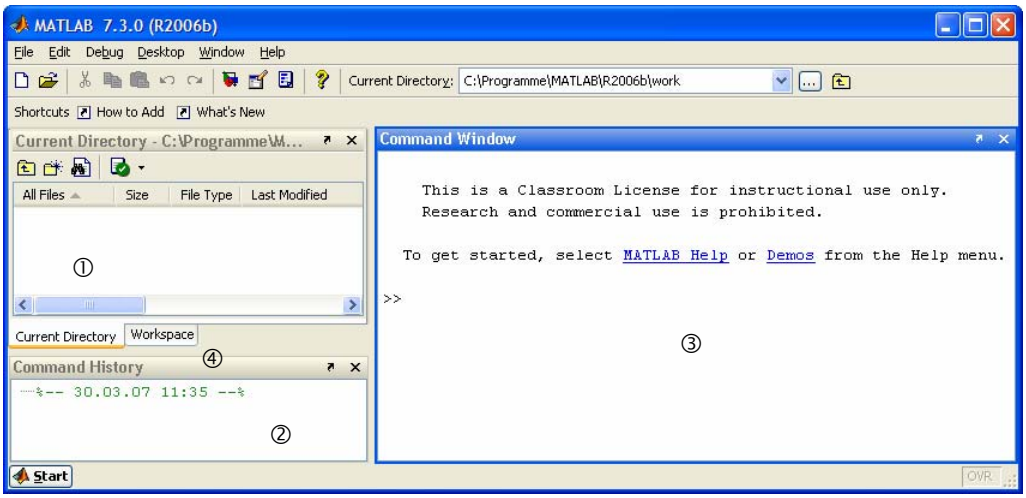


Bild 1-1 MATLAB-Bedienoberfläche (`MATLAB Desktop`)

Tippen Sie einfach `2+3` ein und drücken Sie dann die Eingabetaste ↵ zur Übernahme des Befehls durch den Rechner.

```
>> 2+3 ↵
```

Sie erhalten als Ergebnis die Antwort (`answer`)

```
ans = 5
```

MATLAB verfügt über die üblichen arithmetischen Operatoren und darüber hinaus über weitere arithmetische und logische Operatoren, Vergleichsoperatoren und spezielle Zeichen, die den Umgang mit Vektoren und Matrizen erleichtern.

Ein Beispiel ist der Potenzoperator `^` . Geben Sie ein

```
>> 3^3 ↵
```

und Sie erhalten

```
ans = 27
```

Arithmetische Ausdrücke können mit Klammern definiert werden. Auf die Eingabe

```
>> 4*(4-3+2/4) ↵
```

antwortet MATLAB mit

```
ans = 6
```

Zum Bearbeiten einer Eingabe stehen Ihnen die Cursor-Tasten zur Verfügung. Mit ↑ können Sie frühere Eingaben wieder in die Kommandozeile laden und bearbeiten.

Schließen Sie eine Kommandozeile mit dem Semikolon `;` ab, so wird die Anzeige des Ergebnisses unterdrückt. MATLAB antwortet nur mit dem Prompt.

Als Beispiel betrachten wir die letzte Eingabe. Mit der Pfeiltaste ↑ holen Sie sie wieder hervor. Nun schließen Sie das Kommando mit einem Semikolon ab.

```
>> 4*(4-3+2/4); ↵
```


© Martin Werner, Fulda 2008

1.2.3 Konstanten und Variablen

Namen von Konstanten und Variablen beginnen in MATLAB stets mit einem Buchstaben. Sie können bis zu 63 Zeichen (Buchstaben, Ziffern, Unterstrich) enthalten. MATLAB unterscheidet zwischen Groß- und Kleinschreibung.

Das nachfolgende Beispiel verdeutlicht die Anwendung von Variablen

```
>> A = 2; ↵
>> a = 4; ↵
>> B = A/a; ↵
```

Der Wert einer Variablen wird durch Eingabe des Namens am Bildschirm angezeigt.

```
>> B ↵
B = 0.5
```

MATLAB verfügt über einige vordefinierte Konstanten. Von besonderer Bedeutung ist die (Kreis-)Zahl π und die imaginäre Einheit i bzw. j. So lassen sich komplexe Zahlen einfach eingeben.

```
>> z = 1+2j ↵
z = 1.0000 + 2.0000i
```

und

```
>> z = 2+3i ↵
z = 2.0000 + 3.0000i
```

Die Zahl π, genauer die in MATLAB verwendete Näherung, erhält man mit

```
>> pi ↵
ans = 3.1416
```

Die Anzeige am Bildschirm hängt von der Einstellung des Ausgabeformates ab. Der tatsächlich intern verwendete Wert ist davon unabhängig.

Das jeweils letzte Ergebnis wird in der Variablen `ans` gespeichert. Beachten Sie auch, dass die vordefinierten Konstanten durch Befehlseingabe überschrieben werden können.

Anmerkung: MATLAB benutzt das Zahlenformat des IEEE-Standards für Gleitkomma-Arithmetik (IEEE standard for floating point arithmetic, ANSI/IEEE 754-1985) mit der Genauigkeit von ca. 16 Dezimalstellen und einem Wertebereich von etwa 10^{-308} bis 10^{+308}.

1.2.4 MATLAB `help`-Kommando

Tippen Sie einfach `help pi` ein und drücken Sie dann die Eingabetaste ↵ zur Übernahme des Befehls durch den Rechner.

```
>> help pi ↵
```

Sie erhalten die kurze Erklärung

```
PI   3.1415926535897....
PI = 4*atan(1) = imag(log(-1)) = 3.1415926535897....
```

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

In der zweiten Zeile ist der Zusammenhang zwischen der Zahl π und der Arkustangens-Funktion `atan` und dem Imaginärteil `imag` der natürlichen Logarithmus-Funktion `log` angegeben. Funktionen in MATLAB werden später bei Bedarf noch genauer vorgestellt.

Wenn Sie mehr über die Formateinstellung wissen wollen, so können Sie sich die Optionen des Befehls `format` durch Eingabe von `help format`↵ anzeigen lassen. Dort erhalten Sie in der Regel auch eine Verknüpfung mit dem `Help Browser`, wo Sie weitere Informationen und Beispiele finden.

1.2.5 Vektoren und Matrizen

Vektoren und Matrizen sind als geordnete Abfolgen von Zahlen in natürlicher Weise als zeitdiskrete Signale aufzufassen und spielen in der digitalen Signalverarbeitung eine herausragende Rolle. MATLAB erleichtert den Umgang mit Vektoren und Matrizen durch spezielle Befehle zu ihrer Erzeugung und Verknüpfung.

Vektoren lassen sich mit eckigen Klammern „`[ ]`“ und dem Semikolon „`;`“ durch Angabe der Zahlenwerte einfach erzeugen. Geben Sie dazu folgendes Beispiel ein

```
>> x = [1 2 3] ↵
```

Sie erhalten von MATLAB den Zeilenvektor

```
x = 1     2     3
```

Mit Semikolon zwischen den Zahlen ergibt sich der Spaltenvektor

```
>> y = [1; 2; 3] ↵
y =  1
     2
     3
```

Mit den letzten beiden Befehlen haben Sie in MATLAB Datenfelder erzeugt, sogenannte `Arrays`, deren Elemente im MATLAB Arbeitsspeicher, dem `Workspace`, abgelegt sind. Über den Inhalt und die Organisation des `Workspace` informieren Sie sich im `Command Window` durch Eingabe des Befehls `whos`.

```
>> whos ↵
  Name      Size            Bytes  Class     Attributes
  A         1x1                 8  double
  B         1x1                 8  double
  a         1x1                 8  double
  x         1x3                24  double
  y         3x1                24  double
  z         1x1                16  double    complex
```

Der Befehl `whos` listet alle im Speicher abgelegten Variablen mit ihren Dimensionen (`size`) in der Form „Zahl der Zeilen × Zahl der Spalten“ auf.

Anmerkungen: (i) Die Form der Anzeige kann im Fenster `Workspace` im Menü `View` eingestellt werden. (ii) Falls die Variable `ans` verwendet wurde, taucht sie ebenfalls hier auf.

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

Alternativ können Sie in der Menüleiste unter `Desktop` die Option `Workspace` auswählen. Dann erhalten Sie das Fenster `Workspace` mit der Übersicht und zusätzliche Bearbeitungsmöglichkeiten, siehe Bild 1-2. Die Anzeige können Sie beispielsweise mit dem Menü-Punkt `View` und dann `Choose Columns` anpassen.

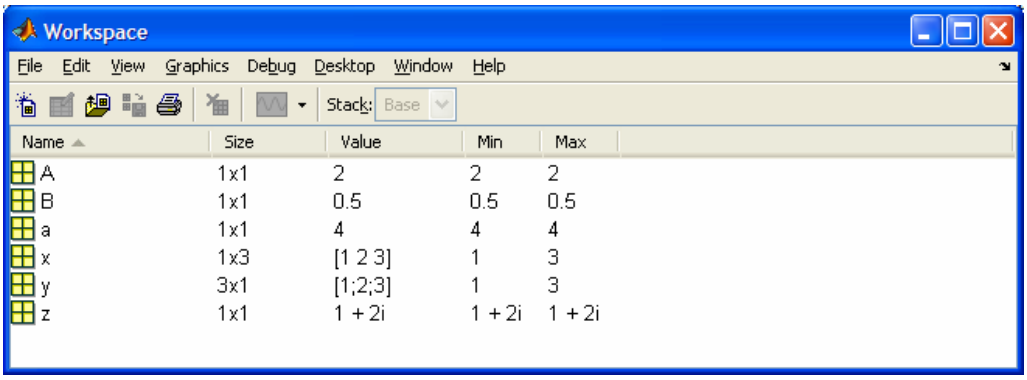


Bild 1-2 Fenster `Workspace`

Mit dem Befehl `clear` wird der gesamte `Workspace` gelöscht.

```
>> clear ↵
```

Wiederholen Sie die Eingaben zweier Vektoren **x** und **y** mit

```
>> x = [1 2 3]; ↵
>> y = [4; 5; 6]; ↵
```

Die Dimension der Vektoren kann auch mit dem Befehl `size` bestimmt werden.

```
>> size(x) ↵
ans = 1     3
```

Die Angabe ist wieder im Format „Zahl der Zeilen × Zahl der Spalten“. Für eindimensionale `Arrays`, ob Zeile oder Spalte, kann auch der Befehl `length` verwendet werden.

Da MATLAB eine aufwendige Speicherverwaltung durchführt, können bei kompatiblen Dimensionen viele Befehle direkt auf Vektoren oder Matrizen angewandt werden. Wir betrachten einige Beispiele.

Zunächst beginnen wir mit einem einzelnen Element eines Vektors. Durch

```
>> x(2) ↵
ans = 2
```

erhalten Sie den aktuellen Wert des zweiten Elements des Vektors **x**.

Mit

```
>> x(2) = 7 ↵
ans = 1     7     3
```

wird dem zweiten Element der Wert 7 zugewiesen. Beachten Sie, dass MATLAB die Elemente eines Vektors mit dem Index 1 beginnend adressiert!

© Martin Werner, Fulda 2008

```
>> x(0) ↵
??? Subscript indices must either be real positive
integers or logicals.
```

Mit MATLAB können auch Vektoren miteinander verknüpft werden. Die Addition der beiden Vektoren

```
>> x+y ↵
```

liefert eine Fehlermeldung, da die Dimensionen bzgl. der Addition inkompatibel sind. Der Zeilenvektor **x** kann nicht mit dem Spaltenvektor **y** addiert werden.

```
??? Error using ==> plus
Matrix dimensions must agree.
```

Ein häufiger Programmierfehler ist die Verknüpfung von Datenfeldern mit inkompatiblen Dimensionen - MATLAB wird Sie durch Fehlermeldungen darauf hinweisen.

Durch den Operator ´ kann eine Transposition (Zeilen- und Spaltenvertauschung) eines Vektors oder einer Matrix vorgenommen werden. Mit

```
>> z = y´ ↵
z = 4     5     6
```

erhält man einen Zeilenvektor der nun elementweise zu **x** addiert werden kann.

```
>> x + z ↵
ans = 5    12     9
```

Die Addition von zwei Spaltenvektoren ist ebenso möglich.

Anmerkung: Mit ´ werden Vektoren und Matrizen mit komplexen Zahlen zusätzlich konjugiert.

Auch eine elementweise Multiplikation kann durchgeführt werden. Dazu wird der Multiplikationsoperator mit einem vorangestellten Punkt erweitert `.*` .

```
>> x.*z ↵
ans = 4    35    18
```

Werden hingegen die beiden Vektoren nur mit dem Multiplikationszeichen * verknüpft, so wird – bei kompatiblen Dimensionen – das Skalarprodukt ($1 \cdot 4 + 7 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 57$) ausgeführt.

```
>> x*y ↵
ans = 57
```

Die explizite Definition von Vektoren und Matrizen durch Eingabe der Elemente kann beschwerlich sein. Um dem abzuhelfen, bietet MATLAB spezielle Befehle an. Mit den folgenden Befehlen werden häufig benötigte Matrizen erzeugt.

```
>> x = ones(2,3) ↵
x =  1    1    1
     1    1    1
```


© Martin Werner, Fulda 2008

```
>> x = zeros(3,2) ↵
x =  0    0
     0    0
     0    0
>> x = repmat(7,2,3) ↵
x =  7    7    7
     7    7    7
```

Eine weitere wichtige Möglichkeit Datenfelder zu erzeugen, ist die Anwendung des Doppelpunkt-Operators `:` . Er erzeugt Datenfelder mit Elementen gleichen Abstandes. Durch

```
>> t = 0:10 ↵
```

wird ein eindimensionales Datenfeld (Zeilenvektor) mit der Bezeichnung `t` erstellt und angezeigt, das die Werte von 0 bis 10 in Einser-Schritten enthält.

```
t =
  Columns 1 through 7
     0    1    2    3    4    5    6
  Columns 8 through 11
     7    8    9    10
```

Die vorgestellten Beispiele geben erste Einblicke in die Möglichkeiten mit MATLAB Vektoren und Matrizen zu erzeugen und zu bearbeiten. Im Laufe der Versuche werden sich weitere dazugesellen.

1.2.6 Vordefinierte MATLAB-Funktionen und einfache Grafiken

Eine Stärke von MATLAB ist die umfangreiche Sammlung von vordefinierten Funktionen. Dies trifft sowohl auf die MATLAB-Grundausstattung als auch auf die Erweiterungspakete, Toolboxes genannt, zu. Die in den Versuchen benötigten Funktionen werden bei Bedarf eingeführt.

Exemplarisch soll die Sinusfunktion grafisch dargestellt werden. Dazu wählen Sie zunächst eine Anzahl von äquidistanten Stützstellen.

```
>> t = 0:.1:10; ↵
```

Mit

```
>> y = sin(t); ↵
```

erstellen Sie ein Datenfeld, das die Ergebnisse der Sinusfunktion angewandt auf jedes Element von `t` enthält.

Eine grafische Darstellung der Sinusfunktion in einem eigenen Fenster erzeugen Sie durch den Befehl

```
>> plot(t,y) ↵
```

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

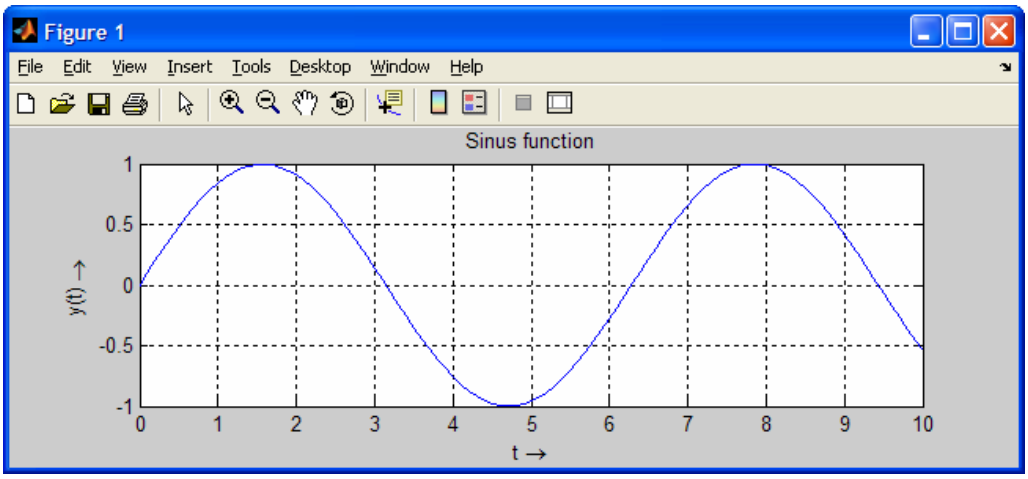


Bild 1-3 Grafische Darstellung der Sinusfunktion mit MATLAB

Die Darstellung kann mit weiteren Befehlen ergänzt werden, siehe Bild 1-3.

```
>> grid ↵
>> xlabel('t \rightarrow') ↵
>> ylabel('y(t) \rightarrow') ↵
>> title('Sinus function') ↵
```

Mit dem Befehl `help plot` erhalten Sie eine Zusammenfassung von Optionen und eine Liste von Befehlen, mit denen Sie später grafische Ausgaben Ihren Bedürfnissen anpassen können. Darüber hinaus bietet Ihnen MATLAB im Grafikfenster nachträglich Optionen zur Bearbeitung von Grafiken an.

Die Darstellung am Bildschirm geschieht in der Regel nach linearer Interpolation der Funktionswerte zwischen den Stützstellen. Für die digitale Signalverarbeitung – wenn nur wenige Funktionswerte dargestellt werden sollen – ist die Interpolation irreführend. Deshalb enthält MATLAB den Grafikbefehl `stem`. Machen Sie sich den Unterschied bewusst, indem Sie die grafische Darstellung für die Sinusfunktion bei einer geringen Stützstellenzahl pro Periode mit dem Plotbefehlen `plot` und `stem` wiederholen.

```
>> t = 0:10; ↵
>> y = sin(t); ↵
>> plot(t,y), grid ↵
>> xlabel('t \rightarrow'), ylabel('y(t) \rightarrow') ↵
>> title('Sinus function with few samples') ↵
```

Das resultierende Bild 1-4 lässt deutlich die interpolierten Geradenstücke zwischen den Stützwerten erkennen.

© Martin Werner, Fulda 2008

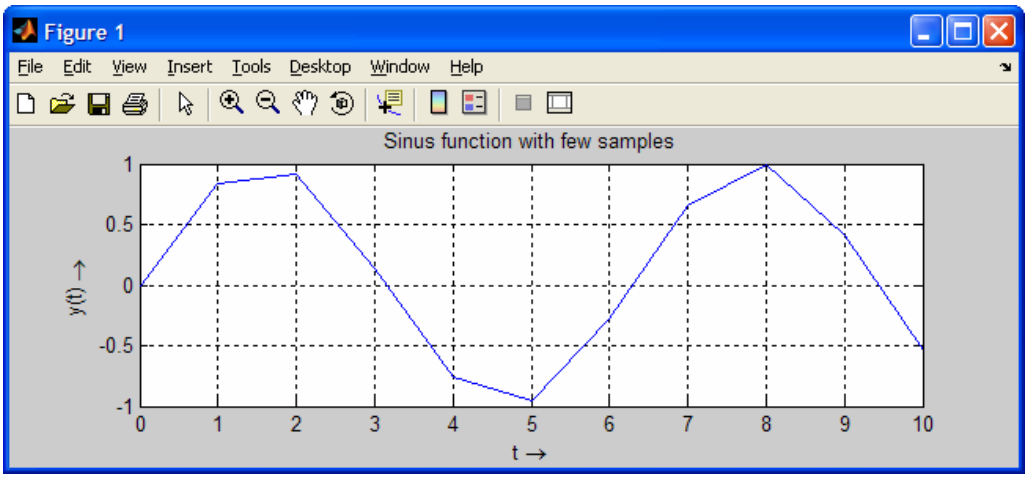


Bild 1-4 Sinusfunktion mit dem Grafikbefehl `plot` mit wenigen Stützstellen

Führen Sie nun die grafische Darstellung mit dem Befehl `stem` durch.

```
>> stem(t,y,'full'), grid ↵
>> xlabel('t \rightarrow'), ylabel('y(t) \rightarrow') ↵
>> title('Sampled sinus function in discrete-time
representation') ↵
```

Das jetzt dargestellte Bild 1-5 hebt den diskreten Charakter der Stützstellen hervor. Die Formatangabe `full` ist optional und kann zur Hervorhebung eingesetzt werden.

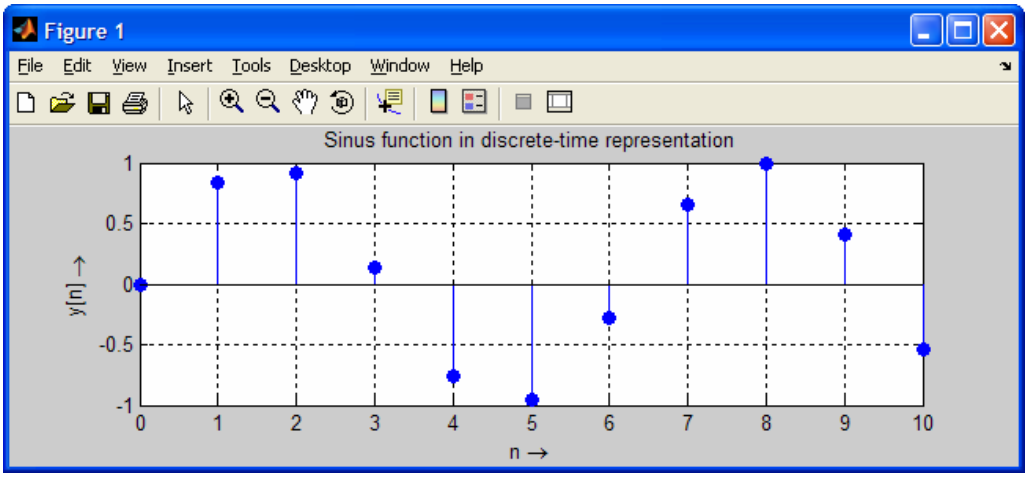


Bild 1-5 Sinusfunktion in diskreter Darstellung mit dem Grafikbefehl `stem`

© Martin Werner, Fulda 2008

1.2.7 MATLAB-Programm im Editor/ Debugger-Window

Nachdem Sie das Command Window kennen gelernt haben, sollen Sie sich nun mit einfachen MATLAB-Programmen vertraut machen. Da MATLAB als Interpreter-Sprache die Befehlszeile sequentiell bearbeitet, liegt es nahe, mehrere Eingaben in einer Text-Datei, dem MATLAB Script File, zusammenzufassen. Damit MATLAB derartige Dateien als solche erkennen kann, sind sie mit der Endung .m zu versehen, wie beispielsweise sin.m, oder pi.m. Sie werden deshalb kurz als M-File bezeichnet.

Um ein M-File zu erstellen, wählen Sie in der Menüleiste des MATLAB Desktop den Menüpunkt File ☞ New ☞ M-File an. Danach erscheint das Editor/ Debugger-Window am Bildschirm. Sie können nun die in Bild 1-6 angegebenen Programmzeilen eingeben:

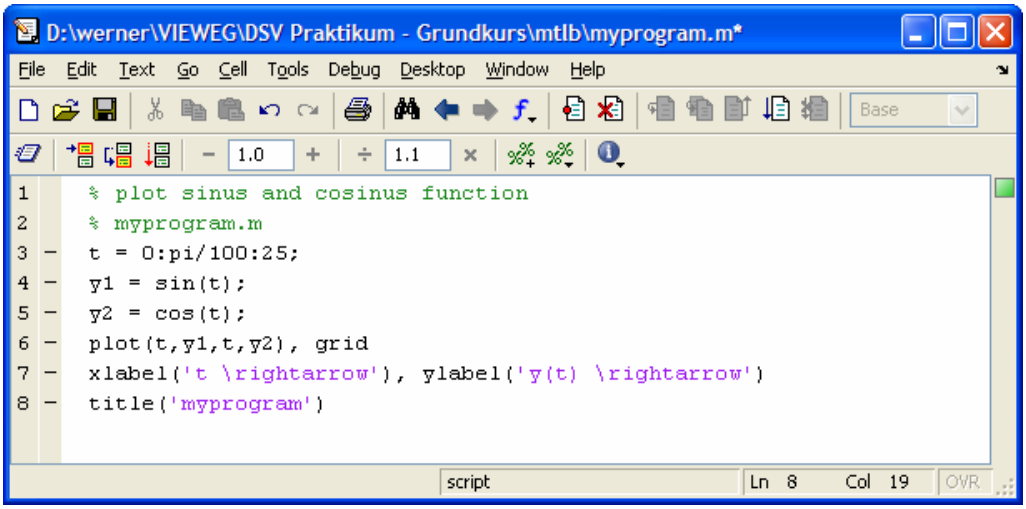


Bild 1-6 Programmerstellung im Editor/Debugger-Window

Zum Speichern des Programms gehen Sie nun zur Menüleiste, klicken dort File ☞ Save an und geben im File-Save-Fenster den Namen des Programms myprogram ein, der dann automatisch mit der Endung .m versehen wird.

Günstigerweise legen Sie zum Speichern von MATLAB-Programmen, Daten usw. ein eigenes Verzeichnis an. Stellen Sie das Arbeitsverzeichnis Current Directory von MATLAB im Command Window auf Ihr Verzeichnis um. Über den Menü-Punkt Desktop ☞ Current Directory kann das Arbeitsverzeichnisfenster eingeblendet werden.

Beachten Sie auch, mit dem Prozentzeichen % definieren Sie den Rest der Zeile als Kommentar. Nutzen Sie die Möglichkeit der Kommentierung ausgiebig, um Ihre Programme verständlich zu machen. Mit dem help-Kommando und dem Namen eines M-Files, z. B. help myprogram, werden alle dort direkt am Dateianfang stehenden Kommentarzeilen angezeigt. Damit lassen sich auf einfache Weise Hilfstexte zu Ihren Programmen erstellen.

Das Programm kann nun über verschiedene Wege gestartet werden. Im Command Window müssen Sie dazu hinter dem MATLAB-Prompt den Namen des Programms eingeben – aber

© Martin Werner, Fulda 2008

ohne die Endung `.m`. Nun wird das Programm abgearbeitet und die Sinusfunktion grafisch dargestellt.

Im `Editor/Debugger-Window` wird das Programm über das Menü `Debug` ☞ `Run` (bzw. `Save and Run`), oder kurz mit der Steuertaste F5, zur Ausführung gebracht.

Anmerkung: In MATLAB sind nützliche Debug-Werkzeuge eingebaut, mit denen Sie sich später vertraut machen können.

Eine weitere Möglichkeit, ein `M-File` zu starten, ist die Auswahl des Programms mit der rechten Maustaste im Fenster `Current Directory` und Wahl der Option `Run`.

Bei der Interpretation der Befehle prüft MATLAB zunächst, ob die eingegebene Zeichenkette eine Größe im `Workspace` benennt. Ist das nicht der Fall, wird in den im `MATLAB Path` angegebenen Verzeichnissen nach einem `M-File` entsprechenden Namens gesucht. MATLAB beginnt dabei immer im aktuellen Arbeitsverzeichnis. Das erste vom Namen her passende `M-File` wird ausgeführt.

1.2.8 Verkettete Programme und Unterprogramme

Das kleine Programmbeispiel in Bild 1-6 ist vom Prinzip her eine Verkettung von MATLAB-Programmen. Taucht in einem `M-File` der Name eines weiteren `M-File` auf, so wird es geöffnet und sein Inhalt wie Tastatureingaben im `Command Window` interpretiert. Alle neu definierte Datenfelder werden im `Workspace` abgelegt und stehen auch nach der Bearbeitung des `M-File` als globale Variablen zur Verfügung.

Dies ist für kleine Programmbeispiele sehr passend. Bei umfangreichen Projekten würden sich jedoch sehr schnell folgende Probleme einstellen:

- Überlastung des Arbeitsspeichers
- unstrukturierte Programme
- unzumutbare Programmlaufzeiten
- häufige Programmierfehler und unbeabsichtigtes Überschreiben von Daten

MATLAB unterstützt deshalb MATLAB-eigene und anwenderdefinierte Funktionen. Bei den MATLAB-eigenen Funktionen handelt es sich um `M-Files` oder in sich geschlossene speicher- und laufzeitoptimierte Programm-Module.

Anwenderdefinierte Funktionen werden zwar prinzipiell wie Tastatureingaben im `Command Window` interpretiert, besitzen aber eine definierte Schnittstelle zum aufrufenden Programm und verwalten ihre Daten lokal. Das folgende Beispiel soll Ihnen das Arbeiten mit selbstdefinierten Funktionen erläutern.

Wir wählen ein etwas anspruchsvolleres Beispiel aus der Signalverarbeitung, die Approximation eines periodischen Rechteckimpulszuges durch den Gleichanteil und die Harmonischen der Fourier-Reihe.

Bild 1-7 zeigt einen Ausschnitt aus einem periodischen Rechteckimpulszug in normierter Darstellung. Die Periode beträgt 1. Die Amplitude alterniert im Abstand der halben Periode zwischen +1 und 0.

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

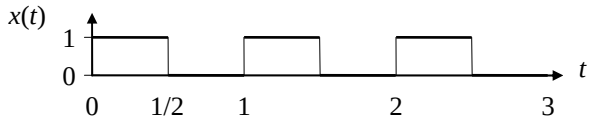


Bild 1-7 Periodischer Rechteckimpulszug in normierter Darstellung

Wir erstellen zunächst eine MATLAB-Funktion für die Funktionswerte des periodischen Rechteckimpulses.

Bevor Sie beginnen, löschen Sie zuerst den `Workspace` mit dem Kommando `clear` im `Command Window`. Dann öffnen Sie ein neues `Editor/Debugger-Window` und geben die folgenden Zeilen ein.

Programmbeispiel 1-1 Rechteckimpulszug

```
function y = rectangular(t,p,w)
% y = rectangular(t,p,w)
%  t : time samples (t>=0)
%  p : period
%  w : impulse width
% rectangular.m * mw * 03/30/2007
y = zeros(size(t));                              % default amplitude = 0
for n=1:length(t)
    x = mod(t(n),p);             % mapping of t into fundamental period
    if x>=0 && x<=w
        y(n) = 1;                                    % set amplitude = 1
    end
end
```

Anmerkung: Das Programm enthält bereits einige MATLAB-eigene Funktionen, Operatoren und Steuerelemente. Mit dem `help`-Kommando zu `mod`, `>=` , `&&` und `for` haben Sie Zugriff auf die jeweilige MATLAB-Dokumentation.

Die Approximation des periodischen Rechteckimpulszuges geschieht mit der aus der Mathematik bekannten Fourier-Reihe

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \cdot \sin\left((2n+1) \cdot 2\pi \cdot t\right)$$

Dazu erstellen Sie folgendes Programm:

Programmbeispiel 1-2 Fourier-Reihe

```
function y = fourier(t,N)
% y = fourier(t,N)
%  t : time samples
%  N : number of harmonics used (N>=1)
% fourier.m * mw * 03/30/2007
y = 0.5*ones(size(t));                                % constant 1/2
for n=0:N-1
    y = y + ((2/pi)/(2*n+1)) * sin((2*n+1)*2*pi*t);
end
```


© Martin Werner, Fulda 2008

Speichern Sie die Funktion als `M-File` mit dem Namen `fourier.m` ab.

Abschließend wird das Hauptprogramm mir der Festlegung der Parameter, dem Aufruf der Funktionen und der grafischen Ausgabe erstellt. Speichern Sie das folgende Hauptprogramm als `M-File` mit dem Namen `fouriersyn.m` ab.

Programmbeispiel 1-3 Hauptprogramm

```
% Fourier synthesis
% fouriersyn.m * mw * 03/30/2007
t  = 0:.01:3;                                          % time samples
y  = rectangular(t,1,.5);                    % rectangular impulse train
yF = fourier(t,10);              % fourier synthesis with 10 harmonics
plot(t,y,t,yF), grid                                        % graphics
axis([0 3 -0.2 1.2])
xlabel('t \rightarrow'), ylabel('y(t), y_{F}(t) \rightarrow')
title('Fourier synthesis of rectangular impulse train')
```

Nach dem Aufruf des Programms `fouriersyn` sollten Sie die Grafik in Bild 1-8 erhalten. Sie zeigt das aus der Mathematik bekannte Ergebnis mit den Überschwingern der abgebrochenen Fourier-Reihe, dem gibbschen Phänomen.

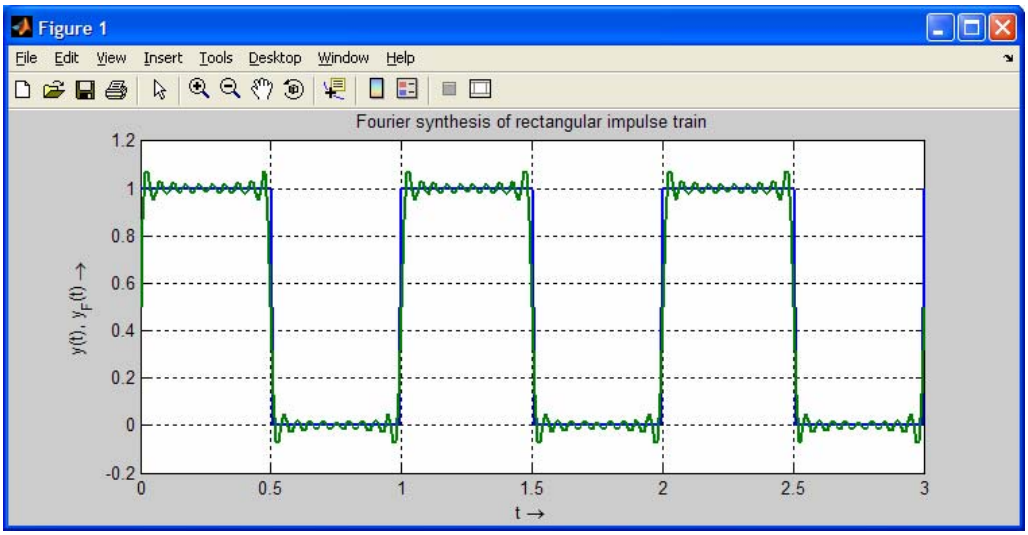


Bild 1-8 Periodischer Rechteckimpulszug in normierter Darstellung $y(t)$ und seine Approximation $y_F(t)$ durch den Gleichanteil und die ersten zehn Harmonischen

In der MATLAB-Dokumentation wird zwischen einem `Script` und einer `Function` unterschieden. Ersteres erzeugt als Folge von MATLAB-Befehlen globale Variablen, während eine Funktion mit lokalen Variablen arbeitet und Daten über ihre Schnittstelle, dem Funktionsaufruf, austauscht. Mit dem Befehl `whos` oder im Fenster `Workspace` können Sie das an den Programmbeispielen überprüfen. Die in den Funktionen verwendeten Variablen `x` und `n` sind als lokale Variable nicht im Arbeitsspeicher enthalten.

© Martin Werner, Fulda 2008

1.2.9 MATLAB `Help` und MATLAB `Demo`

Eine wichtige Möglichkeit sich zunächst mit MATLAB etwas vertrauter zu machen, bietet das MATLAB-Fenster `Help`, siehe Bild 1-9. Dort finden Sie unter dem Link `Getting Started with MATLAB` eine Einführung in MATLAB.

Das Fenster ist u. a. über das Menü `Help`, das Fragezeichen `?` oder durch Anklicken von `MATLAB help` im `Command Window` erreichbar.

MATLAB bietet mit dem Kommando `demo` bzw. den Reiter `Demos` im `Help Navigator` eine Auswahl von animierten Einführungen und Beispielen an, siehe Bild 1-10. Als Vorbereitung auf die kommenden Versuche sollten Sie sich mit den einführenden Video-Beispielen zur Entwicklungsumgebung `Desktop Tools and Development Environment` vertraut machen. Für die effektive Entwicklung von MATLAB-Programmen ist die Anwendung des `Cell Mode` besonders hervorzuheben, siehe Video `Rapid Code Iteration Using Cells`.

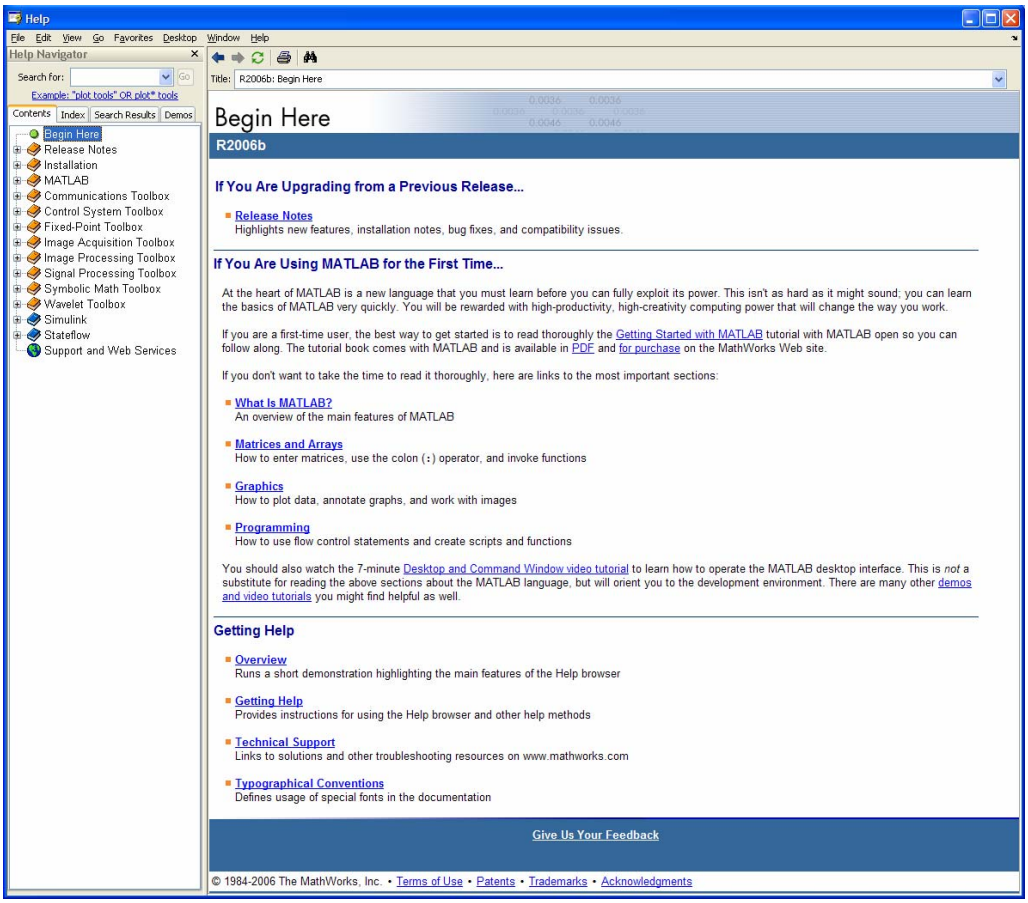


Bild 1-9 `MATLAB Help Window`

© Martin Werner, Fulda 2008

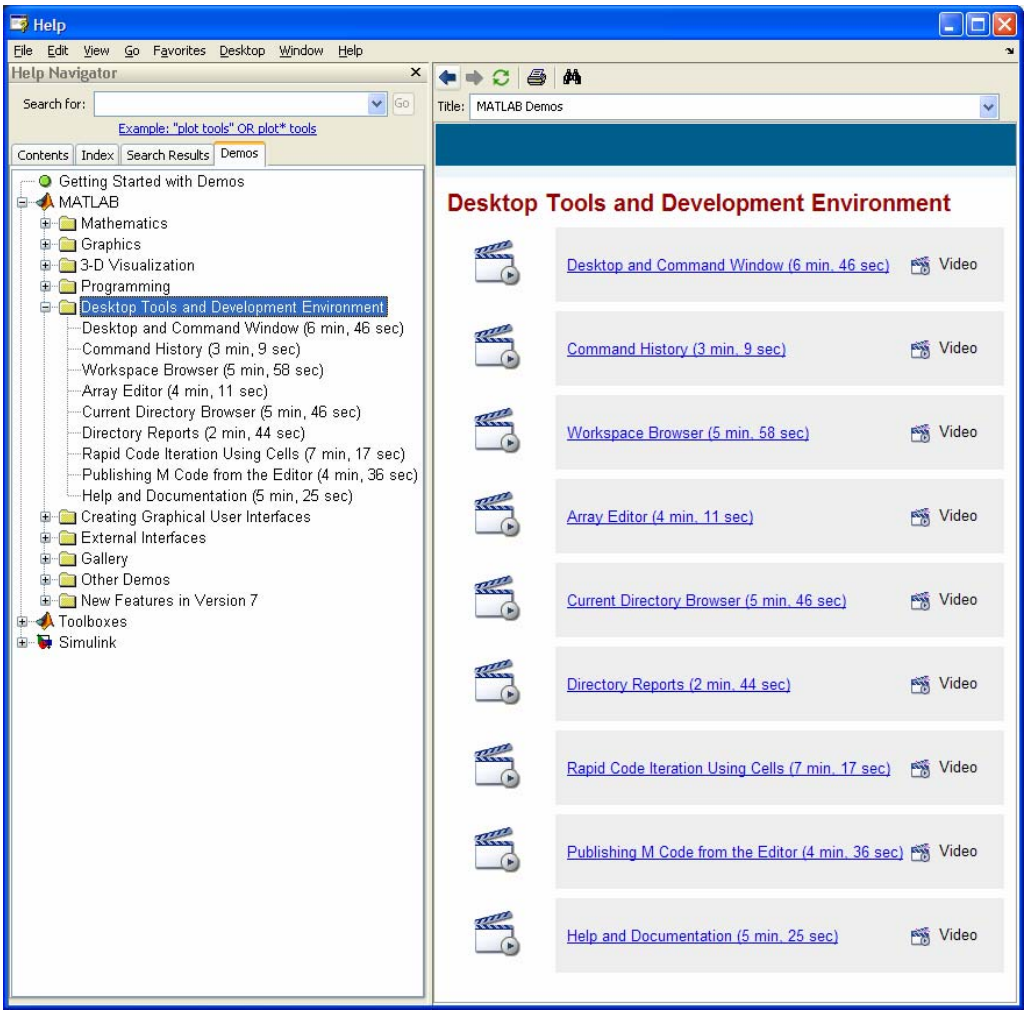


Bild 1-10 `MATLAB Demo Window` mit animierten Einführungen zu `Desktop Tools and Development Environment`

Falls das für Sie der erste Kontakt mit MATLAB sein sollte, bedenken Sie, dass ein Programmsystem und Entwicklungsumgebung wie MATLAB nicht in einem Trockenkurs anhand einer Bedienungsanleitung erlernt werden kann. Hier ist „Lernen durch gezieltes Probieren“ der sinnvollste Weg.

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

2 Grundbegriffe der Signal- und Systemtheorie

2.1 Klassifizierung von Signalen

2.1.1 Aufgaben

Aufgabe A2.1-1 Abtastfolge ✍ ★

Gegeben ist das in Bild 2-1 gezeigte, abschnittsweise lineare Signal $x(t)$. Skizzieren Sie die Abtastfolge $x[n]$ für $T_{a1} = 1$ und $T_{a2} = 2$.

Beschreiben Sie mit Worten was die Verdopplung des Abtastintervalls bewirkt.

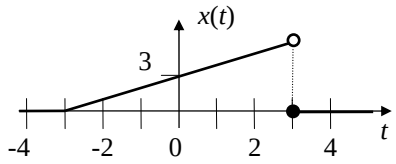


Bild 2-1 Signalverlauf

Aufgabe A2.1-2 Strecken, Stauchen und Spiegeln von Signalen ✍ ★

Gehen Sie von der Funktion $x(t)$ in Bild 2-1 aus. Skizzieren Sie jeweils die Funktion für $x(t_i)$ für $i = 1$, 2 und 3 mit $t_1 = 0{,}5t$, $t_2 = 2t$, $t_3 = -t$.

Aufgabe A2.1-3 Verschiebung und Spiegelung ✍ ★

Skizzieren Sie für $x_1[n] = \{1, 2, 3, 2, 2\}$ die Folgen

a) $x_1[n]$

b) $x_2[n] = x_1[n+2]$

c) $x_3[n] = x_1[n-3]$

d) $x_4[n] = x_1[-n]$

Aufgabe A2.1-4 Gerader und ungerader Anteil eines Rechteckimpulses ✍ ★

Gegeben ist die Folge eines Rechteckimpulses $x[n] = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$.

a) Skizzieren Sie $x[n]$.

b) Skizzieren Sie den ungeraden und geraden Anteil des Rechteckimpulses.

Aufgabe A2.1-5 Gerader und ungerader Anteil ✍ ★

In Bild 2-2 ist das rechtsseitige Signal $x(t)$ zu sehen.

a) Geben Sie $x(t)$ analytisch an.

b) Zerlegen Sie das Signal in seinen geraden und ungeraden Anteil $x_g(t)$ bzw. $x_u(t)$.

c) Berechnen Sie die Energien des Signals und seiner Anteile.

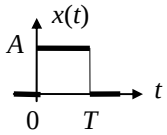


Bild 2-2 Rechtsseitiges Signal

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

Aufgabe A2.1-6 Abtastung der Kosinusfunktion ✍ ★★

Gegeben ist das zeitkontinuierliche Signal $x(t) = \cos(\omega_0 t)$ mit der Frequenz $f_0 = 4/5$ Hz. Das Signal wird viermal je Sekunde abgetastet. Führt die Abtastung auf eine periodische Folge? Wenn ja, geben Sie die Periode an.

Aufgabe A2.1-7 Sinusförmige Spannung ✍ ★

Eine Spannungsquelle erzeuge einen sinusförmigen Spannungsverlauf mit der Amplitude von 2,8 V und der Frequenz von 200 Hz.

a) Stellen Sie den Spannungsverlauf analytisch als Funktion $x(t)$ mit normierten Größen dar.

Hinweis: Physikalische Größen werden zu normierten Größen indem sie durch geeignete Bezugsgrößen geteilt, und somit dimensionslos werden. Zur Unterscheidung der Größen sind die Indizes n bzw. b nützlich. Oft werden, wie hier in der Aufgabe, die Indizes nach der Normierung weggelassen.

b) Skizzieren Sie die Funktion $x(t)$ entsprechend einem Zeitintervall von −10 bis +10 ms.

c) Der Spannungsverlauf wird alle Millisekunde ideal abgetastet. Geben Sie die resultierende Folge $x[n]$ analytisch an.

d) Skizzieren Sie die Folge $x[n]$ für n von −10 bis 10.

2.1.2 Lösungen

Lösung A2.1-1 Abtastfolge ☑

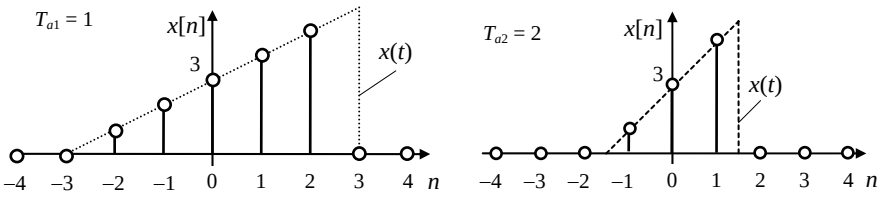


Bild 2-3 Abtastfolge für $x[n] = x(nT)$ mit $T_{a1} = 1$ (links) bzw. $T_{a2} = 2$ (rechts)

Die Verdopplung des Abtastintervalls bewirkt, wie in Bild 2-3 anschaulich zu sehen ist, dass bei der Abtastung das Signal $x(t)$ doppelt so schnell „durchlaufen“ wird. Im Vergleich der beiden Teilbilder scheint das zugrunde liegende analoge Signal rechts um den Faktor zwei gestaucht.

Lösung 2.1-2 Strecken, Stauchen und Spiegeln von Signalen ☑

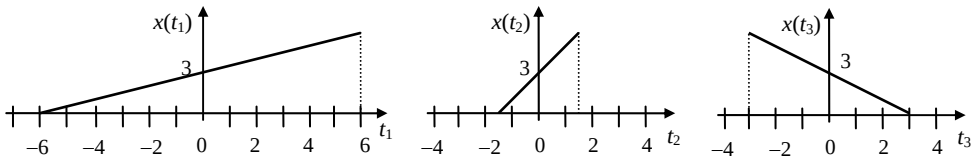


Bild 2-4 Signal $x(t)$ gestreckt (links), gestaucht (mittig) und gespiegelt (rechts)

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

Lösung A2.1-3 Verschiebung und Spiegelung ☑

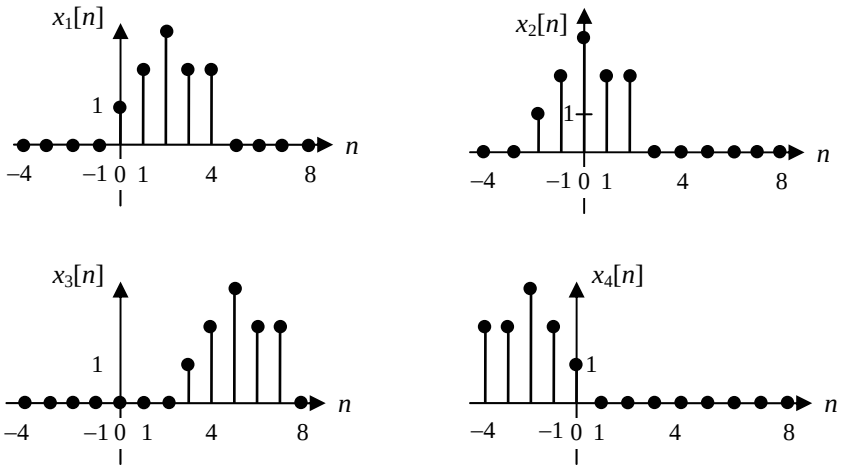


Bild 2-5 Verschobene und gespiegelte Versionen zu $x_1[n]$

Lösung A2.1-4 Gerader und ungerader Anteil eines Rechteckimpulses ☑

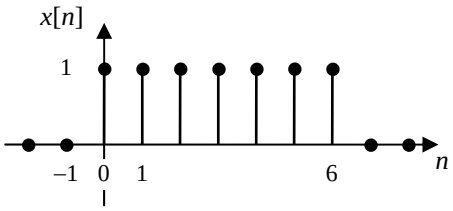


Bild 2-6 Rechteckimpuls $x[n]$

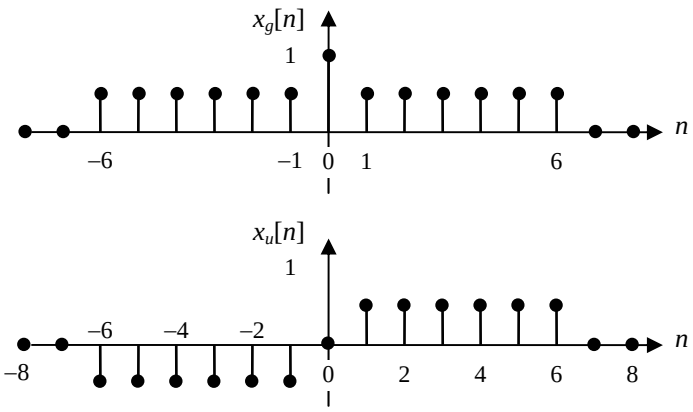


Bild 2.7 Gerader Anteil $x_g[n]$ und ungerader Anteil $x_u[n]$ des Rechteckimpulses $x[n]$

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

Lösung A2.1-5 Gerader und ungerader Anteil ☑

a) $$x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ A & 0 < t < T \\ 0 & t > T \end{cases}$$

Anmerkung: Zu den Funktionswerten an den Stellen $t = 0$ und $t = T$ stellen wir fest, dass $x(t)$ an diesen Stellen unstetig ist. Je nach Anwendung können rechtsseitige oder linksseitige Stetigkeit definiert werden. Eine Definition mit der halben Sprunghöhe ist im Zusammenhang mit der harmonischen Analyse sinnvoll.

b) siehe Bild 2-8

c) $E_x = A^2 T$ und $E_g = E_u = E_x / 2$

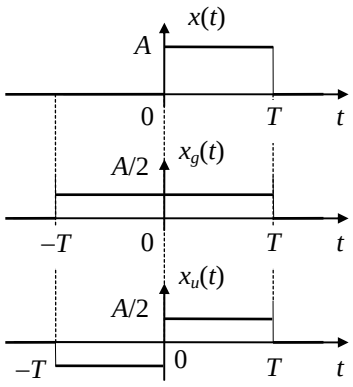


Bild 2-8 Zerlegung von $x(t)$ in den geraden und ungeraden Anteil $x_g(t)$ bzw. $x_u(t)$

Lösung A2.1-6 Abtastung der Kosinusfunktion ☑

Abtastfolge mit dem Abtastintervall $T_a = 1/4$ s

$$x[n] = x(t) = \cos \omega_0 nT = \cos\left(2\pi \frac{4}{5} \text{Hz} \cdot n \frac{1}{4} \text{s} \right) = \cos\left(\frac{2\pi}{5} \cdot n \right)$$

Die Abtastfolge ist nur dann periodisch, wenn $\cos(\omega_0 T_a N) = \cos(2\pi m)$ für die natürlichen Zahlen N und m.

Mit $\omega_0 = 2\pi / T_0$ muss demzufolge gelten: $T_a / T_0 = m / N$ gleich gebrochen rational. Setzen wir die gegebenen Zahlenwerte ein, so erhalten wir zunächst $T_0 = 5/4$ s und $T_a = 1/4$ s. Damit ergibt sich das Verhältnis zwischen Abtastintervall und Periode zu $T_a / T_0 = (1 \cdot 4) / (4 \cdot 5) = 1/5 = m/N$.

Die Bedingung für Periodizität ist offensichtlich für $m = 1$ und $N = 5$ erfüllt. Dabei ist $m = 1$ die kleinste mögliche natürliche Zahl, so dass sich die Periode $N_0 = 5$ ergibt.

In Bild 2-9 ist ein Ausschnitt der Kosinusfunktion zu sehen. Die Abtastwerte sind als Kreise eingetragen. Man sieht die Kosinusfunktion besitzt die Periode $T_0 = (5/4)$s. Die Periode entspricht genau fünf Abtastintervalle, so dass sich die Abtastwerte alle fünf Zeitschritte wiederholen.

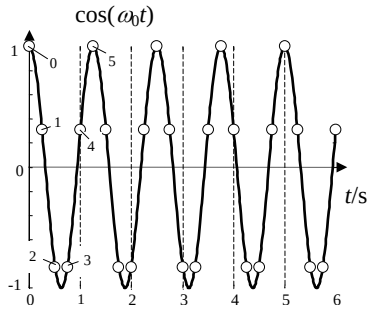


Bild 2-9 Kosinusfunktion und ihre Abtastwerte (o)

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

Lösung A2.1-7 Sinusfunktion ☑

$$x(t) = 2{,}8 \sin(2\pi \cdot 200 \cdot t)$$

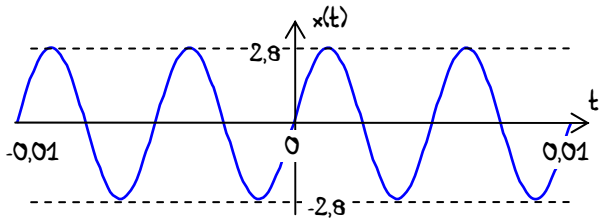


Bild 2.10 Normiertes Signal $x(t)$

$$x(t) = 2{,}8 \sin(2\pi \cdot 200 \cdot t \cdot 10^{-3}) = 2{,}8 \sin(2\pi \cdot 0{,}2 \cdot t)$$

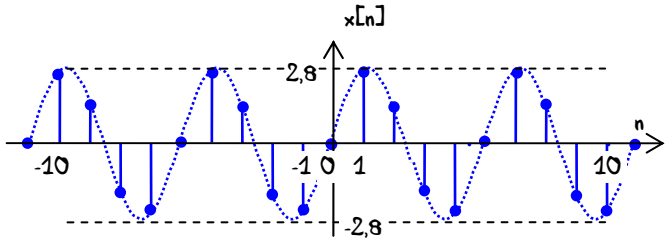


Bild 2.11 Abtastfolge $x[n]$

2.2 Standardsignale

2.2.1 Aufgaben

Aufgabe A2.2-1 Zeitdiskreter Rechteckimpuls ✍ ★

In Aufgabe A2.1-4 ist das rechteckförmige Signal $x[n]$ gegeben.

Geben Sie das Signal und den geraden und ungeraden Anteil analytisch mit der Sprungfunktion an.

Aufgabe A2.2-2 Energie des zeitdiskreten Rechteckimpulses ✍ ★

Berechnen Sie die Energie des zeitdiskreten Rechteckimpulses $\Pi_N[n]$.

Aufgabe A2.2-3 zeitkontinuierlicher Rechteckimpuls ✍ ★

In Bild 2-2 ist das rechteckförmige Signal $x(t)$ zu sehen.

a) Geben Sie $x(t)$ unter Verwendung des Rechteckimpulses ([Wer08], 2.21) analytisch an.

b) Zerlegen Sie das Signal in seinen geraden und ungeraden Anteil $x_g(t)$ bzw. $x_u(t)$.

© Martin Werner, Fulda 2008

Aufgabe A2.2-4 Zeitdiskrete Exponentielle ✍ ★

Skizzieren Sie die Folge z^n in Polardarstellung für $n = -5$ bis 5 und für die Werte $z = 0{,}8 \cdot e^{j\pi/2}$ (a) und $1{,}1 \cdot e^{-j\pi/4}$ (b).

Aufgabe 2.2-5 Energie der rechtsseitigen Exponentialfolge ✍ ★★

Berechnen Sie die Energien der rechtsseitigen Exponentiellen $z^n \cdot u[n]$ mit $z = 0{,}5 \cdot \exp(j\pi/2)$ (a) und $1{,}1 \cdot \exp(-j\pi/4)$ (b).

2.2.2 Lösungen

Lösung A2.2-1 Zeitdiskreter Rechteckimpuls ☑

$$x[n] = u[n] - u[n-7]$$
$$x_g[n] = 0{,}5 \cdot (u[n] - u[n-7] + u[-n] - u[-n+7])$$
$$x_u[n] = 0{,}5 \cdot (u[n] - u[n-7] - u[-n] + u[-n+7])$$

Lösung A2.2-2 Energie des zeitdiskreten Rechteckimpulses ☑

Der zeitdiskrete Rechteckimpuls $\Pi_N[n]$ besitzt genau $2N + 1$ von null verschiedene Werte. Da alle Wert gleich eins sind, ist die Energie $E = 2N + 1$.

Lösung A2.2-3 Zeitkontinuierlicher Rechteckimpuls ☑

$$x(t) = A \cdot \Pi_T(t - T/2)$$

$$x_g(t) = \frac{A}{2} \cdot \Pi_{2T}(t) \quad \text{und} \quad x_u(t) = \frac{A}{2}\left[-\Pi_T(t + T/2) + \Pi_T(t - T/2)\right]$$

Lösung A2.2-4 Zeitdiskrete Exponentielle ☑

$z = 0{,}8 \cdot e^{j\pi/2}$ (links) und $1{,}1 \cdot e^{-j\pi/4}$ (rechts)

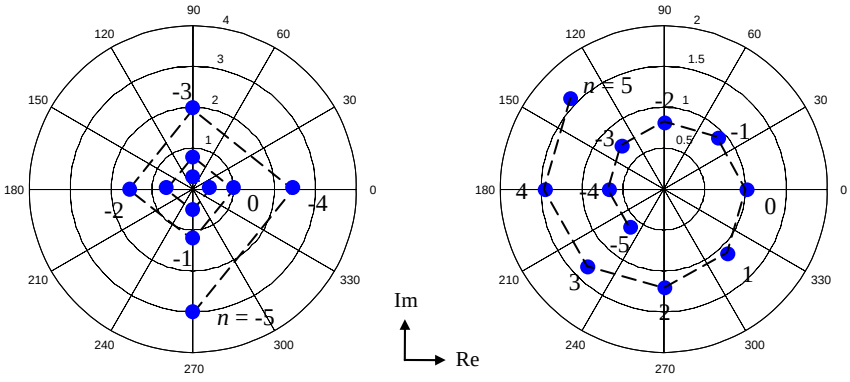


Bild 2-12 Komplexe Exponentialfolgen in Polardarstellung

© Martin Werner, Fulda 2008

Lösung A2.2-5 Energie der rechtsseitigen Exponentialfolge ☑

a) siehe unendliche geometrische Reihe mit Konvergenz für $|z| < 1$

$$E = \sum_{n=0}^{\infty} \left|z^n\right|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left|\left(0,5 \cdot e^{j\pi/2}\right)^n\right|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} 0,5^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots = \frac{1}{1-1/4} = \frac{4}{3}$$

b) kein Energiesignal, da die unendliche geometrische Reihe für $|z| \geq 1$ nicht konvergiert!

2.3 Klassifizierung von Systemen

2.3.1 Aufgaben

In diesem Abschnitt werden die verschiedenen Systemklassen anhand gelöster Aufgaben veranschaulicht.

In den ersten vier Beispielen behandeln wichtige zeitdiskrete Systeme. Wir gehen wie bei einer Checkliste vor.

Die Aufgabe 2.3-5 stellt den analogen Modulator vor, wie er in der Trägerfrequenztechnik zur Amplitudenmodulation eingesetzt wird [Wer06]. Stellvertretend für die RLC-Netzwerke wird das einfache RC-Glied in Aufgabe 2.3-6 behandelt.

Die Aufgaben 2.3-4 und 2.3-7 bereiten den Abschnitt 3 in [Wer08] vor. Wir zeigen, dass alle Systeme, die mit linearen Differenzengleichungen oder Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten beschrieben werden, LTI-Systeme sind.

Aufgabe A2.3-1 Zeitdiskretes System mit Rückkopplung ✍ ★★★

In Bild 2-13 ist das Blockschaltbild eines rückgekoppelten (rekursiven) Systems mit einer Verzögerung D angegeben. Die Verzögerung D bewirkt, dass der Signalwert um genau einen Zeitschritt (Takt) verzögert wird, d. h. als Operator geschrieben

$$\mathrm{D}(x[n]) = x[n-1] \tag{2.1}$$

Charakterisieren Sie das System bzgl.

a) der Eingangs-Ausgangsgleichung,
b) der Reaktion des Systems auf die Impulsfunktion $\delta[n]$ mit der Anfangsbedingung $y[0] = 0$,
c) des Gedächtnisses,
d) der Kausalität,
e) der Linearität,
f) der Zeitinvarianz und
g) der Stabilität.

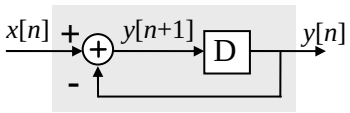


Bild 2-13 Blockdiagramm des zeitdiskreten Systems mit Rückkopplung

© Martin Werner, Fulda 2008

Aufgabe A2.3-2 Gleitender Mittelwert ✍ ★★★

Ein häufig angewendetes zeitdiskretes System ist der *gleitende Mittelwert*

$$y[n] = \frac{1}{3} \cdot \sum_{k=n-1}^{n+1} x[k] \tag{2.2}$$

a) Skizzieren Sie das Eingangssignal $x[n] = \{1, 2, 1, -1, -1, 5, 2, 1, -1\}$ für den Bereich der normierten Zeitvariablen $n = -2, ..., 10$.

b) Geben Sie für das Eingangssignal (a) das Ausgangssignal $y[n]$ an.

c) Skizzieren Sie das Ausgangssignal $y[n]$ in (b) für $n = -2, ..., 10$.

Charakterisieren Sie das System des gleitenden Mittelwerts bzgl.

d) der Reaktion des Systems auf die Impulsfunktion $\delta[n]$

e) des Gedächtnisses,

f) der Kausalität,

g) der Linearität,

h) der Zeitinvarianz und

i) der Stabilität.

k) Wie muss (2.2) abgeändert werden, damit der gleitende Mittelwert kausal wird?

Aufgabe A2.3-3 Medianfilter ✍ ★

Ein in der digitalen Signalverarbeitung wichtiges System ist das Medianfilter. Geben Sie für das Eingangssignal $x[n] = \{1, 2, 1, -1, -1, 5, 2, 1, -1\}$ das Ausgangssignal $y[n]$ an, wenn für das Medianfilter in ([Wer08], 2.49) $N = 2$ gesetzt wird.

Aufgabe A2.3-4 Systeme mit linearen Differenzengleichungen ✍ ★★

Zeigen Sie, dass Systeme, deren Eingangs-Ausgangsgleichungen durch lineare Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten beschrieben werden,

$$\sum_{k=0}^{K} a_k y[n-k] = \sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m] \tag{2.3}$$

linear und zeitinvariant sind.

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

Aufgabe A2.3-5 AM-Modulator ✍ ★★★

Gegeben ist der aus der Trägerfrequenztechnik bekannte ideale *Modulator* der Amplitudenmodulation (AM) in Bild 2-14. Charakterisieren Sie den Modulator als System bzgl. (a) des Gedächtnisses, (b) der Kausalität, (c) der Linearität, (d) der Zeitinvarianz und (e) und der Stabilität.

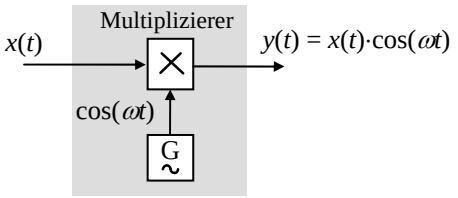


Bild 2-14 AM-Modulator

Aufgabe A2.3-6 RC-Glied ✍ ★

Gegeben ist das *RC-Glied* in Bild 2-15. Bestimmen Sie die Eingangs-Ausgangsgleichung als Differenzialgleichungen für:

a) Eingangsgröße $x(t) = u_q(t)$ und Ausgangsgröße $y(t) = u_c(t)$.

b) Eingangsgröße $x(t) = u_q(t)$ und Ausgangsgröße $y(t) = i(t)$.

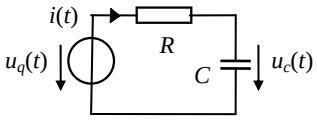


Bild 2-15 RC-Glied

Aufgabe A2.3-7 Systeme mit linearen Differenzialgleichungen ✍ ★★

Zeigen Sie, dass Systeme, deren Eingangs-Ausgangsgleichungen durch lineare Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten beschrieben werden,

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \left(\frac{d}{dt}\right)^n y(t) = \sum_{m=0}^{M} b_m \left(\frac{d}{dt}\right)^m x(t) \tag{2.4}$$

linear und zeitinvariant sind.

2.3.2 Lösungen

Lösung A2.3-1 Zeitdiskretes System mit Rückkopplung ☑

a) Bestimmung der Eingangs-Ausgangsgleichung

Aus dem Blockdiagramm folgt zunächst an der Additionsstelle, dem Addierer,

$$y[n+1] = x[n] - y[n] \tag{2.5}$$

Nach umstellen erhalten wir eine Differenzengleichung 1. Ordnung

$$y[n+1] + y[n] = x[n] \tag{2.6}$$

© Martin Werner, Fulda 2008

oder äquivalent

$$y[n] + y[n-1] = x[n-1] \tag{2.7}$$

Durch sukzessives Anwenden der Differenzengleichung

$$y[n] = x[n-1] - y[n-1] = x[n-1] - x[n-2] + y[n-2] = \cdots \tag{2.8}$$

resultiert schließlich die gesuchte Eingangs-Ausgangsgleichung.

$$y[n] = \mathrm{T}\big(x[n]\big) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} x[n-k] \tag{2.9}$$

b) Die Reaktion des Systems auf die Impulsfunktion lässt sich mit der Eingangs-Ausgangsgleichung (2.9) berechnen. Alternativ kann sie auch aus Bild 2-13 direkt bestimmt werden.

Wir beschreiten zunächst den anschaulicheren Weg. In Bild 2-16 sind die Signalfolgen in das Blockdiagramm von rechts nach links fortschreitend eingetragen.

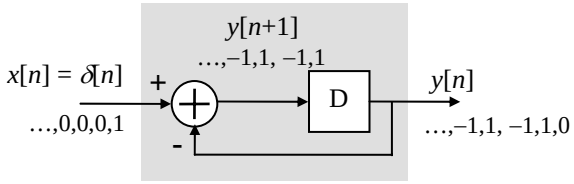


Bild 2-16 Systemreaktion bei Erregung mit der Impulsfunktion (Anfangsbedingung $y[0] = 0$)

Im Zeitschritt $n = 0$ liegt am Eingang $x[0] = 1$ und am Ausgang $y[0] = 0$ an. Da vom Ausgang „0“ zurückgekoppelt wird, wird dem Verzögerungsglied „1“ zugeführt. Im nächsten Zeitschritt, $n = 1$, erscheint dieser Wert am Ausgang, d. h. $y[1] = 1$. Mit der Impulsfunktion als Erregung, liegt am Eingang für $n = 1, 2, 3, \ldots$ stets „0“ an. Die Ausgangswerte resultieren dann nur aus der Rückkopplung. Dabei wird der aktuelle Ausgangswert mit „–1“ multipliziert, was für $n = 1, 2, 3, \ldots$ zu der alternierenden Ausgangsfolge $y[n] = \{0,1, -1,1, -1,\ldots\}$ im Bild führt.

Die Rechnung mit (2.9) führt nach Einsetzen der Impulsfunktion als Erregung auf die Impulsantwort, die [Wer08] Abschnitt 3 noch eingeführt wird. Man beachte, dass in der Summe k mit dem Wert „1“ beginnt, weshalb der Wert zum Zeitschritt $n = 0$ ausgeblendet wird. Mit der Ausblendeigenschaft der Impulsfunktion erhalten wir aus der Summe jeweils nur den Summanden für $n = k$, so dass wir kompakt schreiben können

$$\mathrm{T}\big(\delta[n]\big) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \delta[n-k] = (-1)^{n-1} u[n-1] \tag{2.10}$$

c) Aus der Eingangs-Ausgangsgleichung (2.9) mit dem Laufindex k folgt unmittelbar, dass das System ein unendliches Gedächtnis besitzt.

d) Da die Ausgangsfolge in (2.9) nur von vergangenen Werten der Eingangsfolge abhängt, ist das System kausal.

© Martin Werner, Fulda 2008

e) Wir prüfen die Additivität mit

$$x[n] = \alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n] \tag{2.11}$$

und den zugehörigen Ausgangsfolgen

$$y_1[n] = \mathrm{T}(x_1[n]) \quad \text{und} \quad y_2[n] = \mathrm{T}(x_2[n]) \tag{2.12}$$

Es gilt

$$y[n] = \mathrm{T}\big(x[n]\big) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot \big(\alpha_1 x_1[n-k] + \alpha_2 x_2[n-k]\big) = \alpha_1 y_1[n] + \alpha_2 y_2[n] \tag{2.13}$$

Das System ist linear.

f) Es sei $y_1[n]$ das Ausgangssignal zum zeitlich um k Zeitschritte verschobenen Eingangssignal $x_1[n] = x[n–k]$. Aus der Eingangs-Ausgangsgleichung ergibt sich

$$y_1[n] = \mathrm{T}\big(x[n-k]\big) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} x[n-k-m] \tag{2.14}$$

Der Vergleich mit der um k Zeitschritte verschobenen Version des ursprünglichen Ausgangssignals (2.9)

$$y[n-k] = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} x[n-k-m] \tag{2.15}$$

weist die Zeitinvarianz nach.

g) Das System ist nicht BIBO-stabil. Dies sieht man schnell am Gegenbeispiel einer kausalen Eingangsfolge $x[n] = (–1)^n$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$. Obwohl $|x[n]|$ beschränkt ist, wächst die Ausgangsfolge $y[n]$ linear mit n über alle Grenzen.

Anmerkung: Für absolut summierbare Eingangssignale gilt definitionsgemäß

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty \tag{2.16}$$

Es folgt

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} x[n-k] \right| \le \sum_{k=1}^{\infty} |x[n-k]| < \infty \tag{2.17}$$

Das System ist für absolut summierbare Eingangsfolgen stabil.

Lösung 2.3-2 Gleitender Mittelwert ☑

a) Eingangssignal, siehe Bild 2-17 links

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

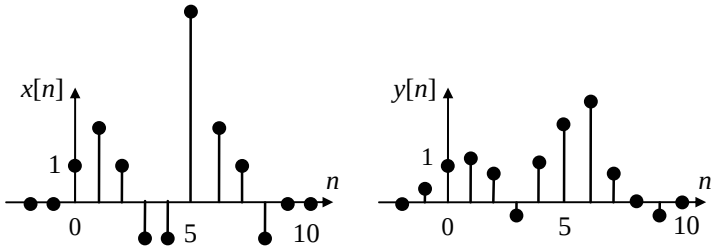


Bild 2-17 Eingangssignal $x[n]$ und Ausgangssignal $y[n]$

b) Ausgangssignal

$$y[n] = \frac{1}{3} \cdot \{1, 3, 4, 2, -1, 3, 6, 8, 2, 0, -1\} \text{ für } n = -1, 0, ..., 9 \tag{2.18}$$

c) Ausgangssignal, siehe Bild 2-17 rechts

Durch den gleitenden Mittelwert wird der „Ausreißer“ bei $n = 5$ stark reduziert. Sein Einfluss ist jedoch in der Umgebung noch deutlich sichtbar, vgl. Medianfilter [Wer08].

d) Reaktion auf die Impulsfunktion (Impulsantwort)

$$y[n] = T\left(\delta[n]\right) = \frac{1}{3}\sum_{k=n-1}^{n+1} \delta[k] = \frac{1}{3}\left(\delta[n+1] + \delta[n] + \delta[n-1]\right) \tag{2.19}$$

Wir erhalten genau drei von null verschiedene Werte für $y[n]$, nämlich für $n = -1$, 0 und 1. Wir können kompakt schreiben

$$y[n] = \frac{1}{3}\left(\delta[n+1] + \delta[n] + \delta[n-1]\right) = \frac{1}{3}\Pi_1[n] \tag{2.20}$$

e) Es liegt ein Gedächtnis der Länge 1 vor.

f) Das System ist nicht kausal, da für die Berechnung des Ausgangswerts $y[n]$ der Eingangswert $x[n+1]$ verwendet wird.

g) Das System ist linear, denn es gilt

$$\begin{aligned} y[n] &= T\left(\alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n]\right) = \frac{1}{3}\sum_{k=n-1}^{n+1}\left(\alpha_1 x_1[k] + \alpha_2 x_2[k]\right) = \\ &= \underbrace{\frac{1}{3}\sum_{k=n-1}^{n+1} \alpha_1 x_1[k]}_{\alpha_1 y_1[n]} + \underbrace{\frac{1}{3}\sum_{k=n-1}^{n+1} \alpha_2 x_2[k]}_{\alpha_2 y_2[n]} \end{aligned} \tag{2.21}$$

h) Es sei $y_1[n]$ das Ausgangssignal zum zeitlich verschobenen Eingangssignal $x_1[n] = x[n-k]$. Aus der Eingangs-Ausgangsgleichung ergibt sich

$$y_1[n] = T\left(x[n-k]\right) = \frac{1}{3}\sum_{l=n-1}^{n+1} x[l-k] = \frac{1}{3}\sum_{m=n-k-1}^{n-k+1} x[m] = y[n-k] \tag{2.22}$$

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

Das System ist zeitinvariant.

i) Das System ist BIBO-stabil, da eine endliche Summe endlicher Zahlen stets wieder endlich ist.

k) Der gleitende Mittelwert wird durch eine Verzögerung des Ausgangswertes um ein normiertes Zeitintervall kausal.

$$y[n] = \frac{1}{3} \sum_{k=n-2}^{n} x[k] \tag{2.23}$$

Lösung 2.3-3 Medianfilter ☑

Eingangssignal und Ausgangssignal y[n] = {1,1,1,1,1,1,1} für n = 0, 1, ..., 7

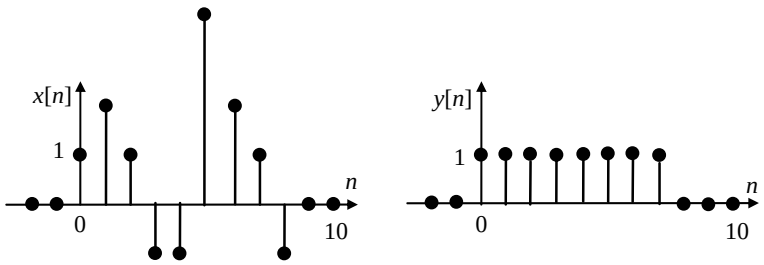


Bild 2-18 Eingangssignal $x[n]$ und Ausgangssignal $y[n]$

Lösung A2.3-4 Systeme mit linearen Differenzengleichungen ☑

a) Wir zeigen die Linearität, indem wir die Eingangs-Ausgangsgleichungen für zwei beliebige Lösungen addieren.

$$\sum_{k=0}^{K} a_k y_1[n-k] + \sum_{k=0}^{K} a_k y_2[n-k] = \sum_{m=0}^{M} b_m x_1[n-m] + \sum_{m=0}^{M} b_m x_2[n-m] \tag{2.24}$$

Nach Zusammenfassen erhalten wir die Bestätigung, dass die Reaktion auf die Summe zweier Eingangssignale die Summe ihrer Einzelreaktionen ist.

$$\sum_{k=0}^{K} a_k \big(y_1[n-k] + y_2[n-k]\big) = \sum_{m=0}^{M} b_m \big(x_1[n-m] + x_2[n-m]\big) \tag{2.25}$$

b) Mit $x_1[n] = x[n-l]$ und der zugehörigen Lösung $y_1[n]$ erhalten wir aus dem Ansatz

$$\sum_{k=0}^{K} a_k y_1[n-k] = \sum_{m=0}^{M} b_m x[n-l-m] \tag{2.26}$$

durch Substitution von $i = n - l$

© Martin Werner, Fulda 2008

$$\sum_{k=0}^{K} a_k y_1[i+l-k] = \sum_{m=0}^{M} b_m x[i-m] \tag{2.27}$$

Aus dem Vergleich mit der Eingangs-Ausgangsgleichung resultiert

$$y_1[i+l] = y[n] \tag{2.28}$$

bzw. wie für die Zeitinvarianz gefordert

$$y_1[n] = y[n-l] \tag{2.29}$$

Damit ist gezeigt, dass LTI-Systeme vorliegen.

Lösung A2.3-5 AM-Modulator ☑

a) Aus der Eingangs-Ausgangsgleichung

$$y(t) = \mathrm{T}\big(x(t)\big) = x(t) \cdot \cos\big(\omega_T t\big) \tag{2.30}$$

folgt unmittelbar, dass das System ohne Gedächtnis ist, da nur Momentanwerte verwendet werden.

b) Weil der Wert am Ausgang nicht von zukünftigen Werten am Eingang abhängt, ist das System kausal.

c) Wir prüfen die Additivität mit

$$x(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) \tag{2.31}$$

und den zugehörigen Ausgangssignalen

$$y_1(t) = x_1(t) \cdot \cos(\omega_T t) \text{ und } y_2(t) = x_2(t) \cdot \cos(\omega_T t) \tag{2.32}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathrm{T}\big(x(t)\big) = x(t) \cdot \cos\big(\omega_T t\big) = \big[\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)\big] \cdot \cos\big(\omega_T t\big) = \\ &= \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) \end{aligned} \tag{2.33}$$

Das System ist linear.

d) Es sei $y_1(t)$ das Ausgangssignal zum zeitlich verschobenen Eingangssignal $x_1(t) = x(t-t_0)$. Aus der Eingangs-Ausgangsgleichung ergibt sich

$$y_1(t) = \mathrm{T}\big(x(t-t_0)\big) = x(t-t_0) \cdot \cos\big(\omega_T t\big) \tag{2.34}$$

Aus der Zeitverschiebung des ursprünglichen Ausgangssignals

$$y(t-t_0) = x(t-t_0) \cdot \cos\big[\omega_T (t-t_0)\big] \neq y_1(t) \tag{2.35}$$

folgt nicht $y_1(t)$, wie es für die Zeitinvarianz notwendig wäre. Das System ist somit zeitvariant.

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

e) Das System ist BIBO-stabil, weil

$$\left|\cos(\omega_T t)\right| \le 1 \tag{2.36}$$

und demzufolge

$$\left|y(t)\right| = \left|x(t)\cdot\cos(\omega_T t)\right| = \left|x(t)\right|\cdot\left|\cos(\omega_T t)\right| \le \left|x(t)\right| \tag{2.37}$$

Lösung 2.3-6 RC-Glied ☑

a) Aus der kirchhoffschen Maschenregel

$$u_C(t) = u_q(t) - R\cdot i(t) \tag{2.38}$$

und dem Zusammenhang zwischen Strom und Spannung an der Kapazität

$$i(t) = C\cdot\frac{d}{dt}u_C(t) \tag{2.39}$$

folgt die Differenzialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$u_C(t) + RC\cdot\frac{d}{dt}u_C(t) = u_q(t) \tag{2.40}$$

bzw. (mit normierten Größen)

$$\frac{d}{dt}y(t) + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}x(t) \tag{2.41}$$

b) Mit dem Zusammenhang zwischen Spannung und Strom an der Kapazität

$$u_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau \tag{2.42}$$

erhält man aus der kirchhoffschen Maschenregel

$$u_q(t) = R\cdot i(t) + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau \tag{2.43}$$

bzw. (mit normierten Größen)

$$y(t) + \frac{1}{RC}\int_{-\infty}^{t} y(\tau)d\tau = \frac{1}{R}x(t) \tag{2.44}$$

Differenziert man nun nach der Zeit *t*, so ergibt sich wieder eine Differenzialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

© Martin Werner, Fulda 2008

$$\frac{d}{dt}y(t)+\frac{1}{RC}\cdot y(t)=\frac{1}{R}\cdot\frac{d}{dt}x(t) \tag{2.45}$$

Lösung 2.3-7 Systeme mit linearen Differenzialgleichungen ☑

a) Wir zeigen die Linearität, indem wir die Eingangs-Ausgangsgleichungen für zwei beliebige Lösungen addieren.

$$\sum_{n=0}^{N}a_n\left(\frac{d}{dt}\right)^n y_1(t)+\sum_{n=0}^{N}a_n\left(\frac{d}{dt}\right)^n y_2(t)=\sum_{m=0}^{M}b_m\left(\frac{d}{dt}\right)^m x_1(t)+\sum_{m=0}^{M}b_m\left(\frac{d}{dt}\right)^m x_2(t) \tag{2.46}$$

Da die Differenziation eine lineare Operation ist, erhalten wir nach Zusammenfassen die Bestätigung, dass die Reaktion auf die Summe zweier Eingangssignale die Summe ihrer Einzelreaktionen ist.

$$\sum_{n=0}^{N}a_n\left(\frac{d}{dt}\right)^n \big(y_1(t)+y_2(t)\big)=\sum_{m=0}^{M}b_m\left(\frac{d}{dt}\right)^m \big(x_1(t)+x_2(t)\big) \tag{2.47}$$

b) Wir prüfen die Zeitinvarianz. Mit $x_1(t)=x(t-\tau)$ und der zugehörigen Lösung $y_1(t)$ resultiert aus dem Ansatz

$$\sum_{n=0}^{N}a_n\left(\frac{d}{dt}\right)^n y_1(t)=\sum_{m=0}^{M}b_m\left(\frac{d}{dt}\right)^m x(t-\tau) \tag{2.48}$$

durch Substitution von $s=t-\tau$

$$\sum_{n=0}^{N}a_n\left(\frac{d}{ds}\right)^n y_1(s+\tau)=\sum_{m=0}^{M}b_m\left(\frac{d}{ds}\right)^m x(s) \tag{2.49}$$

Man beachte, dass die Substitution hier eine lineare Abbildung ist, weshalb sich bzgl. der Differenziation nichts ändert.

Aus dem Vergleich mit der Eingangs-Ausgangsgleichung folgt

$$y_1(s+\tau)=y(s) \tag{2.50}$$

bzw. wie für die Zeitinvarianz gefordert

$$y_1(t)=y(t-\tau) \tag{2.51}$$

Damit ist gezeigt, dass LTI-Systeme vorliegen.

2.4 Übungen mit MATLAB

Dieser Abschnitt stellt ergänzende Übungen bereit, die Sie mit Hilfe des Softwarepakets MATLAB – oder vergleichbarer Software – durchführen können. Ziel ist dabei, die bisher theoretischen Überlegungen durch praktische Anwendungen „begreifbar“ zu machen. Darüber

© Martin Werner, Fulda 2008

hinaus unterstützen die Simulationsbeispiele ein exploratives Lernen, indem Sie selbst die Parameter vorgeben. Dadurch werden Zusammenhänge aufgezeigt, die Theorie in den nachfolgenden Abschnitten vorbereitet und wichtige Erfahrungen für die praktische Anwendung gesammelt.

Anmerkungen: (i) Sollten Sie bisher keine Erfahrung mit MATLAB haben, so bietet der Abschnitt „Erste Schritte in MATLAB“ eine kompakte Einführung an. (ii) Im Weiteren wird der Ausdruck *Simulation* auch für die digitale Signalverarbeitung gebraucht, da in der Systemtheorie häufig von idealen Systemen ausgegangen wird, während in der Realisierung am Rechner oder Signalprozessor numerische Effekte aufgrund der endlichen Wortlänge auftreten. Letztere sind bei den üblichen Anwendungen meist so gering, dass sie vernachlässigt werden können – was jedoch bei Unachtsamkeit in manchen Anwendungen zu unbrauchbaren Lösungen führen kann.

MATLAB-Übung M2-1 Gleitender Mittelwert

Durch eine Simulation mit MATLAB, soll die Wirkungsweise des gleitenden Mittelwerts ([Wer08], 2.38) aufgezeigt werden. Erzeugen Sie dazu ein geeignetes Nutzsignal und überlagern Sie es mit einem rauschförmigen Störsignal. Versuchen Sie das Nutzsignal durch eine gleitende Mittelwertbildung zu rekonstruieren, siehe Bild 2-19.

Bevor wir mit der Programmierung beginnen, geben wir der Aufgabe einen überschaubaren Rahmen und wählen die Simulationsparameter so, dass sich aussagekräftige, grafische Darstellungen ergeben.

Anmerkungen: Einige der nachfolgenden Festsetzungen erklären sich aus Zusammenhängen, die erst später aufgezeigt werden. Da die resultierenden Bilder jedoch bereits die wesentlichen Sachverhalte erahnen lassen, wird hier auf lange Erklärungen verzichtet.

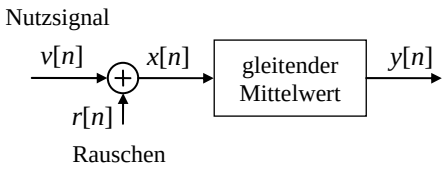


Bild 2-19 Simulation zum gleitenden Mittelwert

Um die einzelnen Werte der Folgen noch am Bildschirm erkennen zu können, setzen wir den Bereich der normierten Zeitvariablen von $n = 0$ bis 50. Für das Nutzsignal $v[n]$ wählen wir die Sinusfolge $v[n] = \sin(\Omega n)$ mit der normierten Kreisfrequenz so, dass in der Simulation eine Periode erfasst wird. Dadurch beginnt und endet die Folge mit dem Wert null und ändert sich relativ langsam. Um die Wirksamkeit des gleitenden Mittelwerts zu demonstrieren, stören wir das Nutzsignal mit einem Rauschsignal $r[n]$ mit moderaten Amplituden.

Der erste Teil des Programmbeispiels 2-1 konkretisiert die Überlegungen. Zum Nutzsignal $v[n]$ passend, wenden wir den gleitenden Mittelwert mit der Breite des Mittelungsfensters $N = M + 1 = 9$ an.

Anmerkung: Der gleitende Mittelwert glättet das Signal. Ändert sich das Signal im Mittelungsfenster stark, so werden diese Änderungen „weggemittelt“ und das Signal merklich verzerrt.

Das Programmbeispiel berücksichtigt zusätzlich die in der digitalen Signalverarbeitung typischen Effekte durch Blockgrenzen und Signalverzögerungen bei der Verarbeitung. Beide Effekte schlagen sich in den Indizes der `for`-Schleife und dem Verschiebungsparameter `shift` nieder.

Eine mit dem Programm erzeugte Grafik ist in Bild 2-20 zu sehen. Oben ist die sinusförmige Nutzsignalfolge $v[n]$ abgebildet und darunter das gestörte Signal $x[n]$. Der ideale sinusförmige Verlauf ist durch die gestrichelte Linie markiert.

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

Programmbeispiel 2-1 Gleitender Mittelwert

```
% Moving average filter
% s3s2_1.m * mw * 07/17/2007
%% Initialize parameters and generate signals
N = 50;                                          % normalized time span
n = 0:N;                                             % normalized time
Omega = 2*pi/50;                              % normalized radian frequency
v = sin(Omega*n);                                                % signal
r = 0.2*randn(1,N+1);                                      % noise signal
x = v + r;                                                 % noisy signal
%% Moving average filter
M = 9;                                                    % window length
shift = fix(M/2);                              % time shift for causality
y = zeros(1,N+1);                                          % output signal
for k=1:N-M+1
    y(k+shift) = (1/M)*sum(x(k:k+M-1));
end
%% Graphics
figure('Name',['Moving average: M =
',num2str(M)],'NumberTitle','off');
subplot(3,1,1)                                                   % signal
    stem(n,v,'filled')
    axis([0 N -2 2]); ylabel('v[n] \rightarrow'); grid
subplot(3,1,2)                                             % noisy signal
    stem(n,x,'filled')
    axis([0 N -2 2]); ylabel('x[n] \rightarrow'); grid
    hold on; plot(n,v,':k'); hold off
subplot(3,1,3)                                          % restored signal
    stem(n,y,'filled')
    axis([0 N -2 2]); grid
    xlabel('n \rightarrow')
    ylabel('y[n] \rightarrow')
    hold on; plot(n,v,':k'); hold off
```

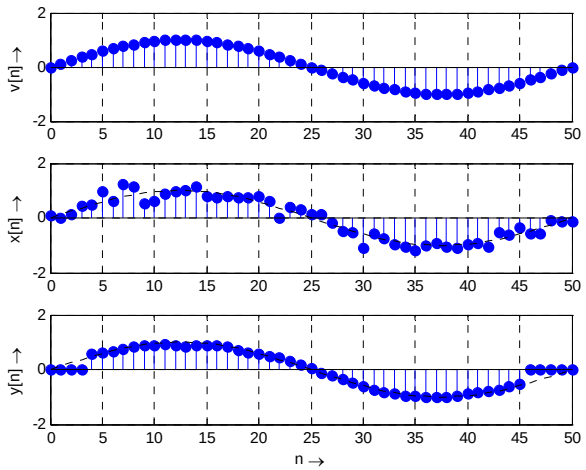


Bild 2-20 Simulationsergebnisse zum gleitenden Mittelwert: Nutzsignal $v[n]$, mit Rauschen gestörtes Signal $x[n]$ und mit dem gleitenden Mittelwert rekonstruiertes Signal $y[n]$

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

Unten in Bild 2-20 finden wir das Ausgangssignals des gleitenden Mittelwerts $y[n]$. Die ersten 4 und die letzten 5 Werte sind zu null gesetzt, da dort das Mittelungsfenster nicht vollständig gefüllt wird. Alternativ könnten wir zuerst das Signal $x[n]$ mit Nullen verlängern und ein Einschwingen beobachten. Die Unterdrückung des Rauschsignals durch den gleitenden Mittelwert ist deutlich zu erkennen. Das Ausgangssignal entspricht im Wesentlichen dem Nutzsignal.

Überprüfen Sie die obigen Aussagen, indem Sie die Simulation mit anderen Werten für die Breite des Mittelungsfensters oder die Stärke der Rauschstörung wiederholen. Was passiert, wenn Sie ein Sinussignal mit höherer Frequenz oder einen Rechteckimpuls als Nutzsignal vorgeben?

MATLAB-Übung M2-2 Medianfilter

Durch eine Simulation mit MATLAB soll die Wirkungsweise des Medianfilters aufgezeigt werden. Erzeugen Sie dazu ein geeignetes Nutzsignal und überlagern Sie es mit Impulsrauschen. Versuchen Sie das Nutzsignal durch eine gleitende Mittelwertbildung zu rekonstruieren, siehe Bild 2-19.

Wie in der MATLAB-Übung M2-1 geben wir zunächst der Aufgabe einen überschaubaren Rahmen und wählen die Simulationsparameter so, dass sich aussagekräftige grafische Darstellungen ergeben.

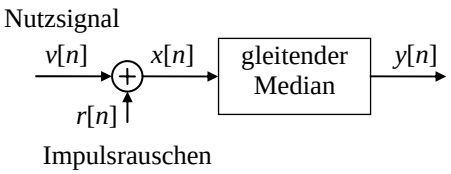


Bild 2-21 Simulation zum gleitenden Median

Für das Nutzsignal $v[n]$ wählen wir den verschobenen Rechteckimpuls $v[n] = \Pi_5(n-15)$. Dadurch besitzt das Nutzsignal deutlich ausgeprägte Übergänge. Um die Wirksamkeit des gleitenden Median zu demonstrieren, stören wir das Nutzsignal mit einem Störsignal $r[n]$, das an 5 zufällig gewählten Stellen Störimpulse mit relativ großen Amplituden aufweist.

Ein Simulationsergebnis wird in Bild 2-22 gezeigt. Oben ist der Rechteckimpuls des Nutzsignals zusehen. Darunter befindet sich das gestörte Signal mit Störimpulsen der Höhe eins bei n = 0, 22, 23, 37 und 46. Wie das Ausgangssignal des Systems des gleitenden Median im untern Teilbild zeigt, sind in diesem Fall alle Störimpulse beseitigt. Das Nutzsignal wird vollständig wiederhergestellt.

Überprüfen Sie die Leistungsfähigkeit des Systems gleitender Median, indem Sie die Simulation mit anderen Werten für die Breite des Mittelungsfensters oder die Anzahl und Stärke der Rauschstörung wiederholen. Werden immer alle Störimpulse entfernt bzw. das Nutzsignal fehlerfrei rekonstruiert? Ist das System auch zur Unterdrückung von Rauschsignalen wie in der MATLAB-Übung M2-1 geeignet?

Anmerkungen: (i) Der gleitende Median kann beispielsweise erfolgreich zur Signalverbesserung für das Tokogramm in [Wer08] eingesetzt werden. Aufgrund der Aufnahmetechnik entstehen impulsartige Störungen, wie z. B. der „Ausreißer“ nach etwa 50 Sekunden. Derartige Störungen können mit dem gleitenden Median reduziert werden, ohne das Signal selbst zu stark zu verzerren. (ii) Der gleitende Median wird häufig in der Bildverarbeitung eingesetzt, um so genanntes Salz-und-Pfeffer-Rauschen zu unterdrücken [Wer08]. Dabei handelt es sich um eine Störung, die zufällig einzelne Bildpunkte weiß oder schwarz darstellt. Durch den gleitenden Median, werden diese Störungen erfolgreich bekämpft. Wichtig für diese Anwendung ist, dass die Bildkanten, ähnlich wie die Flanken des Rechteckimpulses im Beispiel, nicht verschliffen werden und das Bild „scharf“ bleibt.

© Martin Werner, Fulda 2008

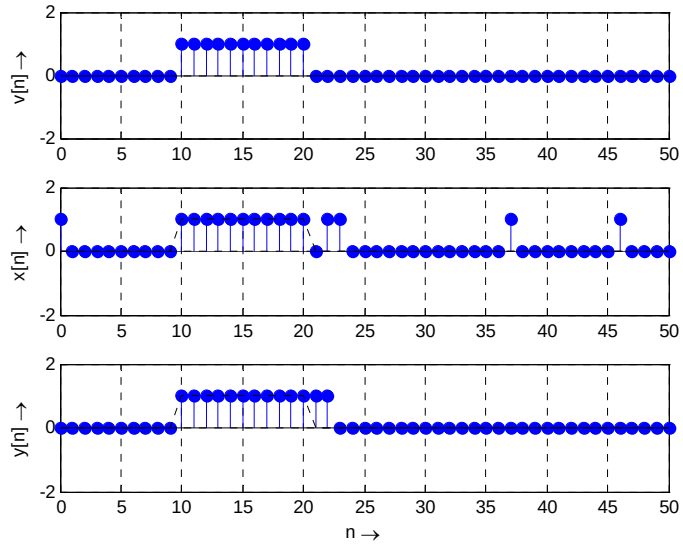


Bild 2-22 Simulationsergebnisse zum gleitenden Median: Nutzsignal $v[n]$, mit Impulsrauschen gestörtes Signal $x[n]$ und mit dem gleitenden Median rekonstruiertes Signal $y[n]$

Programmbeispiel 2-2 Gleitender Median

```
% Median filter
% s3s2_2.m * mw * 07/17/2007
%% Initialize parameters and generate signals
N = 50;                                          % normalized time span
n = 0:N;                                              % normalized time
v = zeros(1,N+1);                                                % signal
v(11:21) = ones(1,11);                            % rectangular impulse
r = zeros(1,N+1);                                % impulse noise signal
loc = 1 + fix(50*rand(1,5));                        % impulse locations
r(loc) = ones(1,5);
x = v + r;                                                % noisy signal
%% Moving median
M = 5;                                                   % window length
shift = fix(M/2);                              % time shift for causality
y = zeros(1,N+1);                                        % output signal
for k=1:N-M+1
    y(k+shift) = median(x(k:k+M-1));
end
%% Graphics
figure('Name',['moving median: M = ',num2str(M)],'NumberTitle','off');
subplot(3,1,1)                                                   % signal
    stem(n,v,'filled')
    axis([0 N -2 2]); ylabel('v[n] \rightarrow'); grid;
subplot(3,1,2)                                                % noisy signal
    stem(n,x,'filled')
    axis([0 N -2 2]); ylabel('x[n] \rightarrow'); grid;
```


© Martin Werner, Fulda 2008

```
    hold on
    plot(n,v,':k')
subplot(3,1,3)                                          % restored signal
    stem(n,y,'filled')
    axis([0 N -2 2]); grid
    xlabel('n \rightarrow'); ylabel('y[n] \rightarrow');
    hold on
    plot(n,v,':k')
```

MATLAB-Übung M2-3 Schaltvorgang am RC-Glied

In dieser Übung soll mit MATLAB die Spannung an der Kapazität für das RC-Glied berechnet werden.

Anmerkungen: (i) MATLAB bietet zur numerischen Lösung von Differenzialgleichungen umfangreiche Werkzeuge an, deren Behandlung den hier abgesteckten Rahmen bei weitem sprengen würde [ABRW05] [GrGr06] [HoBr02] [Pra02]. Diese Übung will daher, nur einen ersten Eindruck vermitteln. (ii) Das Beispiel wird später aus theoretischer Sicht noch ausführlicher behandelt. Hier wird vorausgesetzt, dass die prinzipielle Lösung, z. B. aus der Physik, bekannt ist, so dass das numerische Ergebnis durch frühere Erfahrungen verifiziert werden kann.

Wir gehen dazu von der in Aufgabe A2.3-6 bestimmten Eingangs-Ausgangsgleichung (2.41) aus, der linearen Differenzialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

$$\frac{d}{dt}y(t)+\frac{1}{RC}y(t)=\frac{1}{RC}x(t) \tag{2.52}$$

Der Einfachheit halber normieren wir alle Größen entsprechend den SI-Einheiten, d. h. die Zeit in Sekunden, die elektrische Spannung in Volt, usf. Weiter wählen wir R und C gleich eins und erhalten so die übersichtliche Form der Differenzialgleichung.

$$\frac{dy(t)}{dt}=x(t)-y(t) \tag{2.53}$$

Als Eingangssignal (Spannung der Quelle) nehmen wir den Rechteckimpulszug mit der Dauer T gleich 1 an, siehe Bild 2-23. die Schaltzeitpunkte sind t_1 = 0,3 und t_2 = 1,3. Schließlich gehen wir noch davon aus, dass die Kapazität zum Zeitpunkt t = 0 nicht geladen ist.

Damit liegen alle zur eindeutigen Lösung der Aufgabe benötigten Angaben vor.

MATLAB stellt zur numerischen Lösung von Differenzialgleichungen so genannte `ODE Solver` (Ordinary Differential Equation) bereit. Bei deren Anwendungen wird in zwei Schritten vorgegangen. Zuerst wird die Differenzialgleichung in MATLAB als `function` definiert, so dass zu den gewünschten Stützstellen entsprechende Stützwerte berechnet werden können, siehe Programmbeispiel 2-3.

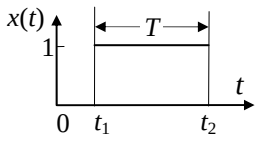


Bild 2-23 Eingangssignal

Im Hauptprogramm wird der auf dem Runge-Kutta-Verfahren basierende Lösungsalgorithmus `ode45` aufgerufen. Ihm werden die Differenzialgleichung, das Zeitintervall für die Lösung und die Anfangsbedingung übergeben.

Die von MATLAB berechnete Lösung ist in Bild 2-24 zu sehen. Zum Zeitpunkt t = 0 ist die Kapazität zunächst spannungsfrei. Durch Anlegen der Spannung bei t_1 = 0,3 wird die Kapazität geladen. Es resultiert die aus der Physik bekannte exponentiellen Lade- und Entladekurven.

© Martin Werner, Fulda 2008

$$u_C(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \le t < t_1 \\ 1 - e^{-(t-t_1)} & \text{für} \quad t_1 < t < t_2 \\ \left[1 - e^{-(t_2-t_1)}\right] \cdot e^{-(t-t_2)} & \text{für} \quad t > t_2 \end{cases} \tag{2.54}$$

Bis zum Abschalten der Quelle bei t_2 = 1,3 wird die Kapazität zu ca. 63% geladen. Danach entlädt sie sich, siehe Bild 2-24.

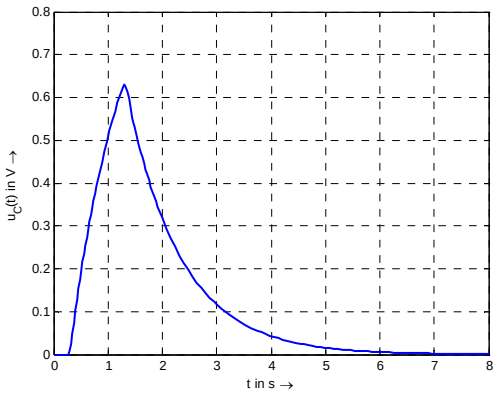


Bild 2-24 Simulationsergebnisse zum Verlauf der Spannung an der Kapazität des RC-Gliedes bei Erregung mit periodischem Rechteckimpulszug

Programmbeispiel 2-3 Schaltvorgang am RC-Glied

```
function s3s2_3
% Solving differential equation for RC circuit
% s3s2_3.m * mw * 07/17/2007
%% Initialization
tspan = [0 8];                                  % time span for evaluation
y0 = 0;                                               % initial condition
options = odeset('refine',10);
[t,y] = ode45(@rc,tspan,y0,options);
%% Graphics
figure('Name','RC circuit wit rectangular input
impulse','NumberTitle','off');
plot(t,y,'LineWidth',2), grid
axis([0 8 0 0.8]);
xlabel('t in s \rightarrow'); ylabel('u_C(t) in V \rightarrow')
%% Subfunction
% first-order ordinary differential equation (ODE) for RC circuit
function dydt = rc(t,y);
% input signal: rectangular impulse
if t > .3 & t < 1.3
    x = 1;
else
    x = 0;
end
dydt = 1*(x - y);                                                    % ODE
```


© Martin Werner, Fulda 2008

3 Lineare zeitinvariante Systeme

Anmerkung: Da das Kapitel 3 in [Wer08] einen einführenden Charakter mit dem Ziel einer ersten Übersicht besitzt, ist der Übungsteil hier relativ kurz. Im Mittelpunkt stehen die Impulsantwort und die Faltung. Weitere typische Übungen zum Themenkreis LTI-Systeme werden in den noch folgenden, vertiefenden Abschnitten angeboten.

3.1 Zeitdiskrete LTI-Systeme

3.1.1 Aufgaben

Aufgabe A3.1-1 Zeitdiskrete Faltung ✍ ★

a) Falten Sie die beiden Folgen $x_1[n] = \{1, 1, 1, 1, 1\}$ und $x_2[n] = \{1, 1, 1\}$ miteinander und stellen Sie das Ergebnis grafisch dar.

b) Es werden zwei Folgen $x_1[n]$ und $x_2[n]$ mit den endlichen Längen N_1 und N_2 miteinander gefaltet. Wie lange ist das Faltungsprodukt?

Aufgabe A3.1-2 Faltung zweier Folgen endlicher Länge ✍ ★

Gegeben sind die beiden Folgen $x_1[n] = \{1, 2, 1\}$ und $x_2[n] = \{1, 0, -1, 0, 1, 0, -1\}$.

a) Skizzieren Sie die Folgen.

b) Geben Sie die Längen der Folgen an.

c) Falten Sie die Folgen, $x_1[n] * x_2[n] = y[n]$, und stellen Sie das Ergebnis grafisch dar.

Aufgabe A3.1-3 Barker Code ✍ ★

a) Geben Sie die Barker-Codefolge der Länge 7, $b_7[n]$, analytisch an und skizzieren Sie die Folge, siehe ([Wer08], Tabelle 3-1).

b) Skizzieren Sie die Impulsantwort des kausalen Matched-Filters zu $b_7[n]$ mit $h[n] = b_7[6-n]$. Wie kann die Wirkung von $6-n$ im Argument anschaulich gedeutet werden?

c) Berechnen Sie das Ausgangssignal des Matched-Filters für die gesendete Barker-Codefolge der Länge 7, $y[n] = h[n] * b_7[n]$, und skizzieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe A3.1-4 Gleitender Mittelwert ✍ ★

Im Folgenden soll die Rechenvorschrift des gleitenden Mittelwerts, siehe auch [Wer08], als Eingangs-Ausgangsgleichung eines Systems aufgefasst werden.

a) Geben Sie zum gleitenden Mittelwert die Impulsantwort und die Eingangs-Ausgangsgleichung des entsprechenden kausalen LTI-Systems an.

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

b) Bestimmen Sie die Energie der Impulsantwort in (a).

c) Skizzieren Sie die Impulsantwort und die Sprungantwort.

d) Berechnen Sie für das Eingangssignal $x[n] = \{1, 2, 1, -1, -1, 2, 2, 1, -1\}$ und der Breite des Mittelungsfensters $M + 1 = 3$ das Ausgangssignal mit der Faltung. Wie lang ist die Folge am Ausgang?

Aufgabe A3.1-5 Stabilität ✍ ★

Die Analyse von Systemen mit unendlich langen Impulsantworten, so genannten *IIR-Systemen* (Infinite-Impulse Response) kann aufwendig sein, wie spätere Abschnitte noch zeigen werden. Wir betrachten deshalb hier ein relativ einfaches Beispiel. Als Impulsantwort des Systems nehmen wir eine rechtsseitige Exponentialfolge an.

$$h[n] = z^n \cdot u[n] \tag{3.1}$$

Unter welcher Bedingung erhalten wir ein BIBO-stabiles System? Wie groß ist dann die Energie der Impulsantwort?

Aufgabe A3.1-6 Sprungantwort und Impulsantwort ✍ ★

Gegeben ist die Sprungantwort eines zeitdiskreten LTI-Systems

$s[n] = u[n] + 2u[n-1] + 2u[n-2] + u[n-3]$

a) Skizzieren Sie die Sprungantwort.

b) Geben Sie Impulsantwort an.

Aufgabe A3.1-7 Rückgekoppeltes System mit Differenzengleichung ✍ ★★

Das Systems mit Rückkopplung des Ausgangssignals wird durch die Differenzengleichung

$y[n] + a \cdot y[n-1] = x[n]$

mit einer Konstanten $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ beschrieben.

Klassifizieren Sie das System indem Sie die folgende Größen bestimmen bzw. den Eigenschaften nachgehen:

a) Eingangs-Ausgangsgleichung $y[n] = \mathrm{T}(x[n])$

b) Impulsantwort (*Hinweis*: Anfangsbedingung $y[n] = 0 \ \forall \ n < 0$),

c) Gedächtnis,

d) Kausalität,

e) Linearität,

f) Zeitinvarianz und

g) Stabilität.

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

3.1.2 Lösungen

Lösung A3.1-1 Zeitdiskrete Faltung ☑

a)

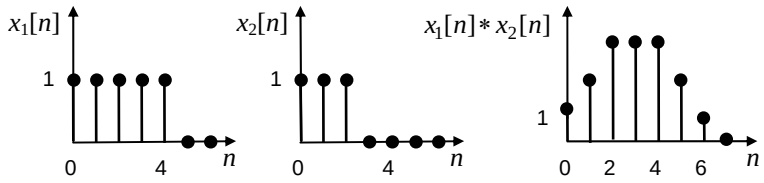
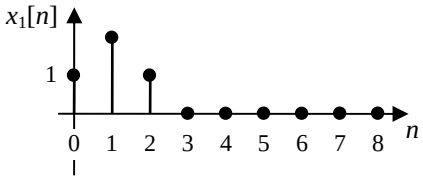


Bild 3-1 Faltung zweier Rechteckimpulse

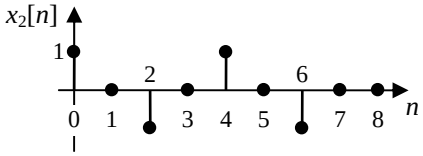
b) Aus anschaulichen Überlegungen, wie beispielsweise mit Hilfe von Bild 3-1, folgt für die Länge des Faltungsproduktes N_1+N_2-1. Im Beispiel erhalten wir $5 + 3 - 1 = 7$.

Lösung A3.1-2 Faltung zweier Folgen endlicher Länge ☑

Länge $N_1 = 3$



Länge $N_2 = 7$



$y[n] = \{1, 2, 0, -2, 0, 2, 0, -2, -1\}$

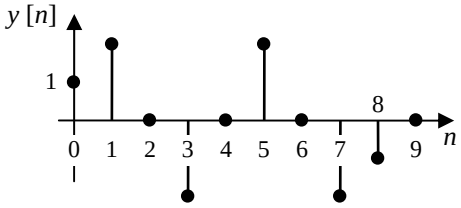


Bild 3-2 Signale $x_1[n]$ und $x_2[n]$ und ihr Faltungsprodukt

Lösung A3.1-3 Barker-Code ☑

a,b) Barker-Codefolge der Länge 7 $b_7[n] = \{1, 1, 1, -1, -1, 1, -1\}$

Impulsantwort des kausalen Matched-Filters $h[n] = b_7[6-n] = \{-1, 1, -1, -1, 1, 1, 1\}$

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

Die Impulsantwort resultiert wegen des negativen Vorzeichens der Variablen *n* aus der Spiegelung der Codefolge. Die Addition von 6 im Argument verschiebt das Zwischenergebnis um sechs Zeitschritte nach rechts, so dass sich die Impulsantwort als rechtsseitige Folge ergibt. Das Matched-Filter ist kausal, siehe Bild 3-3.

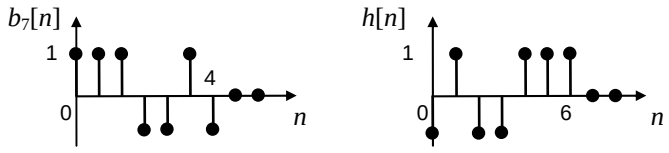


Bild 3-3 Barker-Codefolge der Länge 7 und Impulsantwort des zugehörigen Matched-Filters

c) Ausgangssignal des Matched-Filters, s. Bild 3-4:

$y[n] = h[n] * b_7[n] = \{-1,\ 0,\ -1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 7,\ 0,\ -1,\ 0,\ -1,\ 0,\ -1\}$

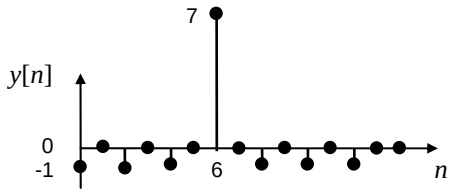


Bild 3-4 Ausgangssignal des Korrelators für die Barker-Codefolge der Länge 7

Man erkennt in Bild 3-4 die Signalüberhöhung im Maximum. Das Matched-Filter bündelt die gesamte Signalenergie in einen Impuls. Durch die spezielle Form des Barker-Codes ist für den Betrag des Ausgangssignals das Verhältnis der Amplituden des Hauptmaximums und der Nebenmaxima stets gleich der Codelänge.

Lösung A3.1-4 Gleitender Mittelwert ☑

a) Die Impulsantwort des gleitenden Mittelwerts ist gleich dem rechtsseitigen Rechteckimpuls mit der Breite $M + 1$

$$h[n] = \frac{1}{M+1}\begin{cases} 1 & \text{für} \quad 0 \le n < M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{3.2}$$

Die Eingangs-Ausgangsgleichung des Systems ist dann

$$y[n] = x[n] * h[n] = \frac{1}{M+1}\sum_{k=0}^{n} x[n-k] \tag{3.3}$$

b) Die Energie der Impulsantwort beträgt $1/(M+1)$.

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

c) Impulsantwort und Sprungantwort

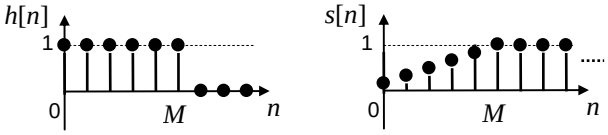


Bild 3-5 Impulsantwort $h[n]$ und Sprungantwort $s[n]$

d) Berechnung des Ausgangssignal mit der Faltung für $M + 1 = 3$.

$$y[0] = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n} x[n-k] = \frac{1}{3}x[0] = 1/3$$

$$y[1] = \frac{1}{3}\big(x[1]+x[0]\big) = \frac{1}{3}(2+1) = 1$$

$$y[2] = \frac{1}{3}\big(x[2]+x[1]+x[0]\big) = \frac{1}{3}(1+2+1) = 4/3$$

$$y[3] = \frac{1}{3}\big(x[3]+x[2]+x[1]\big) = \frac{1}{3}(-1+1+2) = 2/3$$

$$\vdots$$

$$y[8] = \frac{1}{3}\big(x[8]+x[7]+x[6]\big) = \frac{1}{3}(-1+1+2) = 2/3$$

$$y[9] = \frac{1}{3}\big(x[8]+x[7]\big) = \frac{1}{3}(-1+1) = 0$$

$$y[10] = \frac{1}{3}x[8] = \frac{1}{3}(-1) = -1/3$$

Die Folge am Ausgang $y[n]$ hat die Länge $9 + 3 - 1 = 11$.

Lösung A3.1-5 Stabilität ☑

Hinreichend für die BIBO-Stabilität ist die Konvergenz der unendlichen geometrischen Reihe, siehe auch Aufgabe 2.2-5.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|z^n\right| = \sum_{n=0}^{\infty}|z|^n = \frac{1}{1-|z|} \quad \text{für} \quad |z|<1 \tag{3.4}$$

Für die Energie der Impulsantwort gilt Entsprechendes.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|z^n\right|^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\left|z^2\right|^n = \frac{1}{1-\left|z^2\right|} \quad \text{für} \quad |z|<1 \tag{3.5}$$

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

Lösung A3.1-6 Sprungantwort und Impulsantwort ☑

a) Sprungantwort

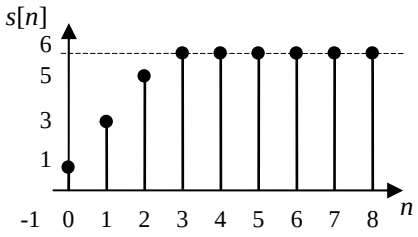


Bild A3.6 Sprungantwort $s[n]$

b) Impulsantwort $h[n] = \{1, 2, 2, 1, 0, \dots\}$

Lösung A3.1-7 Rückgekoppeltes System mit Differenzengleichung ☑

a) Die systembeschreibende Differenzengleichung

$y[n] = x[n] - a \cdot y[n-1]$

liefert durch sukzessives Einsetzen

$y[n] = x[n] - a \cdot x[n-1] + (-a)^2 \cdot x[n-2] + (-a)^3 \cdot x[n-3] + \dots$

die Eingangs-Ausgangsgleichung

$$y[n] = \sum_{m=0}^{\infty} (-a)^m \cdot x[n-m]$$

b) Impulsantwort

$y[n] = 0 \quad \forall\, n < 0$

$y[0] = \delta[0] - a \cdot y[-1] = 1$

$y[1] = \delta[1] - a \cdot y[0] = -a$

$y[2] = \delta[2] - a \cdot y[1] = (-a) \cdot (-a)$

…

$y[n] = (-a)^n$ für $n \geq 0$, rechtsseitige Exponentielle.

Alternativ: Einsetzen in die Eingangs-Ausgangsgleichung liefert

$$y[n] = \sum_{m=0}^{\infty} (-a)^m \cdot \delta[n-m] = (-a)^n \text{ für } n \geq 0 \text{ und null sonst}$$

c) Das Gedächtnis des Systems ist unbegrenzt, siehe auch exponentielles Vergessen.

d) Das System ist kausal, da zum Zeitpunkt n der Ausgangswert $y[n]$ nur vom gleichzeitig anliegenden Eingangswert $x[n]$ und dem vorhergehenden Eingangswerten abhängt, siehe Eingangs-Ausgangsgleichung.

e) Die Linearität wird anhand der Additivität geprüft.

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

Mit

$y_1[n] = \mathrm{T}(x_1[n])$ und $y_2[n] = \mathrm{T}(x_2[n])$

folgt für die Linearkombination der Eingangssignale

$$\begin{aligned}\mathrm{T}\left(\alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n]\right) &= \sum_{m=0}^{\infty}\left(\alpha_1 x_1[n-m] + \alpha_2 x_2[n-m]\right) = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\alpha_1 x_1[n-m] + \sum_{m=0}^{\infty}\alpha_2 x_2[n-m] = \\ &= \alpha_1 \cdot \mathrm{T}\left(x_1[n]\right) + \alpha_2 \cdot \mathrm{T}\left(x_2[n]\right) = \alpha_1 y_1[n] + \alpha_2 y_2[n]\end{aligned}$$

Anmerkung: Aus der Eingangs-Ausgangsgleichung folgt die Linearität unmittelbar aus der Darstellung als Summe, solange die Summe konvergiert.

f) Zeitinvarianz

Mit $x_1[n] = x[n-k]$ folgt

$$y_1[n] = \sum_{m=0}^{\infty}(-a)^m \cdot x_1[n-m] = \sum_{m=0}^{\infty}(-a)^m \cdot x[n-k-m]$$

Aus der Eingangs-Ausgangsgleichung folgt für die verschobene Ausgangsfolge

$$y[n-k] = \sum_{m=0}^{\infty}(-a)^m \cdot x[n-k-m] = y_1[n]$$

Das System ist zeitinvariant.

g) BIBO-Stabilität

Mit $|x[n]| \le M < \infty$ folgt aus der Eingangs-Ausgangsgleichung

$$\left|y[n]\right| = \left|\sum_{m=0}^{\infty}(-a)^m \cdot x[n-m]\right| \le M\left|\sum_{m=0}^{\infty}(-a)^m\right| = M \cdot \left|\frac{1}{1+a}\right|$$

für $|a| < 1$, siehe unendliche geometrische Reihe. Dann ist das System BIBO-stabil.

3.2 Zeitkontinuierliche LTI-Systeme

3.2.1 Aufgaben

Aufgabe A3.2-1 Barker-Code ✍ ★

Das Codewort für einen Barker-Code der Länge 4 ist in Bild 3-7 gezeigt.

a) Geben Sie das Signal $x(t)$ in Bild 3-7 analytisch an.

b) Skizzieren Sie die Impulsantwort des kausalen Matched-Filters $h(t) = x(4T-t)$.

c) Bestimmen Sie grafisch das Ausgangssignal des Matched-Filters bei Erregung mit $x(t)$.

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

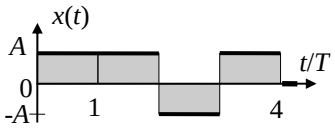


Bild 3-7 Rechteckimpulsfolge zum Barker-Codewort der Länge 4

Aufgabe A3.2-2 Matched-Filterempfang für PAM-Signal ✍ ★

Das 4-stufige Signal einer Pulsamplitudenmodulation (PAM) $x(t)$ in Bild 3-8 wird im Empfänger durch ein kausales System mit rechteckförmiger Impulsantwort $h(t)$ der Dauer T und Amplitude 1 gefiltert [Wer06].

a) Beschreiben Sie das Signal analytisch.

b) Geben Sie die Impulsantwort des kausalen Empfangsfilters an.

c) Skizzieren Sie das gefilterte Signal $y(t)$ und beschriften Sie dabei die Achsen sorgfältig.

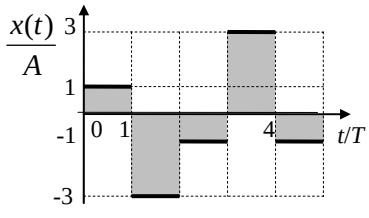


Bild 3-8 4-PAM-Basisbandsignal

3.2.2 Lösungen

Lösung A3.2-1 Barker-Code ☑

a)
$$x(t) = A\Pi_T\left(t-\frac{T}{2}\right) + A\Pi_T\left(t-\frac{3T}{2}\right) - A\Pi_T\left(t-\frac{5T}{2}\right) + A\Pi_T\left(t-\frac{7T}{2}\right) \tag{3.6}$$

b,c)

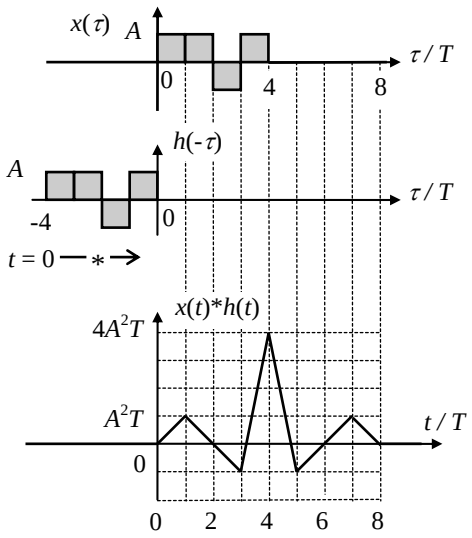


Bild 3-9 Impulsantwort des kausalen Matched-Filters, $h(t) = x(4T-t)$, (oben) und Ausgangssignal des Matched-Filter zum Barker-Code in Bild 3-7 (unten)

© Martin Werner, Fulda 2008

Lösung A3.2-2 Matched-Filterempfang für PAM-Signal ☑

a)
$$x(t) = A\cdot\Pi_T\left(t-\frac{T}{2}\right)-3A\cdot\Pi_T\left(t-\frac{3T}{2}\right)-A\cdot\Pi_T\left(t-\frac{5T}{2}\right)+ +3A\cdot\Pi_T\left(t-\frac{7T}{2}\right)-A\cdot\Pi_T\left(t-\frac{9T}{2}\right) \tag{3.7}$$

b)
$$h(t) = \Pi_T\left(t-\frac{T}{2}\right) \tag{3.8}$$

c) Zusätzlich eingetragen im Bild sind die dreieckförmigen Beiträge der einzelnen Impulse.

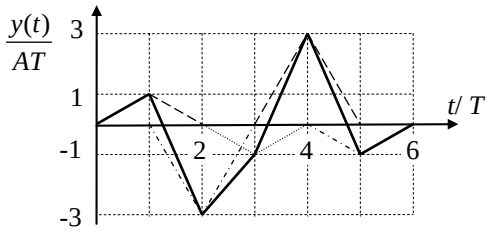


Bild 3-10 Signal am (Matched-) Filterausgang

3.3 Übungen mit MATLAB zur Faltung

MATLAB-Übung M3-1 Faltung

MATLAB stellt für die *Faltung* von Folgen den Befehl `conv` (convolution) zur Verfügung. Machen Sie sich durch überschaubare Beispiele im `Command Window` mit seiner Anwendung vertraut. Geben Sie dazu folgende Kommandozeilen ein und verifizieren Sie die Ergebnisse.

a) `>> conv([1,1],[1,1])`

b) `>> conv([1],[1,2,3])`

c) `>> conv([0,0,1,0],[1,2,3])`

d) `>> conv([1,1,-1,1],[1,-1,1,1])` und
`>> conv([1,-1,1,1],[1,1,-1,1])`

e) Verifizieren Sie auch Ihre Ergebnisse aus den Aufgaben A3.1-1 und -2.

Die Beispiele bestätigen:

a) Der Befehl `conv` realisiert die Faltung zweier rechtsseitiger Folgen.

b) Die Faltung einer Folge $x[n]$ mit der Impulsfolge $\delta[n]$ liefert wieder die Folge $x[n]$.

© Martin Werner, Fulda 2008

c) Die Faltung einer Folge $x[n]$ mit der um m Positionen nach rechts verschobenen Impulsfolge $\delta[n-m]$ liefert die Folge $x[n-m]$, also die ursprüngliche Folge ebenfalls um m Positionen nach rechts verschoben.

d) Die Faltung ist kommutativ.

MATLAB-Übung M3-2 gleitender Mittelwert

In dieser Übung knüpfen wir an die früheren Übungen zum gleitenden Mittelwert an.

Erstellen Sie ein MATLAB-Programm, welches das System *gleitender Mittelwert* durch die Faltung realisiert. Modifizieren Sie dazu das Programmbeispiel 2-1 so, dass die Impulsantwort des Systems gleitender Mittelwert verwendet wird, siehe auch Aufgabe M3-1.

Vergleichen Sie Ihr Resultat mit dem in der MATLAB-Übung M2-1. Welche Unterschiede stellen sich insbesondere an den Signalrändern des restaurierten Signals $y[n]$ ein? Warum ist beim Vergleich des Nutzsignals $v[n]$ und des restaurierten Signals $y[n]$ in einem Bild, das Nutzsignal zeitlich zu verschieben und wie groß ist die Verschiebung zu wählen?

Programmbeispiel 3-1 FIR-System gleitender Mittelwert

```
% Moving average with FIR system using convolution
% s3s3_1.m * mw * 07/23/2007
%% Initialize parameters and generate signals
N = 50;                                          % normalized time span
n = 0:N;                                            % normalized time
Omega = 2*pi/50;               % normalized radian frequency of signal
v = sin(Omega*n);                                                % signal
r = 0.2*randn(1,N+1);                                      % noise signal
x = v + r;                                                 % noisy signal
%% Moving average
M = 9;                                                    % window length
h = (1/M)*ones(1,M);            % finite-length impulse response (FIR)
y = conv(h,x);                                            % output signal
%% Graphics
figure('Name',['FIR system : Moving average with M =
',num2str(M)],'NumberTitle','off');
subplot(3,1,1); stem(n,v,'filled')                                % signal
    axis([0 N -2 2]); ylabel('v[n] \rightarrow'); grid
subplot(3,1,2); stem(n,x,'filled')                         % noisy signal
    axis([0 N -2 2]); ylabel('x[n] \rightarrow'); grid
    hold on; plot(n,v,':k'); hold off
subplot(3,1,3); stem(0:length(y)-1,y,'filled')        % restored signal
    axis([0 N+M-1 -2 2]); grid
    xlabel('n \rightarrow'); ylabel('y[n] \rightarrow')
    shift = fix(M/2); % time shift for signal alignment
    hold on; plot(n+shift,v,':k'); hold off
```


© Martin Werner, Fulda 2008

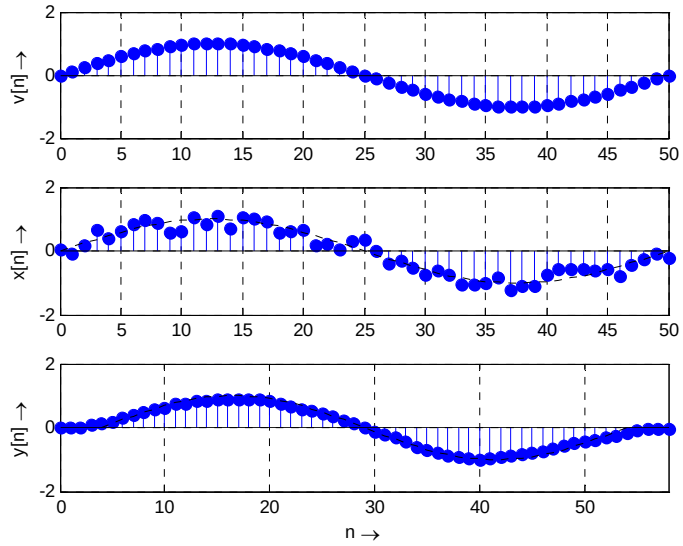


Bild 3-11 Simulationsergebnisse zum gleitenden Mittelwert mit FIR-System (Nutzsignal $v[n]$, mit Rauschen gestörtes Signal $x[n]$ und rekonstruiertes Signal $y[n]$)

MATLAB-Übung M3-3 Barker-Code

a) Schreiben Sie ein MATLAB-Programm zur Simulation der Rahmensynchronisation mit Barker-Codefolgen. Verwenden Sie den Barker-Code der Länge 11 und stellen Sie die Barker-Codefolge, die Impulsantwort des Empfangssystems (Matched-Filter) und das Signal am Systemausgang grafisch dar.

Welche für die Anwendung von Barker-Codefolgen in der Datenübertragung typischen Merkmale zeigt das Signal am Systemausgang?

b) Wiederholen Sie die Simulation in a) für den Fall einer Rauschstörung. Variieren Sie den Amplitudenfaktor des Rauschsignals bis der Empfang der Barker-Codefolge am Systemausgang stark gestört ist.

Programmbeispiel 3-2 Barker-Code

```
% Barker code and matched filter receiver
% s3s3_2.m * mw * 07/23/2007
%% Barker code length 11 and matched filter impulse response b[11-n]
b = [1,1,1,-1,-1,-1,1,-1,-1,1,-1];
h = fliplr(b);
%% Matched filtering
y = conv(h,b);                                          % output signal
%% Graphics
figure('Name',['Barker code with length N =
',num2str(length(b))],'NumberTitle','off');
subplot(1,3,1); stem(0:length(b)-1,b,'filled'); grid      % Barker code
    axis([0,length(b)-1,-2,2]); xlabel('n \rightarrow'); ylabel('b[n]
\rightarrow')
```


© Martin Werner, Fulda 2008

```
% matched-filter impulse response
subplot(1,3,2); stem(0:length(b)-1,h,'filled'); grid
    axis([0,length(b)-1,-2,2]); xlabel('n \rightarrow'); ylabel('h[n]
\rightarrow')
% matched filter output signal
subplot(1,3,3); stem(0:length(y)-1,y,'filled'); grid
    axis([0,length(y)-1,-2,12])
    xlabel('n \rightarrow'); ylabel('y[n] \rightarrow')
```

Programmbeispiel 3-3 Barker-Code mit Rauschstörung

```
% Barker code and matched filter receiver
% s3s3_3.m * mw * 07/23/2007
%% Barker code length 11 and matched filter impulse response b[11-n]
b = [1,1,1,-1,-1,-1,1,-1,-1,1,-1];
h = fliplr(b);
x = b + 1*randn(1,length(b));                              % noisy signal
%% Matched filter
y = conv(h,x);                                            % output signal
%% Graphics
figure('Name',['Barker code with length N =
',num2str(length(b))],'NumberTitle','off');
% matched-filter impulse response
subplot(1,2,1); stem(0:length(x)-1,x,'filled'); grid
    axis([0,length(x)-1,-5,5]); xlabel('n \rightarrow');
ylabel('x[n],b[n] \rightarrow')
    hold on; stem(0:length(b)-1,b); hold off
% matched filter output signal
subplot(1,2,2); stem(0:length(y)-1,y,'filled'); grid
    axis([0,length(y)-1,-5,20])
    xlabel('n \rightarrow'); ylabel('y[n] / max|y[n]| \rightarrow')
```

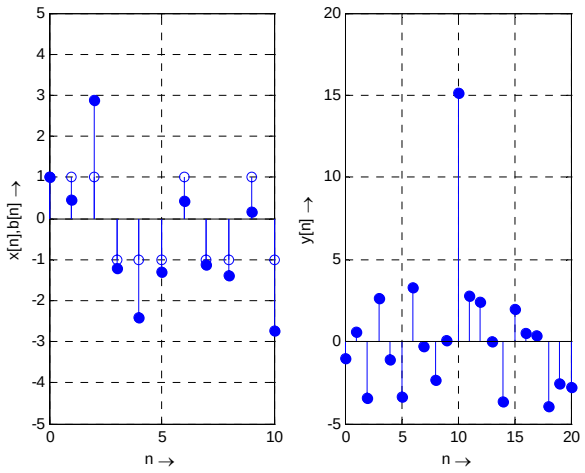


Bild 3-12 Simulationsergebnisse zur Rahmensynchronisation mit Barker-Codefolge und gestörter Übertragung (Barker-Code $b[n]$ (o), mit Rauschen gestörtes Empfangssignal $x[n]$ (•) und normiertes Signal am Systemausgang $y[n]$)

© Martin Werner, Fulda 2008

MATLAB-Übung M3-4 Rückgekoppeltes System 1. Ordnung, Differenzengleichung

Betrachten Sie das Systems mit Rückkopplung in Aufgabe A3.1-7.

a) Programmieren Sie das System in MATLAB und bestimmen Sie die Impulsantwort und Sprungantwort durch Simulation, wenn $a = -0{,}8$ ist. Stellen Sie beide Systemfunktionen grafisch dar.

   Welches prinzipielles Verhalten stellt sich jeweils ein?

b) Simulieren Sie die Reaktion des Systems auf die Erregung mit einer geschalteten Kosinusfolge

$$x[n] = \cos(\Omega_q n) \cdot u[n] \quad \text{mit} \quad \Omega_q = \pi / 8$$

   Stellen Sie die Erregung und die Reaktion grafisch dar. Das System wird zunächst als energiefrei angenommen.

   Welches prinzipielle Verhalten stellt sich ein?

Anmerkung: Die Reaktionen der Systeme auf geschaltete Signale werden im nächsten Abschnitt vertieft.

Programmbeispiel 3-4 System mit Rückkopplung

```
% System with 1st order DEQ
% s3s3_4.m * mw * 07/23/2007
%% Initialize system and generate input signals
a = -0.8;
N = 20;
delta = [1 zeros(1,N)];                          % unit impulse function
u = ones(1,N+1);                                    % unit step function
%% Simulation
h = length(delta); h(1) = delta(1);
for n = 2:N+1
    h(n) = delta(n) - a*h(n-1);                       % impulse response
end
s = length(u); s(1) = u(1);
for n = 2:N+1
    s(n) = u(n) - a*s(n-1);                             % step response
end
%% Graphics
figure('Name',['1st order system with a =
',num2str(a)],'NumberTitle','off');
 subplot(1,2,1); stem(0:length(h)-1,h,'filled'); grid % impulse
response
    axis([0,length(h)-1,0,5]); xlabel('n \rightarrow'); ylabel('h[n]
\rightarrow')
subplot(1,2,2); stem(0:length(s)-1,s,'filled'); grid % step response
    axis([0,length(s)-1,0,5])
    xlabel('n \rightarrow'); ylabel('s[n] \rightarrow')
```


© Martin Werner, Fulda 2008

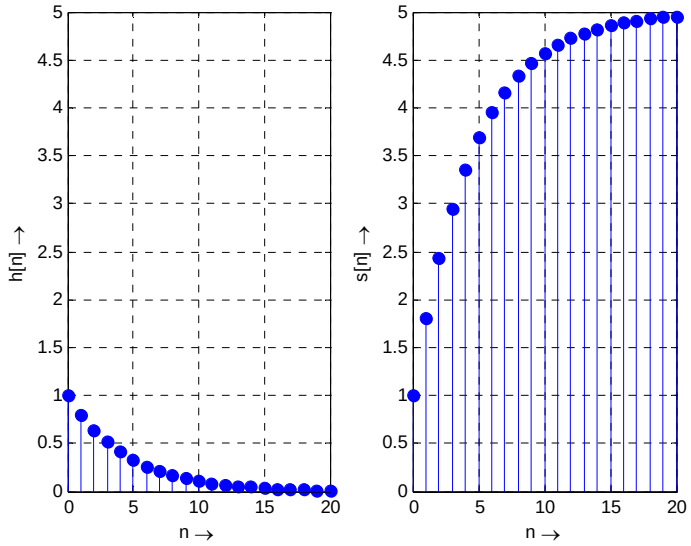


Bild 3-13 Impulsantwort $h[n]$ und Sprungantwort $s[n]$ des rückgekoppelten Systems 1. Ordnung mit $a = -0{,}8$ (Simulationsergebnisse)

Programmbeispiel 3-5 System mit Rückkopplung und geschalteter, sinusförmiger Erregung

```
% System with 1st order DEQ with sinusoidal input
% s3s3_5.m * mw * 07/23/2007
%% Initialize system and generate input signal
a = -0.8;
n = 0:40;
w = pi/8;                                   % normalized radian frequency
x = cos(w*n);                                       % cosine function
%% Simulation
y = length(x); y(1) = x(1);
for n = 2:N+1
    y(n) = x(n) - a*y(n-1); % DEQ
end
%% Graphics
figure('Name',['1st order system with a =
',num2str(a)],'NumberTitle','off');
subplot(2,1,1); stem(0:length(x)-1,x,'filled'); grid     % input signal
    axis([0,length(x)-1,-3,3]); xlabel('n \rightarrow'); ylabel('x[n]
\rightarrow')
subplot(2,1,2); stem(0:length(y)-1,y,'filled'); grid    % output signal
    axis([0,length(y)-1,-3,3])
    xlabel('n \rightarrow'); ylabel('y[n] \rightarrow')
```


© Martin Werner, Fulda 2008

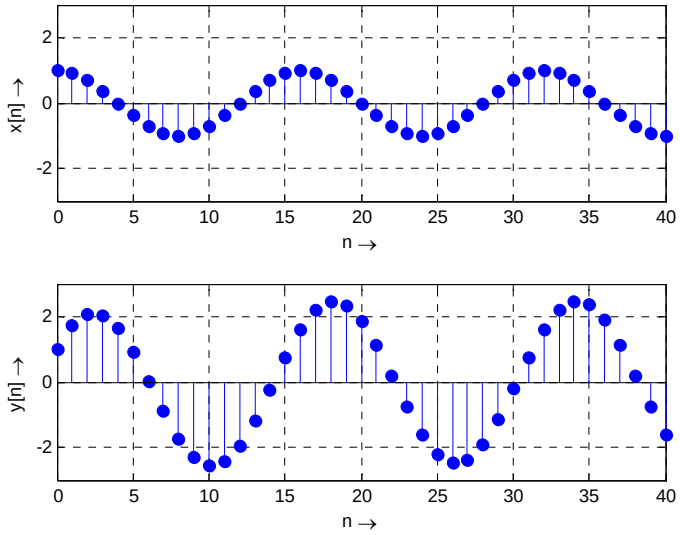


Bild 3-14 Systemreaktion $y[n]$ des rückgekoppelten Systems 1. Ordnung mit $a = -0{,}8$ auf die Erregung mit einer geschalteten Kosinusfolge $x[n]$ mit $\Omega_q = \pi / 8$ (Simulationsergebnisse)

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

4 Systeme mit linearen Differenzengleichungen

4.1 Aufgaben

Aufgabe A4.1-1 Nichtrekursives System ✍ ★

Gegeben ist die Impulsantwort eines zeitdiskreten LTI-Systems

$$h[n] = \sin\left(\frac{\pi}{2}(n+1)\right) \cdot \big[u[n] - u[n-8]\big]$$

a) Skizzieren Sie die Impulsantwort.

b) Geben Sie die Sprungantwort an.

c) Skizzieren Sie den Signalflussgraphen des Systems.

d) Geben Sie die DGL an.

Aufgabe A4.1-2 homogene DGL 2. Ordnung ✍ ★

Berechnen Sie die Lösung der homogenen DGL 2. Ordnung

$$y[n] - y[n-1] + \frac{1}{4} y[n-2] = 0 \tag{4.1}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$y[-1] = y[-2] = 1 \tag{4.2}$$

Aufgabe A4.1-3 System 2. Ordnung ✍ ★

Gegeben ist das in Bild 4-1 gezeigte Blockdiagramm eines Systems 2. Ordnung.

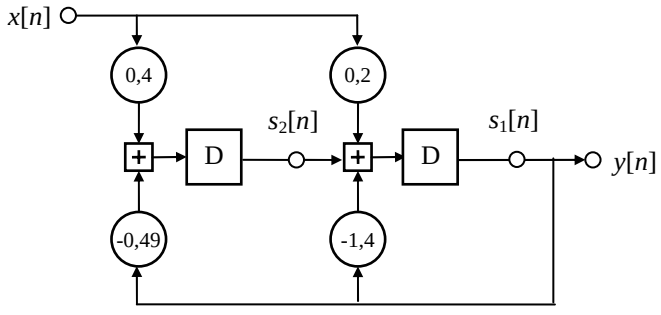


Bild 4-1 Blockdiagramm des Systems 2. Ordnung in transponierter Direktform II mit Zustandsgrößen

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

a) Skizzieren Sie den zugehörigen Signalflussgraphen in der Direktform II.

b) Stellen Sie die Differenzengleichung auf.

c) Geben Sie die Übertragungsfunktion an.

d) Geben Sie die Impulsantwort analytisch an. Berechnen Sie zur späteren Kontrolle des Ergebnisses $h[0]$ und $h[1]$.

Übung mit MATLAB

Anmerkung: Die Komplexität dieser und der folgenden Aufgaben macht es sinnvoll, die analytischen Lösungen mit den Übungen mit MATLAB zu verbinden. Analytische Lösungen und Simulationsergebnisse lassen sich direkt vergleichen und so die Lösungen schnell überprüfen. Darüber hinaus ermöglichen die Simulationen durch Variation der Parameter den Einfluss der Parameter auf die Lösungen zu verdeutlichen.

e) Programmieren Sie das System und bestimmen Sie die Impulsantwort und die Sprungantwort durch Simulation. Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis aus (d) anhand der Simulation.

Hinweise: (i) Simulieren Sie das System entsprechend dem Blockdiagramm in der transponierten Direktform II mit den zwei Zustandsvariablen $s_1[n]$ und $s_2[n]$. (ii) Verifizieren Sie Ihr Simulationsprogramm durch den MATLAB-Befehl `filter`.

Aufgabe A4.1-4 Digitaler Sinusgenerator ★★

Anmerkung: Bei der Anwendung der digitalen Signalverarbeitung mit einfachen Mikrocontrollern werden effizienten Algorithmen zur Signalerzeugung benötigt. Das Beispiel zeigt, wie mit elementaren Rechenoperationen, der Addition und der Multiplikation, eine Sinusfolge generiert werden kann.

Ein System 2. Ordnung kann dazu benutzt werden, eine Sinusfolge zu erzeugen. Gehen Sie im Weiteren von der allgemeinen DGL 2. Ordnung aus

$$y[n] + a_1\, y[n-1] + a_2\, y[n-2] = b_0\, x[n] + b_1\, x[n-1] + b_2\, x[n-2] \tag{4.3}$$

a) Spezialisieren sie die DGL 2. Ordnung so, dass mit den Startwerten $y[0] = 0$ eine rechtsseitige Sinusfolge mit der normierten Kreisfrequenz Ω erzeugt wird.

Hinweis: Hier kommt es auf einen geschickten Ansatz an. Beginnen Sie mit Ausdrücken für $y[n]$, $y[n+1]$ und $y[n+2]$. Stellen Sie dann mit trigonometrischen Umformungen $y[n+2]$ als Funktion von $y[n+1]$ und $y[n]$ dar.

b) Skizzieren Sie die Folgen mit den normierten Kreisfrequenzen $\Omega = \pi/5$, $\pi/2$ und $9\pi/5$ für $n = 0, 1, 2, ..., 10$.

c) Welche Beschränkung muss bzgl. der normierten Kreisfrequenz beachtet werden?

Aufgabe A4.1-5 Rekursives System mit DGL 1. Ordnung ★★

Ein System 1. Ordnung mit Rückkopplung des Ausgangssignals wird durch die Differenzengleichung

$$y[n] + a_1 \cdot y[n-1] = x[n]$$

mit einer Konstanten $a_1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ beschrieben. Die Anfangsbedingungen sind $y[n] = 0 \;\; \forall\, n < 0$ und $y[0] = y_0$.

© Martin Werner, Fulda 2008

a) Bestimmen Sie die Lösung der homogenen DGL.

b) Unter welcher Bedingung ergibt sich ein stabiles System?

c) Geben Sie den Signalflussgraphen an.

d) Geben Sie die Impulsantwort an.

e) Geben Sie die Sprungantwort an. Gegen welchen Grenzwert konvertiert die Sprungantwort für $n \to \infty$

f) Das energiefreie System wird ab dem Zeitpunkt null mit einer Exponentiellen erregt, $x[n] = q^n \cdot u[n]$ mit $|q| \leq 1$. Bestimmen Sie das Ausgangssignal des Systems für $n \geq 0$.

Übung mit MATLAB

g) Programmieren Sie das System und bestimmen Sie die Impulsantwort und die Sprungantwort durch Simulation, wenn $a_1 = -0{,}8$ ist

h) Bestimmen Sie die Lösung der inhomogenen DGL durch Simulation für die exponentielle Erregung mit $q = 0{,}5$.

Aufgabe A4.1-6 Rekursives System mit DGL 1. Ordnung - Einschwingen ★

Das System 1. Ordnung in A4.1-5 sei zunächst energiefrei. Ab dem Zeitpunkt null wird es durch eine Kosinusfolge erregt.

$x[n] = \cos(\Omega\, n) \cdot u[n]$

a) Berechnen Sie die Systemreaktion.

Hinweis: Wie kann das Ergebnis aus A4.1-5 (f) hier verwendet werden? Vgl. komplexe Wechselstromrechnung.

b) Zerlegen Sie die Systemreaktion in den Einschwinganteil und den stationären Anteil.

Übung mit MATLAB

c) Simulieren Sie die Reaktion des Systems für $a_1 = -0{,}8$ und $\Omega = \pi / 8$. Stellen Sie zusätzlich auch den Einschwinganteil und den stationären Anteil grafisch dar.

Aufgabe A4.1-7 Zur Berechnung der Impulsantwort eines rekursiven Systems 2. Ordnung mit verschiedenen Polen ★★

Zeigen Sie, dass mit der Definition ([Wer08], (4.68)) gilt

$$D_1 + D_2 = 1 \tag{4.4}$$

Aufgabe A4.1-8 Zur Berechnung der Impulsantwort eines rekursiven Systems 2. Ordnung mit doppeltem Pol ★

Zeigen Sie, dass mit der Definition ([Wer08], (4.74)) gilt

$$D_1 = D_2 = 1 \tag{4.5}$$

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

Aufgabe A4.1-9 Rekursives System mit DGL 2. Ordnung – Homogene DGL ✍ ★★★

Das reellwertige System 2. Ordnung wird durch die homogene Differenzengleichung

$$y[n] + a_1 \cdot y[n-1] + a_2 \cdot y[n-2] = 0$$

mit den Konstanten $a_1, a_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ beschrieben.

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der homogenen DGL. Führen Sie eine Fallunterscheidung durch.

b) Welche Bedingungen müssen an die Koeffizienten a_1 und a_2 gestellt werden, damit sich ein stabiles System ergibt?

Hinweis: Grenzen Sie die Wertebereiche ohne lange Rechnung ein.

c) Es kann gezeigt werden, dass für die Stabilität der Systeme 2. Ordnung zusätzlich zu den Bedingungen in (b) noch gelten muss

$$|a_1| < 1 + a_2$$

Anmerkung: Beweis mit Shür-Cohn-Stabilitätstest (siehe Reflexionskoeffizienten)

Somit resultiert das sogenannte Stabilitätsdreieck in der (a_1, a_2)-Ebene. Skizzieren Sie das Stabilitätsdreieck und kennzeichnen Sie die Gebiete entsprechend der Fallunterscheidung in (a).

Aufgabe A4.1-10 Rekursives System mit DGL 2. Ordnung – Erregung mit einer Exponentiellen ✍ ★★★

Ein reellwertiges System 2. Ordnung wird durch die Differenzengleichung

$$y[n] + a_1 \cdot y[n-1] + a_2 \cdot y[n-2] = x[n]$$

mit den Konstanten $a_1, a_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ beschrieben. Das System sei stabil und zunächst energiefrei.

a) Zum Zeitpunkt $n = 0$ wird das System mit einer abklingenden Exponentiellen erregt.

$$x[n] = z_q^{\,n}\, u[n] \quad \text{mit} \quad 0 < |z_q| < 1$$

Berechnen Sie die Systemreaktionen. Berücksichtigen Sie die Fallunterscheidung.

b) Überlegen Sie, wie mit der Lösung in (a) auch auf die Impulsantwort und die Sprungantwort geschlossen werden könnte?

Hinweis: Keine lange Rechnung.

Übung mit MATLAB 💻

c) Lösen Sie die Gleichungssysteme zu (a) numerisch mit MATLAB. Verwenden Sie dazu die Koeffizienten in der folgenden Tabelle 4-1 und für die erregende Exponentielle $z_q = 0{,}75$. Stellen Sie die Lösungen grafisch dar.

Hinweis: MATLAB-Befehl zur Lösung von Gleichungssystemen „ \ „. Bedenken Sie auch, dass beim Lösen von Gleichungssystemen möglicherweise numerische Probleme auftreten können.

© Martin Werner, Fulda 2008

d) Verifizieren Sie die Lösung in (c) durch eine MATLAB-Simulation. Stellen Sie die Systemreaktionen grafisch dar und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit (c).

Tabelle 4-1 Koeffizienten der DGL

Fall	a_1	a_2
①	–1	0,2
②	–1,4	0,49
③	–1,6	0,8

Aufgabe A4.1-11 Rekursives System mit DGL 2. Ordnung – Impulsantwort und Sprungantwort

Betrachtet wird das System 2. Ordnung mit der DGL in Aufgabe A4.1-10.

Übung mit MATLAB

a) Benutzen Sie die Überlegungen aus der Aufgabe A4.1-10, um die Impulsantwort und die Sprungantwort für die drei Fälle in Tabelle 4-1 mit MATLAB zu berechnen. Stellen Sie das mit MATLAB Ergebnis grafisch dar.

b) Bestimmen Sie die Impulsantworten und Sprungantworten durch MATLAB-Simulationen für die drei Fälle und vergleichen Sie die Ergebnisse der Simulation und der Rechnung.

Aufgabe A4.1-12 Zinsformel ★

a) Skizzieren Sie den Signalflussgraphen zur Zinsformel in ([Wer08], (4.91)).

Übung mit MATLAB

b) Führen Sie eine MATLAB-Simulation für den Fall durch, dass eine vorschüssige jährliche Einzahlung mit der (normierten) Einzahlung $E = 1$ über 20 Jahre vereinbart wird und der Zinssatz pro Jahr 4% beträgt.

c) Wegen eines unvorhergesehenen Ereignisses können in den Jahren 6 und 7 keine Einzahlung getätigt werden. Für die Jahre 8 bis einschließlich 12 wird jeweils nur die Hälfte der vereinbarten Summe eingezahlt. Bestimmen Sie den Kontostand nach 20 Jahren durch Simulation.

© Martin Werner, Fulda 2008

4.2 Lösungen

Lösung A4.1-1 Nichtrekursives System ☑

a) Impulsantwort

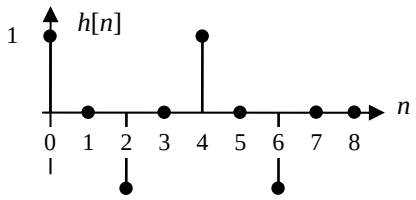


Bild 4-2 Impulsantwort $h[n]$

b) Sprungantwort $s[n] = \{1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, \ldots\}$

c) Signalflussgraph

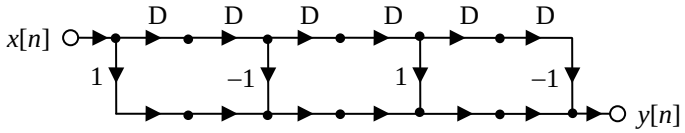


Bild 4-3 Signalflussgraph

d) DGL $y[n] = x[n] - x[n-2] + x[n-4] - x[n-6]$

Lösung A4.1-2 homogene DGL 2. Ordnung ☑

Zunächst bestimmen wir die allgemeine Lösung der homogenen DGL (4.1). Dazu suchen wir die Pole (Wurzeln) der charakteristischen Gleichung.

$$z^2 - z + \frac{1}{4} = 0 \tag{4.6}$$

Die Lösung der quadratischen Gleichung liefert einen doppelten Pol.

$$z_{\infty 1} = z_{\infty 2} = \frac{1}{2} \tag{4.7}$$

Für den Lösungsansatz ergibt sich hier

$$y_h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot (C_1 + nC_2)\, u[n] \tag{4.8}$$

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

Die zwei Parameter C_1 und C_2 werden über die Anfangswerte bestimmt. Setzten wir die Anfangswerte in die homogene DGL (4.1) ein, so erhalten wir

$$y_h[0] = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad \text{und} \quad y_h[1] = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \tag{4.9}$$

Diesen beiden Werten muss auch die Lösung der homogenen DGL genügen. Wir erhalten zwei Gleichungen zur Bestimmung der beiden Unbekannten

$$\begin{aligned} y_h[0] &= \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot (C_1 + 0 \cdot C_2) \cdot u[0] = C_1 = \frac{3}{4} \\ y_h[1] &= \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{3}{4} + C_2\right) \cdot u[1] = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} C_2 = \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{4.10}$$

Es resultiert die Lösung der homogenen DGL (4.1) mit den Randbedingungen (4.2)

$$y_h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{4} \cdot (3+n) u[n] \tag{4.11}$$

Lösung A4.1-3 System 2. Ordnung ☑

a)

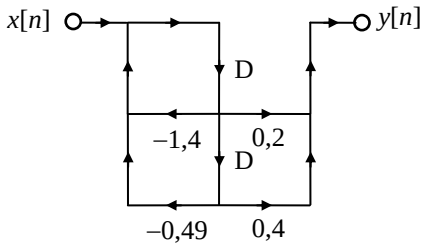


Bild 4-4 Signalflussgraph in Direktform II zum System 2. Ordnung in Bild 4-1

b) Aus dem Blockschaltbild lassen sich durch Vergleich mit dem Signalflussgraphen die Koeffizienten der DGL direkt ablesen, siehe ([Wer08], Bild 4-2).

$$y[n] + 1,4\,y[n-1] + 0,49\,y[n-2] = 0,2\,x[n-1] + 0,4\,x[n-2] \tag{4.12}$$

c) Mit den Koeffizienten der DGL ergibt sich die Übertragungsfunktion, siehe ([Wer08], (4.9)).

$$H(z) = \frac{0,2\,z^{-1} + 0,4\,z^{-2}}{1 + 1,4\,z^{-1} + 0,49\,z^{-2}} \tag{4.13}$$

© Martin Werner, Fulda 2008

d) Impulsantwort für doppelten Pol

$$z_\infty = -0,7 \tag{4.14}$$

Lösungsansatz, siehe ([Wer08], Tabelle 4.4) und Anwenden des Superpositionsprinzips

$$\begin{aligned} h[n] &= b_1 \cdot \mathrm{D}\left((1+n)z_\infty^n u[n]\right) + b_2 \cdot \mathrm{D}^2\left((1+n)z_\infty^n u[n]\right) = \\ &= b_1 z_\infty^n \cdot \left((1+n-1)z_\infty^{-1}\right)u[n-1] + b_2 z_\infty^n \cdot \left((1+n-2)z_\infty^{-2}\right)u[n-2] \end{aligned} \tag{4.15}$$

Die Lösung kann noch etwas kompakter dargestellt werden.

$$\begin{aligned} h[n] &= \frac{b_1}{z_\infty} \cdot n \cdot z_\infty^n \cdot u[n-1] + \frac{b_2}{z_\infty^2} \cdot (n-1) \cdot z_\infty^n \cdot u[n-2] = \\ &= z_\infty^n \cdot \left[\frac{b_1}{z_\infty} \cdot n + \frac{b_2}{z_\infty^2} \cdot (n-1)\right] \cdot u[n] + \frac{b_2}{z_\infty^2} \cdot \delta[0] = \\ &= \frac{n \cdot (b_1 z_\infty + b_2) - b_2}{z_\infty^2} \cdot z_\infty^n \cdot u[n] + \frac{b_2}{z_\infty^2} \cdot \delta[0] \end{aligned} \tag{4.16}$$

Es ergeben sich die Werte für die Impulsantwort an den Stellen null und eins

$$h[0] = 0 \quad \text{und} \quad h[1] = \frac{b_1 z_\infty}{z_\infty^2} \cdot z_\infty = b_1 \tag{4.17}$$

e) Impulsantwort und Sprungantwort

Lösung mit MATLAB

```
% Simulation of 2nd order System
% S3S4_1.m * mw * 07/30/2007
%% Initialization
a = [1 1.4 .49]; b = [0 .2 .4];    % numerator/denominator coefficients
N = 40; n = 0:N;                                  % normalized time
%% Filtering
x = [1 zeros(1,N)];                              % impulse function
y = zeros(size(x));                % allocate memory for output signal
s = zeros(1,2);                           % initialize state variables
for k=1:length(x)
    y(k) = b(1)*x(k)            + s(1);
    s(1) = b(2)*x(k) -a(2)*y(k) + s(2);
    s(2) = b(3)*x(k) -a(3)*y(k);
end
% y = filter(b,a,x);                          % Matlab built-in function
h = y;                                              % impulse response
x = ones(1,N+1);                                    % step function
y = zeros(size(x));                % allocate memory for output signal
s = zeros(1,2);                           % initialize state variables
for k=1:length(x)
    y(k) = b(1)*x(k)            + s(1);
    s(1) = b(2)*x(k) -a(2)*y(k) + s(2);
```


© Martin Werner, Fulda 2008

```
    s(2) = b(3)*x(k) -a(3)*y(k);
end
s = y;
%% Graphics
FIG1 = figure('Name','S3S4_1 : 1st order DGL with harmonic input
signal','NumberTitle','off');
subplot(2,1,1),stem(n,h,'filled'), grid
    xlabel('n \rightarrow'), ylabel('h[n] \rightarrow')
    title('Impulse response')
subplot(2,1,2),stem(n,s,'filled'), grid
    xlabel('n \rightarrow'), ylabel('s[n] \rightarrow')
    title('Step response')
```

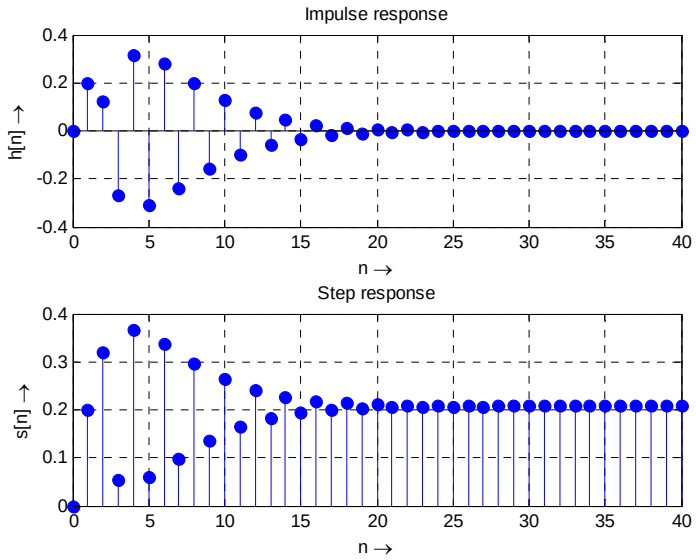


Bild 4-5 Impulsantwort und Sprungantwort des rekursiven Systems 2. Ordnung in Bild 4-1

Lösung A4.1-4 Digitaler Sinusgenerator ☑

a) Eine kurze Überlegung stellt den Zusammenhang zwischen der DGL und der Sinusfolge her. Dabei ist die Sinusfolge

$$y[n] = \sin(\Omega n) \tag{4.18}$$

durch drei aufeinander folgende Elemente auszudrücken. In den nächsten beiden Zeitschritten erhält man

$$y[n+1] = \sin\big(\Omega(n+1)\big) = \sin(\Omega n)\cos(\Omega) + \cos(\Omega n)\sin(\Omega) \tag{4.19}$$

und

$$y[n+2] = \sin\big(\Omega(n+2)\big) = \sin(\Omega n)\cos(2\Omega) + \cos(\Omega n)\sin(2\Omega) \tag{4.20}$$

© Martin Werner, Fulda 2008

Setzt man (4.18) in die beiden letzten Gleichungen ein, ergibt sich

$$y[n+1] = y[n]\cos(\Omega) + \cos(\Omega n)\sin(\Omega) \tag{4.21}$$

und

$$y[n+2] = y[n]\cos(2\Omega) + \cos(\Omega n)\sin(2\Omega) \tag{4.22}$$

Die Gleichung (4.21) nach $\cos(\Omega n)$ aufgelöst und in (4.22) eingesetzt liefert die DGL 2. Ordnung für die Sinusfolge

$$y[n+2] = y[n]\cos(2\Omega) + \frac{y[n+1] - y[n]\cos(\Omega)}{\sin(\Omega)} \cdot \sin(2\Omega) \tag{4.23}$$

Mit trigonometrischen Umformungen vereinfacht sich die DGL

$$y[n+2] = y[n+1] \cdot 2\cos(\Omega) - y[n] \tag{4.24}$$

oder äquivalent

$$y[n] - 2\cos(\Omega)y[n-1] + y[n-2] = 0 \tag{4.25}$$

Berücksichtigt man noch die Startwerte

$$y[0] = 0 \quad \text{und} \quad y[1] = \sin\Omega \tag{4.26}$$

so lassen sich alle Werte $y[n]$ für n = 2, 3, 4, 5, ... aus der Rekursionsformel (4.24) berechnen.

b) siehe Bild 4-6

c) Wegen der Periodizitäten der Sinus- und Kosinusfunktionen lassen sich keine normierten Kreisfrequenzen größer oder gleich $\pi / 2$ darstellen, vgl. Abtasttheorem.

$$\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \quad \text{und} \quad \cos\left(\frac{9\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \tag{4.27}$$

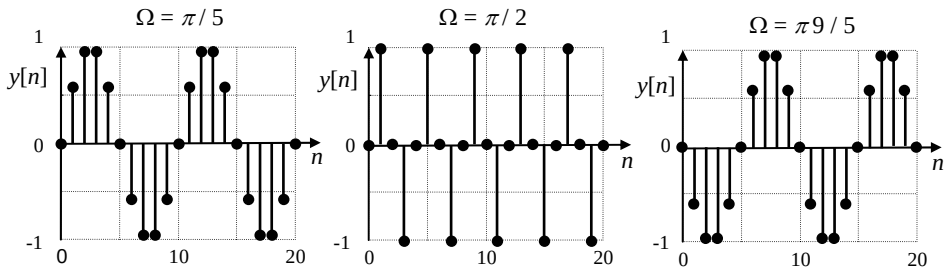


Bild 4-6 Mit der DGL (4.25) erzeugte Sinusfolgen

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

Lösung A4.1-5 Rekursives System mit DGL 1. Ordnung ☑

a) Homogene DGL $y[n] + a_1 \cdot y[n-1] = 0$ für $n \geq 0$ und $y[-1] = 0$, $y[0] = y_0$

Lösung $y_h[n] = y_0 \cdot (-a_1)^n \cdot u[n]$

b) Für $|a_1| < 1$ ergibt sich ein stabiles System, siehe auch (d)

c) Signalflussgraph

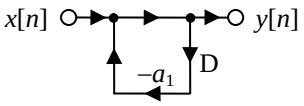


Bild 4-7 Signalflussgraph des Systems 1. Ordnung

d) Impulsantwort

Aus dem Signalflussgraphen Bild 4-7 folgt bei einer Impulserregung zum Zeitpunkt null, $\delta[n]$, im energiefreien Zustand

$$h[n] = \{1, -a_1, (-a_1)^2, (-a_1)^3, \ldots\} = (-a_1)^n \, u[n]$$

e) Sprungantwort – Akkumulation der Impulsantwort

$$s[n] = \{1, 1-a_1, 1-a_1+(-a_1)^2, \ldots\}$$

endliche geometrische Reihe

$$s[n] = \frac{1-(-a_1)^{n+1}}{1+a_1}$$

Grenzwert für $|a_1| < 1$

$$\lim_{n\to\infty} s[n] = \lim_{n\to\infty} \frac{1-(-a_1)^{n+1}}{1+a_1} = \frac{1}{1+a_1}$$

f) Lösung der inhomogene DGL für $n \geq 0$

$y[n] = y_h[n] + y_p[n]$ mit $y_h[n] = C_1 \cdot (-a_1)^n$ und $y_p[n] = C_2 \cdot q^n$

Einsetzen in die DGL

für $n = 0$, Schaltungszwang, siehe Signalflussgraph in Bild 4-7 $y[0] = x[0] = q^0 = 1$

$C_1 + C_2 = 1$ (*)

für $n = 1$ $C_1 \cdot (-a_1) + C_2 \cdot q + a_1 = q$

mit (*) $-a_1 \cdot (1 - C_2) + q \cdot C_2 + a_1 = q$

$C_2 = q / (q + a_1)$

Somit $C_1 = a_1 / (q + a_1)$

Lösung der DGL mit Randbedingungen für $n \geq 0$

$$y[n] = \frac{a_1}{q+a_1} \cdot (-a_1)^n + \frac{q}{q+a_1} \cdot q^n$$

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

Lösung mit MATLAB

```
% 1st order DGL
% S3S4_1.m * mw * 07/26/2007
%% Initialization
a1 = -0.8; q = 0.5;                              % simulation parameters
n = 0:20;                                              % normalized time
%% Impulse response
d = zeros(size(n)); d(1) = 1;
h = zeros(size(d));
h(1) = d(1);
for k=2:length(n)
    h(k) = d(k) - a1*h(k-1);
end
%% Step response
u = ones(size(n));
s = zeros(size(u));
s(1) = u(1);
for k=2:length(n)
    s(k) = u(k) - a1*s(k-1);
end
%% Exponential input signal
x = q.^n;
y = zeros(size(x));
y(1) = x(1);
for k=2:length(n)
    y(k) = x(k) - a1*y(k-1);
end
%% Graphics
FIG1 = figure('Name','S3S4_1 : 1st order DGL','NumberTitle','off');
subplot(3,2,1), stem(n,d,'filled'), grid
  xlabel('n \rightarrow'), ylabel('\delta[n] \rightarrow')
  title('Impulse function')
subplot(3,2,2), stem(n,h,'filled'), grid
  xlabel('n \rightarrow'), ylabel('h[n] \rightarrow')
  title('Impulse response')
subplot(3,2,3), stem(n,u,'filled'), grid
  xlabel('n \rightarrow'), ylabel('u[n] \rightarrow')
  title('Step function')
subplot(3,2,4), stem(n,s,'filled'), grid
  xlabel('n \rightarrow'), ylabel('s[n] \rightarrow')
 title('Step response')
subplot(3,2,5), stem(n,x,'filled'), grid
  xlabel('n \rightarrow'), ylabel('x[n] \rightarrow')
  title('Exponential input signal')
subplot(3,2,6), stem(n,y,'filled'), grid
  xlabel('n \rightarrow'), ylabel('y[n] \rightarrow')
  title('Output signal')
```


© Martin Werner, Fulda 2008

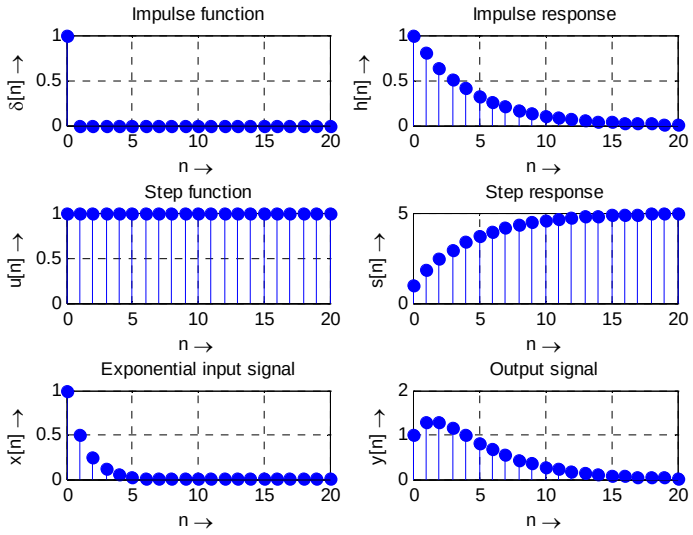


Bild 4-8 Eingangs- und Ausgangssignale am Systems 1. Ordnung (A4.1-5, $a_1 = -0{,}8$, $q = 0{,}5$)

Lösung A4.1-6 Rekursives System mit DGL 1. Ordnung - Einschwingen ☑

a) Mit

$$\cos(\Omega n) = \mathrm{Re}\left(e^{j\Omega n}\right)$$

kann die Lösung der DGL aus A4.1-5 (f) mit

$$q = e^{j\Omega n}$$

und Realteilbildung verwendet werden, vgl. komplexe Wechselstromrechnung.

$$y[n] = \underbrace{\mathrm{Re}\left[\frac{a_1}{e^{j\Omega}+a_1}\cdot(-a_1)^n\right]}_{\text{Einschwinganteil}} + \underbrace{\mathrm{Re}\left[\frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}+a_1}\cdot e^{j\Omega n}\right]}_{\text{stationärer Anteil}}$$

b) Einschwinganteil und stationärer Anteil siehe oben

Lösung mit MATLAB

```
% 1st order DGL with harmonic input
% S3S4_2.m * mw * 07/26/2007
%% Initialization and filtering
a1 = -0.8; w = pi/8;                    % simulation parameters
n = 0:40;                                   % normalized time
x = cos(w*n);                           % harmonic input signal
y = zeros(size(x));
y(1) = x(1);
for k=2:length(n)
    y(k) = x(k) - a1*y(k-1);
```


© Martin Werner, Fulda 2008

```
end
%% Graphics
FIG1 = figure('Name','S3S4_2 : 1st order DGL with harmonic input
signal','NumberTitle','off');
stem(n,y,'filled'), grid
    xlabel('n \rightarrow'), ylabel('y[n] \rightarrow')
    title('Output signal')
% transient and stationary part
yt = real(a1/(1-exp(j*w)))*(-a1).^n;
ys = real((exp(j*w)/(exp(j*w)+a1))*exp(j*w*n));
hold on
plot(n,yt,':r','LineWidth',2)
plot(n,ys,'--k','LineWidth',2)
hold off
```

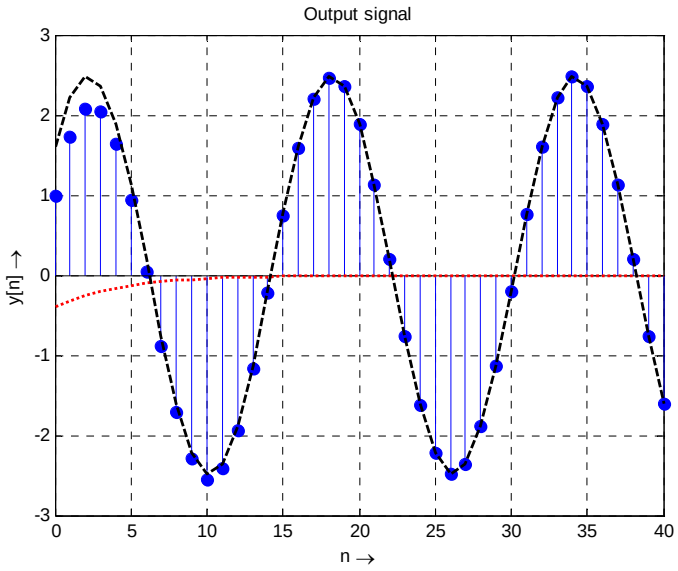


Bild 4-9 Reaktion des Systems 1. Ordnung auf ein harmonisches Eingangssignal mit Einschwinganteil (. . .), stationärem Anteil (- - -) und Gesamtlösung (A4.1-6, $a_1 = -0{,}8$, $\Omega = \pi/8$)

Lösung A4.1-7 Zur Berechnung der Impulsantwort ☑

Aus ([Wer08], (4.68)) folgt mit der cramerschen Regel

$$D_1 = \frac{-a_1 z_{\infty 2}^2 - a_1^2 z_{\infty 2} + a_2 z_{\infty 2}}{D}$$

$$D_2 = \frac{a_1 z_{\infty 1}^2 + a_1^2 z_{\infty 1} - a_2 z_{\infty 1}}{D} \qquad (4.28)$$

$$D = z_{\infty 1} z_{\infty 2}^2 - z_{\infty 2} z_{\infty 1}^2$$

© Martin Werner, Fulda 2008

Da die Pole Wurzeln des charakteristischen Polynoms sind, siehe (4.46), ist es vorteilhaft die Zähler durch ergänzen umzuformen

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{-a_1 \cdot \left(z_{\infty 2}^2 + a_1 z_{\infty 2} + a_2\right) + a_1 a_2 + a_2 z_{\infty 2}}{D} = \frac{+a_1 a_2 + a_2 z_{\infty 2}}{D} \\ D_2 &= \frac{a_1 \cdot \left(z_{\infty 1}^2 + a_1 z_{\infty 1} + a_2\right) - a_1 a_2 - a_2 z_{\infty 1}}{D} = \frac{-a_1 a_2 - a_2 z_{\infty 1}}{D} \end{aligned} \tag{4.29}$$

Nun wird die Behauptung (4.4) geprüft.

$$D_1 + D_2 = \frac{+a_1 a_2 + a_2 z_{\infty 2}}{D} + \frac{-a_1 a_2 - a_2 z_{\infty 1}}{D} = \frac{a_2 z_{\infty 2} + a_2 z_{\infty 1}}{D} = \frac{a_2 \left(z_{\infty 2} - z_{\infty 1}\right)}{D} \overset{!}{=} 1 \tag{4.30}$$

Also ist zu zeigen, dass

$$a_2 \left(z_{\infty 2} - z_{\infty 1}\right) \overset{!}{=} D = z_{\infty 1} z_{\infty 2}^2 - z_{\infty 2} z_{\infty 1}^2 \tag{4.31}$$

Dazu benutzen wir für die rechte Seite wieder die Wurzeleigenschaft.

$$\begin{aligned} z_{\infty 1} z_{\infty 2}^2 - z_{\infty 2} z_{\infty 1}^2 &= z_{\infty 1} \cdot \left(-a_1 z_{\infty 2} - a_2\right) - z_{\infty 2} \cdot \left(-a_1 z_{\infty 1} - a_2\right) = \\ &= -a_1 z_{\infty 2} z_{\infty 1} - a_2 z_{\infty 1} + a_1 z_{\infty 2} z_{\infty 1} + a_2 z_{\infty 1} = \\ &= -a_2 z_{\infty 1} + a_2 z_{\infty 1} = a_2 \left(z_{\infty 2} - z_{\infty 1}\right) \end{aligned} \tag{4.32}$$

Der Vergleich der letzten beiden Gleichungen zeigt die Übereinstimmung, Richtigkeit der Behauptung.

Lösung A4.1-8 Zur Berechnung der Impulsantwort ☑

Aus ([Wer08], 4.74)) folgt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ z_\infty & 2z_\infty \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{z_\infty} \begin{pmatrix} -a_1 \\ a_1^2 - a_2 \end{pmatrix} \tag{4.33}$$

Aus der charakteristischen Gleichung folgt für einen doppelten reellen Pol

$$a_1 = -2z_\infty \quad \text{und} \quad a_2 = z_\infty^2 \tag{4.34}$$

Ersetzen der Koeffizienten in (4.33) führt auf

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{4.35}$$

und bestätigt somit die Behauptung.

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

Lösung A4.1-9 Rekursives System mit DGL 2. Ordnung – Homogene DGL ☑

a) Charakteristisches Polynom $z^2 + a_1 z + a_2 = 0$ mit den Nullstelle, den Polen der Übertragungsfunktion,

$$z_{\infty 1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}$$

Da das reellwertige System 2. Ordnung ist, sind drei Möglichkeiten zu unterscheiden:

① Zwei verschiedene reelle Pole, wenn $a_1^2 > 4 \cdot a_2$

$z_{\infty 1} \neq z_{\infty 2}$ und $z_{\infty 1}, z_{\infty 2} \in \mathbb{R}$

② Ein reeller Pol der Vielfachheit 2 (doppelter Pol) , wenn $a_1^2 = 4 \cdot a_2$

$z_\infty \in \mathbb{R}$

③ Ein konjugiert komplexes Polpaar, wenn $a_1^2 < 4 \cdot a_2$

$z_{\infty 1} = z_{\infty 2}^*$ und $z_{\infty 1}, z_{\infty 2} \in \mathbb{C}$

Die homogene Lösung der DGL 2. Ordnung kann entsprechend den drei Möglichkeiten auf die folgenden drei Lösungen spezialisiert werden:

① Zwei verschiedene reelle Pole

$$y_h[n] = C_1 \cdot (z_{\infty 1})^n + C_2 \cdot (z_{\infty 2})^n$$

② Ein reeller Pol der Vielfachheit 2 (doppelter Pol)

$$y_h[n] = [C_1 + C_2 \cdot n] \cdot (z_\infty)^n$$

③ Ein konjugiert komplexes Polpaar

$$y_h[n] = 2 \cdot \mathrm{Re}[\, C \cdot (z_\infty)^n \,] \qquad \text{mit } z_\infty = z_{\infty 1} \text{ und } C = C_1$$

b) Das System ist stabil, wenn die homogene Lösung mit wachsendem n schließlich abklingt.

$$|z_{\infty 1}| \,, |z_{\infty 2}| < 1$$

Da die Pole die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind, existiert die Faktorisierung

$$z^2 + a_1 \cdot z + a_2 = (z - z_{\infty 1}) \cdot (z - z_{\infty 2}) = z^2 - (z_{\infty 1} + z_{\infty 2}) \cdot z + z_{\infty 1} \cdot z_{\infty 2}$$

Also gilt der Zusammenhang zwischen den Koeffizienten der DGL und den Polen für Systeme 2. Ordnung

$$a_1 = -(z_{\infty 1} + z_{\infty 2}) \; ; \; a_2 = z_{\infty 1} \cdot z_{\infty 2}$$

Insbesondere ergibt sich für

② den doppelten reellen Pol $\quad a_1 = -2 \cdot z_\infty \; ; \; a_2 = z_\infty^2$

③ das konjugiert komplexes Polpaar $\quad a_1 = -2 \cdot \mathrm{Re}[\, z_\infty \,] \; ; \; a_2 = |z_\infty|^2$

Aus der Stabilitätsbedingung, dass der Betrag der Pole kleiner 1 sein muss, folgt

$$|a_1| < 2 \; ; \; |a_2| < 1$$

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

c) Mit der zusätzlichen Bedingung $|a_1| < 1 + a_2$ folgt das Stabilitätsdreieck in Bild 4-10.

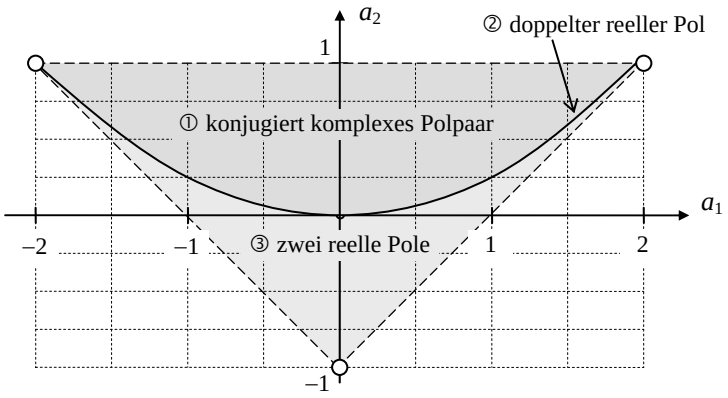


Bild 4-10 Stabilitätsdreieck für die Koeffizienten eines kausalen Systems 2. Ordnung

Anmerkung: Da bei konjugiert komplexem Polpaar gilt $a_1 = -2\cdot\mathrm{Re}[z_\infty]$, können die Lagen der Pole für Tiefpässe und Hochpässe im Stabilitätsdreieck schnell zugeordnet werden. Für $a_1 < 0$ ergeben sich Polwinkel (Argumente) $\Omega_\infty < \pi/2$ und für $a_1 > 0$ gilt $\Omega_\infty > \pi/2$.

Lösung A4.1-10 Rekursives System mit DGL 2. Ordnung – Erregung mit einer Exponentiellen ☑

a) Erregung des zunächst energiefreien Systems mit einer Exponentiellen

$$y[n] + a_1 \cdot y[n\text{-}1] + a_2 \cdot y[n\text{-}2] = z_q^{\,n} \quad \text{für } n \geq 0 \text{ mit } y[-1] = y[-2] = 0$$

Lösung der homogenen DGL siehe auch A4.1-2

Partikuläre Lösung (Ansatz, Eigenfunktion)

$$y_p[n] = c \cdot z_q^{\,n}$$

Gesamtlösung

① Zwei verschiedene reelle Pole

$$y[n] = C_1\cdot(z_{\infty 1})^n + C_2\cdot(z_{\infty 2})^n + c\cdot(z_q)^n$$

② Ein reeller Pol der Vielfachheit 2 (doppelter Pol)

$$y[n] = [C_1 + C_2\cdot n] \cdot (z_\infty)^n + c\cdot(z_q)^n$$

③ Ein konjugiert komplexes Polpaar

$$y[n] = 2\cdot\mathrm{Re}[\, C\cdot(z_\infty)^n \,] + c\cdot(z_q)^n \qquad \text{mit } z_\infty = z_{\infty 1} \text{ und } C = C_1$$

Die Bestimmung der Konstanten für den Fall ① anhand der ersten drei Ausgangswerte

$$y[0] = C_1 + C_2 + c = 1$$

$$y[1] = C_1\cdot z_{\infty 1} + C_2\cdot z_{\infty 2} + C_3\cdot z_q = z_q - a_1$$

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

$$y[2] = C_1 \cdot (z_{\infty 1})^2 + C_2 \cdot (z_{\infty 2})^2 + C_3 \cdot (z_q)^2 = (z_q)^2 - a_1 \cdot (z_q - a_1) - a_2$$

führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_{\infty 1} & z_{\infty 2} & z_q \\ z_{\infty 1}^2 & z_{\infty 2}^2 & z_q^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ z_q - a_1 \\ z_q^2 - a_1 \left(z_q - a_1 \right) - a_2 \end{pmatrix}$$

Lösung mit der cramerschen Regel allgemein oder numerisch mit MATLAB.

Wegen der einfachen ersten Zeile reduziert sich das Gleichungssystem mit

$$c = 1 - C_1 - C_2$$

zu

$$\begin{pmatrix} z_{\infty 1} - z_q & z_{\infty 2} - z_q \\ z_{\infty 1}^2 - z_q^2 & z_{\infty 2}^2 - z_q^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_1 \left(z_q - a_1 \right) - a_2 \end{pmatrix}$$

Bestimmung der Konstanten für den Fall ②, des doppelten Pols. Aus den Gleichungen

$$y[0] = C_1 + c = 1$$

$$y[1] = C_1 \cdot z_\infty + C_2 \cdot z_\infty + c \cdot z_q = z_q - a_1$$

$$y[2] = C_1 \cdot (z_\infty)^2 + 2C_2 \cdot (z_\infty)^2 + c \cdot (z_q)^2 = (z_q)^2 - a_1 \cdot (z_q - a_1) - a_2$$

entsteht das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ z_\infty & z_\infty & z_q \\ z_\infty^2 & 2z_\infty^2 & z_q^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ z_q - a_1 \\ z_q^2 - a_1 \left(z_q - a_1 \right) - a_2 \end{pmatrix}$$

Mit

$$c = 1 - C_1$$

wird daraus

$$\begin{pmatrix} z_\infty - z_q & z_\infty \\ z_\infty^2 - z_q^2 & 2z_\infty^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_1 \left(z_q - a_1 \right) - a_2 \end{pmatrix}$$

Lösung wieder mit der cramerschen Regel, allgemein oder numerisch mit MATLAB

© Martin Werner, Fulda 2008

b) Für das exponentielle Eingangssignal

$$x[n] = z_q^{\,n} \cdot u[n]$$

ergeben sich die beiden Grenzwerte

$$\lim_{z_q \to 0} x[n] = \delta[n] \qquad \lim_{z_q \to 1} x[n] = u[n]$$

Führt man die Grenzwerte in die obigen Gleichungssysteme ein, resultieren entsprechende Gleichungssysteme für die Impuls- und Sprungantwort. Im Beispiel der Impulsantwort gilt

für die Fälle ① und ③

$$\begin{pmatrix} z_{\infty 1} & z_{\infty 2} \\ z_{\infty 1}^2 & z_{\infty 2}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ a_1^2 - a_2 \end{pmatrix}$$

Anmerkungen: (i) Für den Fall ③ mit konjugiert komplexem Polpaar kann noch weiter zusammengefasst werden. (ii) Man beachte auch dass die Koeffizienten a_1 und a_2 und die Pole $z_{\infty 1}$ und $z_{\infty 2}$ voneinander abhängig sind, d. h. ineinander umgerechnet werden können.

für den Fall ② folgt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ z_\infty & 2z_\infty \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{z_\infty} \cdot \begin{pmatrix} -a_1 \\ a_1^2 - a_2 \end{pmatrix}$$

Lösung mit MATLAB

```
% 2nd order DGL with exponential input
%  analytical solution and simulation
% S3S4_3.m * mw * 07/26/2007
%% system coefficients, characteristic polynomial
CASE = input('Case 1,2 or 3 : ');
switch CASE
    case 1
        a = [1 -1 0.2];                      % two distinct real poles
    case 2
        a = [1 -1.4 .49];                              % repeated pole
    case 3
        a = [1 -1.6 0.8];            % conjugate complex pair of poles
    otherwise
        error('incorrect case selection')
end
b = [1 0 0];                                                % zeroes
zq = .75;                              % base of exponential input signal
n = 0:40;                                                % normalized time
p = roots(a);                                              % pair of poles
d = [-a(2); -a(2)*(zq-a(2))-a(3)];
```


© Martin Werner, Fulda 2008

```
if CASE~=2                                                  % distinct poles
    A = [p(1)-zq p(2)-zq; p(1)^2-zq^2 p(2)^2-zq^2];
    C = A\d;                          % solve system of linear equations
    yh = C(1)*p(1).^n + C(2)*p(2).^n;           % homogeneous response
    c = 1 - C(1) - C(2);
    yp = c*zq.^n;                                % particular response
else                                                          % repeated pole
    A = [p(1)-zq p(2); p(1)^2-zq^2 2*p(2)^2 ];
    C = A\d;                          % solve system of linear equations
    yh = C(1)*p(1).^n + C(2)*n.*p(2).^n;        % homogeneous response
    c  = 1 - C(1);
    yp = c*zq.^n;                                % particular response
end
fprintf('C1 = %g  %+gj \n',real(C(1)),imag(C(1)))
fprintf('C2 = %g  %+gj \n',real(C(2)),imag(C(2)))
fprintf('c  = %g  %+gj \n\n',real(c),imag(c))
%% Graphics
FIG1 = figure('Name','S3S4_3 : Zero-pole plot','NumberTitle','off');
zplane(b,a), grid
FIG2  =  figure('Name','S3S4_3  :  2nd  order  DGL  with  exponential
input','NumberTitle','off');
subplot(3,1,1), stem(n,yh,'filled'), grid
  xlabel('n \rightarrow'), ylabel('y_h[n] \rightarrow')
  title('Homogeneous response')
subplot(3,1,2), stem(n,yp,'filled'), grid
  xlabel('n \rightarrow'), ylabel('y_p[n] \rightarrow')
  title('Particular response')
subplot(3,1,3), stem(n,yh+yp,'filled'), grid
  xlabel('n \rightarrow'), ylabel('y[n] \rightarrow')
  title('System response')
%% Simulation
x = zq.^n;                                                  % input signal
y = filter(b,a,x);                                             % filtering
%% Graphics
FIG3  =  figure('Name','S3S4_3  :  2nd  order  DGL  with  exponential
input','NumberTitle','off');
subplot(2,1,1), stem(n,x,'filled'), grid
  xlabel('n \rightarrow'), ylabel('x[n] \rightarrow')
  title('Input signal')
subplot(2,1,2), stem(n,y,'filled'), grid
  xlabel('n \rightarrow'), ylabel('y[n] \rightarrow')
  title('System response')
```

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

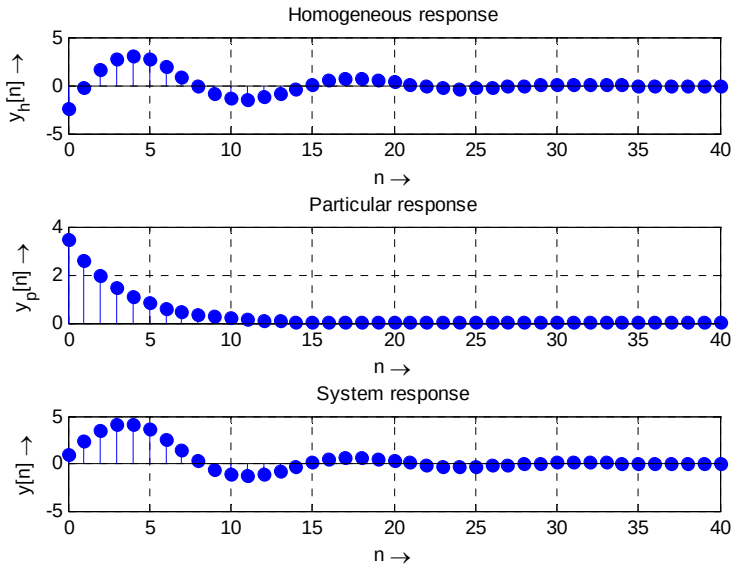


Bild 4-11 Reaktion des Systems 2. Ordnung auf eine Erregung mit einer Exponentiellen (Fall ③, z_q = 0,75, analytische Lösung)

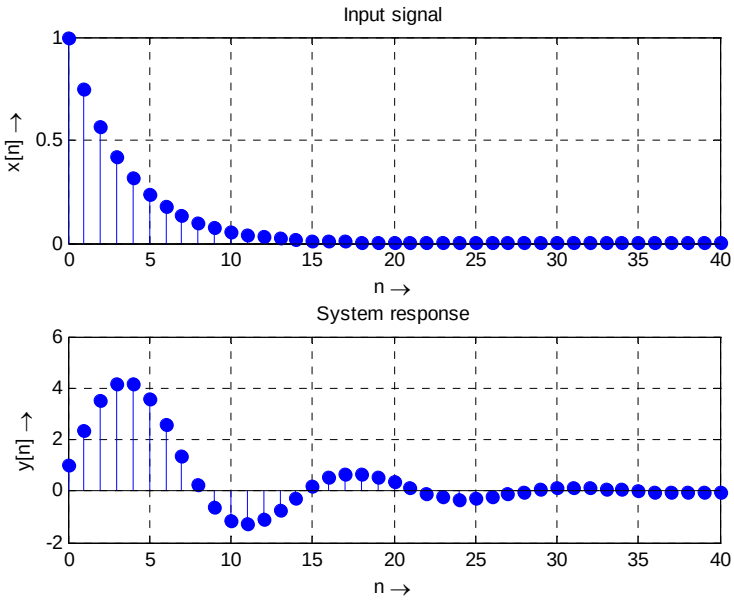


Bild 4-12 Reaktion des Systems 2. Ordnung auf eine Erregung mit einer Exponentiellen (Fall ③, z_q = 0,75, Simulation)

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

Lösung A4.1-11 Rekursives System mit DGL 2. Ord. – Impulsantwort und Sprungantwort ☑

Lösung mit MATLAB

```
% 2nd order DGL - impulse or step response
%  analytical solution and simulation
% S3S4_3.m * mw * 07/26/2007
%% system coefficients, characteristic polynomial
CASE_Sys = input('Case 1,2 or 3 : ');
switch CASE_Sys
    case 1
        a = [1 -1 0.2];                      % two distinct real poles
    case 2
        a = [1 -1.4 .49];                              % repeated pole
    case 3
        a = [1 -1.6 0.8];            % conjugate complex pair of poles
    otherwise
        error('incorrect case selection')
end
b = [1 0 0];                                                  % zeroes
CASE_zq = input('Impulse or step response  0 or 1 : ');
switch CASE_zq
    case 0
        zq = 0;                                    % for impulse response
    case 1
        zq = 1;                                       % for step response
    otherwise
        error('incorrect signal selection')
end
n = 0:40;                                               % normalized time
p = roots(a);                                             % pair of poles
d = [-a(2); -a(2)*(zq-a(2))-a(3)];
if CASE_Sys~=2                                           % distinct poles
    A = [p(1)-zq p(2)-zq; p(1)^2-zq^2 p(2)^2-zq^2];
    C = A\d;  % solve system of linear equations
    yh = C(1)*p(1).^n + C(2)*p(2).^n; % homogeneous response
    c = 1 - C(1) - C(2);
    yp = c*zq.^n;                                  % particular response
else                                                        % repeated pole
    A = [p(1)-zq p(2); p(1)^2-zq^2 2*p(2)^2 ];
    C = A\d;  % solve system of linear equations
    yh = C(1)*p(1).^n + C(2)*n.*p(2).^n;         % homogeneous response
    c  = 1 - C(1);
    yp = c*zq.^n;                                  % particular response
end
fprintf('C1 = %g  %+gj \n',real(C(1)),imag(C(1)))
fprintf('C2 = %g  %+gj \n',real(C(2)),imag(C(2)))
fprintf('c  = %g  %+gj \n\n',real(c),imag(c))
%% Graphics
FIG1 = figure('Name','S3S4_3 : Zero-pole plot','NumberTitle','off');
zplane(b,a), grid
FIG2 = figure('Name','S3S4_3 : 2nd order DGL','NumberTitle','off');
subplot(3,1,1), stem(n,yh,'filled'), grid
```


© Martin Werner, Fulda 2008

```
  xlabel('n \rightarrow'), ylabel('y_h[n] \rightarrow')
  title('Homogeneous response')
subplot(3,1,2), stem(n,yp,'filled'), grid
  xlabel('n \rightarrow'), ylabel('y_p[n] \rightarrow')
  title('Particular response')
subplot(3,1,3), stem(n,yh+yp,'filled'), grid
  xlabel('n \rightarrow'), ylabel('y[n] \rightarrow')
  title('System response')
%% Simulation
x = zq.^n;                                                    % input signal
y = filter(b,a,x);                                              % filtering
%% Graphics
FIG3 = figure('Name','S3S4_3 : 2nd order DGL','NumberTitle','off');
subplot(2,1,1), stem(n,x,'filled'), grid
  xlabel('n \rightarrow'), ylabel('x[n] \rightarrow')
  title('Input signal')
subplot(2,1,2), stem(n,y,'filled'), grid
  xlabel('n \rightarrow'), ylabel('y[n] \rightarrow')
  title('System response')
```

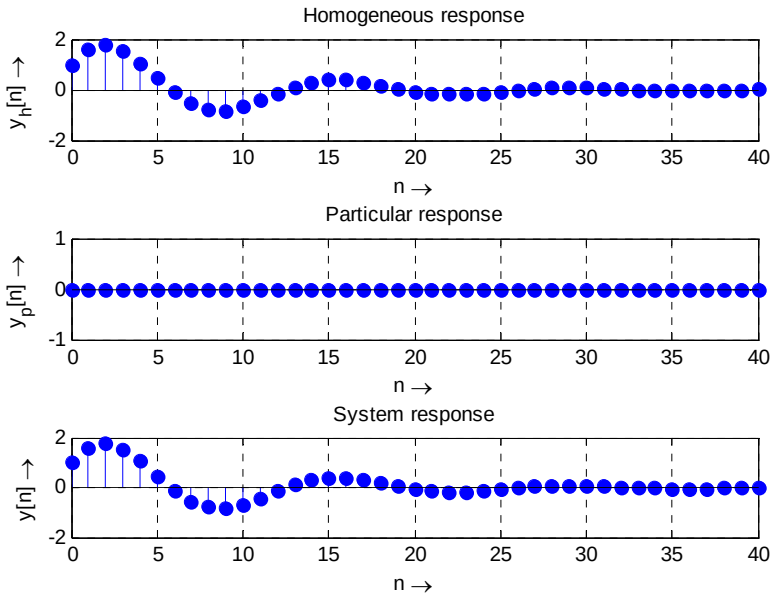


Bild 4-13 Reaktion des Systems 2. Ordnung auf eine Impulserregung (Fall ③, analytische Lösung)

© Martin Werner, Fulda 2008

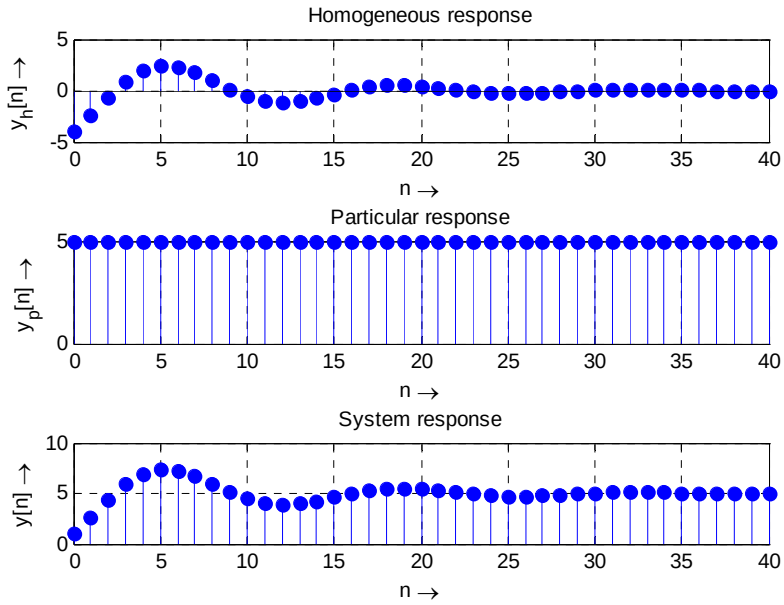


Bild 4-14 Reaktion des Systems 2. Ordnung auf eine Sprungerregung (Fall ③, analytische Lösung)

Lösung A4.1-12 Zinsformel ☑

a) Signalflussgraph mit $a_1 = -(1+p)$ und $b_1 = 1 + p$.

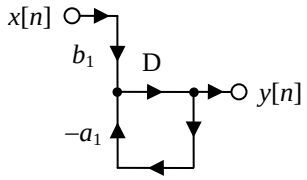


Bild 4-15 Signalflussgraph des Systems 1. Ordnung zur Zinsformel

b) Simulation

Lösung mit MATLAB

```
% 1st order DGL - compound interest formula
% S3S4_7.m * mw * 07/30/2007
%% Initialization
p = 0.04                                          % interest
A = 20;                                             % term
n = 0:A;                                  % normalized time (years)
b = [0 (1+p)]; a = [1 -(1+p)];             % numerator; denominator
%% Simulation - regular deposit
x1 = [ones(1,A) 0];
y1 = filter(b,a,x1);
```


© Martin Werner, Fulda 2008

```
fprintf('Capital = %g \n\n',y1(end));
%% Simulation - irregular deposit
x2 = [ones(1,A) 0]; x2(6:7) = zeros(1,2); x2(8:12) = .5*ones(1,5);
y2 = filter(b,a,x2);
fprintf('Capital = %g \n\n',y2(end))
%% Graphics
FIG1 = figure('Name','S3S4_7 : Compound interest formula - statement
of account','NumberTitle','off');
stem(n,y1,'filled'), grid
    xlabel('n \rightarrow'), ylabel('C_n \rightarrow')
    title('Balance')
hold on, stem(n,y2,'MarkerSize',8), hold off
```

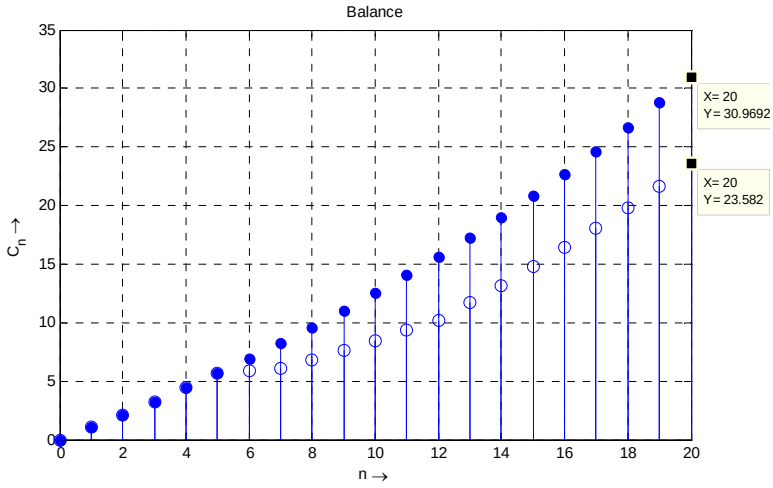


Bild 4-16 Kapitalentwicklung mit gleichförmiger (•) und ungleichförmiger (o) Einzahlung

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

5 Systeme mit linearen Differenzialgleichungen

5.1 Aufgaben

Die folgenden Aufgaben stellen die theoretischen Zusammenhänge in einen praktischen Bezug. Aufgabe 5.1-1 behandelt ein System 1. Ordnung, wie das RC-Glied. Dementsprechend ähnlich sind die Lösungen, so dass das allgemeine Lösungsverfahren deutlich wird.

Ein in der Physik und den Grundlagen der Elektrotechnik häufig ausführlich behandeltes Beispiel ist der Reihenschwingkreis. Trotzdem der Reihenschwingkreis nur ein System 2. Ordnung ist, wird die Analyse bereits aufwendig. Der Übersichtlichkeit halber verteilen wir die Übung auf drei, in sich abgeschlossene Aufgaben. Die Aufgaben sind mit ausführlichen Lösungen versehen.

Anmerkung: Der Reihenschwingkreis liefert ein umfangreiches Beispiel, das die bekannten Ergebnisse aus der Elektrotechnik bzw. Physik in der Sprache der Systemtheorie darstellt. Eine ausführliche Behandlung des Reihenschwingkreises findet sich z. B. auch in [Schü88].

Aufgabe A5.1-1 Zeitkontinuierliches System 1. Ordnung ✍ ★

Anmerkung: Die Aufgabe befasst sich mit einem einfachen RLC-Netzwerk, einem System 1. Ordnung. Zunächst ist der Übergang von der physikalischen Schaltung auf die abstrakte Systembeschreibung, im Beispiel die Übertragungsfunktion, zu leisten. Danach kann die Analyse Schritt für Schritt ablaufen.

Gegeben ist der in Bild 5-1 gezeigte elektrischer Vierpol.

a) Geben Sie die Übertragungsfunktion für $x(t)$ als Eingangs- und $y(t)$ als Ausgangssignal des Systems an.

b) Bestimmen Sie die Pole und Nullstellen der Übertragungsfunktion. Skizzieren Sie ihre Lagen in der komplexen s-Ebene, im so genannten Pol-Nullstellendiagramm.

c) Ist das System stabil? Begründen Sie Ihre Antwort.

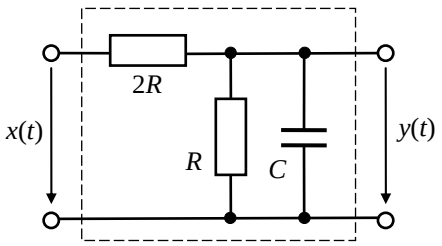


Bild 5-1 Elektrischer Vierpol

d) Zeichnen Sie den Signalflussgraphen in der transponierten Direktform II.

e) Bestimmen Sie die DGL des Systems.

Aufgabe A5.1-2 Reihenschwingkreis – Übertragungsfunktion und Signalflussgraph ✍ ★★

In Bild 5-2 wird das Schaltbild des Reihenschwingkreises gezeigt.

a) Berechnen Sie, entsprechend der komplexen Wechselstromrechnung für $s = j\omega$, die Übertragungsfunktion des Reihenschwingkreises mit der Spannung der Quelle $u_q(t)$ als Eingangssignal und dem Strom im Kreis $i(t)$ als Ausgangssignal.

b) Geben Sie die Lage der Pole und Nullstellen des Systems im Pol-Nullstellendiagramm an.

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

c) Skizzieren Sie den Signalflussgraphen.

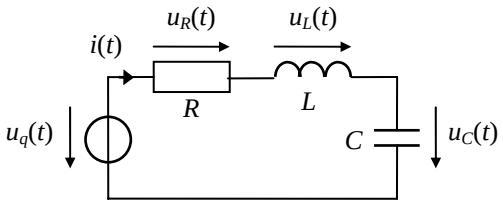


Bild 5-2 Reihenschwingkreis

Aufgabe A5.1-3 Reihenschwingkreis – homogene DGL ✍ ★★

a) Stellen Sie die DGL des Reihenschwingkreises in Bild 5-2 mit der Eingangsgröße $u_q(t)$ und der Ausgangsgröße $i(t)$ für die Zeit $t > 0$ auf.

b) Berechnen Sie die Lösung der homogenen DGL.

c) Diskutieren Sie die Lösung der homogenen DGL indem Sie eine Fallunterscheidung vornehmen.

Aufgabe A5.1-4 Reihenschwingkreis – DGL mit geschalteter Erregung ✍ ★★★

Wir knüpfen an die Aufgaben 5.1-2 und 5.1-3 an und erweitern die Überlegungen um eine im Zeitpunkt $t = 0$ zugeschaltete Spannungsquelle, siehe Bild 5-3.

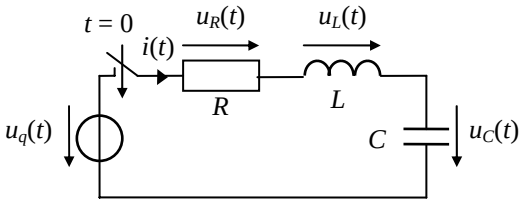


Bild 5-3 Geschaltete Spannungsquelle am Reihenschwingkreis

a) Welche physikalischen Randbedingungen gelten im Einschaltzeitpunkt?

b) Berechnen Sie den Strom $i(t)$ für $t > 0$ als Reaktion auf eine geschaltete exponentielle Spannungsquelle mit

$$u_q(t) = U_q\, e^{s_q t},$$

wenn der Reihenschwingkreis zum Einschaltzeitpunkt $t = 0$ energiefrei ist.

c) Berechnen Sie die Lösung der DGL in (b) für eine geschaltete Gleichspannungsquelle $u_q(t) = U_q$, wenn der Reihenschwingkreis zum Einschaltzeitpunkt, $t = 0$, energiefrei ist.

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

5.2 Lösungen

Lösung A5.1-1 Zeitkontinuierliches System 1. Ordnung ☑

a) Aus der Spannungsteilerregel für komplexe Amplituden folgt die Übertragungsfunktion

$$H(s) = \frac{\frac{1}{1/R + sC}}{2R + \frac{1}{1/R + sC}} = \frac{1}{3 + s2CR} = \frac{1}{2CR} \cdot \frac{1}{s + 3/2CR} \tag{5.1}$$

b) Das System 1. Ordnung weist einen Pol und keine (endliche) Nullstelle auf.

$$s_\infty = -\frac{3}{2CR} \tag{5.2}$$

Es resultiert das Pol-Nullstellendiagramm in Bild 5-4.

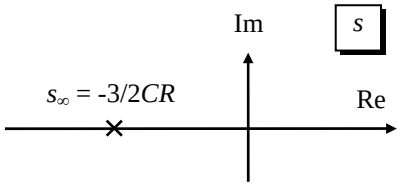


Bild 5-4 Pol-Nullstellendiagramm zum Vierpol in Bild 5-1

c) Das System ist stabil, weil der einzige Pol, wie in ([Wer08], (5.13)) gefordert, einen Realteil kleiner als null besitzt, im Pol-Nullstellendiagramm also in der linken *s*-Halbebene liegt.

d) Der Koeffizientenvergleich der Übertragungsfunktion mit der allgemeinen Polynomdarstellung in ([Wer08], (5.16)) liefert die Entsprechungen

$$a_0 = 3/2CR, \;\; a_1 = 1, \;\; b_0 = 1 \;\text{ und }\; b_1 = 0 \tag{5.3}$$

Damit kann der Signalflussgraph in transponierter Direktform II nach ([Wer08], Bild 5-4), angegeben werden.

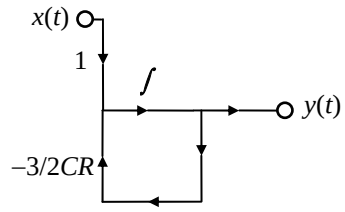


Bild 5-5 Signalflussgraph in transponierter Direktform II zum Vierpol in Bild 5-1

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

e) Mit den Koeffizienten der Übertragungsfunktion (5.1) folgt aus ([Wer08], (5.3)) die gesuchte DGL des Systems.

$$y'(t) + \frac{3}{2CR} \cdot y(t) = x(t) \tag{5.4}$$

Lösung A5.1-2 Reihenschwingkreis – Übertragungsfunktion und Signalflussgraph ☑

a) Wir wenden die Rechenregeln für komplexen Amplituden an und bestimmen die Übertragungsfunktion als Admittanz des Kreises

$$H(s) = \frac{1}{R + sL + 1/sC} = \frac{sC}{s^2LC + sRC + 1} = \frac{s/L}{s^2 + sR/L + 1/LC} \tag{5.5}$$

Mit den Koeffizienten

$$a_0 = \frac{1}{LC},\ a_1 = \frac{R}{L},\ a_2 = 1,\ b_0 = 0,\ b_1 = \frac{1}{L},\ b_2 = 0 \tag{5.6}$$

resultiert die Übertragungsfunktion in der normierten Form, siehe ([Wer08], (5.16)),

$$H(s) = \frac{b_1 s}{s^2 + a_1 s + a_0} \tag{5.7}$$

b) Die Übertragungsfunktion besitzt eine Nullstelle $s_0 = 0$.

Anmerkung: Für $\lim_{|s|\to\infty} H(s) = 0$ geht die Übertragungsfunktion ebenfalls gegen null. Man spricht deshalb auch von „Nullstellen im Unendlichen“ bzw. von „endlichen Nullstellen“, wie hier bei s_0.

Im Nenner liegt ein quadratisches Polynom vor, so dass sich ein doppelter oder zwei Pole ergeben können

$$s_{\infty 1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0} \tag{5.8}$$

Die Pole führen auf die aus der Physik bekannten *Eigenfrequenzen des Schwingkreises*. Je nachdem, welche Werte die Bauelemente *R*, *L* und *C* haben, resultiert einer der drei Fälle:

Fall ① $(R/L)^2 > 4/LC$ bzw. $a_1^2 > 4a_0$

Das Argument unter der Wurzel ist stets positiv. Wir erhalten zwei reelle Pole

$$s_{\infty 1,2} = \sigma_{\infty 1,2} < 0 \tag{5.9}$$

Das zugehörige Pol-Nullstellendiagramm ist in Bild 5-6 links zu sehen.

Wie in der Aufgabe 5.1-3 noch gezeigt wird, liegt ein *stark gedämpfter Schwingkreis*, auch überaperiodisch gedämpfter Schwingkreis genannt, vor.

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

Fall ② $(R/L)^2 = 4/LC$ bzw. $a_1^2 = 4a_0$

Es verschwindet die Wurzel und es ergibt sich ein doppelter reeller Pol.

$$s_{\infty 1} = s_{\infty 2} = \sigma_\infty \tag{5.10}$$

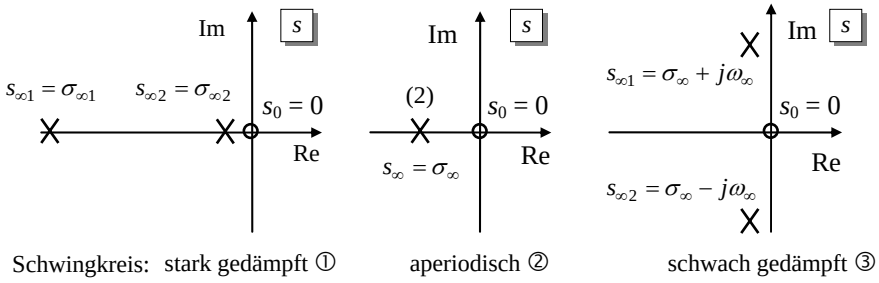
Der Fall ② wird *aperiodischer Grenzfall* genannt und wird in der Aufgabe 5.1-3 noch genauer vorgestellt. Das Pol-Nullstellendiagramm findet sich in Bild 5-6 rechts.

Fall ③ $(R/L)^2 < 4/LC$ bzw. $a_1^2 < 4a_0$

Das Argument unter der Wurzel ist stets negativ. Wir erhalten zwei zueinander konjugiert komplexe Pole

$$s_{\infty 1,2} = \sigma_\infty \pm j\omega_\infty \tag{5.11}$$

mit dem Pol-Nullstellendigramm in Bild 5-6 mittig. Es liegt ein *schwach gedämpfter Schwingkreis* vor, siehe Aufgabe 5.1-3.



Schwingkreis: stark gedämpft ① aperiodisch ② schwach gedämpft ③

Bild 5-6 Pol-Nullstellendiagramme (normiert) in der komplexen *s*-Ebene für die drei Fälle stark gedämpft (links, ①), aperiodischer Grenzfall (mittig, ②) und schwach gedämpft (rechts, ③) für den Reihenschwingkreis in Bild 5-3. Die Pole sind durch „×“ markiert. Der Zusatz (2) kennzeichnet den doppelten Pol im aperiodischen Grenzfall. Die Übertragungsfunktion besitzt eine Nullstelle im Ursprung, gekennzeichnet durch „o“. Die Zahlenwerte sind aus Bild 5-8 entnommen

c) Signalflussgraph

Die Übertragungsfunktion des Reihenschwingkreises (5.7) besitzt ein Nennerpolynom 2. Grades, ist somit von 2. Ordnung. Der Signalflussgraph bestimmt sich in transponierter Direktform entsprechend ([Wer08], Bild 5-4).

Anmerkung: Der Einfachheit halber wurden die Pfeile für die Pfadgewichte 1 weggelassen. Die Flussrichtung der Signale versteht sich aus dem Zusammenhang.

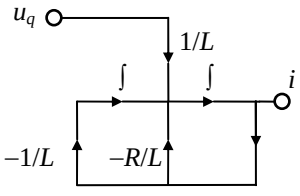


Bild 5-7 Signalflussgraph in transponierter Direktform II des Reihenschwingkreises

© Martin Werner, Fulda 2008

Lösung A5.1-3 Reihenschwingkreis – homogene DGL ☑

a) Differenzialgleichung für $t > 0$

Mit der kirchhoffschen Maschenregel bestimmen wir den Zusammenhang für die Teilspannungen im Kreis.

$$u_q(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) \tag{5.12}$$

Da alle Bauelemente vom selben Strom $i(t)$ durchflossen werden, können die drei unbekannten Spannungen an den Bauelementen durch den Strom ausgedrückt werden.

$$u_q(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{d}{dt} i(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau)\, d\tau + u_C(0) \tag{5.13}$$

Einen möglichen Anfangswert der Spannung an der Kapazität für $t = 0$ berücksichtigen wir durch die Konstante $u_C(0)$.

Durch Differenzieren resultiert die gesuchte DGL des Reihenschwingkreises

$$i''(t) + \frac{R}{L} \cdot i'(t) + \frac{1}{LC} \cdot i(t) = \frac{1}{L} u_q'(t) \tag{5.14}$$

Anmerkung: Bei einer Betrachtung der Ladung an der Kapazität anstelle des Stromes, erübrigt sich dieser Schritt und die Analyse vereinfacht sich etwas [Schü88].

b) Lösung der homogenen DGL

Ausgehend von der homogenen Form der DGL finden wir die Lösung durch Einsetzen des Exponentialansatzes mit der Konstanten I_h und der komplexen Eigenkreisfrequenz s

$$i_h(t) = I_h \cdot e^{st} \tag{5.15}$$

in (5.14) und Ausführen der Differenziationen

$$s^2 I_h e^{st} + \frac{R}{L} \cdot s I_h e^{st} + \frac{1}{LC} \cdot I_h e^{st} = \left(s^2 + \frac{R}{L} \cdot s + \frac{1}{LC} \right) \cdot I_h e^{st} = 0 \tag{5.16}$$

Die homogene DGL ist für alle t erfüllt, wenn die charakteristische Gleichung null ergibt.

$$s^2 + \frac{R}{L} \cdot s + \frac{1}{LC} = 0 \tag{5.17}$$

Es liegt eine quadratische Gleichung vor mit den Nullstellen des charakteristischen Polynoms, den Polen des Systems,

$$s_{\infty 1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L} \right)^2 - \frac{1}{LC}} \tag{5.18}$$

Die Lösung der homogenen DGL beschreibt das Ein- und Ausschwingen des Systems, die *Eigenschwingungen*. Die für die Eigenschwingungen charakteristischen Pole bestimmen sich

© Martin Werner, Fulda 2008

aus der quadratischen Gleichung. Dementsprechend sind drei grundsätzliche Fälle möglich. Je nach Größe der Bauelemente *R*, *L* und *C* tritt einer der Fälle auf. Wir diskutieren nachfolgend alle drei Fälle, siehe auch Aufgabe 5.1-2.

c) Diskussion der Lösung der homogenen DGL ([Schü88], Kap. 6.2.4.2)

Fall ①

$$(R/L)^2 > 4/LC \tag{5.19}$$

Damit ist das Argument unter der Wurzel stets positiv und wir erhalten zwei reelle Pole.

$$s_{\infty 1,2} = \sigma_{\infty 1,2} < 0 \tag{5.20}$$

Wichtig ist auch, dass die Pole stets negativ sind, da die Werte der Bauelemente *R*, *L* und C positiv sind. Die Lösung der homogenen DGL ist

$$i_h(t) = I_{h1} e^{\sigma_{\infty 1} t} + I_{h2} e^{\sigma_{\infty 2} t} \tag{5.21}$$

Der Schwingkreis ist *stark gedämpft* (*überaperiodisch gedämpft*), da die beiden Komponenten des Ausschwinganteils des Stroms ohne Nulldurchgang exponentiell abklingen.

Fall ②

$$(R/L)^2 = 4/LC \tag{5.22}$$

Bei dieser Parameterwahl verschwindet der Wurzelausdruck. Es ergibt sich nur eine reelle Eigenfrequenz

$$s_\infty = \sigma_\infty = -\frac{R}{2L} < 0 \tag{5.23}$$

und man spricht vom *aperiodischen Grenzfall*.

Für die Lösung der homogenen DGL resultiert aus dem Exponentialansatz (5.15) nur noch ein Term. Da im Netzwerk jedoch zwei energiespeichernde Bauelemente enthalten sind, muss physikalisch gesehen, die homogene Lösung zwei Randbedingungen befriedigen.

Anmerkung: Die Induktivität *L* mit der im magnetischen Feld gespeicherten Energie $w_m = 0.5 \cdot L \cdot i^2(t)$ und die Kapazität *C* mit der im elektrischen Feld gespeicherten Energie $w_e = 0.5 \cdot C \cdot u^2(t)$.

Das ist nicht überraschend, haben wir doch die Situation schon bei der allgemeinen mathematischen Lösung diskutiert, siehe ([wer08], (5.8)). Es liegt ein Pol mit der Vielfachheit $V = 2$ vor. Der Exponentialansatz ist für diesen Fall zu erweitern.

$$i_h(t) = e^{\sigma_\infty t} \left(I_{h1} + I_{h2} t \right) \tag{5.24}$$

Wir zeigen durch Einsetzen, dass dadurch die homogene DGL bei Wahl der Parameter nach (5.22) gelöst wird.

Zunächst berechnen wir die erste und danach die zweite Ableitung des erweiterten Ansatzes

$$i_h'(t) = \sigma_\infty e^{\sigma_\infty t} \left(I_{h1} + I_{h2} t \right) + e^{\sigma_\infty t} I_{h2} \tag{5.25}$$

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

$$i_h''(t) = \sigma_\infty^2 e^{\sigma_\infty t}\left(I_{h1} + I_{h2}t\right) + 2\sigma_\infty e^{\sigma_\infty t} I_{h2} \tag{5.26}$$

Nach Einsetzen in die homogene Form der DGL (5.14) erhalten wir zunächst

$$\begin{aligned}&\sigma_\infty^2 e^{\sigma_\infty t}\left(I_{h1} + I_{h2}t\right) + 2\sigma_\infty e^{\sigma_\infty t} I_{h2} + \frac{R}{L}\left[\sigma_\infty e^{\sigma_\infty t}\left(I_{h1} + I_{h2}t\right) + e^{\sigma_\infty t} I_{h2}\right] + \\ &+ \frac{1}{LC} e^{\sigma_\infty t}\left(I_{h1} + I_{h2}t\right) = 0\end{aligned} \tag{5.27}$$

Wir kürzen die Exponentialfunktion und sortieren in Terme mit und ohne den linearen Faktor t

$$\sigma_\infty^2 I_{h1} + 2\sigma_\infty I_{h2} + \frac{R}{L}\left(\sigma_\infty I_{h1} + I_{h2}\right) + \frac{1}{LC} I_{h1} + \left(\sigma_\infty^2 I_{h2} + \frac{R}{L}\sigma_\infty I_{h2} + \frac{1}{LC} I_{h2}\right)\cdot t = 0 \tag{5.28}$$

Damit der Lösungsansatz die homogene DGL erfüllt, muss (5.28) für alle $t > 0$ null ergeben. Dies ist der Fall, wenn jeweils die Teile der Gleichung mit und ohne den linearen Faktor t für sich null werden, siehe lineare Unabhängigkeit der Potenzfunktionen. Setzt man die speziellen Werte für R, L und C aus (5.22) und σ_∞ aus (5.23) ein, ergibt sich nach kurzer Zwischenrechnung, dass der erweiterte Lösungsansatz (5.24) für diese spezielle Wahl der Bauelemente die homogene Form der DGL (5.14) erfüllt.

Fall ③

$$(R/L)^2 < 4/LC \tag{5.29}$$

Der Ausdruck unter der Wurzel wird hier negativ. Es resultieren zwei zueinander konjugiert komplexe Pole.

$$s_{\infty 1,2} = \sigma_\infty \pm j\omega_\infty = -\frac{R}{2L} \pm j\cdot\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \tag{5.30}$$

Die Lösung der homogenen DGL ist dann

$$i_h(t) = I_{h1} e^{s_{\infty 1} t} + I_{h2} e^{s_{\infty 2} t} = e^{\sigma_\infty t}\cdot\left(I_{h1} e^{-j\omega_\infty t} + I_{h2} e^{+j\omega_\infty t}\right) \tag{5.31}$$

Da das physikalische System des Reihenschwingkreises reellwertig ist, muss die Lösung reell sein. Also $I_{h1} = I_{h2}^*$, und somit

$$\begin{aligned}i_h(t) &= e^{\sigma_\infty t}\cdot\left(I_{h1} e^{+j\omega_\infty t} + I_{h2} e^{-j\omega_\infty t}\right) = e^{\sigma_\infty t}\cdot\left(I_{h1} e^{+j\omega_\infty t} + \left[I_{h1} e^{+j\omega_\infty t}\right]^*\right) = \\ &= e^{\sigma_\infty t}\cdot 2\left|I_{h1}\right|\cdot\cos(\omega_\infty t + \arg I_{h1})\end{aligned} \tag{5.32}$$

In diesem Fall ist der Reihenschwingkreis nur *schwach gedämpft* und es treten Eigenschwingungen mit der *Eigenkreisfrequenz* ω_∞ auf. Im Sonderfall des ungedämpften Reihenschwingkreises, d. h. $R = 0$ und der exponentielle Vorfaktor verschwindet, sind die Eigenkreisfrequenz ω_∞ und die aus der Physik bekannte *Resonanzkreisfrequenz* $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ identisch.

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

Lösung A5.1-4 Reihenschwingkreis – DGL mit geschalteter Erregung ☑

a) Die physikalischen Randbedingungen aus der Energiebetrachtung sind

– an den Induktivitäten: Der Strom „springt nicht“, d. h., $i_L(t)$ ist stetig

– an den Kapazitäten: Die Spannung „springt nicht“, d. h., $u_C(t)$ ist stetig

Anmerkung: Mit diesen physikalischen Überlegungen können wir unser Ergebnis verifizieren.

b) Lösung der DGL für eine geschaltete exponentielle Spannungsquelle

Zunächst erinnern wir uns an die Überlegungen zum Ein- und Ausschwingen von LTI-Systemen und insbesondere an das Beispiel des RC-Glieds. Durch das Anschalten der Exponentiellen ergeben sich ein Einschwinganteil, ein Ausschwinganteil und ein stationärer Anteil. Dementsprechend machen wir einen Ansatz für die partikuläre Lösung, der den stationären Anteil widerspiegelt.

$$i_p(t) = I_p e^{s_q t} \quad \text{für } t > 0 \tag{5.33}$$

Eingesetzt in die DGL (5.14) folgt

$$I_p \cdot e^{s_q t} \cdot \left(s_q^2 + \frac{R}{L} s_q + \frac{1}{LC} \right) = U_q \cdot \frac{s_q}{L} \cdot e^{s_q t} \tag{5.34}$$

Damit die DGL erfüllt ist, muss offensichtlich gelten

$$I_p = U_q \cdot \frac{s_q / L}{s_q^2 + s_q \cdot (R/L) + 1/LC} = U_q \cdot H(s_q) \tag{5.35}$$

mit der Übertragungsfunktion (5.5) aus Aufgabe 5.1-2. Für die partikuläre Lösung ergibt sich demzufolge

$$i_p(t) = U_q \cdot H(s_q) \cdot e^{s_q t} \tag{5.36}$$

Die gesuchte Funktion des Stroms erhält man aus der partikulären Lösung $i_p(t)$ und der Lösung der homogenen DGL $i_h(t)$. Je nach Fall, sind die Ergebnisse aus Aufgabe 5.1-3 einzusetzen.

$$i(t) = i_p(t) + i_h(t) \tag{5.37}$$

Im Weiteren bestimmen wir die Lösung für die Anfangsbedingung „energiefrei“ und unterscheiden dabei die drei Fälle für die Lage der Pole.

Fall ①, überaperiodisch gedämpft $1/LC < (R/2L)^2$

Aus der Bedingung der Energiefreiheit folgt unmittelbar, dass im Schaltzeitpunkt $i(0) = 0$ gelten muss. Demzufolge resultiert aus (5.37) und Einsetzen der gefundenen Lösungen

$$i(0+) = I_{h1} + I_{h2} + U_q H(s_q) = 0 \tag{5.38}$$

© Martin Werner, Fulda 2008

Weiter folgt aus der Energiefreiheit, dass $u_C(0) = 0$ gilt. Obwohl der Zusammenhang mit $i(t)$ auf den ersten Blick nicht erkennbar ist, folgt aus dem Maschenumlauf (5.12)

$$u_q(0+) = u_L(0+) = L \cdot i'(t)\big|_{t=0+} \tag{5.39}$$

da $u_C(0) = 0$ und $u_R(0+) = R \cdot i(0+) = 0$ vorgegeben sind. Damit resultiert die zweite Bedingung an den Strom zum Einschaltzeitpunkt

$$\frac{U_q}{L} = I_{h1}\sigma_{\infty 1} + I_{h2}\sigma_{\infty 2} + U_q s_q H(s_q) \tag{5.40}$$

Es liegen mit (5.38) und (5.40) zwei Gleichungen für die beiden Unbekannten I_{h1} und I_{h2} vor, so dass die Lösung der DGL eindeutig bestimmt ist.

Löst man (5.40) nach I_{h2} auf und setzt in (5.38) ein, so resultiert nach kurzer Zwischenrechnung

$$I_{h1} = U_q \cdot \frac{(s_q - \sigma_{\infty 2}) \cdot H(s_q) - 1/L}{\sigma_{\infty 2} - \sigma_{\infty 1}} \tag{5.41}$$

und aus Symmetriegründen (mit vertauschten Indizes) entsprechend

$$I_{h2} = U_q \cdot \frac{(s_q - \sigma_{\infty 1}) \cdot H(s_q) - 1/L}{\sigma_{\infty 1} - \sigma_{\infty 2}} \tag{5.42}$$

Die gesuchte Lösung für den Strom nach dem Einschalten ($t > 0$) nimmt dann die Form an

$$\begin{aligned} i(t) \;&= U_q \cdot \frac{(s_q - \sigma_{\infty 2}) \cdot H(s_q) - 1/L}{\sigma_{\infty 2} - \sigma_{\infty 1}} \cdot e^{\sigma_{\infty 1} t} + \\ &+ U_q \cdot \frac{(s_q - \sigma_{\infty 1}) \cdot H(s_q) - 1/L}{\sigma_{\infty 1} - \sigma_{\infty 2}} \cdot e^{\sigma_{\infty 2} t} + U_q \cdot H(s_q) \cdot e^{\sigma_q t} \end{aligned} \tag{5.43}$$

Fall ②, aperiodischer Grenzfall $1/LC = (R/2L)^2$

Da sich in diesem Fall die Lösung der homogenen DGL (5.24) von den beiden anderen Fällen unterscheidet, müssen wir die homogene Lösung in die Anfangsbedingungen entsprechend (5.38) und (5.40) nochmals einsetzen.

$$i(0+) = I_{h1} + U_q \cdot H(s_q) = 0 \tag{5.44}$$

$$\frac{U_q}{L} = I_{h1}\sigma_{\infty} + I_{h2} + U_q s_q H(s_q) \tag{5.45}$$

Aus (5.44) folgt unmittelbar I_{h1}, und damit in (5.45) I_{h2}. Der gesuchte Strom ergibt sich demzufolge für $t > 0$ zu

© Martin Werner, Fulda 2008

$$i(t) = -U_q\, H(s_q)\, e^{\sigma_\infty t} + U_q \left[\left(\sigma_\infty - s_q\right) H(s_q) + \frac{1}{L} \right] \cdot t\, e^{\sigma_\infty t} + U_q\, H(s_q)\, e^{s_q t} \qquad (5.46)$$

Fall ③, schwach gedämpft $1/LC > (R/2L)^2$

Die Beziehungen (5.38) bis (5.43) gelten auch für diesen Fall, wenn man σ_∞ durch s_∞ ersetzt.

c) Lösung der DGL für die geschaltete Gleichspannungsquelle

Die geschaltete Gleichspannungsquelle kann als Exponentielle mit der komplexen Frequenz $s_q = 0$ aufgefasst werden. Spezialisiert man die Ergebnisse in Abschnitt (b) für diesen Fall, so erhält man wegen der Nullstelle der Übertragungsfunktion für $s_0 = 0$

$$H(0) = 0 \qquad (5.47)$$

Damit vereinfachen sich die in (b) gefundenen Lösungen für den Strom deutlich.

Wir erhalten für den Fall ① (überaperiodisch gedämpft) mit zwei reellen Polen zunächst als Zwischenschritt

$$\sigma_{\infty 2} - \sigma_{\infty 1} = -2\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \qquad (5.48)$$

und damit in (5.43) eingesetzt

$$i(t) = \frac{U_q}{2L \cdot \sqrt{(R/2L)^2 - 1/LC}} \cdot \left(e^{\sigma_{\infty 1} t} - e^{\sigma_{\infty 2} t} \right) \quad \text{für } t > 0 \qquad (5.49)$$

Der Strom im Fall ② (aperiodischer Grenzfall) resultiert unmittelbar aus (5.46)

$$i(t) = \frac{U_q}{L} \cdot t \cdot e^{\sigma_\infty t} \quad \text{für } t > 0 \qquad (5.50)$$

Im Fall ③ (schwach gedämpft) liegt ein konjugiert komplexes Polpaar vor mit

$$s_{\infty 2} - s_{\infty 1} = -j2\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = -j2\omega_\infty \qquad (5.51)$$

und entsprechend in (5.43) eingesetzt erhalten wir nach kurzer Zwischenrechnung

$$i(t) = \frac{U_q}{\omega_\infty L} \cdot e^{\sigma_\infty t} \cdot \sin \omega_\infty t \quad \text{für } t > 0 \qquad (5.52)$$

Die grafische Auswertung der drei Gleichungen erfolgt in Bild 5-8 und erlaubt einen Vergleich mit den aus der Physik oder den Grundlagen der Elektrotechnik bekannten Ergebnissen.

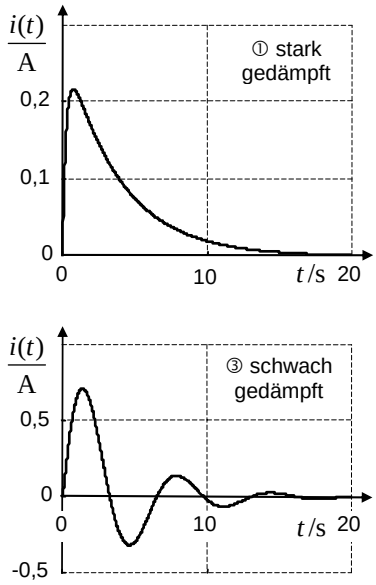
Im oberen linken Teilbild ist der Strom für den Fall des überaperiodisch gedämpften Schwingkreises (Fall ①) dargestellt. Der Strom beginnt im Zeitpunkt $t = 0$ bei Null, wächst dann sehr

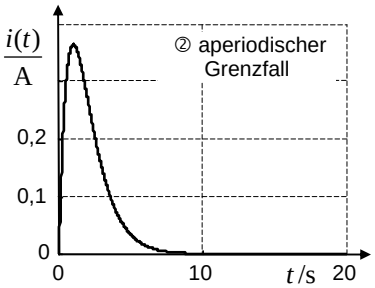
© Martin Werner, Fulda 2008

schnell an, um schließlich in den exponentiellen Abfall entsprechend dem schwächer dämpfenden Pol über zu gehen.

Der aperiodische Grenzfall (Fall ②) im rechten oberen Teilbild zeichnet sich durch den höchsten Anstieg und das schnellste Abklingen des Stromes aus, bei dem noch keine Schwingung auftritt.

Beim schwach gedämpften Reihenschwingkreis (Fall ③) beobachten wir das typische Einschwingverhalten mit der Eigenschwingung. Aus dem Abstand der Nulldurchgänge schließen wir auf eine Periode von 2π Sekunden, was mit den für das Bild verwendeten normierten Wert $\omega_\infty = 0{,}9682 \approx 1$ für den Imaginärteil der Pole harmoniert.





Pole (normiert)

Fall	$s_{\infty 1}$	$s_{\infty 2}$
①	–0,2679	–3,7321
②	–1	–1
③	–0,25 + *j*0,9682	–0,25 – *j*0,9682

Bild 5-8 Einschwingverhalten des Reihenschwingkreises in Bild 5-3 bei Erregung mit einer geschalteten Gleichspannung und zunächst energiefreiem Zustand

5.3 Übungen mit MATLAB

MATLAB-Übung M5-1 Geschaltete Spannungsquelle am RC-Glied

Die Aufgabe knüpft an das Beispiel der geschalteten Spannungsquelle am RC-Glied in ([Wer08], Abschnitt 5.5.1) und die MATLAB-Übung M2-3 zur DGL des RC-Gliedes an. Wir erweitern das dortige Programmbeispiel 2-3 so, dass die gleichen Vorgaben wie für das theoretisch berechnete Beispiel in [Wer08] erfüllt werden.

– Anfangsbedingung $u_C(t) = 1$ V

– Kosinusförmig Spannungsquelle mit der Frequenz 1 Hz und der Amplitude 8 V.

© Martin Werner, Fulda 2008

Programmbeispiel 5-1 RC-Glied mit Anfangsbedingung und geschalteter Erregung

```
function s3s5_1
% differential equation for RC circuit
% s3s5_1.m * mw * 9/02/2007
tspan = [0 6];                                  % time span for evaluation
y0 = 1;                                                % initial condition
options = odeset('refine',10);
[t,x] = ode45(@rc,tspan,y0,options);
% graphics
figure('Name','RC circuit','NumberTitle','off');
plot(t,real(x)), grid
axis([0 6 -2 2]);
xlabel('{\itt} in s \rightarrow'); ylabel('{\itu_C}({\itt}) in V
\rightarrow')
% subfunction
function dydt = rc(t,y);
x = 8*exp(j*2*pi*t);                        % input signal = cosine sequence
dydt = x - y;                                                  % 1st order ODE
```

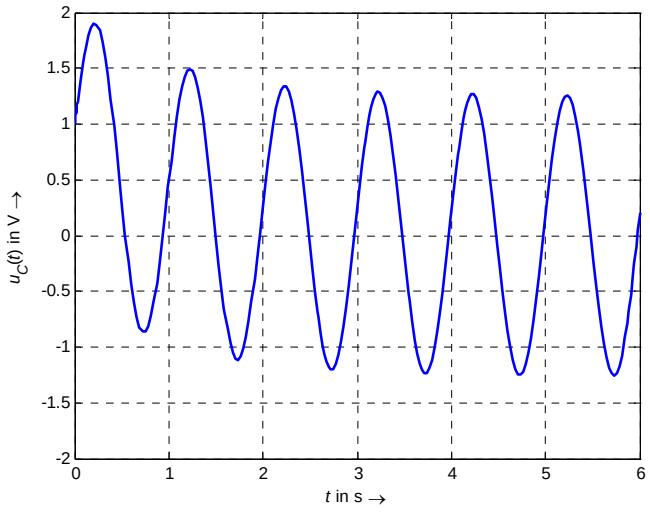


Bild 5-9 Spannung an der Kapazität des RC-Glieds nach dem Schalten

MATLAB-Übung M5-2 Reihenschwingkreis

Anmerkungen: Zum tieferen Verständnis der Lösung mit MATLAB sind Kenntnisse über die Zustandsraumdarstellung der Systeme notwendig. Eine einführende Darstellung wird in [Wer08] in Abschnitt 13 gegeben. Die Übung soll deshalb eher als Ausblick verstanden werden. Eine weitergehende Einführung in die Zustandsraumdarstellung findet sich beispielsweise in [GRS03], [Hsu95], [Schü91], [Unb02].

In dieser Übung sollen die Ergebnisse aus der Aufgabe 5.1-4 für den Reihenschwingkreis mit dem Strom als Ausgangsgröße durch die Lösung der DGL 2. Ordnung (5.14) mit MATLAB verifiziert werden. Dazu gehen wir in drei Schritten vor:

© Martin Werner, Fulda 2008

a) Zuerst bringen wir die Aufgabenstellung in die für MATLAB geeignete Form.

b) Dann erstellen wir das MATLAB-Programm, wobei wir uns auch um die Wahl der Parameter kümmern.

c) Schließlich vergleichen wir das Ergebnis mit dem theoretischen Ergebnis in Bild 5-8.

Lösung

a) Gegeben ist die DGL des Reihenschwingkreises (5.14)

$$i''(t) + a_1 i'(t) + a_2 i(t) = b_1 u_q'(t) \tag{5.53}$$

mit den konstanten Koeffizienten $a_1 = R/L$, $a_2 = 1/LC$ und $b_1 = 1/L$.

Die numerische Lösung der DGL mit MATLAB gelingt, wenn wir die DGL 2. Ordnung in zwei Stufen, d. h. in zwei DGL der 1. Ordnung, zerlegen. Hierzu führen wir die Hilfsvariablen

$$i(t) = x_1(t), \quad i'(t) = x_1'(t) = x_2(t), \quad i''(t) = x_2'(t) \tag{5.54}$$

ein. Damit erhalten wir formal zwei homogene DGL 1. Ordnung. Die erste durch die Definition der Hilfsvariablen und die zweite durch Einsetzen in die DGL 2. Ordnung.

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_2(t) \\ x_2'(t) + a_1 \cdot x_2(t) + a_2 \cdot x_1(t) &= 0 \end{aligned} \tag{5.55}$$

In der Systemtheorie spricht man von der Zustandsraumdarstellung und schreibt kompakt in Matrixform (mit $a_0 = 1$)

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{5.56}$$

Damit liegt die für die numerische Lösung mit MATLAB benötigte Darstellung vor.

Anmerkung: Die Mathematik zeigt, dass eine lineare DGL *n*-ter Ordnung in ein System von *n* DGL 1. Ordnung umgeformt werden kann [BSMM99]. Die Systemtheorie macht bei der Zustandsraumdarstellung ausführlich davon Gebrauch.

b) Bei der Programmierung orientieren wir uns am Beispiel der DGL 1. Ordnung für das RC-Glied in Programmbeispiel 3-8. Neu hinzu kommt jetzt, dass wir für die Lösung sowie die Anfangsbedingungen Vektorgrößen verwenden müssen, siehe Programmbeispiel 5-2 mit dem Spaltenvektor für die Anfangsbedingungen „`x0=[0;1];`“ .

Das erste Element von „`x0`“ entspricht dem Strom und die zweite seiner Ableitung. Gehen wir, wie in Aufgabe 5.1-4, von einer geschalteten Gleichspannung bei ansonsten energiefreien Bauelementen aus, so muss aufgrund der physikalischen Randbedingungen der Strom im Schaltzeitpunkt stetig sein. Also bei anfangs energiefreiem Kreis, das erste Element von „`x0`“ zu null vorgegeben werden. Die Wahl des zweiten Elements ist zunächst weitgehend frei. Es bestimmt die Amplitude des Stromes nach dem Schalten, nicht aber das prinzipielle Zeitverhalten.

Die Erregung in (5.14) resultiert aus der Vorgabe einer zum Zeitpunkt $t = 0$ eingeschalteten Gleichspannung. Wir erhalten die Ableitung der Sprungfunktion, also die Impulsfunktion. Demzufolge ist die Erregung mit Ausnahme des Schaltzeitpunktes null. Es stellt sich die Frage: Wie modellieren wir den Einfluss der Impulsfunktion auf den Strom in unserem Gleichungs-

© Martin Werner, Fulda 2008

system? Der einzig verfügbare Parameter ist die Ableitung des Stromes in den Anfangsbedingungen. In Anlehnung an Bild 5-8 wählen wir 1.

Da wir das Resultat der theoretischen Rechnung in Bild 5-8 verifizieren wollen, bestimmen wir die Koeffizienten a_1 und a_2 entsprechend dem komplexen Polpaar für den Fall 2 mit dem MATLAB-Befehl „`poly([-.25+.9682j,-.25-.9682j])`“. Wir erhalten die Werte 0,5 und 1.

c) Der Vergleich der Bilder Bild 5-8 und Bild 5-10 zeigt die prinzipielle Übereinstimmung der theoretischen und der numerischen Lösung.

d) Variieren Sie das Beispiel für den stark gedämpften und aperiodischen Fall.

Programmbeispiel 5-2 Reihenschwingkreis mit Anfangsbedingung und geschalteter Erregung

```
function s3s5_2
% differential equation for RLC circuit
% s3s5_2.m * mw * 09/02/2007
tspan = [0,20];                                  % time span for evaluation
x0 = [0;1];                                % pair of initial condition (x1,x2)
options = odeset('refine',10);
[t,x] = ode45(@rlc,tspan,x0,options);
% graphics
figure('Name','RLC circuit','NumberTitle','off');
plot(t,x(:,1)), grid                                                % plot x1
axis([0 20 -.4 .8]);
xlabel('t in [s] \rightarrow'); ylabel('i(t) in [A] \rightarrow')
% subfunction
function dxdt = rlc(t,x);
dxdt = [x(2); -.5*x(2)-x(1)];                                    % 2nd order ODE
```

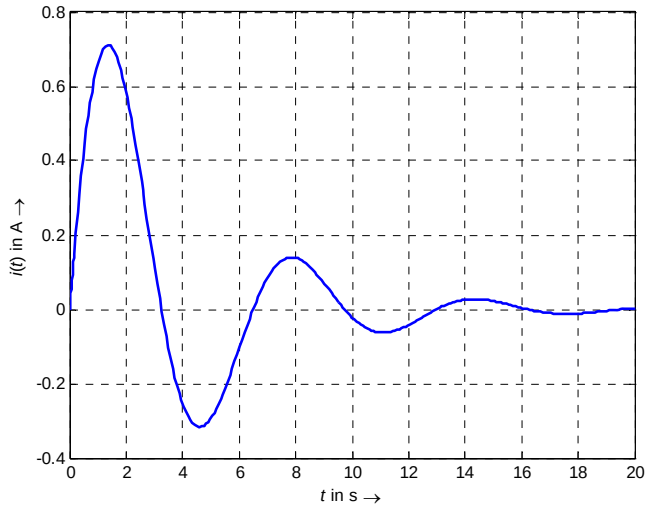


Bild 5-10 Strom im schwach gedämpften Reihenschwingkreis nach dem Hinzuschalten einer Gleichspannungsquelle

© Martin Werner, Fulda 2008

6 *z*-Transformation und LTI-Systeme

6.1 Aufgaben

Aufgabe A6.1-1 *z*-Transformierte des Rechteckimpulses ✍ ★

a) Berechnen Sie die *z*-Transformierte des Rechteckimpulses $\Pi_N[n]$ durch anwenden der Transformationsvorschrift.

b) Geben Sie den Rechteckimpuls als rechtsseitiges Signal an und bestimmen Sie seine *z*-Transformierte.

c) Verifizieren Sie die Ergebnisse, indem Sie eine andere Darstellungsform für den Rechteckimpuls wählen.

Aufgabe A6.1-2 *z*-Transformierte des Dreieckimpulses ✍ ★

a) Berechnen Sie die *z*-Transformierte des rechtsseitigen Dreieckimpulses der Länge $2 \cdot N + 1$ mit $N = 1, 2, 3, \ldots$

b) Geben Sie die *z*-Transformierte zu einem zweiseitigen Dreieckimpuls an.

Aufgabe A6.1-3 Korrespondenz für konjugiert komplexes Polpaar ✍ ★

Bei reellwertigen Systemen ist bei reellem Eingangssignal auch das Ausgangssignal reell. Hierzu ist notwendig, dass die Pole der Übertragungsfunktion rein reell sind oder konjugiert komplexe Paare bilden mit $z_{\infty 1,2} = r_\infty \, e^{\pm j\Omega_\infty}$. Im letzteren Fall sind die zugehörigen Koeffizienten der Partialbruchzerlegung ebenfalls konjugiert komplexe Paare, $B = B_r \pm jB_i$.

Zeigen Sie, dass für einfache konjugiert komplexe Polpaare die Korrespondenz gilt

$$\begin{aligned} \frac{B\,z}{z - z_\infty} + \frac{B^*\,z}{z - z_\infty^*} \;\leftrightarrow\quad & r_\infty{}^n \cdot 2\left|B\right| \cdot \cos\left(\Omega_\infty n + \arg B\right) u[n] = \\ & = r_\infty{}^n \cdot \left[2B_r \cos\left(n\Omega_\infty\right) - 2B_i \sin\left(n\Omega_\infty\right)\right] u[n] \end{aligned} \tag{6.1}$$

Aufgabe A6.1-4 Rücktransformation durch Potenzreihenentwicklung ✍ ★

Prüfen Sie die Korrespondenz

$$a^n u[n] \;\leftrightarrow\; \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a} \tag{6.2}$$

indem Sie die Polynomdivision durchführen.

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

Aufgabe A6.1-5 *z*-Transformation ✍ ★

Zeigen Sie, dass

$$n \cdot a^n u[n] \quad \leftrightarrow \quad \frac{a \quad z}{(z-a)^2} \quad \text{für } |z| > |a| \tag{6.3}$$

Hinweis: $\frac{d}{da} a^n = n \cdot a^{n-1}$

Aufgabe A6.1-6 Digitaler Sinusgenerator ✍ ★

Gegeben ist das System mit der DGL 2. Ordnung

$$y[n] - 2\cos(\Omega_0)\, y[n-1] + y[n-2] = 0 \tag{6.4}$$

a) Bestimmen Sie den Signalflussgraphen des Systems.

b) Da eine homogene DGL vorliegt, besitzt das System keinen Eingang. In einem solchen Fall spricht man von einem *autonomen* System. Das Signal am Systemausgang ist nur dann von null verschieden, wenn die Zustandsgrößen des autonomen Systems mit Werten ungleich null vorbesetzt werden, die Energiespeicher vorgeladen, werden.

   Ergänzen Sie den Signalflussgraphen so, dass bei Beginn im energiefreien Zustand bei einer Impulserregung, $x[n] = \delta[n]$, für die ersten beiden Werte des Ausgangssignals im Beobachtungszeitraum gilt $y[0] = 0$ und $y[1] = \sin(\Omega_0)$.

c) Geben Sie die Übertragungsfunktion des resultierenden Systems in (b) an.

d) Skizzieren Sie das Pol-Nullstellendiagramm zu (b) für $\Omega_0 = \pi / 4$.

e) Berechnen Sie die Impulsantwort des Systems in (b) analytisch.

Übung mit MATLAB 💻

f) Simulieren Sie das System mit MATLAB in dem Sie die DGL programmieren. Bestimmen Sie die Impulsantwort für $\Omega_0 = \pi / 8$.

g) Simulieren Sie das System in MATLAB mit dem Befehl `filter`. Bestimmen Sie die Impulsantwort für $\Omega_0 = \pi / 8$.

h) Bestimmen Sie die Impulsantwort in MATLAB mit dem Befehl `impz` (Signal Processing Toolbox) ür $\Omega_0 = \pi / 8$.

Aufgabe A6.1-7 Übertragungsfunktion, Impulsantwort und Pol-Nullstellendiagramm ✍ ★

Gegeben ist die Übertragungsfunktion eines kausalen Systems

$$H(z) = \frac{z}{z^2 + 0{,}5z + 0{,}75}$$

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

a) Bestimmen Sie die Pole und Nullstellen des Systems. Skizzieren Sie das Pol-Nullstellendiagramm. Welche Ordnung hat das System?

b) Berechnen Sie die Impulsantwort des Systems analytisch.

Übung mit MATLAB

c) Stellen Sie das Pol-Nullstellendiagramm mit MATLAB dar.

Hinweis: MATLAB-Befehl `zplane` (Signal Processing Toolbox)

d) Stellen Sie die Impulsantwort in (b) mit MATLAB grafisch dar.

e) Überprüfen Sie Ihr Ergebnis in (b) durch eine MATLAB-Simulation.

Hinweis: MATLAB-Befehle `filter` und `impz` (Signal Processing Toolbox)

Aufgabe A6.1-8 Übertragungsfunktion, Impulsantwort und Pol-Nullstellendiagramm ✍ ★

Gegeben ist die Übertragungsfunktion eines kausalen Systems

$$H(z) = \frac{z}{z^2 - 0,5}$$

a) Bestimmen Sie die Pole und Nullstellen des Systems. Skizzieren Sie das Pol-Nullstellendiagramm.

b) Berechnen Sie die Impulsantwort des Systems analytisch.

Übung mit MATLAB

c) Stellen Sie das Pol-Nullstellendiagramm mit MATLAB dar.

d) Stellen Sie die analytische Impulsantwort in (b) mit MATLAB grafisch dar.

e) Überprüfen Sie Ihr Ergebnis in (b) durch eine MATLAB-Simulation.

Aufgabe A6.1-9 Übertragungsfunktion, Impulsantwort und Pol-Nullstellendiagramm ✍ ★

Gegeben ist die Übertragungsfunktion eines kausalen Systems

$$H(z) = \frac{z}{z^2 - z + 0,25}$$

a) Bestimmen Sie die Pole und Nullstellen des Systems. Skizzieren Sie das Pol-Nullstellendiagramm.

b) Berechnen Sie die Impulsantwort des Systems analytisch.

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

Übung mit MATLAB

c) Stellen Sie die Impulsantwort in (b) mit MATLAB grafisch dar.

d) Überprüfen Sie Ihr Ergebnis in (b) durch eine MATLAB-Simulation.

Aufgabe A6.1-10 Übertragungsfunktion, Sprungantwort und Pole und Nullstellen ✍ ★

Gegeben ist die Übertragungsfunktion eines kausalen Systems

$$H(z) = \frac{z}{z^2 - z + 0{,}5}$$

a) Bestimmen Sie die Pole und Nullstellen des Systems.

b) Berechnen Sie die Sprungantwort des Systems analytisch.

Übung mit MATLAB

c) Wie können die Pole und Nullstellen mit MATLAB berechnet werden? Bestimmen Sie die Pole und Nullstellen mit MATLAB. Berechnen Sie mit MATLAB auch aus den Polen das Nennerpolynom.

Hinweis: MATLAB-Befehle `roots` und `poly`

d) Stellen Sie die analytische Sprungantwort in (b) mit MATLAB grafisch dar.

e) Überprüfen Sie Ihr Ergebnis in (b) durch eine MATLAB-Simulation.

Aufgabe A6.1-11 Partialbruchzerlegung mit MATLAB für ein System 3. Ordnung ✍ ★★

In dieser Übung soll das Beispiel in [Wer08], Abschnitt 6.4.6, mit MATLAB nachvollzogen werden.

Gegeben ist die Übertragungsfunktion 3. Ordnung

$$H(z) = 0{,}01 \cdot \frac{8.83z^2 + 6{,}33z}{z^3 - 2{,}02z^2 + 1{,}46z - 0{,}368}$$

Übung mit MATLAB

a) Führen Sie als Vorbereitung für die Rücktransformation der Übertragungsfunktion die Partialbruchzerlegung in geeigneter Form mit MATLAB durch.

Hinweis: Für die Rücktransformation ist es wegen der Korrespondenz der Exponentialfolge in ([Wer08], Tabelle 6-2) oft günstiger die Übertragungsfunktion vorab durch *z* zu dividieren.

b) Berechnen Sie die Impulsantwort mit MATLAB analytisch und stellen Sie die Impulsantwort grafisch dar.

Hinweis: Verwenden Sie den MATLAB-Befehl `residue` und programmieren Sie in MATLAB die allgemeine Lösung für Systeme *N*-ter Ordnung mit nur einfachen Polen.

© Martin Werner, Fulda 2008

c) Simulieren Sie die Impulsantwort und vergleichen Sie das Ergebnis mit der Lösung in (b).

d) Wiederholen Sie (a), (b) und (c) für die Sprungantwort.

Aufgabe A6.1-12 3D-Darstellung und Höhenlinien-Darstellung des Betrags der Übertragungsfunktion ✍ ★★

Übung mit MATLAB

Mit MATLAB lassen sich 3D- und Höhenlinien-Darstellungen erzeugen.

Im Programmbeispiel 6-1 finden Sie das Programm mit der auch die Diagramme in [Wer08], Abschnitt 6.4, generiert wurden. Geben Sie die Pole und Nullstellen bzw. Nenner- und Zählerkoeffizienten vor, und lassen Sie sich entsprechende Grafiken am Bildschirm anzeigen. Überlegen Sie, wie die Lagen der Pole und Nullstellen die Betragsfrequenzgänge beeinflussen.

Programmbeispiel 6-1

```
% Show magnitude of the transfer function of
% an IIR system in the complex z plane
% s3s6_10.m * mw * 09/12/2007
%% Inizialize system
b = [0 .0833 .0633 0]; a = [1 -2.02 1.46 -.38]; % numerator and
denominator
%% Polar coordinates (supporting grid in z plane)
rho = 0:.025:1.5;
phi = 0:.025:2; phi=pi*phi;
Nrho = length(rho); Nphi = length(phi); z = zeros(Nrho,Nphi);
for k=1:Nrho
   for l=1:Nphi
      z(k,l) = rho(k)*cos(phi(l)) + j*rho(k)*sin(phi(l));
  end
end
%% Compute transfer function (sinle poles only)
M = length(b)-1; % order of numerator polynomial
N = length(a)-1; % order of denominator polynomial
ZP = zeros(size(z));
for k=1:M+1                                    % numerator polynomial
  ZP = ZP + b(k)*z.^(M+1-k);
end
NP = zeros(size(z));
for k=1:N+1                                  % denominator polynomial
  NP = NP + a(k)*z.^(N+1-k);
end
H = (ZP./NP).*z.^(N-M);                          % transfer function
%% Contour plot
NAME = 's3s6_10 : Contour Plot';
FIG1 = figure('Name',NAME,'NumberTitle','off','Units','normal',...
  'Position',[.5 .4 .45  .55]);
V = [.001 .002 .005 .01 .02 .05 .1 .2 .5 1 2 5 10];
[CS,CH] = contour(real(z),imag(z),abs(H),V);
axis square
hold on
Cphi = 0:.005:2; Cphi=pi*Cphi;
Cz   = cos(Cphi) + j*sin(Cphi);
for Cr = .5:.5:1.5
```


© Martin Werner, Fulda 2008

```
  plot(Cr*real(Cz),Cr*imag(Cz),'k:')
end
hold off
clabel(CS,CH,V);
grid
xlabel('real part \rightarrow'), ylabel('imaginary part \rightarrow')
title('contour lines of |H(z)|')
%% Magnitude plot
NAME = 's3s6_10 : z plane';
FIG2 = figure('Name',NAME,'NumberTitle','off','Units','normal',...
  'Position',[.5 .4 .45  .55]);
HdB = 20*log10(abs(H)); HdB = max(HdB,-60); HdB = min(HdB,20);
grid, mesh(real(z),imag(z),HdB)
axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5 -60 20])
xlabel('real part \rightarrow'), ylabel('imaginary part \leftarrow')
zlabel('|H(z)| in dB \rightarrow')
```

6.2 Lösungen

Lösung A6.1-1 *z*-Transformierte des Rechteckimpulses ☑

a) Die z-Transformierte des Rechteckimpulses ([Wer08], (2.21)) erhält man aus

$$Z\{\Pi_N[n]\} = \sum_{n=-N}^{N} z^{-n} = \sum_{n=0}^{N}\left(z^{-1}\right)^n + \sum_{n=1}^{N} z^n \tag{6.5}$$

Setzt man die Werte für die endlichen geometrischen Reihen ein, ergibt sich nach Zwischenrechnung

$$Z\{\Pi_N[n]\} = \frac{\left(z^{-1}\right)^{N+1}-1}{z^{-1}-1} + \frac{z^{N+1}-1}{z-1} - 1 = z^N \cdot \frac{z^{-(2N+1)}-1}{z^{-1}-1} \tag{6.6}$$

b) Die *z*-Transformation des rechtsseitigen Rechteckimpulses erhält man aus (6.6) unmittelbar mit dem Verschiebungssatz der *z*-Transformation.

$$\Pi_N[n-N] \quad \leftrightarrow \quad \frac{z^{-(2N+1)}-1}{z^{-1}-1} \tag{6.7}$$

c) Der Rechteckimpuls kann als Überlagerung zweier verschobener Sprungfolgen dargestellt werden. Somit ergibt sich die *z*-Transformierte

$$\begin{aligned} Z\{\Pi_N[n]\} &= Z\{u[n+N]-u[n-(N+1)]\} = \\ &= z^N \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} - z^{-(N+1)} \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} = z^N \cdot \frac{z^{-(2N+1)}-1}{z^{-1}-1} \end{aligned} \tag{6.8}$$

© Martin Werner, Fulda 2008

Lösung A6.1-2 *z*-Transformierte des Dreieckimpulses ☑

a) In [Wer08], Abschnitt 3.1.1, wird gezeigt, wie sich der rechtsseitige Dreieckimpuls aus der Faltung zweier rechtsseitiger Rechteckimpulse ergibt.

$$x_1[n] = \frac{1}{2N_r+1} \cdot \Pi_{N_r}[n-N_r] * \Pi_{N_r}[n-N_r] \tag{6.9}$$

Mit dem Faltungssatz der *z*-Transformation erhält man

$$X_1(z) = \frac{1}{2N_r+1} \cdot \left(\frac{z^{-(2N_r+1)}-1}{z^{-1}-1} \right)^2 \tag{6.10}$$

Man beachte, dass der Dreieckimpuls hier die Breite $2N_r$ besitzt. Ersetzt man noch $2N_r$ durch den Parameter N gemäß der Aufgabenstellung, ergibt sich schließlich

$$X_2(z) = \frac{1}{N+1} \cdot \left(\frac{z^{-(N+1)}-1}{z^{-1}-1} \right)^2 \tag{6.11}$$

b) Die *z*-Transformation des zweiseitigen Dreieckimpulses erhält man durch anwenden des Verschiebungssatzes.

$$X_3(z) = \frac{z^N}{N+1} \cdot \left(\frac{z^{-(N+1)}-1}{z^{-1}-1} \right)^2 \tag{6.12}$$

Lösung A6.1-3 Korrespondenz für konjugiert komplexes Polpaar ☑

Die inverse *z*-Transformation liefert

$$Z^{-1}\left\{ \frac{Bz}{z-z_\infty} + \frac{B^* z}{z-z_\infty^*} \right\} = \left[B\, z_\infty^n + B^* (z_\infty^*)^n \right] \cdot u[n] \tag{6.13}$$

Der Term in der eckigen Klammer kann verschiedentlich zusammengefasst werden.

$$\begin{aligned} \left[B\, z_\infty^n + B^* (z_\infty^*)^n \right] &= 2\,\mathrm{Re}\left(B\, z_\infty^n \right) = 2|B| \cdot r_\infty^n \cdot \cos\left(\Omega_\infty n + \arg B \right) = \\ &= r_\infty^n \cdot \left[2B_r \cos\left(\Omega_\infty n \right) - 2B_i \sin\left(\Omega_\infty n \right) \right] \end{aligned} \tag{6.14}$$

Lösung A6.1-4 Rücktransformation durch Potenzreihenentwicklung ☑

Die Polynomdivision liefert die Potenzreihenentwicklung

$$z : (z+a) = 1 + a\, z^{-1} + a^2\, z^{-2} + a^3\, z^{-3} + a^4\, z^{-4} + \cdots \tag{6.15}$$

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

Durch Koeffizientenvergleich in ([Wer08], (6.1)) ergeben sich die Folgenelemente

$$x[n] = \left\{1, a, a^2, a^3, a^4, \ldots\right\} = a^n u[n] \tag{6.16}$$

Lösung A6.1-5 *z*-Transformation ☑

Die *z*-Transformation von (6.3)

$$Z\left\{n \cdot a^n u[n]\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a^n z^{-n} \tag{6.17}$$

kann mit der Differentiationsformel

$$a \cdot \frac{d}{da} a^n = n \cdot a^n \tag{6.18}$$

in eine bekannte Form umgeschrieben werden, siehe auch ([Wer08], Tabelle 6-2)

$$Z\left\{\ n \cdot a^n u[n]\ \right\} = a \frac{d}{da} \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = a \frac{d}{da} \cdot \frac{z}{z-a} = a \cdot \frac{z}{(z-a)^2} \tag{6.19}$$

Lösung A6.1-6 Digitaler Sinusgenerator ☑

a) Die DGL entspricht der allgemeinen homogenen Form 2. Ordnung

$$a_0\, y[n] + a_1\, y[n-1] + a_2\, y[n-2] = 0 \tag{6.20}$$

mit

$$a_0 = 1\ ; \quad a_1 = -2\cos(\Omega_0)\ ; \quad a_2 = 1 \tag{6.21}$$

so dass sich der Signalflussgraph in Bild 6-1 (links) ergibt.

b) Der Signalflussgraph des erweiterten Systems ist in Bild 6-1 (rechts) zu sehen.

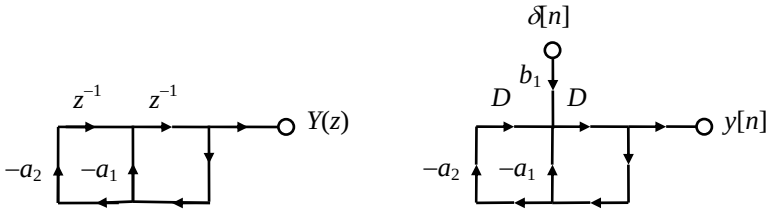


Bild 6-1 Signalflussgraph des Sinusgenerators mit $a_1 = -2\cos(\Omega_0)$, $a_2 = 1$ und $b_1 = \sin(\Omega_0)$

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

c) Übertragungsfunktion

$$H(z) = \frac{\sin(\Omega_0) \cdot z^{-1}}{1 - 2\cos(\Omega_0) \cdot z^{-1} + z^{-2}} \tag{6.22}$$

d) Pol-Nullstellendiagramm

$$H(z) = \frac{z \sin(\Omega_0)}{z^2 - 2z\cos(\Omega_0) + 1} = \frac{z \sin(\Omega_0)}{(z - z_{\infty 1})(z - z_{\infty 2})} \tag{6.23}$$

mit

$$z_{\infty 1,2} = -\cos(\Omega_0) \pm \sqrt{\cos^2(\Omega_0) - 1} = -\cos(\Omega_0) \pm j \sin(\Omega_0) \tag{6.24}$$

Es ergibt sich ein konjugiert komplexes Polpaar auf dem Einheitskreis, siehe Bild 6-2. Das System ist bedingt stabil.

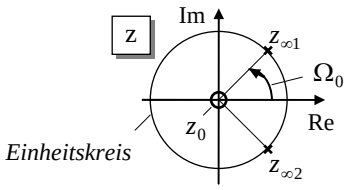


Bild 6-2 Pol-Nullstellendiagramm des Sinusgenerators

e) Impulsantwort

Der Vergleich der Übertragungsfunktion mit den z-Transformationspaaren in ([Wer08], Tabelle 6-2) liefert die Korrespondenz

$$h[n] = \sin(\Omega_0 n) u[n] \quad \leftrightarrow \quad H(z) = \frac{\sin(\Omega_0) \cdot z}{z^2 - 2\cos(\Omega_0) \cdot z + 1} \tag{6.25}$$

Lösung mit MATLAB

f) Simulation mit der DGL

```
% Sinus generator
% S3S6_1.m * mw * 09/12/2007
%% Initialization
w = pi/8;                                   % normalized radian frequency
a0 = 1; a1 = -2*cos(w); a2 = 1;               % denominator coefficients
n = 0:30;                                              % normalized time
%% Simulation
y = size(n);
y(1) = 0; y(2) = sin(w);                              % initial conditions
```


© Martin Werner, Fulda 2008

```
for k=3:length(n)
    y(k) = -a1*y(k-1)-a2*y(k-2);                                    % DEQ
end
%% Graphics
FIG1 = figure('Name','S3S6_1 : Sinus generator','NumberTitle','off');
stem(n,y,'filled'), grid
    axis([0 length(n) -1.2 1.2]); title(['Sinus signal : \Omega_0 =
\pi / ',num2str(pi/w)])
    xlabel('n \rightarrow'), ylabel('y[n] \rightarrow')
```

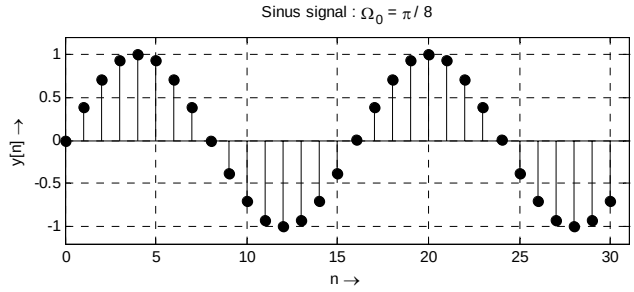


Bild 6-3 Ausgangssignal des Sinusgenerators (Impulsantwort)

g) Simulation mit dem MATLAB-Befehl `filter`

```
% Sinus generator
% S3S6_2.m * mw * 09/12/2007
%% Initialization
w = pi/8;                                       % normalized radian frequency
a0 = 1; a1 = -2*cos(w); a2 = 1;                    % denominator coefficients
b0 = 0; b1 = sin(w);    b2 = 0;                      % numerator coefficients
b = [b0 b1 b2]; a = [a0 a1 a2];
%% Simulation
L = 30;                                     % number of simulation cycles - 1
x = [1 zeros(1,L)];                                          % impulse function
y = filter(b,a,x);                                                % filtering
%% Graphics
FIG1 = figure('Name','S3S6_2 : Sinus generator','NumberTitle','off');
stem(0:L,y,'filled'), grid
    axis([0 L -1.2 1.2]); title(['Sinus signal : \Omega_0 = \pi /
',num2str(pi/w)])
    xlabel('n \rightarrow'), ylabel('y[n] \rightarrow')
```

g) MATLAB-Befehl `impz`

```
% Sinus generator
% S3S6_3.m * mw * 09/12/2007
%% Initialization
w = pi/8;                                       % normalized radian frequency
a0 = 1; a1 = -2*cos(w); a2 = 1;                    % denominator coefficients
b0 = 0; b1 = sin(w);    b2 = 0;                      % numerator coefficients
b = [b0 b1 b2]; a = [a0 a1 a2];
```


© Martin Werner, Fulda 2008

```
%% Simulation
L = 31;                              % computed length of impulse response
y = impz(b,a,L);                                        % impulse response
%% Graphics
FIG1 = figure('Name','S3S6_3 : Sinus generator','NumberTitle','off');
stem(0:L-1,y,'filled'), grid
    axis([0 L -1.2 1.2]); title(['Sinus signal : \Omega_0 = \pi /
',num2str(pi/w)])
    xlabel('n \rightarrow'), ylabel('y[n] \rightarrow')
```

Lösung A6.1-7 Übertragungsfunktion, Impulsantwort und Pol-Nullstellendiagramm ☑

a) Nullstellen (endliche) $z_0 = 0$

Pole

$$z_{\infty 1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} - \frac{3}{4}} = -\frac{1}{4} \pm j\frac{\sqrt{11}}{4} \tag{6.26}$$

Pol-Nullstellendiagramm

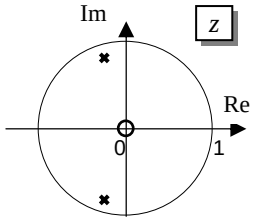


Bild 6-4 Pol-Nullstellendiagramm (A6.1-7)

Es handelt sich um ein System 2. Ordnung.

b) Partialbruchzerlegung

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{1}{z^2 + 0,5z + 0,75} = \frac{-2j/\sqrt{11}}{z + 1/4 - j\sqrt{11}/4} + \frac{2j/\sqrt{11}}{z + 1/4 + j\sqrt{11}/4} \tag{6.27}$$

Somit

$$H(z) = \left(j2/\sqrt{11}\right) \cdot \left[\frac{-z}{z + 1/4 - j\sqrt{11}/4} + \frac{z}{z + 1/4 + j\sqrt{11}/4}\right] \tag{6.28}$$

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

Die inverse *z*-Transformation liefert für ein konjugiert komplexes Polpaar mit ([Wer08], Tabelle 6-2)

$$h[n] = \frac{4}{\sqrt{11}} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \cdot \left[-\sin\left(n \cdot \arctan\frac{\sqrt{11}}{-1}\right)\right] \cdot u[n] \tag{6.29}$$

Lösung mit MATLAB

c) Pol-Nullstellendiagramm mit MATLAB

```
% 2nd order System
% S3S6_4.m * mw * 09/12/2007
%% 2nd order System
b = [0 1 0]; a = [1 .5 .75];                % numerator and denominator
%% Pol-zero plot
FIG1 = figure('Name','S3S6_4 : Pole-zero Plot','NumberTitle','off');
    zplane(b,a),grid
    title('Pole-zero Plot')
```

d) Impulsantwort (analytisch) mit MATLAB grafisch darstellen, siehe

< Programmfortsetzung>

```
%% Analytical impulse response
L = 40; n = 0:L;
r = sqrt(3)/2; w = atan2(sqrt(11),-1);                          % pole
ha = (2/sqrt(11))*(r.^n).*(2*sin(w*n));
FIG2 = figure('Name','s3s6_4 : Impulse Response
(analytical)','NumberTitle','off');
stem(n,ha,'filled'), grid
    axis([0 L -.6 1.2]); title('Impulse Response')
    xlabel('n \rightarrow'), ylabel('h_a[n] \rightarrow')
```

e) Impulsantwort (simuliert) mit MATLAB grafisch darstellen

< Programmfortsetzung>

```
%% Simulation
FIG3 = figure('Name','s3s6_4 : Impulse Response
(simulated)','NumberTitle','off');
hs = impz(b,a,L+1);
    stem(0:L,hs,'filled'),grid
    axis([0 L -.6 1.2]); title('Impulse Response')
    xlabel('n \rightarrow'), ylabel('h_s[n] \rightarrow')
```


© Martin Werner, Fulda 2008

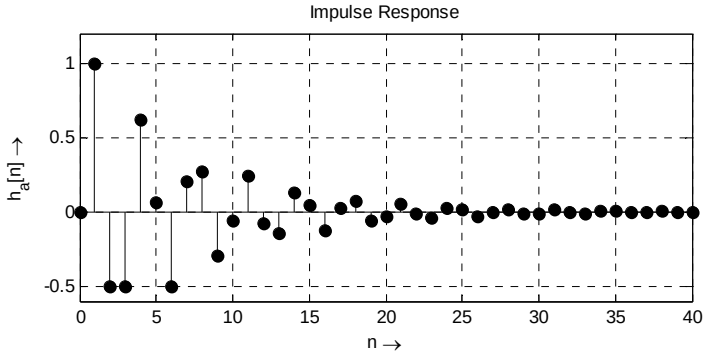


Bild 6-5 Impulsantwort (analytisch) (A6.1-7)

Lösung A6.1-8 Übertragungsfunktion, Impulsantwort und Pol-Nullstellendiagramm ☑

a) Nullstellen (endliche) $z_0 = 0$

Pole

$$z_{\infty 1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{6.30}$$

Pol-Nullstellendiagramm siehe Bild 6-6

b) Partialbruchzerlegung

$$H(z) = \left(1/\sqrt{2}\right) \cdot \left(\frac{z}{z - 1/\sqrt{2}} - \frac{z}{z + 1/\sqrt{2}} \right) \tag{6.31}$$

und inverse z-Transformation

$$h[n] = \left(1/\sqrt{2}\right) \cdot \left(\left[\frac{1}{\sqrt{2}} \right]^n - \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} \right]^n \right) \cdot u[n] = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \cdot \left(1 - (-1)^n\right) \cdot u[n] \tag{6.32}$$

Lösung mit MATLAB 💻

Siehe MATLAB-Lösung zu Aufgabe A6.1-7

c), d) und e) siehe Bild 6-6

© Martin Werner, Fulda 2008

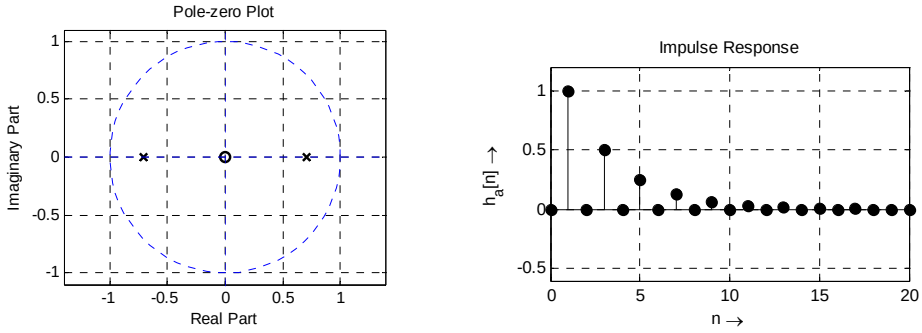


Bild 6-6 Pol-Nullstellendiagramm und Impulsantwort (MATLAB, A6.1-8)

Lösung A6.1-9 Übertragungsfunktion, Impulsantwort und Pol-Nullstellendiagramm ☑

a) Nullstellen (endliche) $z_0 = 0$

Pole $z_{\infty 1,2} = 1/2$ doppelter Pol!

Pol-Nullstellendiagramm siehe Bild 6-7

b) Korrespondenztafel ([Wer08], Tabelle 6-2)

$$H(z) = \frac{z}{z^2 - z + 0.25} = \frac{z}{\left(z - 1/2\right)^2} \quad \leftrightarrow \quad h[n] = \frac{1}{1/2} \cdot n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u[n] \tag{6.33}$$

Lösung mit MATLAB

Siehe MATLAB-Lösung zu Aufgabe A6.1-7

c), d) und e) siehe Bild 6-7

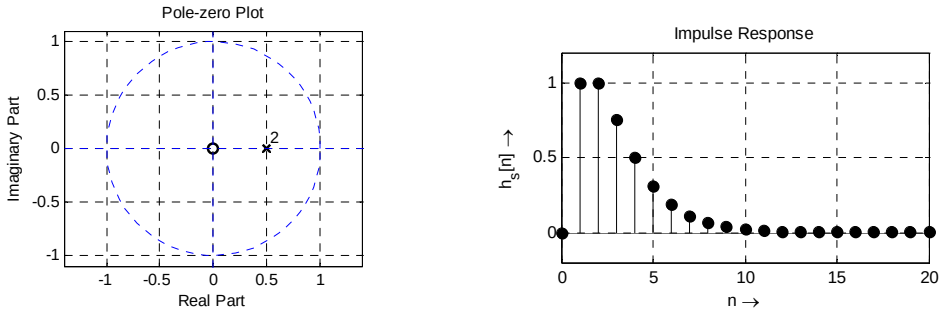


Bild 6-7 Pol-Nullstellendiagramm und Impulsantwort (MATLAB, A6.1-9)

© Martin Werner, Fulda 2008

Lösung A6.1-10 Übertragungsfunktion, Sprungantwort und Pole und Nullstellen ☑

a) Sprungantwort

Pole und Nullstellen (endliche)

$$z_{\infty 1,2} = \frac{1}{2} \pm j\frac{1}{2} \quad \text{und} \quad z_0 = 0 \tag{6.34}$$

Die Partialbruchzerlegung nach Ergänzung mit z / (z–1)

$$\begin{aligned} \frac{H(z)}{z} \cdot \frac{z}{z-1} &= \frac{z}{(z-1)\cdot\left(z^2 - z + 0{,}5\right)} = \\ &= \frac{z}{(z-1)\cdot\left(z-\frac{1}{2}-j\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{2}+j\frac{1}{2}\right)} = \\ &= \frac{2}{z-1} + \frac{-1}{z-\frac{1}{2}-j\frac{1}{2}} + \frac{-1}{z-\frac{1}{2}+j\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{6.35}$$

führt auf

$$H(z)\cdot\frac{z}{z-1} = \frac{2z}{z-1} + \frac{-z}{z-\frac{1}{2}-j\frac{1}{2}} + \frac{-z}{z-\frac{1}{2}+j\frac{1}{2}} \tag{6.36}$$

Die inverse z-Transformation ergibt die Sprungfunktion

$$\begin{aligned} s[n] &= 2\cdot u[n] + (-1)\cdot\left[\frac{1}{2}+j\frac{1}{2}\right]^n \cdot u[n] + (-1)\cdot\left[\frac{1}{2}-j\frac{1}{2}\right]^n \cdot u[n] = \\ &= 2\cdot\left[1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{8}n\right)\right]\cdot u[n] \end{aligned} \tag{6.37}$$

Lösung mit MATLAB 💻

c), d) und e) siehe Programmbeispiel und Bild 6-8

© Martin Werner, Fulda 2008

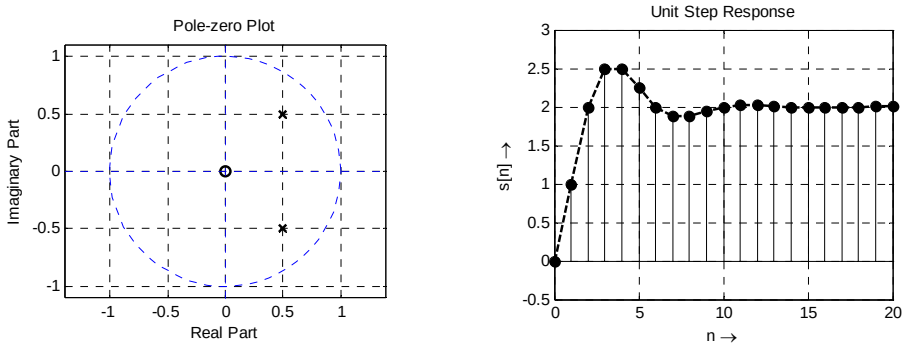


Bild 6-8 Pol-Nullstellendiagramm und Sprungantwort (MATLAB, A6.1-10)

```
% 2nd order System
% S3S6_8.m * mw * 09/12/2007
%% 2nd order System
b = [0 1 0]; a = [1 -1 .5];                % numerator and denominator
%% Poles and zeros
p = roots(a);                                                % poles
disp('Poles'), disp(p)
z = roots(b);                                                % zeros
disp('Zeros'), disp(z)
FIG1 = figure('Name','s3s6_8 : Pole-zero Plot','NumberTitle','off');
zplane(b,a),grid
    title('Pole-zero Plot')
%% Impulse response
L = 20;
h = impz(b,a,L+1);
FIG2 = figure('Name','s3s6_8 : Impulse Response','NumberTitle','off');
stem(0:L,h,'filled'),grid
    axis([0 L -.4 1.2]); title('Impulse Response')
    xlabel('n \rightarrow'), ylabel('h[n] \rightarrow')
%% Unit step response
n = 0:L;
s_a = 2*(1-(1/sqrt(2)).^n.*cos((2*pi/8)*n));              % analytical
s_s = filter(b,a,ones(1,L+1));                             % simulated
FIG3 = figure('Name','s3s6_8 : Unit Step
Response','NumberTitle','off');
stem(n,s_s,'filled'),grid
    axis([0 L -.5 3]); title('Unit Step Response')
    xlabel('n \rightarrow'), ylabel('s[n] \rightarrow')
hold on
    plot(n,s_a,'--','LineWidth',2')
hold off
```


© Martin Werner, Fulda 2008

Lösung A6.1-11 Partialbruchzerlegung mit MATLAB für ein System 3. Ordnung ☑

Lösung mit MATLAB

```
% Partial-fraction expansion, and impulse and
% step response for 3rd order system
% s3s6_9 * mw * 09/12/2007
% numerator and denominator
b = [0,.0883,.0633,0]; a = [1,-2.02,1.46,-.368];
%% Partial-fraction expansion for impulse response
[r,p,k] = residue(b,[a 0]);
fprintf('residues and poles (h)\n');
for k=1:length(r)
fprintf('r%g = %7.4f + %7.4fj   ',k,real(r(k)),imag(r(k)))
fprintf('   p%g = %7.4f + %7.4fj\n',k,real(p(k)),imag(p(k)))
end
%% Impulse response (singular poles only)
L = 30; n = 0:L;
ha = zeros(size(n));
for k=1:length(r)
    if p(k) == 0
        ha(1) = ha(1)+ r(k);
    else
        ha = ha + r(k)*p(k).^n;
    end
end
hs = impz(b,a,L+1);
fprintf('Maximum deviation max|ha-hs| = %g\n',max(abs(ha-hs')))
%% Partial-fraction expansion for step response
[r,p,k] = residue(b,[a 0]-[0 a]);
fprintf('residues and poles (s)\n')
for k=1:length(r)
    fprintf('r%g = %7.4f + %7.4fj   ',k,real(r(k)),imag(r(k)))
    fprintf('   p%g = %7.4f + %7.4fj\n',k,real(p(k)),imag(p(k)))
end
%% Step response (singular poles only)
sa = zeros(size(n));
for k=1:length(r)
    if p(k) == 0
        sa(1) = sa(1)+ r(k);
    else
        sa = sa + r(k)*p(k).^n;
    end
end
ss = filter(b,a,ones(1,L+1));
fprintf('Maximum deviation max|sa-ss| = %g\n',max(abs(sa-ss)))
%% Graphics
FIG1 = figure('Name','Impulse and step response','NumberTitle','off');
subplot(1,2,1), stem(n,ha,'filled'); grid
    axis([0 L -.1 .5]); title('Impulse Response')
    xlabel('n \rightarrow'), ylabel('h[n] \rightarrow')
subplot(1,2,2), stem(n,ss,'filled'); grid
    axis([0 L -.1 2.5]); title('Step Response')
    xlabel('n \rightarrow'), ylabel('s[n] \rightarrow')
```


© Martin Werner, Fulda 2008

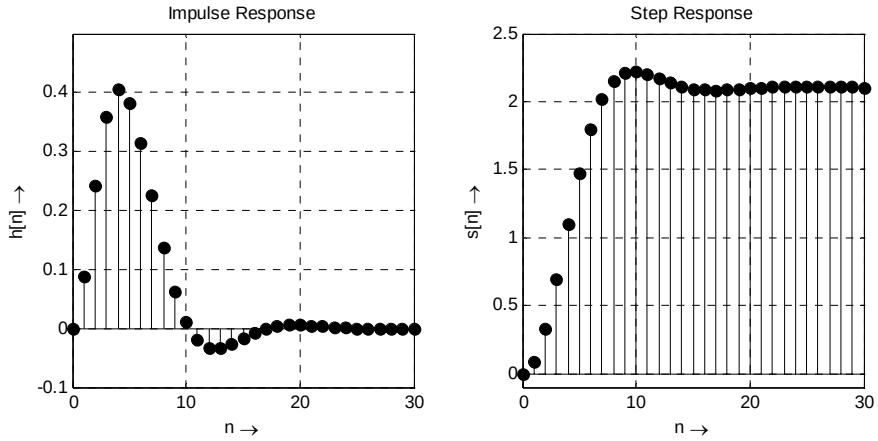


Bild 6-9 Impulsantwort und Sprungantwort des Systems 3. Ordnung (MATLAB, A6.1-11)

Lösung A6.1-12 3D-Darstellung und Höhenlinien-Darstellung des Betrags der Übertragungsfunktion ☑

Lösung mit MATLAB

z. B. mit den Zähler- und Nennerkoeffizienten

```
b = [1,1,1]
```

```
a = [1,-.4,.6]
```

siehe Bild 6-10

© Martin Werner, Fulda 2008

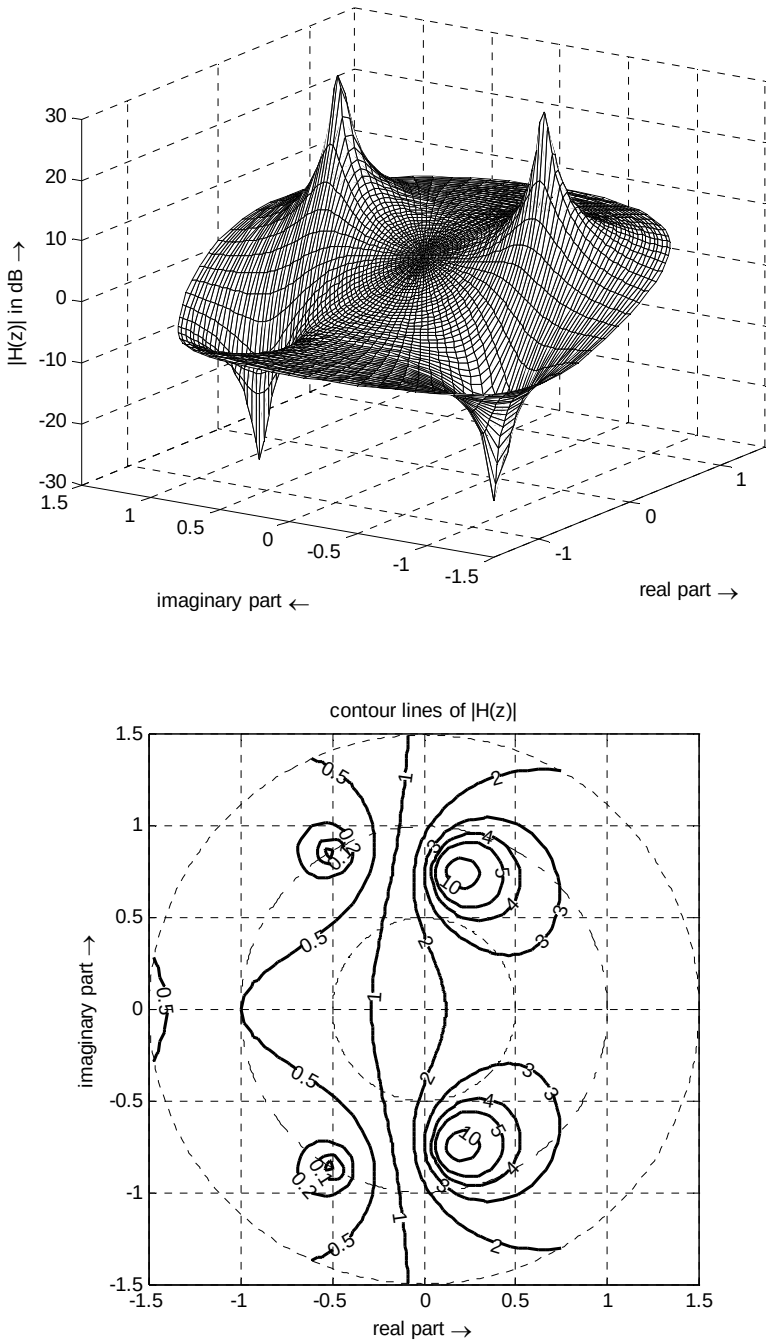


Bild 6-10 Darstellung des Betrages der Übertragungsfunktion (oben) und der zugehörigen Höhenlinien (unten) in der komplexen Ebene des Systems 2. Ordnung mit den Zähler und Nennerkoeffizienten `b = [1,1,1]` bzw. `a = [1,-.4,.6]`

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

7 Laplace-Transformation und LTI-Systeme

7.1 Aufgaben

Aufgabe A7.1-1 Laplace-Transformierte des Rechteckimpulses ✍ ★

Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte des

a) rechtsseitigen Rechteckimpulses mit dem Integral der Laplace-Transformation

b) rechtsseitigen Rechteckimpulses mit der Laplace-Transformierten der Sprungfunktion

c) zweiseitigen Rechteckimpulses

Hinweis: Siehe [Wer08], Tabelle 7-1.

Aufgabe A7.1-2 Laplace-Transformierte des Dreieckimpulses ✍ ★

Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte eines rechtsseitigen Dreieckimpulses der Dauer T und Höhe 1 mit der Faltung.

Hinweis: Siehe [Wer08], Tabelle 7-1.

Aufgabe A7.1-3 Korrespondenz für konjugiert komplexes Polpaar ✍ ★

Bei reellwertigen Systemen ist bei reellem Eingangssignal auch das Ausgangssignal reell. Hierzu ist notwendig, dass nur reelle Pole oder konjugiert komplexe Polpaare, $s_{\infty 1,2} = \sigma_\infty \pm j\omega_\infty$, in der Übertragungsfunktion auftreten. In letzterem Fall bilden die Koeffizienten der Partialbruchzerlegung ebenfalls konjugiert komplexe Paare, $B_{kl} = B_{kl}^*$.

Zeigen Sie, dass für ein einfaches konjugiert komplexes Polpaar und angenommener Kausalität des Systems die Korrespondenz gilt mit $B = B_r + jB_i$

$$\begin{aligned} \frac{B}{s-s_\infty} + \frac{B^*}{s-s_\infty^*} \quad \leftrightarrow \quad & e^{\sigma_\infty t} \cdot 2|B| \cos\left(\omega_\infty t + \arg B\right) u(t) = \\ & = e^{\sigma_\infty t} \cdot \left[2B_r \cos\left(\omega_\infty t\right) - 2B_i \sin\left(\omega_\infty t\right)\right] u(t) \end{aligned} \tag{7.1}$$

Aufgabe A7.1-4 Impulsantwort und Sprungantwort des RC-Gliedes ✍ ★

Berechnen Sie zum RC-Glied in Bild 7-1

a) die Übertragungsfunktion und daraus

b) die Impulsantwort und

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

c) die Sprungantwort.

d) Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse anhand der Resultate in [Wer08].

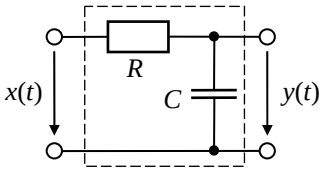


Bild 7-1 RC-Glied

Aufgabe A7.1-5 Anfangs- und Endwerttheorem ✍ ★★

In manchen Anwendungen in der Informationstechnik, z. B. bei der Untersuchung von Phasenregelkreisen, erweist sich das *Anfangswerttheorem*

$$x(0+) = \lim_{s\to\infty} sX_{\mathrm{I}}(s) \tag{7.2}$$

und das *Endwerttheorem*

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX_{\mathrm{I}}(s) \tag{7.3}$$

der einseitigen Laplace-Transformation als nützlich. Überprüfen Sie deshalb die Gültigkeit der beiden Theoreme mit dem Differenziationssatz.

Anmerkung: Als Voraussetzungen für das Anfangswerttheorem wird gefordert, dass die Laplace-Transformierte von $x(t)$ existiert und $x(t)$ keinen impulsförmigen Anteil im Nullpunkt aufweist. Für das Endwerttheorem wird verlangt, dass die Ableitung von $x(t)$ und ihre Laplace-Transformierte existieren und die Laplace-Transformierte von $x(t)$ abgesehen von einem Pol bei $s = 0$ für $\mathrm{Re}(s) \geq 0$ analytisch (differenzierbar) ist [Unb02].

Aufgabe A7.1-6 Impulsantwort und Sprungantwort eines Systems 1. Ordnung ✍ ★★

Berechnen Sie zum System in Bild 7-2

a) die Übertragungsfunktion und daraus

b) die Impulsantwort und

c) die Sprungantwort.

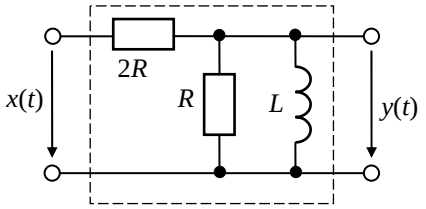


Bild 7-2 System 1. Ordnung

Wenden Sie das Anfangswerttheorem an und diskutieren Sie die Ergebnisse für

d) die Impulsantwort und

e) die Sprungantwort.

Hinweis: Siehe auch Beispiel in [Wer08], Abschnitt 5.8.

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

Aufgabe A7.1-7 Impulsantwort und Sprungantwort des Reihenschwingkreises ✍ ★★★

Berechnen Sie zum Reihenschwingkreis mit der Spannung $x(t)$ als Eingangssignal und der Spannung an der Kapazität $y(t)$ als Ausgangssignal in Bild 7-3

a) die Übertragungsfunktion und daraus

b) die Impulsantwort und

c) die Sprungantwort.

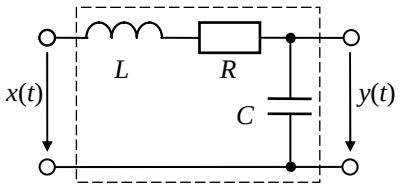


Bild 7-3 Reihenschwingkreis

Kontrollieren Sie die Ergebnisse mit dem Anfangs- (7.2) und Endwerttheorem (7.3) und physikalischer Überlegungen für

d) die Impulsantwort

e) und die Sprungantwort.

Anmerkung: Beachten Sie beim Vergleich mit Aufgabe A5.1-2, dass dort als Ausgangsgröße der Strom verwendet wird, was in einem anderen Zählerpolynom resultiert.

Aufgabe A7.1-8 System 2. Ordnung ✍

Gegeben ist das RLC-Netzwerk in Bild 7-4. Charakterisieren Sie das System, indem Sie die folgenden Aufgaben bearbeiten:

a) Geben Sie die Übertragungsfunktion in der in der Systemtheorie üblichen Form an.

b) Spezialisieren Sie für die weitere Rechnung das Ergebnis auf folgende Angaben.

$L = 1$ H, $R_L = 1\ \Omega$, $R_C = 1\ \Omega$ und $C = 1$ F

Hinweis: Rechnen Sie im Weiteren mit normierten (dimensionslosen) Größen.

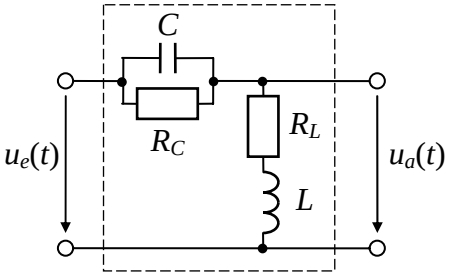


Bild 7-4 RLC-Netzwerk

c) Zeichnen Sie den Signalflussgraphen.

d) Skizzieren Sie das Pol-Nullstellendiagramm.

e) Ist das System stabil? Begründen Sie Ihre Antwort.

f) Berechnen Sie die Impulsantwort.

g) Berechnen Sie die Sprungantwort.

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

Aufgabe A7.1-9 System 2. Ordnung ✍

Gegeben ist das RLC-Netzwerk in Bild 7-5. Charakterisieren Sie das System, indem Sie die folgenden Aufgaben bearbeiten:

a) Geben Sie die Übertragungsfunktion in der in der Systemtheorie üblichen Form an.

b) Spezialisieren Sie für die weitere Rechnung das Ergebnis auf folgende Angaben.

$R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 1\ \Omega$, $C_1 = 1$ F und $C_2 = 1$ F

Hinweis: Rechnen Sie im Weiteren dimensionslos mit normierten Größen.

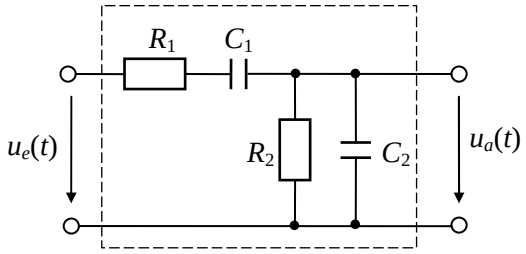


Bild 7-5 RC-Netzwerk

c) Zeichnen Sie den Signalflussgraphen.

d) Skizzieren Sie das Pol-Nullstellendiagramm.

e) Ist das System stabil? Begründen Sie Ihre Antwort.

f) Berechnen Sie die Impulsantwort.

g) Berechnen Sie die Sprungantwort.

Aufgabe A7.1-10 Geschaltetes Netzwerk ✍

In Bild 7-6 ist ein elektrisches Netzwerk mit einer Gleichspannungsquelle U_q einem Widerstand R, zwei Kapazitäten C_1 und C_2 und zwei Schaltern S_1 und S_2 zu sehen [Hsu95]. Zum Zeitpunkt $t = 0$ werden beide Schalter geschlossen. Berechnen Sie die Zweigströme $i_1(t)$ und $i_2(t)$, wenn die Kapazitäten C_1 und C_2 zum Schaltzeitpunkt mit 1 V bzw. 2 V vorgeladen sind.

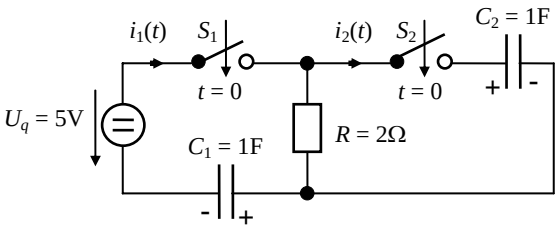


Bild 7-6 Geschaltetes Netzwerk

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

7.2 Lösungen

Lösung A7.1-1 Laplace-Transfomierte des Rechteckimpulses ☑

a) Laplace-Transformierte des rechtsseitigen Rechteckimpulses

$$\mathrm{L}\left\{\Pi_T(t-T/2)\right\} = \int_0^T e^{-st}dt = \frac{1-e^{-sT}}{s} \tag{7.4}$$

b) Mit der Darstellung des rechtsseitigen Rechteckimpulses durch die Sprungfunktion und der Verschiebungseigenschaft resultiert das zu (7.4) identische Ergebnis.

$$\mathrm{L}\left\{\Pi_T(t-T/2)\right\} = L\left\{u(t)-u(t-T)\right\} = \frac{1}{s} - \frac{e^{-sT}}{s} = \frac{1-e^{-sT}}{s} \tag{7.5}$$

c) Mit der Verschiebungseigenschaft gilt auch

$$\Pi_T(t) \quad \leftrightarrow \quad \frac{e^{sT/2}-e^{-sT/2}}{s} \tag{7.6}$$

Lösung A7.1-2 Laplace-Transfomierte des Dreieckimpulses ☑

In [Wer08], Abschnitt 3.2.1, wird gezeigt, dass der rechtsseitige Dreieckimpuls durch die Faltung zweier rechtsseitiger Rechteckimpulse halber Dauer entsteht. Aus (7.6) und der Faltungseigenschaft resultiert demzufolge

$$\frac{1}{T/2}\cdot\Pi_{T/2}(t-T/4) * \Pi_{T/2}(t-T/4) \leftrightarrow \frac{T}{2}\left(\frac{1-e^{sT/2}}{s}\right)^2 \tag{7.7}$$

Lösung A7.1-3 Korrespondenz für konjugiert komplexes Polpaar ☑

Für $x(t)$, der inversen Laplace-Transformierten zu (7.1), ergibt sich mit der Korrespondenz für einfache Pole in [Wer08], Tabelle 7-2

$$\begin{aligned} x(t) &= Be^{s_\infty t} + B^* e^{s_\infty^* t} = e^{\sigma_\infty t}\cdot\left[Be^{j\omega_\infty t} + B^* e^{-j\omega_\infty t}\right] = \\ &= e^{\sigma t}\cdot 2\,\mathrm{Re}\left\{Be^{j\omega_\infty t}\right\} = e^{\sigma t}\cdot 2|B|\cos\left(\omega_\infty t + \arg B\right) \end{aligned} \tag{7.8}$$

Oder mit den Real- und Imaginärteilen von B ausgedrückt

$$x(t) = e^{\sigma_\infty t}\cdot 2\,\mathrm{Re}\left\{Be^{j\omega_\infty t}\right\} = = e^{-\sigma t}\cdot 2\left[B_r\cos\omega_\infty t - B_i\sin\omega_\infty t\right] \tag{7.9}$$

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

Lösung A7.1-4 Impulsantwort und Sprungantwort des RC-Gliedes ☑

a) Die Übertragungsfunktion des RC-Gliedes mit der Spannung als Eingangsgröße und der Spannung an der Kapazität als Ausgangsgröße lautet entsprechend der erweiterten Spannungsteilerregel

$$H(s) = \frac{1/RC}{s + 1/RC} \tag{7.10}$$

b) Die Impulsantwort ergibt sich daraus durch inverse Laplace-Transformation, siehe [Wer08], Tabelle 7-2.

$$h(t) = \frac{1}{RC} \cdot e^{-t/RC} u(t) \quad \leftrightarrow \quad H(s) = \frac{1/RC}{s + 1/RC} \tag{7.11}$$

c) Die Sprungantwort ergibt sich durch inverse Laplace-Transformation von $H(s) / s$. Wir führen eine Partialbruchzerlegung durch

$$s(t) \quad \leftrightarrow \quad \frac{H(s)}{s} = \frac{1/RC}{s\left(s + 1/RC\right)} = \frac{1}{RC} \cdot \left(\frac{RC}{s} - \frac{RC}{s + 1/RC} \right) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/RC} \tag{7.12}$$

und erhalten

$$s(t) = \left(1 - e^{-t/RC}\right) \cdot u(t) \tag{7.13}$$

d) Die Ergebnisse stimmten mit den Resultaten in [Wer08] überein.

Lösung A7.1-5 Anfangs- und Endwerttheorem ☑

a) Anfangswerttheorem: Aus ([Wer08], 7.58), ergibt sich durch Grenzübergang

$$\lim_{s \to \infty} sX_{\mathrm{I}}(s) = \lim_{s \to \infty} \left(x(0+) + \int_0^\infty \frac{x(t)}{dt} e^{-st} dt \right) = x(0+) + \int_0^\infty \frac{x(t)}{dt} \left(\lim_{s \to \infty} e^{-st} \right) dt = x(0+) \tag{7.14}$$

b) Endwerttheorem: Es existiere die Ableitung der Funktion und die Laplace-Transformierte. Dann gilt mit dem Differentiationssatz der einseitigen Laplace-Transformation, siehe ([Wer08], 7.58),

$$\lim_{s \to 0} \int_0^\infty \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt = \lim_{s \to 0} \left(sX_{\mathrm{I}}^{+}(s) - x(0) \right) = \lim_{s \to 0} sX_{\mathrm{I}}^{+}(s) - x(0) \tag{7.15}$$

Auf der linken Seite nimmt die Exponentialfunktion für $s \to 0$ den Wert eins an. Die Integration liefert $x(t)$ an der oberen, minus $x(t)$ an der unteren Integrationsgrenze. Auf der rechten Seite kann die Konstante $x(0)$ aus dem Grenzübergang herausgenommen werden, so dass aus (7.15) das Endwerttheorem (7.3) resultiert.

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen*. 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

Lösung A7.1-6 Impulsantwort und Sprungantwort eines Systems 1. Ordnung ☑

a) Aus der erweiterten Spannungsteilerregel ergibt sich die Übertragungsfunktion mit der Hilfsgröße α, siehe auch [Wer08],

$$H(s) = \frac{\dfrac{1}{1/R + 1/sL}}{2R + \dfrac{1}{1/R + 1/sL}} = \frac{s/3}{s + 2R/3L} = \frac{1}{3} \cdot \frac{s}{s+\alpha} \quad \text{mit } \alpha = \frac{2R}{3L} \tag{7.16}$$

b) Impulsantwort mit Hilfe der Differenziationseigenschaft

$$h(t) = \frac{1}{3} \cdot \frac{d}{dt}\left(e^{-\alpha t} u(t)\right) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{e^{-\alpha t}}{-\alpha} u(t) + e^{-\alpha t} \delta(t) \right) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{e^{-\alpha t}}{-\alpha} u(t) + \delta(t) \right) \tag{7.17}$$

Anmerkung: Durch den Impuls wird die Kapazität sofort geladen. Für $t > 0$ beobachtet man dann den Spannungsverlauf des Entladevorgangs.

c) Sprungantwort

$$s(t) = \frac{1}{3} \cdot e^{-\alpha t}\, u(t) \tag{7.18}$$

d) Anfangswerttheorem für die Impulsantwort

$$h(0+) = \lim_{s \to \infty} sH(s) = \frac{1}{3} \lim_{s \to \infty} \frac{s^2}{s+\alpha} \to \infty \tag{7.19}$$

Die Impulsantwort ist zum Einschaltzeitpunkt „nicht endlich“, da sie einen Impulsanteil aufweist.

e) Anfangswerttheorem für die Sprungantwort

$$s(0+) = \lim_{s \to \infty} H(s) = \frac{1}{3} \lim_{s \to \infty} \frac{s}{s+\alpha} = \frac{1}{3} \tag{7.20}$$

Die Sprungantwort ist zum Einschaltzeitpunkt gleich einem Drittel des Spannungssprunges der Quelle, da die Induktivität im Schaltzeitpunkt wie ein Leerlauf wirkt.

Lösung A7.1-7 Impulsantwort und Sprungantwort des Reihenschwingkreises ☑

a) Die Übertragungsfunktion des Reihenschwingkreises mit der Spannung als Eingangsgröße und der Spannung an der Kapazität als Ausgangsgröße lautet gemäß der erweiterten Spannungsteilerregel

$$H(s) = \frac{1/sC}{R + sL + 1/sC} = \frac{1/LC}{s^2 + s\,R/L + 1/LC} = \frac{1/LC}{(s - s_{\infty 1}) \cdot (s - s_{\infty 2})} \tag{7.21}$$

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

mit den beiden Polen

$$s_{\infty 1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \tag{7.22}$$

b) Die Impulsantwort ergibt sich aus (7.21) durch inverse Laplace-Transformation.

- Hierzu führt man zunächst für den Fall verschiedener Pole, $s_{\infty 1} \neq s_{\infty 2}$, eine Partialbruchzerlegung durch.

$$H(s) = \frac{1}{LC}\left(\frac{\frac{1}{s_{\infty 1} - s_{\infty 2}}}{s - s_{\infty 1}} + \frac{\frac{1}{s_{\infty 2} - s_{\infty 1}}}{s - s_{\infty 2}}\right) = \frac{1}{LC\left(s_{\infty 1} - s_{\infty 2}\right)} \cdot \left(\frac{1}{s - s_{\infty 1}} - \frac{1}{s - s_{\infty 2}}\right) \tag{7.23}$$

Die inverse Laplace-Transformation liefert nach ([Wer08], Tabelle 7-2) die Impulsantwort

$$h(t) = \frac{1}{LC\left(s_{\infty 1} - s_{\infty 2}\right)} \cdot \left(e^{s_{\infty 1} t} - e^{s_{\infty 2} t}\right) u(t) \quad \text{für} \quad s_{\infty 1} \neq s_{\infty 2} \tag{7.24}$$

- Im Falle des stark gedämpften Reihenschwingkreises spezialisiert sich die letzte Gleichung zu

$$h(t) = \frac{1}{LC\left(\sigma_{\infty 1} - \sigma_{\infty 2}\right)} \cdot \left(e^{\sigma_{\infty 1} t} - e^{\sigma_{\infty 2} t}\right) u(t) \quad \text{für } s_{\infty 1} = \sigma_{\infty 1} \neq s_{\infty 2} = \sigma_{\infty 2} \tag{7.25}$$

- Und im Falle des schwach gedämpften Reihenschwingkreises mit konjugiert komplexem Polpaar erhält man

$$h(t) = \frac{1}{\omega_\infty LC} \cdot e^{\sigma_\infty t} \cdot \sin\left(\omega_\infty t\right) u(t) \quad \text{für } s_{\infty 1,2} = \sigma_\infty \pm j\omega_\infty \tag{7.26}$$

- Es fehlt noch der aperiodische Grenzfall, $s_{\infty 1} = s_{\infty 2}$. Die Übertragungsfunktion

$$H(s) = \frac{1}{LC} \cdot \frac{1}{\left(s - s_\infty\right)^2} \tag{7.27}$$

kann in diesem Fall mit ([Wer08], Tabelle 7-2) direkt transformiert werden.

$$h(t) = \frac{1}{LC} \cdot t \cdot e^{\sigma_\infty t}\, u(t) \quad \text{für } s_\infty = \sigma_\infty \tag{7.28}$$

c) Die Sprungantwort ergibt sich durch inverse Laplace-Transformation nach [Wer08]

$$s(t) \quad \leftrightarrow \quad \frac{H(s)}{s} = \frac{1/LC}{s\left(s - s_{\infty 1}\right)\left(s - s_{\infty 2}\right)} \tag{7.29}$$

© Martin Werner, Fulda 2008

- Man unterscheidet wieder die drei Fälle, wie bei der Berechnung der Impulsantwort. Für den Fall verschiedener Pole, $s_{\infty 1} \neq s_{\infty 2} \neq 0$, ergibt sich zunächst die Partialbruchzerlegung

$$s^{-1}H(s) = \frac{1}{LC} \cdot \left[\frac{\left[s_{\infty 1}\left(s_{\infty 1} - s_{\infty 2} \right) \right]^{-1}}{s - s_{\infty 1}} + \frac{\left[s_{\infty 2}\left(s_{\infty 2} - s_{\infty 1} \right) \right]^{-1}}{s - s_{\infty 2}} + \frac{\left[s_{\infty 1} s_{\infty 2} \right]^{-1}}{s} \right] \tag{7.30}$$

und daraus die Sprungwort für den stark gedämpften Reihenschwingkreis

$$s(t) = \frac{1}{LC} \cdot \left[\frac{e^{\sigma_{\infty 1} t}}{\sigma_{\infty 1}\left(\sigma_{\infty 1} - \sigma_{\infty 2} \right)} + \frac{e^{\sigma_{\infty 2} t}}{\sigma_{\infty 2}\left(\sigma_{\infty 2} - \sigma_{\infty 1} \right)} + \frac{1}{\sigma_{\infty 1}\sigma_{\infty 2}} \right] u(t) \tag{7.31}$$

- Im Falle des schwach gedämpften Reihenschwingkreises liegt ein konjugiert komplexes Polpaar vor.

$$s_{\infty 1,2} = \sigma_\infty \pm j\omega_\infty = \rho_\infty \cdot e^{\pm j\varphi_\infty} \tag{7.32}$$

Die Beträge und Phasen der Pole in (7.31) entsprechend eingesetzt liefert zunächst

$$s(t) = \frac{1}{LC\rho_\infty^2} \cdot \left(e^{\sigma_\infty t} \left[\frac{e^{j\omega_\infty t}}{e^{j\varphi_\infty}\left(e^{j\varphi_\infty} - e^{-j\varphi_\infty} \right)} + \frac{e^{-j\omega_\infty t}}{e^{-j\varphi_\infty}\left(e^{-j\varphi_\infty} - e^{+j\varphi_\infty} \right)} \right] + \frac{1}{e^{j\varphi_\infty} e^{-j\varphi_\infty}} \right) \cdot u(t) \tag{7.33}$$

Die Sprungantwort lässt sich noch etwas vereinfachen.

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{1}{LC\rho_\infty^2} \cdot \left(\frac{e^{\sigma_\infty t}}{2j\sin\varphi} \left[e^{j(\omega_\infty t - \varphi_\infty)} - e^{-j(\omega_\infty t - \varphi_\infty)} \right] + 1 \right) u(t) = \\ &= \frac{1}{LC\rho_\infty^2} \cdot \left(e^{\sigma_\infty t} \cdot \frac{\sin\left(\omega_\infty t - \varphi_\infty \right)}{\sin\varphi_\infty} + 1 \right) u(t) \end{aligned} \tag{7.34}$$

- Im aperiodischen Grenzfall, $s_{\infty 1} = s_{\infty 2}$, ist die Laplace-Transformierte der Sprungantwort

$$\frac{1}{s} \cdot H(s) = \frac{1}{LC} \cdot \frac{1}{s\left(s - s_\infty \right)^2} \tag{7.35}$$

Die Partialbruchzerlegung führt auf

$$\frac{1}{s} \cdot H(s) = \frac{1}{LC} \cdot \left(\frac{-1/s_\infty^2}{s - s_\infty} + \frac{1/s_\infty}{\left(s - s_\infty \right)^2} + \frac{1/s_\infty^2}{s} \right) \tag{7.36}$$

so dass sich nach ([Wer08], Tabelle 7-2) für die Sprungantwort ergibt

$$s(t) = \frac{1}{LC} \cdot \left(-\frac{e^{\sigma_\infty t}}{\sigma_\infty^2} + \frac{t \cdot e^{\sigma_\infty t}}{\sigma_\infty} + \frac{1}{\sigma_\infty^2} \right) u(t) \quad \text{für } s_\infty = \sigma_\infty \tag{7.37}$$

© Martin Werner, Fulda 2008

d) Aus dem Anfangswerttheorem (7.2) folgt für die Impulsantwort zum Einschaltzeitpunkt

$$h(0+) = \lim_{s\to\infty} sH(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s/LC}{s^2 + s\,R/L + 1/LC} = 0 \tag{7.38}$$

Einsetzen von $t = 0$ in die Impulsantworten (7.25), (7.26) und (7.28) bestätigt die Aussage.

Wegen der Reihenschaltung der Kapazität mit einer Induktivität springt bei impulsförmiger Spannungserregung nicht die Spannung an der Kapazität, sondern der Strom in der Induktivität.

Aus dem Anfangswerttheorem schließen wir, dass $h(0+) = 0$ für alle Systeme gilt, deren Übertragungsfunktionen Nennergrade besitzen, die um mindestens 2 größer sind als die Zählergrade.

Aus dem Endwerttheorem (7.3) resultiert der Endwert der Impulsantwort für t gegen unendlich.

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \lim_{s\to 0} sH(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s/LC}{s^2 + s\,R/L + 1/LC} = 0 \tag{7.39}$$

Dies bestätigen auch die berechneten Impulsantworten (7.25), (7.26) und (7.28). Im gedämpften Reihenschwingkreis wird die durch die Impulserregung zugeführte elektrische Energie am ohmschen Widerstand vollständig in Wärme umgesetzt.

e) Aus dem Anfangswerttheorem (7.2) ergibt sich für die Sprungantwort zum Einschaltzeitpunkt

$$s(0+) = \lim_{s\to\infty} H(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{1/LC}{s^2 + s\,R/L + 1/LC} = 0 \tag{7.40}$$

Einsetzen von $t = 0$ in die Sprungantworten (7.31), (7.34) und (7.37) bestätigt das Ergebnis.

Da die Impulsantwort für $t = 0$ null ist, muss ihr Integral, die Sprungantwort, für $t = 0$ ebenfalls null sein.

Aus dem Anfangswerttheorem schließen wir, dass $s(0+) = 0$ für alle Systeme gilt, deren Nennergrade größer sind als die Zählergrade.

Aus dem Endwerttheorem (7.3) resultiert der Endwert der Sprungantwort für t gegen unendlich.

$$\lim_{t\to\infty} s(t) = \lim_{s\to 0} H(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{1/LC}{s^2 + s\,R/L + 1/LC} = 1 \tag{7.41}$$

Dies bestätigen auch die berechneten Sprungantworten.

Die Sprungantwort entspricht dem Verlauf der Spannung an der Induktivität bei Erregung mit einer geschalteten Gleichspannungsquelle. Für t genügend groß wird der stationäre Zustand angenommen.

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen*. 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

Lösung A7.1-8 System 2. Ordnung ☑

a) Übertragungsfunktion mit erweiterter Spannungsteilerregel

$$H(s)=\frac{R_L+sL}{\dfrac{1}{1/R_C+sC}+R_L+sL}=\frac{s^2+s\cdot\dfrac{L+R_CR_LC}{R_CLC}+\dfrac{R_L}{R_CLC}}{s^2+s\cdot\dfrac{L+R_CR_LC}{R_CLC}+\dfrac{R_C+R_L}{R_CLC}} \tag{7.42}$$

b) mit den gegebenen normierten Größen

$$H(s)=\frac{s^2+s\cdot 2+1}{s^2+s\cdot 2+2} \tag{7.43}$$

c) Signalflussgraph

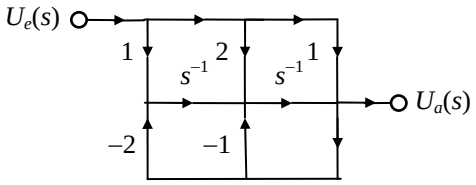


Bild 7-7 Signalflussgraph im Bildbereich des Systems 2. Ordnung mit normierten Größen

d) Pol-Nullstellendiagramm

– Nullstellen $s_0=-1$ (doppelte)

– Pole $s_{\infty 1,2}=-1\pm j$ (konjugiert komplex)

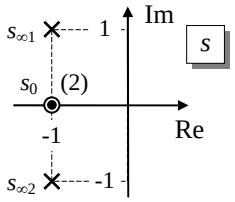


Bild 7-8 Pol-Nullstellendiagramm des Systems 2. Ordnung

e) Das System ist stabil, da $\mathrm{Re}(s_{\infty 1,2})<0$

- alle Pole in der linken *s*-Halbebene

f) Impulsantwort, siehe auch [Wer08]

Da der Zählergrad gleich dem Nennergrad ist, zerlegen wir zuerst die Übertragungsfunktion so dass wir einen ganzzahligen und einen echt gebrochenen Anteil erhalten. Für Letzteren führen wir eine Partialbruchzerlegung durch.

$$\begin{aligned}H(s)&=\frac{s^2+2s+1+1-1}{s^2+2s+2}=1-\frac{1}{s^2+2s+2}=1-\frac{1}{(s+1-j)\cdot(s+1+j)}=\\&=1+\frac{j/2}{(s+1-j)}+\frac{-j/2}{(s+1+j)}\end{aligned} \tag{7.44}$$

Die inverse Laplace-Transformation ergibt

$$h(t)=\delta(t)-2e^{\sigma_\infty t}\cdot\frac{1}{2}\sin\left(\omega_\infty t\right)u(t)=\delta(t)-\frac{1}{2}e^{-t}\sin\left(t\right)u(t) \tag{7.45}$$

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

g) Sprungantwort, siehe auch [Wer08]

$$\frac{H(s)}{s} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s(s+1-j)(s+1+j)} = \frac{1}{s} - \frac{1/2}{s} + \frac{(1-j)/4}{(s+1-j)} - \frac{(1+j)/4}{(s+1+j)} \tag{7.46}$$

Die inverse Laplace-Transformation ergibt

$$s(t) = \frac{1}{2}\left[1 + e^{-t}\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right]u(t) = \frac{1}{2}\left[1 + e^{-t}\sin(t)\right]u(t) \tag{7.47}$$

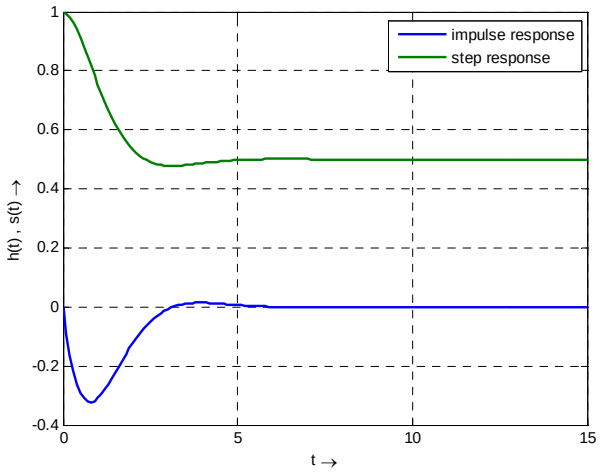


Bild 7-9 Impulsantwort ohne Impulsanteil $\delta(t)$ und Sprungantwort des Systems 2. Ordnung

Lösung A7.1-9 System 2. Ordnung ☑

a) Übertragungsfunktion mit erweiterter Spannungsteilerregel

$$H(s) = \frac{\dfrac{1}{\dfrac{1}{R_2} + sC_2}}{R_1 + \dfrac{1}{sC_1} + \dfrac{1}{\dfrac{1}{R_2} + sC_2}} = \frac{s \cdot \dfrac{1}{R_1 C_2}}{s^2 + s \cdot \left(\dfrac{1}{R_1 C_1} + \dfrac{1}{R_2 C_2} + \dfrac{1}{R_1 C_2}\right) + \dfrac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}} \tag{7.48}$$

b) mit den gegebenen normierten Größen

$$H(s) = \frac{s}{s^2 + s \cdot 3 + 1} \tag{7.49}$$

© Martin Werner, Fulda 2008

c) Signalflussgraph

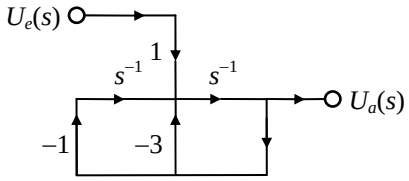


Bild 7-10 Signalflussgraph im Bildbereich des Systems 2. Ordnung mit normierten Größen

d) Pol-Nullstellendiagramm

– Nullstellen $s_0 = 0$

– Pole $s_{\infty 1} = -0{,}3820$, $s_{\infty 2} = -2{,}6180$

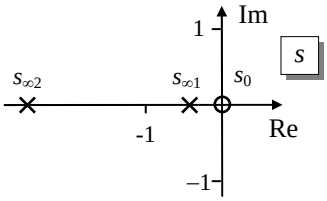


Bild 7-11 Pol-Nullstellendiagramm des Systems 2. Ordnung

e) Das System ist stabil, da $\mathrm{Re}(s_{\infty 1,2}) < 0$

– alle Pole in der linken *s*-Halbebene

f) Impulsantwort, siehe auch [Wer08]

– Partialbruchzerlegung (gerundet)

$$H(s) = \frac{s}{s^2 + 3s + 1} = \frac{s}{(s - s_{\infty 1}) \cdot (s - s_{\infty 2})} = \frac{1{,}171}{s - s_{\infty 1}} + \frac{-0{,}171}{s - s_{\infty 2}} \tag{7.50}$$

Die inverse Laplace-Transformation ergibt mit ([Wer08], Tabelle 7-2)

$$h(t) = \left(1{,}171 \cdot e^{-0{,}382 \cdot t} - 0{,}171 \cdot e^{-2{,}618 \cdot t}\right) \cdot u(t) \tag{7.51}$$

g) Sprungantwort, siehe auch [Wer08]

$$\frac{H(s)}{s} = \frac{1}{s^2 + 3s + 1} = \frac{1}{(s - s_{\infty 1}) \cdot (s - s_{\infty 2})} = \frac{0{,}447}{s - s_{\infty 1}} + \frac{-0{,}447}{s - s_{\infty 2}} \tag{7.52}$$

Die inverse Laplace-Transformation ergibt

$$s(t) = 0{,}447 \cdot \left(e^{-0{,}382 \cdot t} - e^{-2{,}618 \cdot t}\right) \cdot u(t) \tag{7.53}$$

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

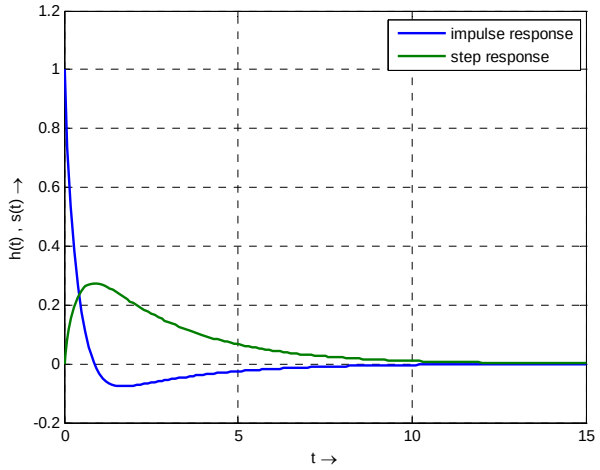


Bild 7-12 Impulsantwort und Sprungantwort des Systems 2. Ordnung

Lösung A7.1-10 Geschaltetes Netzwerk ☑

Schritt 1: Ersatzschaltbild für die Laplace-Transformierten nach dem Schließen der Schalter.

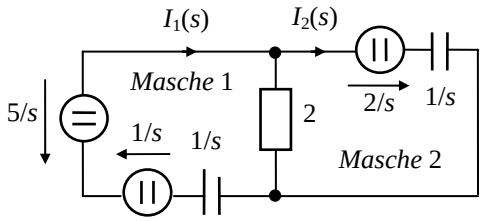


Bild 7-13 Ersatzschaltbild für die Laplace-Transformierten (normierte Größen) des geschalteten Netzwerks in Bild 7-6

Aus dem Schaltbild Bild 7-6 folgt mit den normierten Ersatzelementen aus [Wer08], Tabelle 7-4, das in Bild 7-13 rechts angegebene Ersatzschaltbild.

Schritt 2: Berechnung der Laplace-Transformierten der Ströme mit der Maschenregel

Masche 1
$$\left(2+\frac{1}{s}\right)I_1(s)-2I_2(s)+\frac{1}{s}-\frac{5}{s}=0 \tag{7.54}$$

Masche 2
$$-2I_1(s)+\left(2+\frac{1}{s}\right)I_2(s)+\frac{2}{s}=0 \tag{7.55}$$

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen*. 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

Auflösen der Gleichungen nach $I_1(s)$ bzw. $I_2(s)$ liefert

$$I_1(s) = \frac{s+1}{s+1/4} = 1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{s+1/4} \quad \text{und} \quad I_2(s) = \frac{s-1/2}{s+1/4} = 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{s+1/4} \tag{7.56}$$

Schritt 3: Inverse Laplace-Transformation ([Wer08], Tabelle 7-2)

$$\frac{i_1(t)}{\mathrm{A}} = \delta(t) + \frac{3}{4} \cdot e^{-t/4}\, u(t) \quad \text{und} \quad \frac{i_2(t)}{\mathrm{A}} = \delta(t) - \frac{3}{4} \cdot e^{-t/4}\, u(t) \tag{7.57}$$

7.3 Übungen mit MATLAB

Für gebrochen rationale Übertragungsfunktionen höherer Ordnung steht mit der inversen Laplace-Transformation mit der Partialbruchzerlegung ein Rechenverfahren für die Impulsantworten und die Sprungantworten zur Verfügung. Die praktische Durchführung kann jedoch zeitaufwändig sein. Hier kann der Einsatz von Programmen wie MATLAB die Arbeit erleichtern.

MATLAB-Übung M7-1 Partialbruchzerlegung

Die Partialbruchzerlegung von echt rationalen Funktionen unterstützt MATLAB durch den Befehl „`residue`“. Wie der Befehl anzuwenden ist, machen wir uns an einem Beispiel klar, siehe Programmbeispiel 7-1. Als rationale Funktion wählen wir die normierte Übertragungsfunktion für das T-Glied in [Wer08], Abschnitt 7.4.4.

Wir erhalten die Residuen `r` zu den jeweiligen Polen `p`. Der Vektor `k` ist leer, da der Zählergrad kleiner als der Nennergrad ist, siehe MATLAB-Help-Kommando `help residue`.

Programmbeispiel 7-1 Partialbruchzerlegung

```
% Partial-fraction expansion
% s3s7_1.m * mw * 09/14/2007
b = [1]; a = [1,2,2,1];                    % numerator and denominator
[r,p,k]= residue(b,a)
[c,d]  = residue(r,p,k)
```

Bildschirmausgaben

```
>>
r =  1.0000
    -0.5000 - 0.2887i
    -0.5000 + 0.2887i

p = -1.0000
    -0.5000 + 0.8660i
    -0.5000 - 0.8660i

k = []
```


© Martin Werner, Fulda 2008

```
c =      0    0.0000    1.0000

d = 1.0000    2.0000    2.0000    1.0000
```

MATLAB-Übung M7-2 Impulsantwort

a) Schreiben Sie ein MATLAB-Programm, dass für eine gegebene rationale Übertragungsfunktion eines reellwertigen Systems mit nur einfachen Polen die Impulsantwort grafisch darstellt.

b) Erweitern Sie das Programm so, dass auch die Sprungantworten dargestellt werden.

Programmbeispiel 7-2 Impulsantwort und Sprungantwort für Systeme mit einfachen Polen

```
% Partial-fraction expansion and impulse and step response
% for rational transfer function of real-valued system
% with single poles
% s3s7_2.m * mw * 09/14/2007
b = [1]; a = [1,2,2,1];         % numerator and denominator (3rd order)
t = 0:.1:15;
%% Impulse response
[r,p,k] = residue(b,a)                    % partial fraction expansion
h = zeros(size(t));
for k=1:length(r)
    h = h + r(k)*exp(p(k)*t);
end
%% Step response
[r,p,k]=residue(b,[a 0])                            % multiply a with s
s = zeros(size(t));
for k=1:length(r)
    s = s + r(k)*exp(p(k)*t);
end
%% Graphics
figure('Name',['Impulse response : # of poles',...
  num2str(length(r))],'NumberTitle','off');
plot(t,h,t,s),grid
xlabel('t \rightarrow'), ylabel('h(t) , s(t) \rightarrow')
legend('impulse response','step response')
```


© Martin Werner, Fulda 2008

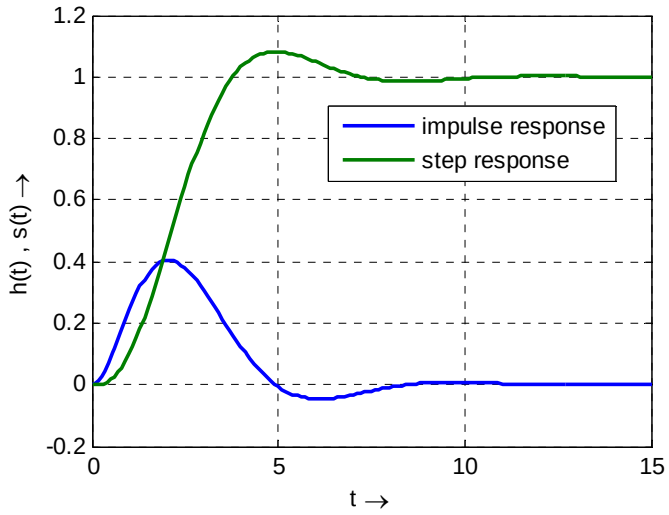


Bild 7-14 Impulsantwort und Sprungantwort des Systems 3. Ordnung ([Wer08], Abschnitt 7.4.4)

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

8 Fourier-Transformation für zeitkontinuierliche Signale

8.1 Aufgaben

Aufgabe A8.1-1 Frequenzgang und Dämpfung eines Systems 1. Ordnung ✍ ★

Berechnen Sie zum System in Bild 8-1

a) den Frequenzgang

b) und den Frequenzgang der Dämpfung in dB.

c) Charakterisieren Sie den Frequenzgang bzgl. des Übertragungsverhaltens des Systems.

d) Bestimmen Sie die 3dB-Grenzfrequenz.

e) Welche Rolle spielt das Verhältnis $2R$ / $3L$ für die Dimensionierung des Systems?

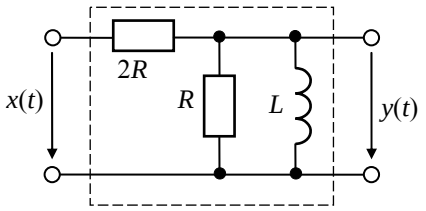


Bild 8-1 System 1. Ordnung

f) Dimensionieren Sie die Induktivität so, dass mit $R = 100\ \Omega$ die 3dB-Grenzfrequenz $f_{3dB} = 10$ kHz beträgt.

Hinweis: Siehe Beispiel in [Wer08], Abschnitt 5.8.1 und Aufgabe A7.1-6

Übung mit MATLAB 💻

g) Stellen Sie den Betrag des Frequenzgangs, den Frequenzgang der Dämpfung und der Phase mit MATLAB grafisch dar.

Hinweis: Führen Sie eine geeignete Betrags- , Frequenz- und Phasennormierung durch.

h) In der Nachrichtentechnik ist es üblich, nicht nur den Betrag der Frequenzganges sondern auch die Frequenz in logarithmischer Einteilung darzustellen. Wiederholen Sie die Aufgabe in (f), wobei Sie die MATLAB-Grafikbefehle `semilogx` und `loglog` verwenden. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Achsenskalierung beim Befehl `loglog` zu den Angaben der Dämpfung in dB?

Hinweis: Vergleiche [Wer08], Bild 8-19.

Aufgabe A8.1-2 Frequenzgang des Reihenschwingkreises ✍ ★

Gegeben ist der Reihenschwingkreis mit Spannung $x(t)$ als Eingangssignal und der Spannung an der Kapazität $y(t)$ als Ausgangssignal in Bild 8-2.

a) Berechnen Sie den Frequenzgang.

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

Hinweis: Siehe Aufgabe A7.1-7

b) Es stehen folgende (ideale) Bauelemente zur Verfügung: $R = 10\ \Omega$, $L = 470\ \mu H$ und $C = 10$ nF. Welcher Fall liegt vor? Berechnen Sie die Resonanzfrequenz ω_r und die Dämpfungskonstante α.

c) Berechnen Sie die Pole des Systems.

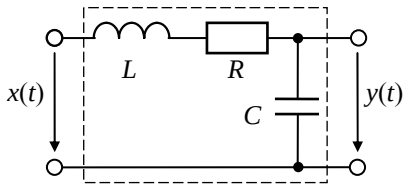


Bild 8-2 Reihenschwingkreis

Übung mit MATLAB

d) Stellen Sie den Betrag des Frequenzganges mit MATLAB grafisch dar.

Hinweis: Wählen Sie den Bereich der Kreisfrequenzen von 100 kHz bis 1 MHz.

e) Um den Einfluss des Widerstands R sichtbar zu machen, stellen Sie den Betrag des Frequenzgangs als Kurvenschar mit R als Parameter dar. Wählen Sie $R = 5$, 10 und 20 Ω

Aufgabe A8.1-3 Frequenzgang und Dämpfung eines Systems 2. Ordnung ✍ ★

Gegeben ist das RLC-Netzwerk in Bild 8-3.

a) Schätzen Sie das Verhalten des Frequenzgangs für niedrige und hohe Frequenzen ab.

b) In welchem Zusammenhang könnte das System im Vergleich mit dem Serienschwingkreis stehen?

Hinweis: Parasitäre Effekte.

c) Geben Sie den Frequenzgang allgemein an.

Hinweis: Siehe Aufgabe A7.1-8

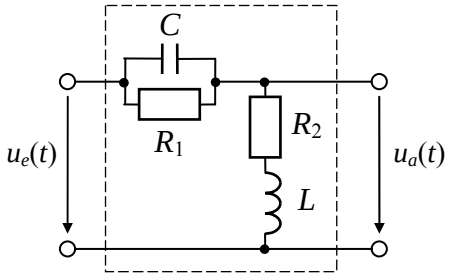


Bild 8-3 RLC-Netzwerk

Übung mit MATLAB

d) Stellen Sie den Betrag des Frequenzgangs und den Frequenzgang der Dämpfung mit MATLAB grafisch dar.

Hinweis: $R_1 = 1\ M\Omega$, $R_2 = 100\ \Omega$, $L = 470\ \mu H$ und $C = 10$ nF

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

Aufgabe A8.1-4 Frequenzgang und Dämpfung eines Systems 2. Ordnung ✍ ★

Gegeben ist das RC-Netzwerk in Bild 8-4.

a) Schätzen Sie das Verhalten des Frequenzgangs für niedrige und hohe Frequenzen ab. Um welche Art von Frequenzgang handelt es sich?

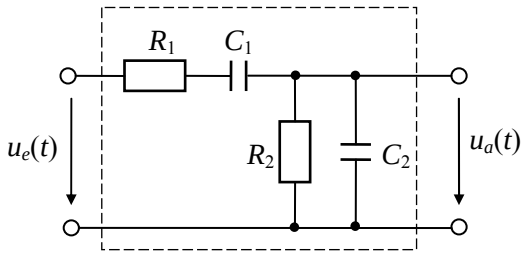


Bild 8-4 RC-Netzwerk

b) Berechnen Sie den Frequenzgang allgemein.

Hinweis: Siehe Aufgabe A7.1-9

c) Vereinfachen Sie den Frequenzgang für den Fall einer symmetrischen Beschaltung $R = R_1 = R_2$ und $C = C_1 = C_2$.

d) Schätzen Sie für eine symmetrische Beschaltung die Kreisfrequenz, bei der der Betragsfrequenzgang maximal wird. Geben Sie den zugehörigen Maximalwert an.

Hinweis: Keine lange Rechnung; Überprüfung erfolgt anhand einer MATLAB-Grafik.

Übung mit MATLAB 💻

e) Stellen Sie den Betrag des Frequenzgangs mit MATLAB grafisch dar. Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse aus (d).

Hinweis: Symmetrische Schaltung $R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = 100\ \Omega$, $C_1 = 1\ \mu F$ und $C_2 = 1\ \mu F$

Aufgabe A8.1-5 Universalfilter ✍ ★★

In Bild 8-5 ist das Blockdiagramm eines sogenannten Universalfilters gegeben. Das Filter besitzt 3 Ausgänge. Die Parametrisierung geschieht durch die beiden (Zeit-)Konstanten T_1 und T_2.

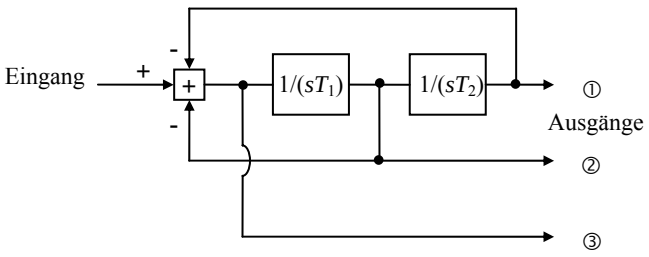


Bild 8-5 Blockdiagramm des Universalfilters nach ([KSW95], Abb. 7.139)

a) Um welche Art von System handelt es sich prinzipiell?

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

b) Zeichen Sie zum System den Signalflussgraphen im Bildbereich der Laplace-Transformation.

c) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion zum Ausgang ①.

d) Bestimmen Sie den Frequenzgang der Dämpfung zu (c). Welche Art von Frequenzgang liegt vor?

e) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion zum Ausgang ②.

f) Bestimmen Sie den Frequenzgang der Dämpfung zu (e). Welche Art von Frequenzgang liegt vor?

g) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion zum Ausgang ③.

h) Bestimmen Sie den Frequenzgang der Dämpfung zu (g). Welche Art von Frequenzgang liegt vor?

Übung mit MATLAB

i) Stellen Sie mit MATLAB die Frequenzgänge des Betrages und der Dämpfungen für die drei Ausgänge dar. Wählen Sie dazu die Parameter $T_1 = 10^{-4}$ und $T_2 = 10^{-6}$.

k) Wiederholen Sie (i) mit den Parametern $T_1 = 10^{-4}$ und $T_2 = 10^{-3}$. Diskutieren Sie die Ergebnisse

8.2 Lösungen

Lösung A8.1-1 Frequenzgang und Dämpfung eines Systems 1. Ordnung

a) Mit der Übertragungsfunktion aus A7.1-6

$$H(s) = \frac{1}{3} \cdot \frac{s}{s+\alpha} \quad \text{mit } \alpha = \frac{2R}{3L} \tag{8.1}$$

folgt der Frequenzgang

$$H(j\omega) = \frac{1}{3} \cdot \frac{j\omega}{j\omega+\alpha} \quad \text{mit } \alpha = \frac{2R}{3L} \tag{8.2}$$

b) Der Frequenzgang der Dämpfung in dB ist

$$\frac{a_{dB}(\omega)}{dB} = -20 \cdot \lg\left|\frac{1}{3} \cdot \frac{j\omega}{j\omega+\alpha}\right| = -10 \cdot \lg\left(\frac{\omega^2}{\omega^2+\alpha^2}\right) + 20 \cdot \lg 3 \tag{8.3}$$

Also

$$a_{dB}(\omega) = 9{,}54\ \text{dB} - 10 \cdot \lg\left(\frac{\omega^2}{\omega^2+\alpha^2}\right) \text{dB} \tag{8.4}$$

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

c) Betrachtung der Grenzen

$$\lim_{\omega \to 0} \frac{a_{dB}(\omega)}{\text{dB}} = \infty \quad ; \quad \lim_{\omega \to \infty} \frac{a_{dB}(\omega)}{\text{dB}} = 9{,}54 \tag{8.5}$$

Das System zeigt die Eigenschafen eines Hochpasses: Die Signalkomponenten mit niedrigen Frequenzen werden stark gedämpft.

d) Der Betragsfrequenzgang ist monoton steigend. Die 3dB-Grenzkreisfrequenz ist $\omega_{3\text{dB}} = \alpha$.

e) Der Parameter α legt die 3dB-Grenzfrequenz fest.

f) Ist $R = 100\ \Omega$ und soll die 3dB-Grenzfrequenz $f_{3\text{dB}} = 10$ kHz sein, so ist die Induktivität zu wählen

$$L = \frac{2R}{3\alpha} = \frac{2 \cdot 100\ \Omega}{3 \cdot 2\pi \cdot 10\ \text{kHz}} \approx 110\ \text{mH} \tag{8.6}$$

Lösung mit MATLAB

g) Normierte Darstellung

$$H_n(j\omega_n) = \frac{j\omega_n}{j\omega_n + 1} \quad \text{mit } \omega_n = \frac{\omega}{\alpha} \text{ und } \alpha = \frac{2R}{3L} \tag{8.7}$$

Siehe Programmbeispiel 8-1 und Bild 8-6

Programmbeispiel 8-1 Grafische Darstellung des Frequenzganges

```
% Plot frequency response
% s3s8_1.m * mw * 09/16/2007
w = 0.01:.01:10; % normlized radian frequency
H = j*w./(j*w+1); % frequency response
% Graphics
FIG1 = figure('Name','S3S8_1 : 1st order system','NumberTitle','off');
subplot(3,1,1), plot(w,abs(H),'LineWidth',2), grid
    axis([0 10 0 1]); title('Magniude of frequency response')
    xlabel('\omega_n \rightarrow'), ylabel('| H_n(j\omega_n) |
\rightarrow')
subplot(3,1,2), plot(w,-20*log10(abs(H)),'LineWidth',2), grid
    axis([0 10 0 60]); title('Attenuation in dB')
    xlabel('\omega_n \rightarrow'), ylabel('a_n(j\omega_n) in dB
\rightarrow')
subplot(3,1,3), plot(w,angle(H)/pi,'LineWidth',2), grid
    axis([0 10 0 1]); title('Phase of frequency response')
    xlabel('\omega_n \rightarrow'), ylabel('\langle (
H_n(j\omega_n)/\pi ) \rightarrow')
FIG2 = figure('Name','S3S8_1 : 1st order system','NumberTitle','off');
subplot(3,1,1), semilogx(w,abs(H),'LineWidth',2), grid
    axis([0 10 0 1]); title('Magniude of frequency response')
    xlabel('\omega_n \rightarrow'), ylabel('| H_n(j\omega_n) |
\rightarrow')
```


© Martin Werner, Fulda 2008

```
subplot(3,1,3), loglog(w,abs(H),'LineWidth',2), grid
    axis([0 10 0 1]); title('Magniude of frequency response in
logarithmic scale')
    xlabel('\omega_n \rightarrow'), ylabel('| H_n(j\omega_n) |
\rightarrow')
subplot(3,1,2), semilogx(w,angle(H)/pi,'LineWidth',2), grid
    axis([0 10 0 1]); title('Phase of frequency response')
    xlabel('\omega_n \rightarrow'), ylabel('\langle (
H_n(j\omega_n)/\pi ) \rightarrow')
```

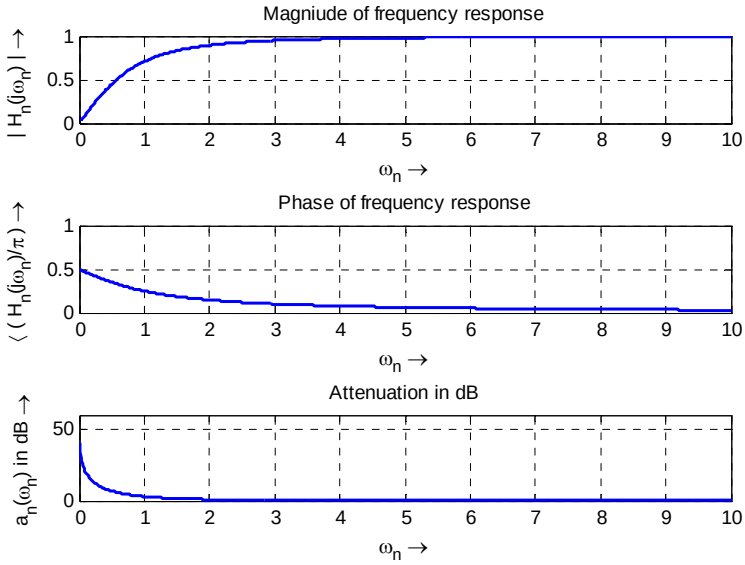


Bild 8-6 Normierter Frequenzgang des Systems 1. Ordnung (A8.1-1)

h) Siehe Bild 8-7. Die Ordinateneinteilung y im unteren Bild entspricht der Dämpfung mit $a_{\mathrm{dB}} = -20 \cdot \lg(y)$ dB; also 10^0, 10^{-1} und 10^{-2} entspricht 0 dB, 20 dB bzw. 40 dB.

© Martin Werner, Fulda 2008

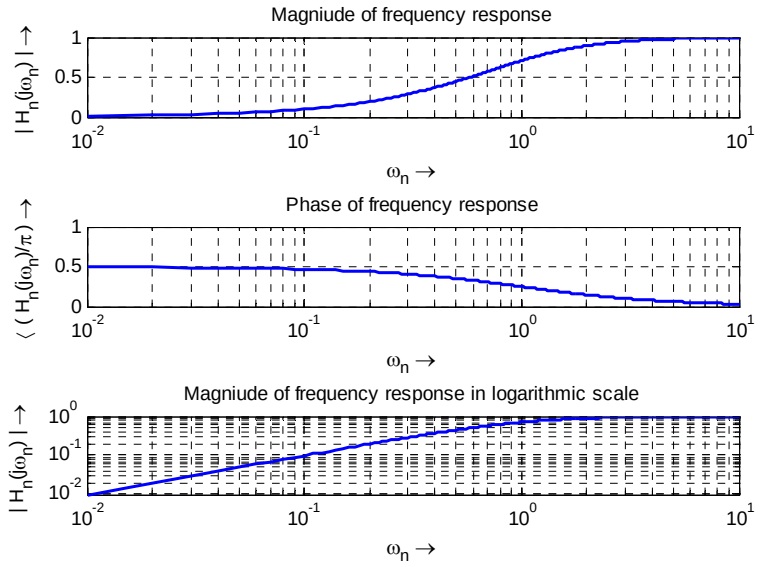


Bild 8-7 Normierter Frequenzgang des Systems 1 Ordnung (A8.1-1, `semilogx`, `loglog`)

Lösung A8.1-2 Frequenzgang des Reihenschwingkreises ☑

a) Die Übertragungsfunktion des Reihenschwingkreises A7.1-7 liefert den Frequenzgang

$$H(j\omega) = \frac{1/LC}{(j\omega - s_{\infty 1}) \cdot (j\omega - s_{\infty 2})} \tag{8.8}$$

mit den beiden Polen

$$s_{\infty 1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \tag{8.9}$$

b) Die Resonanzfrequenz ist gleich der Eigen-Kreisfrequenz im ungedämpften Fall, d. h. für $R = 0$.

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{470\ \mu\text{H} \cdot 10\ \text{nF}}} \approx 461\ \text{kHz} \tag{8.10}$$

Die Dämpfungskonstante (siehe σ_∞ in Aufgabe 7.1-7, (7.26)) ist

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{10\ \Omega}{2 \cdot 470\ \mu\text{H}} \approx \frac{10{,}6 \cdot 10^3}{\text{s}} = 10{,}6\ \text{kHz} \tag{8.11}$$

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

Mit

$$\alpha < \omega_0 \tag{8.12}$$

liegt der Fall ③, des schwach gedämpft Reihenschwingkreises, vor.

Die Resonanzfrequenz des schwach gedämpften Reihenschwingkreises ist gleich dem (positiven) Imaginärteil des Pols (siehe ω_∞ in Aufgabe 7.1-7, (7.26))

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \approx 461\,\text{kHz} \tag{8.13}$$

Anmerkung: Die Dämpfungskonstante ist bzgl. der Resonanzfrequenz vernachlässigbar gering.

c) Pole

$$s_{\infty 1,2} = -\alpha \pm j\omega_r = 10{,}6 \cdot 10^3 \frac{1}{\text{s}} \pm j461 \cdot 10^3 \frac{1}{s} = (10{,}6 \pm j461)\,\text{kHz} \tag{8.14}$$

Lösung mit MATLAB

b) Für Fall ③ siehe Bild 8-8.

Man erkennt deutlich die Resonanzüberhöhung bei der Resonanzkreisfrequenz $\omega_r \approx 461$ kHz. Die Resonanzüberhöhung nimmt mit fallendem Widerstandswert R zu.

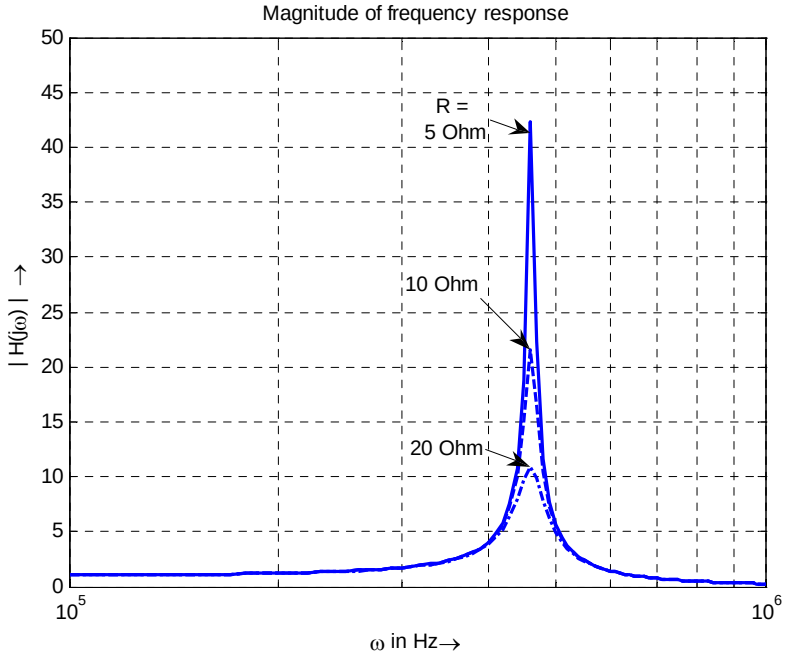


Bild 8-8 Betragsfrequenzgang zum schwach gedämpften Reihenschwingkreises (A8.1-2)

© Martin Werner, Fulda 2008

Lösung A8.1-3 System 2. Ordnung ☑

a) Für $\omega \to 0$ verhält sich die Kapazität wie ein Leerlauf und die Induktivität wie ein Kurzschluss. Dann liegt ein einfacher ohmscher Spannungsteiler vor.

$$\lim_{\omega \to 0} H(j\omega) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{1 + R_1/R_2} \tag{8.15}$$

Für $\omega \to \infty$ verhält sich die Kapazität wie ein Kurzschluss und die Induktivität wie Leerlauf. Dann fällt die gesamte Eingangsspannung am Ausgang ab.

$$\lim_{\omega \to \infty} H(j\omega) = 1 \tag{8.16}$$

b) Das System könnte das Ersatzschaltbild des Reihenschwingkreises sein, wobei parasitäre Effekte in erster Näherung berücksichtigt werden:

– der Isolationswiderstand R_C mit $R_1 = R_C$

– der ohmsche Widerstand der Spule R_L mit $R_2 = R + R_L$

c) Übertragungsfunktion aus A7.1-8 mit den gegebenen normierten Größen

$$H(j\omega) = \frac{R_2 + j\omega L}{\dfrac{1}{1/R_1 + j\omega C} + R_2 + j\omega L} = \frac{\omega^2 - j\omega \cdot \dfrac{L + R_1 R_2 C}{R_1 LC} - \dfrac{R_2}{R_1 LC}}{\omega^2 - j\omega \cdot \dfrac{L + R_1 R_2 C}{R_1 LC} - \dfrac{R_1 + R_2}{R_1 LC}} \tag{8.17}$$

d)

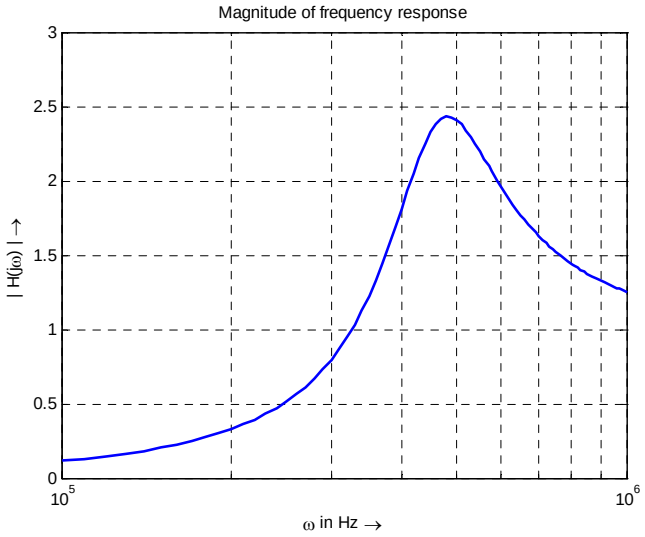


Bild 8-9 Betragsfrequenzgang der Ersatzschaltung zum schwach gedämpften Reihenschwingkreises (A8.1-3)

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

Lösung A8.1-4 Frequenzgang und Dämpfung eines Systems 2. Ordnung ☑

a) Für $\omega \to 0$ verhalten sich die Kapazitäten wie ein Leerlauf. Der Kreis ist offen.

$$\lim_{\omega \to 0} H(j\omega) = 0 \tag{8.18}$$

Für $\omega \to \infty$ verhalten sich die Kapazitäten wie ein Kurzschluss.

$$\lim_{\omega \to \infty} H(j\omega) = 0 \tag{8.19}$$

Es liegt ein Bandpass vor.

b) Frequenzgang

$$H(j\omega) = \frac{j\omega \cdot \frac{1}{R_1 C_2}}{\omega^2 - j\omega \cdot \left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_1 C_2} \right) - \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}} \tag{8.20}$$

c) Frequenzgang bei symmetrischer Beschaltung

$$H(j\omega) = \frac{j\omega \cdot \frac{1}{RC}}{\omega^2 - j\omega \cdot \left(\frac{1}{RC} + \frac{1}{RC} + \frac{1}{RC} \right) - \frac{1}{RRCC}} = \frac{j\omega \cdot \alpha}{\omega^2 - j\omega \cdot 3\alpha - \alpha^2} \tag{8.21}$$

mit $\alpha = \frac{1}{RC}$

d) Betragsfrequenzgang (siehe (b))

$$|H(j\omega)| = \frac{\omega \cdot \alpha}{\sqrt{\left(\omega^2 - \alpha^2\right)^2 + \omega^2 \cdot 9\alpha^2}} \tag{8.22}$$

Der Betragsfrequenzgang nimmt mit kleiner werdendem Nenner zu.

Vermutung: Realteilterme im Nenner kompensieren sich

$$\omega_0 = \alpha = \frac{1}{RC} \tag{8.23}$$

mit

$$|H(j\omega_0)| = \frac{1}{3} \tag{8.24}$$

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

Lösung mit MATLAB

d) Siehe Bild 8-10, Resonanzkreisfrequenz

$$\omega_0 = \frac{1}{100\,\Omega \cdot 1\,\mu\text{F}} = 10^4\ \text{Hz} \tag{8.25}$$

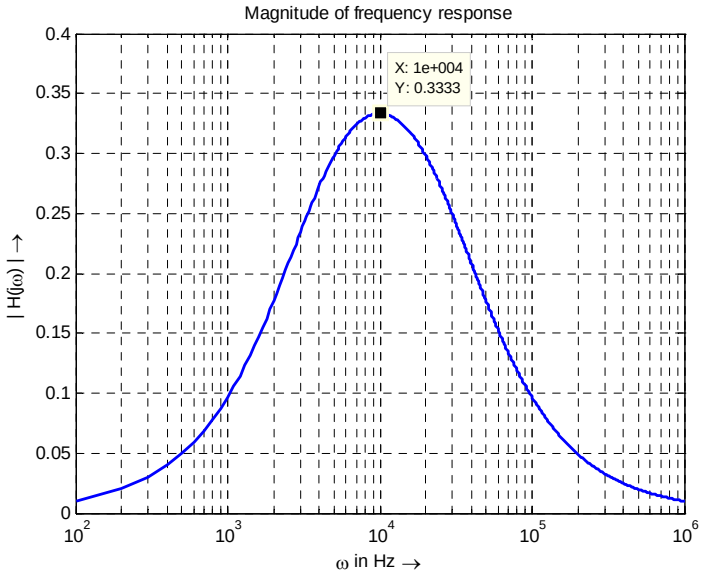


Bild 8-10 Betragsfrequenzgang (A8.1-4)

Lösung A8.1-5 Universalfilter

a) Es handelt sich um ein rekursives System 2. Ordnung, wobei s^{-1} auf ein zeitkontinuierliches System mit Integrieren hindeutet.

b) Signalflussgraph

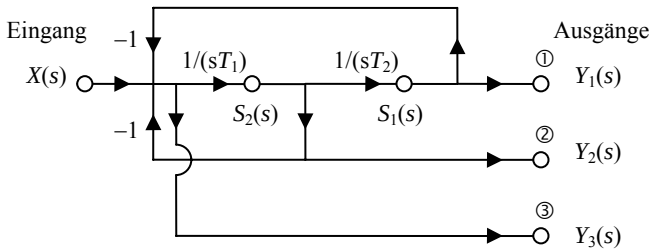


Bild 8-11 Signalflussgraph zum Universalfilter im Bildbereich

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

c) Übertragungsfunktion zum Ausgang ①

Aus dem Signalflussgraphen folgt von rechts nach links

$$\begin{aligned} Y_1(s) &= S_1(s) \\ S_1(s) &= \frac{1}{sT_2} \cdot S_2(s) \\ S_2(s) &= \frac{1}{sT_1} \cdot \left[X(s) - S_1(s) - S_2(s) \right] \end{aligned} \tag{8.26}$$

Mit den inneren Größen, den Zustandsgrößen, $S_1(s) = Y_1(s)$ und $S_2(s) = sT_2 \cdot Y_1(s)$ folgt mit dem Zwischenschritt

$$Y_1(s) = \frac{1}{s^2 T_1 T_2} \cdot \left[X(s) - Y_1(s) - sT_2 \cdot Y_1(s) \right] \tag{8.27}$$

schließlich

$$\frac{Y_1(s)}{X(s)} = H_1(s) = \frac{1}{1 + sT_2 + s^2 T_1 T_2} = \frac{1}{T_1 T_2} \cdot \frac{1}{s^2 + s/T_1 + 1/T_1 T_2} \tag{8.28}$$

Es liegt ein rekursives System 2. Ordnung mit den Nennerkoeffizienten $a_2 = 1$, $a_1 = 1/T_1$ und $a_0 = 1/(T_1 T_2)$.

d) Frequenzgang der Dämpfung zum Ausgang ①

Mit dem Frequenzgang

$$H_1(j\omega) = \frac{1}{T_1 T_2} \cdot \frac{1}{1/T_1 T_2 - \omega^2 + j\omega/T_1} \tag{8.29}$$

gilt für die Dämpfung

$$a_{1,dB}(\omega) = 10 \cdot \lg\left(T_1^2 T_2^2 \right) \text{dB} + 10 \cdot \lg\left(\omega^4 + \omega^2 / T_1^2 + 1/T_1^2 T_2^2 \right) \text{dB} \tag{8.30}$$

Es ergeben sich für die Grenzfälle: $a_{1,\text{dB}}(0) = 0$ und $a_{1,\text{dB}}(\infty) = \infty$.

Da die Dämpfung mit der Kreisfrequenz ω monoton steigt, liegt ein Tiefpass vor.

e) Übertragungsfunktion zum Ausgang ②

Aus dem Signalflussgraphen folgt mit $Y_2(s) = S_2(s)$ der direkte Zusammenhang $Y_2(s) = sT_2 \cdot Y_1(s)$. Damit in die Übertragungsfunktion (8.28) eingesetzt liefert

$$\frac{Y_2(s)}{X(s)} = H_2(s) = \frac{sT_2}{s^2 T_1 T_2 + sT_2 + 1} = \frac{1}{T_1} \cdot \frac{s}{s^2 + s/T_1 + 1/T_1 T_2} \tag{8.31}$$

Mit den Koeffizienten $a_2 = 1$, $a_1 = 1/T_1$, $a_2 = 1/(T_1 T_2)$ und $b_1 = 1/T_1$.

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

f) Frequenzgang der Dämpfung zum Ausgang ②

Mit dem Frequenzgang

$$H_2(j\omega) = \frac{1}{T_1} \cdot \frac{j\omega}{1/T_1T_2 - \omega^2 + j\omega/T_1} \tag{8.32}$$

gilt für die Dämpfung

$$a_{2,dB}(\omega) = 10 \cdot \lg\left(T_1^2\right) \text{dB} + 10 \cdot \lg\left(\omega^4 + \omega^2/T_1^2 + 1/T_1^2T_2^2\right) \text{dB} - 10 \cdot \lg\left(\omega^2\right) \text{dB} \tag{8.33}$$

Es ergeben sich für die Grenzfälle: $a_{2,\text{dB}}(0) = \infty$ und $a_{2,\text{dB}}(\infty) = \infty$.

Es liegt ein Bandpass vor. Die beiden ersten Summanden in (8.33) werden durch den Nenner der Übertragungsfunktion bestimmt und entsprechen dem Tiefpass zum Ausgang ①, siehe (d). Der neu hinzugekommen Summand besitzt eine Hochpasscharakteristik. In der Dämpfung addieren sich die Anteile zum Bandpassverhalten.

g) Übertragungsfunktion zum Ausgang ③

Aus dem Signalflussgraphen folgt mit $Y_3(s) = sT_1 \cdot Y_2(s)$. Damit in die Übertragungsfunktion (8.31) eingesetzt liefert

$$\frac{Y_3(s)}{X(s)} = H_3(s) = \frac{s^2T_1T_2}{s^2T_1T_2 + sT_2 + 1} = \frac{s^2}{s^2 + s/T_1 + 1/T_1T_2} \tag{8.34}$$

Mit den Koeffizienten $a_2 = 1$, $a_1 = 1/T_1$, $a_2 = 1/(T_1T_2)$ und $b_2 = 1$.

d) Frequenzgang der Dämpfung zum Ausgang ③

Mit dem Frequenzgang

$$H_3(j\omega) = \frac{-\omega^2}{1/T_1T_2 - \omega^2 + j\omega/T_1} \tag{8.35}$$

gilt für die Dämpfung

$$a_{3,dB}(\omega) = 10 \cdot \lg\left(\omega^4 + \omega^2/T_1^2 + 1/T_1^2T_2^2\right) \text{dB} - 10 \cdot \lg\left(\omega^4\right) \text{dB} \tag{8.36}$$

Es ergeben sich für die Grenzfälle: $a_{3,\text{dB}}(0) = \infty$ und $a_{3,\text{dB}}(\infty) = 0$.

Es handelt sich um einen Hochpass.

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

Lösung mit MATLAB

i) Siehe Bild 8-12, Bild 8-13 und Bild 8-14

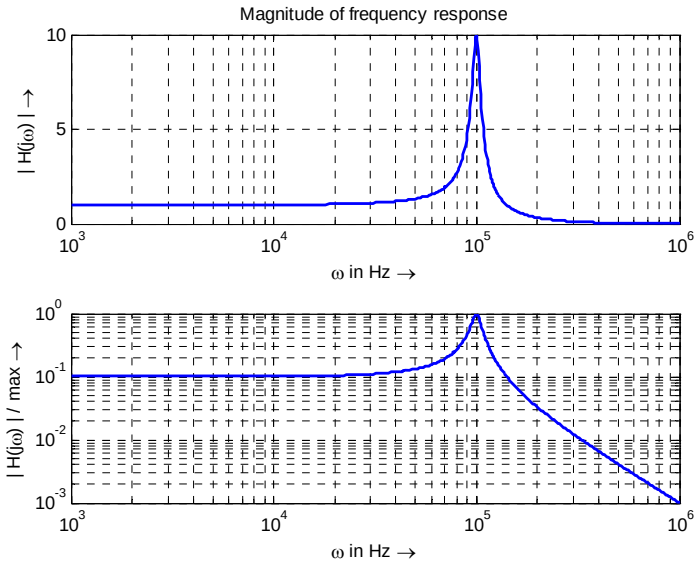


Bild 8-12 Betragsfrequenzgang zum Ausgang ① für $T_1 = 10^{-4}$ und $T_2 = 10^{-6}$

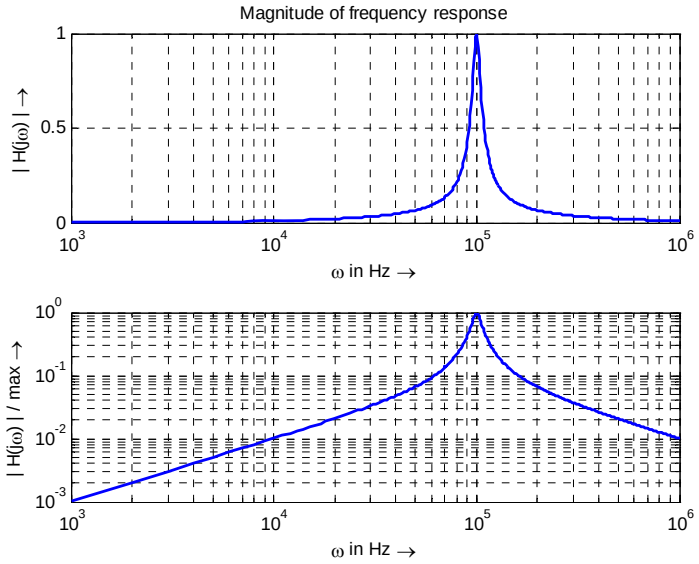


Bild 8-13 Betragsfrequenzgang zum Ausgang ② für $T_1 = 10^{-4}$ und $T_2 = 10^{-6}$

© Martin Werner, Fulda 2008

Anmerkung: Die Mittenfrequenz f_c und die 3dB-Bandbreite B_{3dB} des Bandpasses lassen sich einstellen mit [KSW95]

$$T_2 = \frac{B_{3dB}}{2\pi f_c^2} \quad \text{und} \quad T_1 T_2 = \frac{1}{(2\pi f_c)^2} \tag{8.37}$$

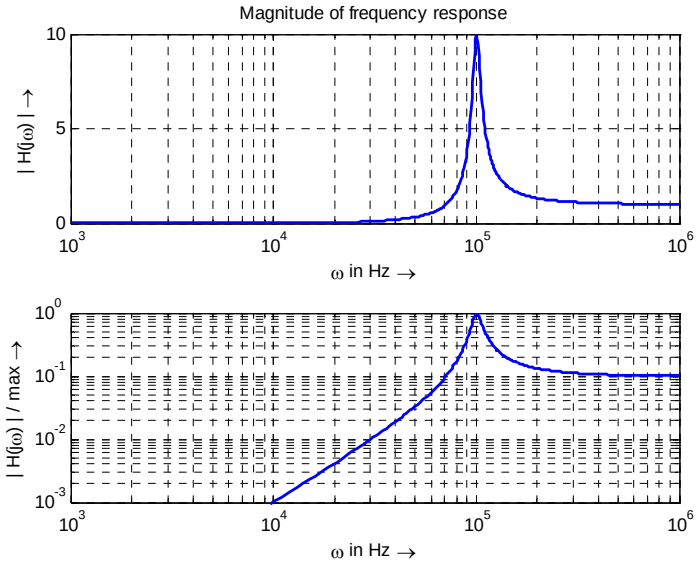


Bild 8-14 Betragsfrequenzgang zum Ausgang ③ für $T_1 = 10^{-4}$ und $T_2 = 10^{-6}$

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

9 Fourier-Transformation für zeitdiskrete Signale

9.1 Aufgaben

Aufgabe A9.1-1 Fourier-Transformation ✍ ★

Verifizieren Sie die Fourier-Paare, indem Sie die Rücktransformation explizit durchführen.

a) $\delta[n] \leftrightarrow 1$

b) $\cos[\Omega_0 n] \leftrightarrow \pi \cdot \left[\delta(\Omega - \Omega_0) + \delta(\Omega + \Omega_0)\right]$

c) $\sin[\Omega_0 n] \leftrightarrow j\pi \cdot \left[-\delta(\Omega - \Omega_0) + \delta(\Omega + \Omega_0)\right]$

e) Skizzieren Sie die Folgen für $\Omega_0 = \pi / 5$ für $n = -10(1)10$

Aufgabe A9.1-2 Fourier-Transformation der zeitdiskreten Sprungfunktion ✍ ★

Verifizieren Sie die in [Wer08], Abschnitt 9.4, angegebene Fourier-Transformierte der zeitdiskreten Sprungfunktion, indem Sie die Fourier-Transformierte mit der Summationseigenschaft berechnen.

Aufgabe A9.1-3 Vorwärtsprädiktor 1. Ordnung ✍ ★

Als einfaches Beispiel eines zeitdiskreten Systems soll der *Vorwärtsprädiktor* 1. Ordnung analysiert werden.

Hinweis: Beachten Sie das Minuszeichen am Addierer!

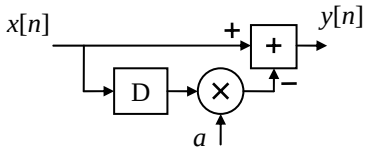


Bild 9-1 Vorwärtsprädiktor 1. Ordnung (*a* reell)

Geben Sie

a) die Impulsantwort,

b) die Sprungantwort,

c) die Übertragungsfunktion

d) und den Frequenzgang des Systems an.

e) Skizzieren Sie den Betragsfrequenzgang für $a = 1$ und -1 und charakterisieren Sie das Übertragungsverhalten.

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

Aufgabe A9.1-4 Rückwärtsprädiktor 1. Ordnung ✍ ★

Als einfaches Beispiel eines zeitdiskreten Systems soll der *Rückwärtsprädiktor* 1. Ordnung analysiert werden.

Hinweis: Beachten Sie das Minuszeichen am Addierer!

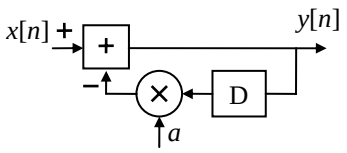


Bild 9-2 Rückwärtsprädiktor 1. Ordnung (a reell und $|a| < 1$)

Geben Sie

a die Impulsantwort,

b) die Sprungantwort,

c) die Übertragungsfunktion

d) und den Frequenzgang des Systems an.

e) Skizzieren Sie den Betragsfrequenzgang für a = 0,9 und –0,9. Charakterisieren Sie das Übertragungsverhalten.

Aufgabe A9.1-5 Frequenzgang ✍ ★

Gegeben ist die Übertragungsfunktion eines kausalen Systems

$$H(z) = \frac{z}{z^2 - z + 0{,}5}$$

Hinweis: Siehe auch A6.1-10

a) Geben Sie den Frequenzgang des Systems an.

b) Berechnen Sie den Betragsfrequenzgang.

c) Das System wird mit der Signal $x_1[n] = u[n]$ erregt. Berechnen Sie das Ausgangssignal im eingeschwungenen Zustand, d. h. für $n >> 0$

d) Das System wird mit dem alternierenden Signal $x_2[n] = \{+1, -1, +1, -1, \ldots\}$ usw. erregt. Berechnen Sie das Ausgangssignal im eingeschwungenen Zustand, d. h. $n >> 0$

Aufgabe A9.1-6 Frequenzgang mit Nullstellen ✍ ★

a) Ersetzen Sie im System in A9.1-5 die Nullstelle durch das konjugiert komplexe Nullstellenpaar $z_{01,2} = \pm j$. Geben Sie die neue Übertragungsfunktion an.

b) Skizzieren Sie den Betragsfrequenzgang indem Sie von dem grafischen Ergebnis in A9.1-5 ausgehen und den Einfluss der Nullstellen berücksichtigen.

Hinweis: Einfache Handskizze.

c) Das System sei zunächst energiefrei und wird mit dem Signal $x[n] = \cos([\pi/2]n) \cdot u[n]$ erregt. Welche Reaktion ist zu erwarten.

Hinweis: Keine Rechnung.

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

Aufgabe A9.1-7 Universalfilter ✍ ★★

In Bild 9-3 ist das Blockdiagramm des Universalfilters aus Aufgabe A8.1-5 in zeitdiskreter Form gegeben. Das Filter besitzt wieder 3 Ausgänge. Die Parametrisierung geschieht durch die beiden (Zeit-)Konstanten T_1 und T_2.

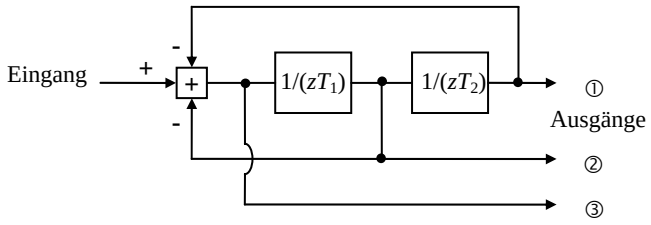


Bild 9-3 Blockdiagramm des Universalfilters nach ([KSW95], Abb. 7.139)

a) Um welche Art von System handelt es sich prinzipiell?

b) Zeichen Sie zum System den Signalflussgraphen im Bildbereich der z-Transformation.

c) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion zum Ausgang ①.

d) Welche Bedingungen müssen für die Parameter T_1 und T_2 eingehalten werden, damit das System stabil ist.

e) Bestimmen Sie den Frequenzgang zu (c) und geben Sie die Werte für $\Omega = 0$ und π an.

f) Kann das System mit den 3 Ausgängen wie das zeitkontinuierliche System seiner Rolle als Universalfilter gerecht werden? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe A9.1-8 Parameter des Filter-Frequenzgangs ✍ ★★

Um gewisse Frequenzkomponenten eines Signals auszublenden wurde ein digitales FIR-Filter entworfen. Der Betragsfrequenzgang ist im linearen und logarithmischen Maß in Bild 9-4 bzw. Bild 9-5 abgebildet.

a) Um welche Art von Frequenzgang (Filter) handelt es sich?

b) Schätzen Sie aus den Bildern die normierten 3dB-Grenzkreisfrequenzen.

c) Schätzen Sie aus den Bildern die Toleranzvorgaben. Geben Sie die Toleranzen in linearem und logarithmischem Maß an.

Hinweise: (i) Gehen Sie von Toleranzbändern in den Durchlass- und Sperrbereichen aus, die durch den Systementwurf möglichst ausgefüllt werden. (ii) Beachten Sie die Definition

$$\texttt{Magnitude} \;\hat{=}\; +20 \cdot \log_{10} \left| H\left(e^{j\Omega}\right) \right| \text{ dB}$$

d) Schätzen Sie aus den Bildern die normierten Grenzkreisfrequenzen, wenn Toleranzbänder wie in (c) zugrunde gelegt werden.

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

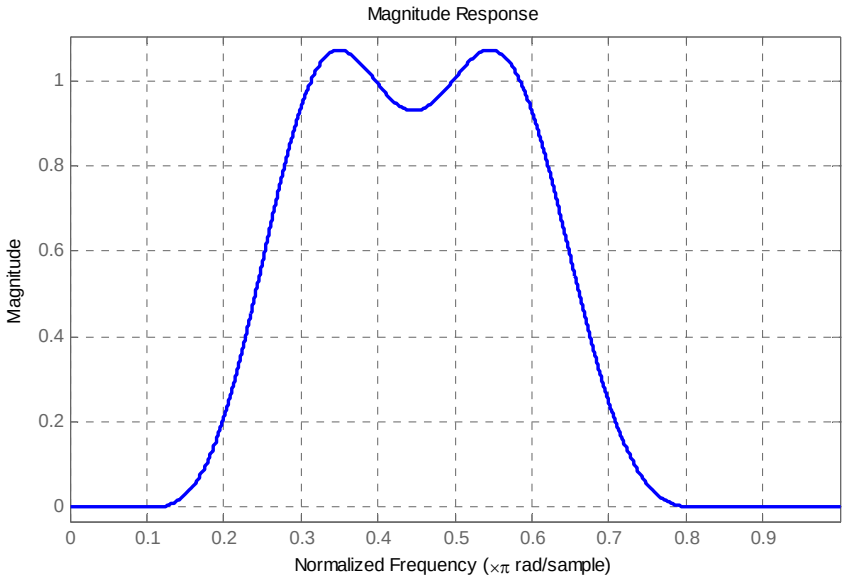


Bild 9-4 Betragsfrequenzgang

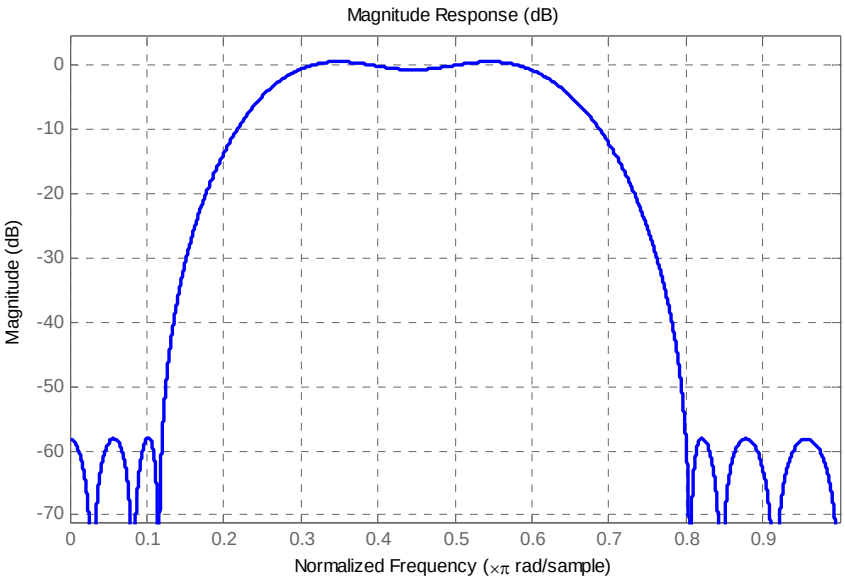


Bild 9-5 Betragsfrequenzgang im logarithmischen Maß

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

9.2 Lösungen

Lösung A9.1-1 Fourier-Transformation ☑

a)

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} X\left(e^{j\Omega}\right)\cdot e^{j\Omega n}d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{j\Omega n}d\Omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{jn}\cdot e^{j\Omega n}\Big|_{-\pi}^{+\pi} = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{jn}\cdot\left[\cos(\pi n)+j\sin(\pi n)-\cos(-\pi n)-j\sin(-\pi n)\right]$$

$$= \frac{\sin(\pi n)}{\pi n}$$

Die Folge $x[n]$ entspricht bis auf $n = 0$, der Abtastung der si-Funktion in den Nullstellen.

$$x[n] = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

b) mit der Ausblendeigenschaft der Impulsfunktion

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \pi\left[\delta(\Omega-\Omega_0)+\delta(\Omega+\Omega_0)\right]e^{j\Omega n}d\Omega = \frac{1}{2}\cdot\left[e^{j\Omega_0 n}+e^{-j\Omega_0 n}\right] = \cos(\Omega_0 n)$$

c) entsprechend zu (b)

d)

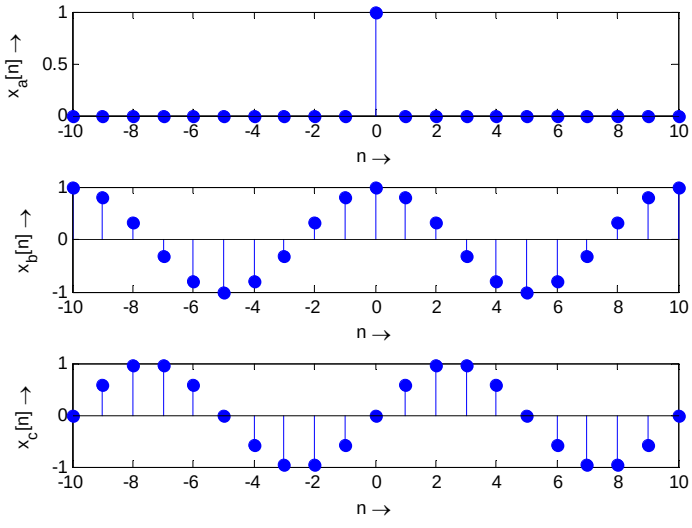


Bild 9-6 Signale zu Aufgabe A9.1-1

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

Lösung A9.1-2 Fourier-Transformation der zeitdiskreten Sprungfunktion ☑

Die Sprungfunktion kann als Summe von Impulsfunktionen dargestellt werden.

$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m] \tag{9.1}$$

Aus der Summationseigenschaft ([Wer08], Tabelle 9-1) und der Korrespondenz für die Impulsfunktion ([Wer08], Tabelle 9-2) ergibt sich

$$u[n] \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{1-e^{-j\Omega}} + \pi\delta(\Omega) \tag{9.2}$$

Lösung A9.1-3 Vorwärtsprädiktor 1. Ordnung ☑

a**)** Impulsantwort

$$h[n] = \{1, -a\} \tag{9.3}$$

b) Sprungantwort

$$s[n] = \{1, 1-a, 1-a, \ldots\} \tag{9.4}$$

c) Übertragungsfunktion

$$H(z) = 1 - az^{-1} = \frac{z-a}{z} \tag{9.5}$$

d) Frequenzgang

$$H\left(e^{j\Omega}\right) = 1 - ae^{-j\Omega} \tag{9.6}$$

e) Frequenzgang für $a = 1$

$$H_{+1}\left(e^{j\Omega}\right) = 1 - e^{-j\Omega} = e^{-j\Omega/2} \cdot 2j\sin(\Omega/2) \tag{9.7}$$

und für $a = -1$

$$H_{-1}\left(e^{j\Omega}\right) = 1 + e^{-j\Omega} = e^{-j\Omega/2} \cdot 2\cos(\Omega/2) \tag{9.8}$$

Das Übertragungsverhalten des Prädiktors 1. Ordnung wird in Bild 9-7 wiedergegeben. Man erkennt, dass sich für $a = 1$ ein Hochpassverhalten einstellt. Insbesondere werden der Gleichanteil im Eingangssignal völlig und die langsam veränderlichen Signalanteile stark unterdrückt. Das System wirkt in diesem Fall wie ein Prädiktor der das Differenzsignal zwischen aktuellem Eingangswert und dem aus dem letzten vergangenen Wert (Prädiktor 1. Ordnung) bestimmten Schätzwert bildet.

Für $a = -1$ wechselt der Systemcharakter zum Tiefpassverhalten mit entsprechenden Eigenschaften.

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

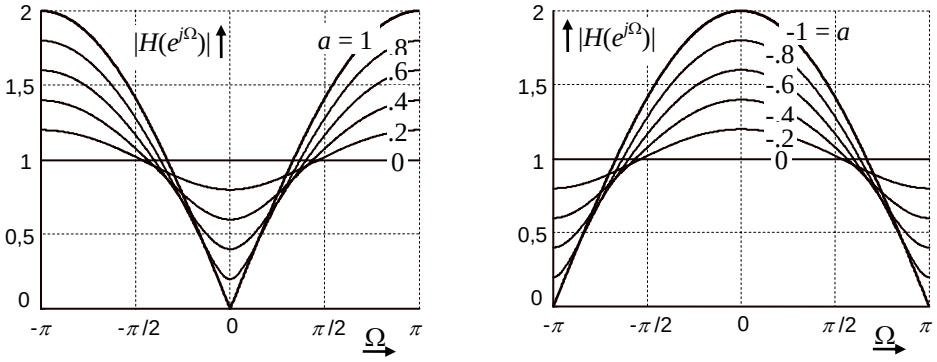


Bild 9-7 Betragsfrequenzgang des Vorwärtsprädiktors in Bild 9-1 für verschiedene Parameterwerte *a*

Lösung A9.1-4 Rückwärtsprädiktor 1. Ordnung ☑

a) Impulsantwort, siehe auch Aufgabe A2.3-1

$$h[n] = \{1, -a, (-a)^2, (-a)^3, \ldots\} = (-a)^n \cdot u[n] \tag{9.9}$$

b) Sprungantwort

$$s[n] = \sum_{k=0}^{n} h[k] = \sum_{k=0}^{n} (-a)^k = \frac{1-(-a)^n}{1+a} \tag{9.10}$$

c) Übertragungsfunktion

$$H(z) = \frac{1}{1+az^{-1}} = \frac{z}{z+a} \tag{9.11}$$

d) Frequenzgang

$$H\left(e^{j\Omega}\right) = \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}+a} \tag{9.12}$$

e) Betragsfrequenzgang

$$\left|H\left(e^{j\Omega}\right)\right| = \left|e^{j\Omega}+a\right|^{-1} \tag{9.13}$$

Der Betragsfrequenzgang in Bild 9-8 zeigt für *a* größer ungefähr −1 ausgeprägtes Tiefpassverhalten, während für *a* kleiner ungefähr 1 die Spektralkomponenten bei hohen Frequenzen betont werden.

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

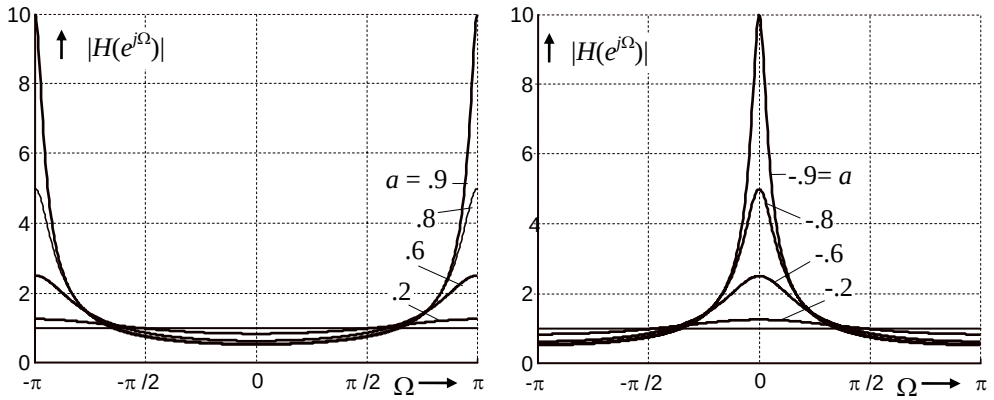


Bild 9-8 Betragsfrequenzgang des Rückwärtsprädiktors in Bild 9-2 für verschiedene Parameterwerte *a*

Lösung A9.1-5 Frequenzgang ☑

a) Frequenzgang

$$H\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{e^{j\Omega}}{e^{j2\Omega}-e^{j\Omega}+0.5}$$

b) Aus

$$\left|H\left(e^{j\Omega}\right)\right|^2=H\left(e^{j\Omega}\right)\cdot H^*\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{e^{j\Omega}}{e^{j2\Omega}-e^{j\Omega}+0.5}\cdot\frac{e^{-j\Omega}}{e^{-j2\Omega}-e^{-j\Omega}+0.5}=$$

$$=\frac{4}{9-12\cos(\Omega)+4\cos(2\Omega)}$$

folgt der Betragsfrequenzgang

$$\left|H\left(e^{j\Omega}\right)\right|=\frac{2}{\sqrt{9-12\cos(\Omega)+4\cos(2\Omega)}}$$

c) Das Signal entspricht

$$x_1[n]=\cos(0n)\cdot u[n]=\frac{1}{2}\left(e^{j0n}+e^{-j0n}\right)\cdot u[n]$$

Im eingeschwungenen Zustand gilt, siehe Eigenfunktionen und Eigenwerte für LTI-Systeme,

$$y_1[n]\approx\frac{1}{2}\left(H\left(1\right)\cdot e^{j0n}+H\left(1\right)e^{-j0n}\right)\quad\text{für}\quad n>>0$$

Mit $H\left(1\right)=2$ gilt $y_1[n]\approx 2\quad$ für $\quad n>>0$

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

d) Das Signal entspricht

$$x_2[n] = \cos(\pi n) \cdot u[n] = \frac{1}{2}\left(e^{j\pi n} + e^{-j\pi n}\right) \cdot u[n]$$

Im eingeschwungenen Zustand gilt, siehe Eigenfunktionen und Eigenwerte für LTI-Systeme,

$$y_2[n] \approx \frac{1}{2}\left(H(-1) \cdot e^{j\pi n} + H(-1) e^{-j\pi n}\right) \quad \text{für} \quad n >> 0$$

Mit $H(-1) = -\frac{2}{5}$ gilt $y_2[n] \approx -\frac{2}{5} \cdot \cos(\pi n)$ für $n >> 0$

Lösung A9.1-6 Frequenzgang mit Nullstellen ☑

a)

$$H(z) = \frac{(z-j)(z+j)}{z^2 - z + 0.5} = \frac{z^2 + 1}{z^2 - z + 0.5}$$

b) siehe d)

c) Nach einem Einschwingen geht das Ausgangssignal gegen null, siehe Nullstellen des Systems.

d) siehe Bild 9-9

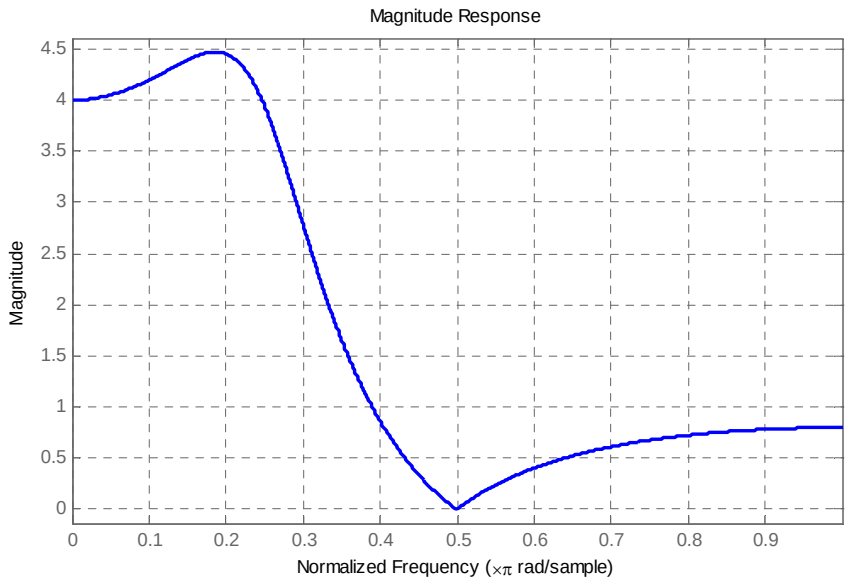


Bild 9-9 Betragsfrequenzgang des Systems mit Nullstellen (`fvtool`)

© Martin Werner, Fulda 2008

Lösung A9.1-7 Universalfilter ☑

a) Es handelt sich um ein rekursives System 2. Ordnung, wobei z^{-1} auf ein zeitdiskretes System mit Verzögerungsgliedern hindeutet.

b) Signalflussgraph

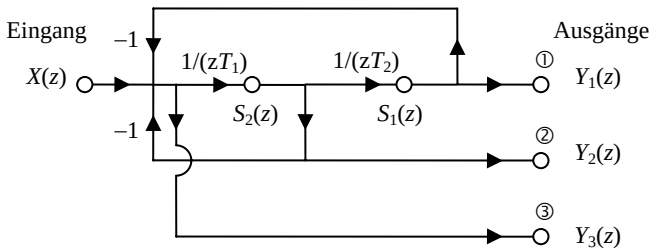


Bild 9-10 Signalflussgraph zum Universalfilter im Bildbereich

c) Übertragungsfunktion zum Ausgang ①

Aus dem Signalflussgraphen folgt von rechts nach links

$$\begin{aligned} Y_1(z) &= S_1(z) \\ S_1(z) &= \frac{1}{zT_2} \cdot S_2(z) \\ S_2(z) &= \frac{1}{zT_1} \cdot \left[X(z) - S_1(z) - S_2(z) \right] \end{aligned} \tag{9.14}$$

Mit den inneren Größen, den Zustandsgrößen, $S_1(z) = Y_1(z)$ und $S_2(z) = zT_2 \cdot Y_1(z)$ folgt mit dem Zwischenschritt

$$Y_1(z) = \frac{1}{z^2 T_1 T_2} \cdot \left[X(z) - Y_1(z) - zT_2 \cdot Y_1(z) \right] \tag{9.15}$$

schließlich

$$\begin{aligned} \frac{Y_1(z)}{X(z)} = H_1(z) \; &= \frac{1}{1 + zT_2 + z^2 T_1 T_2} = \frac{1}{T_1 T_2} \cdot \frac{1}{z^2 + z/T_1 + 1/T_1 T_2} = \\ &= \frac{1}{T_1 T_2} \cdot \frac{z^{-2}}{1 + z^{-1}/T_1 + z^{-2}/T_1 T_2} \end{aligned} \tag{9.16}$$

Es liegt ein rekursives System 2. Ordnung mit den Nennerkoeffizienten $a_0 = 1$, $a_1 = 1/T_1$ und $a_2 = 1/(T_1 T_2)$, sowie dem Zählerkoeffizienten $b_2 = 1/(T_1 T_2)$.

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

d) Stabilität

Aus dem Stabilitätsdreieck in Bild 4-10 ([Wer08], Bild 4-11) folgt die Stabilitätsbedingung für die Systemkoeffizienten

$$\frac{1}{|T_1|} < 2 \quad , \quad \frac{1}{|T_1 T_2|} < 1 \quad \text{und} \quad \left|\frac{1}{T_1}\right| < 1 + \frac{1}{T_1 T_2} \tag{9.17}$$

e) Frequenzgang zum Ausgang ①

$$H_1\left(e^{j\Omega}\right) = \frac{1}{T_1 T_2} \cdot \frac{e^{-j2\Omega}}{1 + e^{-j\Omega}/T_1 + e^{-j2\Omega}/T_1 T_2} \tag{9.18}$$

Für den Frequenzgang gilt

$$H_1\left(e^{j\Omega}\right)\Big|_{\Omega=0} = H_1(1) = \frac{1}{T_2 \cdot (T_1 + 1) + 1} \quad \text{und} \quad H_1\left(e^{j\Omega}\right)\Big|_{\Omega=\pi} = H_1(-1) = \frac{1}{T_2 \cdot (T_1 - 1) + 1} \tag{9.19}$$

g) Übertragungsfunktion/Frequenzgang zu den Ausgängen ② und ③

Wie man dem Signalflussgraphen entnehmen kann, unterscheiden sich die Signale an den drei Ausgängen nur durch die multiplikative Konstanten und ein oder zwei Verzögerungen. Die Signalverzögerung ändert nur die Phase nicht den Betrag des Frequenzgangs. Zu den 3 Ausgängen ergibt sich, abgesehen von einer Konstanten, der gleiche Dämpfungsfrequenzgang. Von einem Universalfilter wie beim zeitkontinuierlichen System, das gleichzeitig Ausgänge mit TP-, BP- und HP-Charakteristik anbietet, kann hier nicht gesprochen werden.

Lösung A9.1-8 Parameter des Filter-Frequenzgangs ☑

a) Es handelt sich um einen Bandpass.

b) Aus den Bilder kann näherungsweise abgelesen werden (☞ 3dB-Grenzfrequenz)

untere Durchlasskreisfrequenz $\Omega_{ud} \approx 0{,}26\ \pi$

obere Durchlasskreisfrequenz $\Omega_{od} \approx 0{,}64\ \pi$

c) Toleranzbänder

Sperrtoleranz $A_s \approx 58$ dB $\cong 1{,}3 \cdot 10^{-3}$

Durchlasstoleranz $A_d \approx 1{,}2$ dB $\cong 0{,}15$ ☞ Max/Min im Durchlassbereich

d) Grenzfrequenzen (☞ Toleranzband), vgl. Bild A6.4-3 mit den Entwurfsvorschriften

untere Sperrkreisfrequenz $\Omega_{us} \approx 0{,}12\ \pi$

untere Durchlasskreisfrequenz $\Omega_{ud} \approx 0{,}3\ \pi$

obere Durchlasskreisfrequenz $\Omega_{od} \approx 0{,}6\ \pi$

obere Sperrkreisfrequenz $\Omega_{os} \approx 0{,}8\ \pi$

© Martin Werner, Fulda 2008

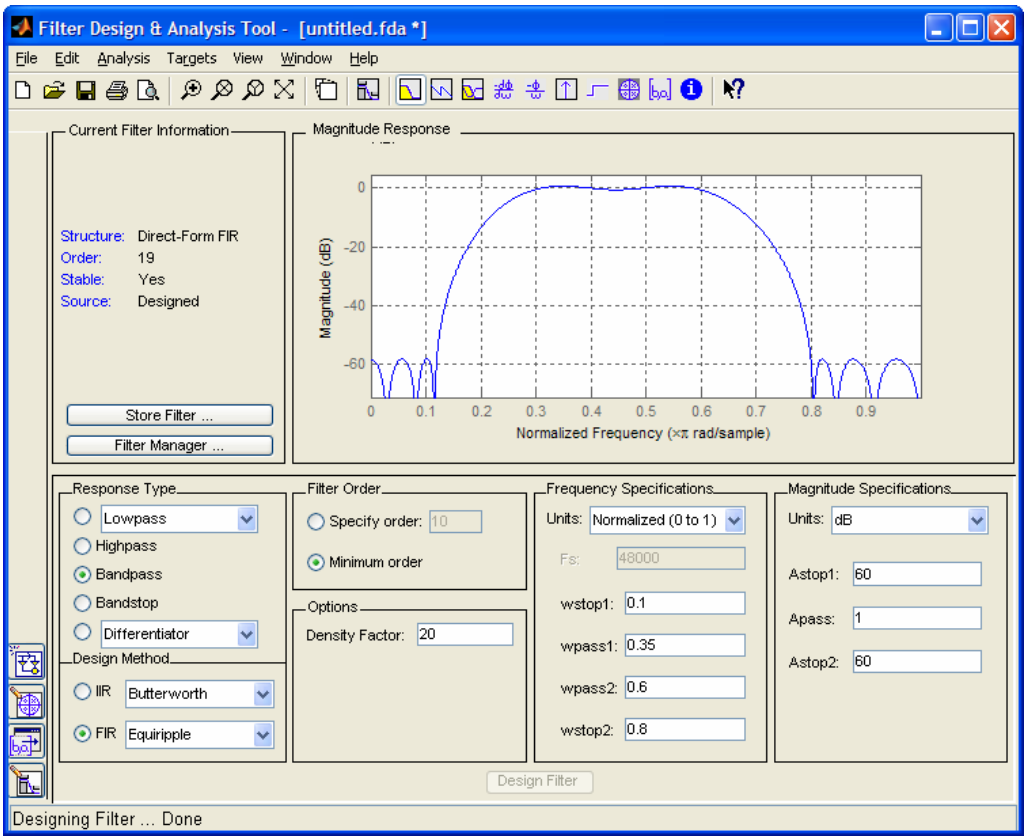


Bild 9-11 Filterentwurf (`fdatool`)

9.3 Übungen mit MATLAB

MATLAB-Übung M9-1 charakteristische Funktionen eines Systems 2. Ordnung

Das System 2. Grades mit der Übertragungsfunktion

$$H(z) = \frac{0{,}1 + 0{,}2z^{-1} + 0{,}1z^{-2}}{1 - 1{,}2z^{-1} + 0{,}6z^{-2}} \tag{9.20}$$

soll mit Hilfe der MATLAB-Funktion `fvtool` (Filter Visualization Tool) aus der `Signal Processing Toolbox` analysiert werden.

Stellen Sie die folgenden Größen grafisch dar

a) das Pol-Nullstellendiagramm

b) den Betragsfrequenzgang und Frequenzgang der Phase

c) den Frequenzgang der Gruppenlaufzeit

d) die Impulsantwort und

© Martin Werner, Fulda 2008

e) die Sprungantwort

Welche Zusammenhänge existieren zwischen den charakteristischen Funktionen und werden diese Zusammenhänge in den Bildern richtig wider gegeben? Diskutieren Sie im Einzelnen

- in welchem Zusammenhang stehen die Lagen der Pole und Nullstellen und der Betragsfrequenzgang?
- wie kann vom Frequenzgang der Phase auf den Frequenzgang der Gruppenlaufzeit geschlossen werden?
- kann vom Betragsfrequenzgang auf die Impulsantwort und Sprungantwort geschlossen werden?
- liefert die Impulsantwort einen Hinweis auf die Lage der Pole
- ist der Zusammenhang von Impulsantwort und Sprungantwort in den Bildern zu verifizieren?

Programmbeispiel 9-1 MATLAB-Funktion `fvtool`

```
b = [.1,.2,.1];   % numerator
a = [1,-1.2,.6];  % denominator
fvtool(b,a)       % filter visualization tool
```

In Bild 9-12 werden Screenshots des Pol-Nullstellen-Diagramms und der Frequenzgänge des Betrages, der Phase und der Gruppenlaufzeit sowie der Impulsantwort und der Sprungantwort gezeigt.

Die Frequenzgänge des Betrages und der Phase lassen erkennen, dass sich die beiden Pole umso stärker auf den Frequenzgang auswirken, je kleiner der Abstand zwischen den Polen und der betrachteten Frequenzstelle auf dem Einheitskreis ist. Man erkennt insbesondere an der Stelle des normierten Polwinkels, d. h. für $\Omega = \Omega_\infty \approx 40° \approx 0{,}22 \cdot \pi$ die charakteristische Betragsüberhöhung. Für $\Omega \to \pm\pi$ nähert sich der Betragsfrequenzgang der doppelten Nullstelle $z_0 = -1$.

Die Phase fällt monoton. Damit ist die Gruppenlaufzeit stets positiv. In der Nähe des normierten Polwinkels ändert sich die Krümmung der Phase. Dort besitzt die Phase ihr Maximum.

Die Impulsantwort zeigt Tiefpassverhalten. Sie hat eine gewisse Ähnlichkeit mit der si-Funktion. Aus dem Abstand zwischen zwei gleichsinnigen Nulldurchgängen der Impulsantwort kann auf den normierten Polwinkel geschlossen werden. Mit 9 Zeitschritten ergibt sich eine Wert von $2\pi / 9 \approx 2{,}2 \cdot \pi$, siehe oben.

Die Sprungantwort ist die Akkumulation der Impulsantwort, was anschaulich nachvollzogen werden kann. Darüber hinaus zeigt die Sprungantwort typisches Tiefpassverhalten. Für n ausreichend groß kann der Übertragungsfaktor $H(1)$ für eine konstante Eingangsfolge näherungsweise abgelesen werden.

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

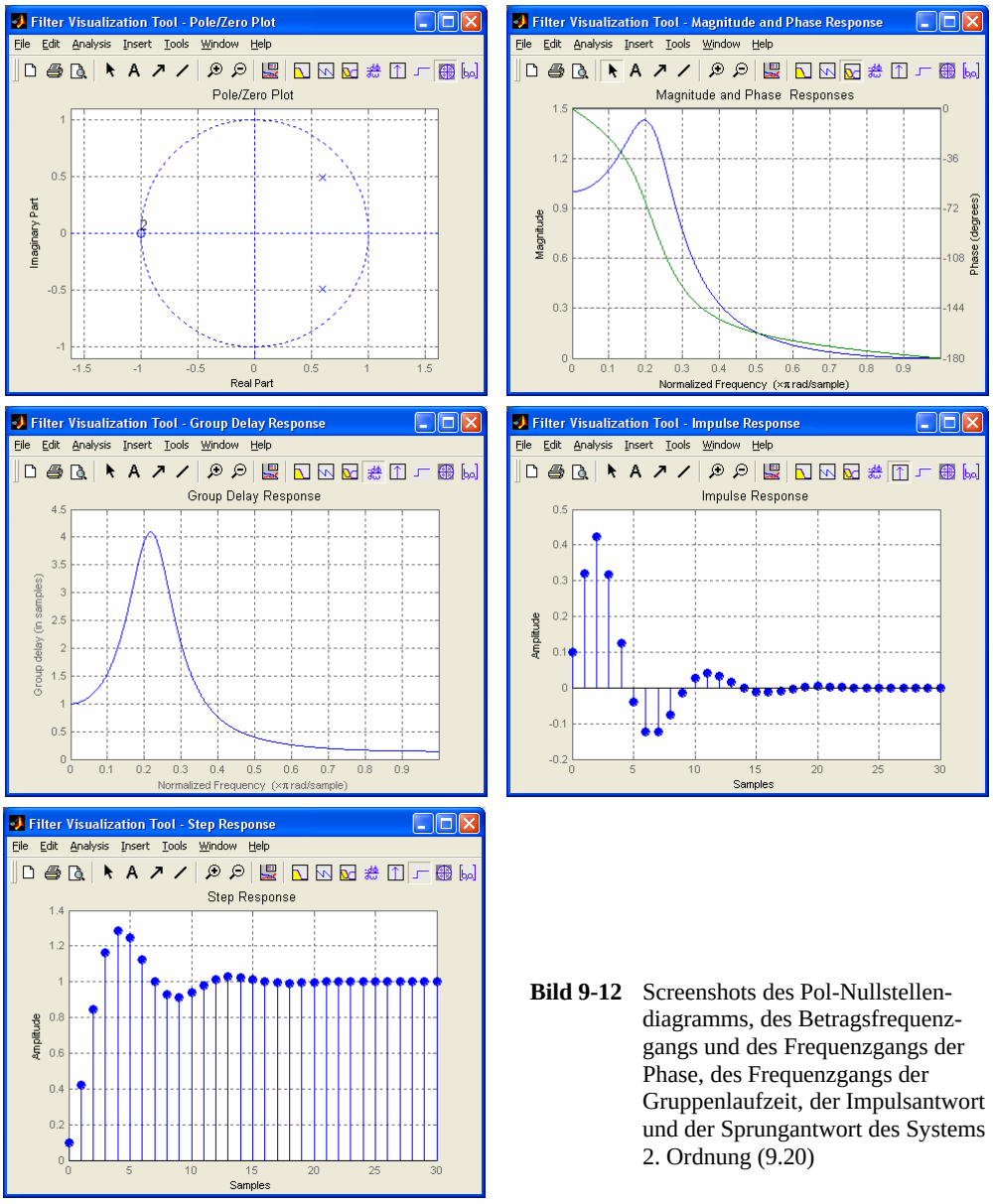


Bild 9-12 Screenshots des Pol-Nullstellendiagramms, des Betragsfrequenzgangs und des Frequenzgangs der Phase, des Frequenzgangs der Gruppenlaufzeit, der Impulsantwort und der Sprungantwort des Systems 2. Ordnung (9.20)

MATLAB-Übung M9-2 Charakteristische Funktionen eines Systems 3. Ordnung mit Tiefpassverhalten

Wiederholen Sie die Systemanalyse wie im vorhergehenden Beispiel für das System 3. Ordnung in Aufgabe 5-8 mit der Übertragungsfunktion (5.101).

Stellen Sie auch den Frequenzgang des Betrages im doppelt logarithmischen Maß grafisch dar.

Hinweis: Normieren Sie die Zählerkoeffizienten so, dass $H(1) = 1$.

© Martin Werner, Fulda 2008

Programmbeispiel 9-2 MATLAB-Funktion `fvtool`

```
b = 0.5*[0,.0883,.0633,0];      % numerator
a = [1,-2.0204,1.4641,-.3679]; % denominator
fvtool(b,a)                     % filter visualization tool
```

Für das System 3. Ordnung erhält man mit dem Programmbeispiel 9-2 im Prinzip ähnliche Darstellungen wie in Bild 9-12, so dass auf ihre explizite Darstellung hier verzichtet wird. Es lassen sich entsprechende Aussagen zu MATLAB-Übung 9-1 treffen.

Der Betragsfrequenzgang zeigt das relative schmalbandige Tiefpassverhalten des Systems. Dies geben auch die Lagen der Pole um $z = 1$ wieder. Der maximale normierte Polwinkel von $\Omega_{\infty,max} \approx 23{,}4° \approx 0{,}13 \cdot \pi$ legt im Wesentlichen die Breite des Durchlassbereiches fest.

Zur Kontrolle kann die Impulsantwort und die Sprungantwort mit dem Ergebnis in ([Wer08], Bild 6-9) verglichen werden. Es zeigt die Übereinstimmung. Betrachtet man die Abstände zwischen zwei benachbarten Nulldurchgängen, so kann mit ca. 8 Folgenelementen wieder der maximale normierte Polwinkel abgeschätzt werden. Es resultiert $\pi / 8 \approx 0{,}13 \cdot \pi$.

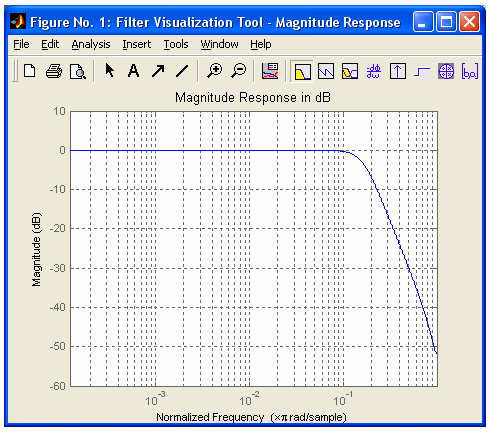


Bild 9-13 Betragsfrequenzgang des Systems 3. Ordnung in doppelt logarithmischer Darstellung

Der Betragsfrequenzgang in doppelt logarithmischen Darstellung in Bild 9-13 ermöglicht einen direkten Vergleich mit dem zugrunde liegenden zeitkontinuierlichen Butterworth-Tiefpass in ([Wer08], Bild 8-29 und Bild 9-8). In beiden Fällen zeigen die Betragsfrequenzgänge ähnliche Verläufe. Der Betragsfrequenzgang des zeitdiskreten Systems kann ebenfalls durch die Geraden des Bode-Diagramms angenähert werden.

Legt man eine approximierende Gerade an die Flanke des Betragsfrequenzgangs in Bild 9-13, so liegt, wie erwartet, der Schnittpunkt mit der Abszisse bei etwa $0{,}14 \cdot \pi$ und die Steigung beträgt, wie beim analogen Butterworth-Tiefpass 3. Ordnung, –18 dB pro Oktave.

Allerdings zeigt sich für die normierte Kreisfrequenz nahe bei π eine relativ große Abweichung. Sie ist typisch für den Filterentwurf mit der impulsinvarianten Transformation. Ihre Ursache wird in Abschnitt 11 noch genauer erläutert.

MATLAB-Übung M9-3 Charakteristische Funktionen eines Systems 3. Ordnung

Wiederholen Sie die Systemanalyse wie in der vorhergehenden Übung für ein weiteres System 3. Ordnung. Diesmal soll jedoch ein System mit Hochpass-Charakteristik untersucht werden.

Wie die vorangehenden Übungen zeigen, ist hierfür notwendig, dass die Pole in der Nähe von $z = e^{j\pi}$ und die Nullstellen in der Nähe von $z = 1$ liegen. Wir versuchen uns ein derartiges System zu konstruieren, indem wir die Pole und die Nullstellen des Systems in der MATLAB-Übung 9-2 an der imaginären Achse spiegeln und analysieren das Ergebnis. Stellen Sie dazu auch den Frequenzgang des Betrages im logarithmischen Maß grafisch dar.

© Martin Werner, Fulda 2008

Hinweis: Normieren Sie für die graphische Darstellung die Zählerkoeffizienten so, dass der Betragsfrequenzgang bei der normierten Kreisfrequenz $\Omega = \pi$ gleich eins ist.

Programmbeispiel 9-3 Entwurf eines Hochpasses und Filteranalyse

```
b = 0.5*[0,.0883,.0633,0];                    % numerator
a = [1,-2.0204,1.4641,-.3679];                % denominator
b2 = poly(-roots(b));                % mapping zeros at imaginary axis
a2 = poly(-roots(a));                % mapping poles at imaginary axis
fvtool(b,a,b2/22.65,a2)              % start filter visualization tool
```

Bild 9-14 zeigt das Pol-Nullstellen-Diagramm nach der Spiegelung der Pole und Nullstellen an der imaginären Achse und die Betragsfrequenzgänge für das ursprüngliche System und das System nach der Abbildung.

Augenscheinlich ergibt sich der Betragsfrequenzgang des neuen Systems durch Spiegelung des alten um die normierte Kreisfrequenz $\pi / 2$. Aus dem Tiefpass wird ein Hochpass.

Anmerkung: Die sich hier andeutende Möglichkeit aus Tiefpässen Hochpässe, oder sogar Bandpässe und Bandsperren zu entwerfen, wird in der digitalen Signalverarbeitung unter dem Stichwort Frequenztransformation standardmäßig eingesetzt.

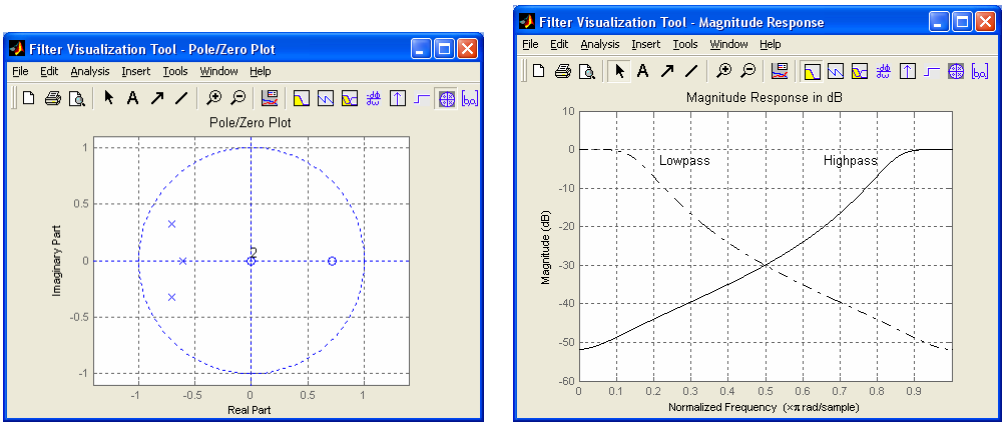


Bild 9-14 Pol-Nullstellendiagramm nach Spiegelung (für den Hochpass) und Betragsfrequenzgänge des Systems 3. Ordnung vor (Tiefpass) und nach der Spiegelung (Hochpass)

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

10 Diskrete Fourier-Transformation

10.1 Aufgaben

Aufgabe A10.1-1 Diskrete Fourier-Transformation ✍

Verifizieren Sie die folgenden DFT-Paare, indem Sie die Rücktransformation explizit durchführen.

Hinweis: Mit der Tilde über den Formelzeichen wird auf die Blockstruktur bzw. Periodizität der Signale und DFT-Spektren mit der DFT-Länge N erinnert.

a) $\tilde{u}[n] \leftrightarrow N\tilde{\delta}[k]$

b) $\cos[\Omega_0 n] \leftrightarrow \frac{N}{2} \cdot \left[\tilde{\delta}(k-k_0) + \tilde{\delta}(k-[N-k_0])\right]$

c) $\sin[\Omega_0 n] \leftrightarrow j\frac{N}{2} \cdot \left[-\tilde{\delta}(k-k_0) + \tilde{\delta}(k-[N-k_0])\right]$

e) Skizzieren Sie die DFT-Spektren und Folgen für $k_0 = 2$ und $N = 16$

10.2 Lösungen

Lösung A10.1-1 Diskrete Fourier-Transformation ☑

a) $\frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] \cdot W_N^{kn} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} N\tilde{\delta}[k] \cdot W_N^{kn} = 1 \quad \forall\, n$

b)

$$\frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \frac{N}{2}\left[\tilde{\delta}[k-k_0] + \tilde{\delta}[k-(N-k_0)]\right] \cdot W_N^{kn} = \frac{1}{2}\left[W_N^{k_0 n} + W_N^{(N-k_0)n}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[W_N^{k_0 n} + W_N^{Nn} W_N^{-k_0 n}\right] = \frac{1}{2}\left[W_N^{k_0 n} + W_N^{-k_0 n}\right] = \frac{1}{2}\left[e^{j\frac{2\pi}{N}k_0 n} + e^{-j\frac{2\pi}{N}k_0 n}\right] = \cos\left(\frac{2\pi}{N}k_0 n\right)$$

c)

$$\frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} j\frac{N}{2}\left[-\tilde{\delta}[k-k_0] + \tilde{\delta}[k-(N-k_0)]\right] \cdot W_N^{kn} = \frac{j}{2}\left[-W_N^{k_0 n} + W_N^{(N-k_0)n}\right] =$$

$$= \frac{j}{2}\left[-e^{j\frac{2\pi}{N}k_0 n} + e^{-j\frac{2\pi}{N}k_0 n}\right] = \sin\left(\frac{2\pi}{N}k_0 n\right)$$

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

10.3 Übungen mit MATLAB

MATLAB-Übung M10-1 DFT-Transformierte

Überprüfen Sie die DFT-Beispiele in ([Wer08], S. 212) durch Berechnungen mit MATLAB. Stellen Sie die drei Signale und ihre DFT-Spektren grafisch dar.

Lösung

Programmbeispiel 10-1 DFT-Spektren

```
% Dft spectra - examples
% s3s10_1.m * mw * 11/17/2007
%% Signals
N = 20;                                                    % DFT length
n = 0:N-1;                                               % normalized time
x1 = zeros(1,N); x1(11) = 1;                                % signal 1
x2 = ones(1,N);                                             % signal 2
x3 = sin((2*pi/5)*n);                                       % signal 3
%% DFT spectra
X1 = fft(x1); X2 = fft(x2); X3 = fft(x3);
%% Graphics
figure('Name','DFT Spectra','NumberTitle','off');
subplot(3,3,1), stem(n,x1,'filled','MarkerSize',5);
axis([0 N-1 -1 1]); grid;
ylabel('x_1[n] \rightarrow')
subplot(3,3,2), stem(n,real(X1),'filled','MarkerSize',5); grid
axis([0 N-1 -1 1]);
ylabel('Re(X_1[k]) \rightarrow')
subplot(3,3,3), stem(n,imag(X1),'filled','MarkerSize',5); grid
axis([0 N-1 -1 1]);
ylabel('Im(X_1[k]) \rightarrow')
subplot(3,3,4), stem(n,x2,'filled','MarkerSize',5);
axis([0 N-1 -1 1]); grid;
ylabel('x_2[n] \rightarrow')
subplot(3,3,5), stem(n,real(X2),'filled','MarkerSize',5); grid
axis([0 N-1 0 20]);
ylabel('Re(X_2[k]) \rightarrow')
subplot(3,3,6), stem(n,imag(X2),'filled','MarkerSize',5); grid
axis([0 N-1 -1 1]);
ylabel('Im(X_2[k]) \rightarrow')
subplot(3,3,7), stem(n,x3,'filled','MarkerSize',5);
axis([0 N-1 -1 1]); grid;
ylabel('x_3[n] \rightarrow'); xlabel('n \rightarrow');
subplot(3,3,8), stem(n,real(X3),'filled','MarkerSize',5); grid
axis([0 N-1 -1 1]);
ylabel('Re(X_3[k]) \rightarrow'); xlabel('k \rightarrow');
subplot(3,3,9), stem(n,imag(X3),'filled','MarkerSize',5); grid
axis([0 N-1 -10 10]);
ylabel('Im(X_3[k]) \rightarrow'); xlabel('k \rightarrow');
```

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

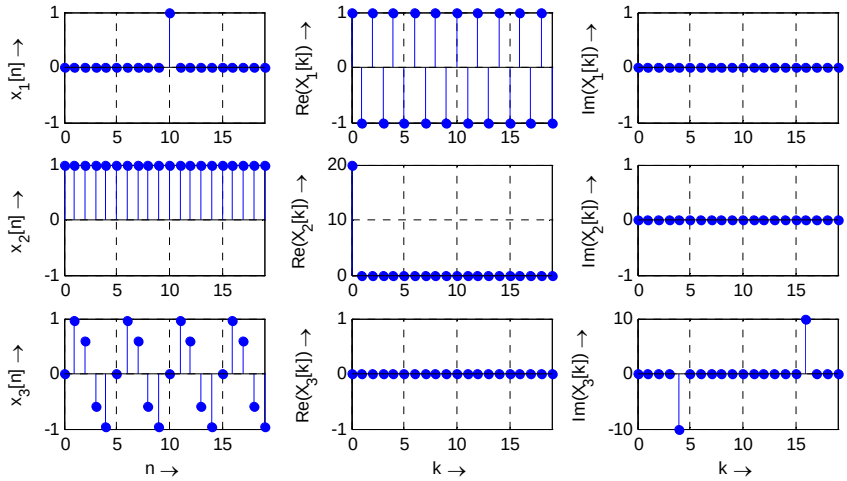


Bild 10-1 Signale und DFT-Spektren (N = 20) zu Programmbeispiel 10-1

MATLAB-Übung M10-2 Zyklische Faltung

Überprüfen Sie die Beispiele zur zyklischen Faltung in ([Wer08], S. 217) durch Berechnungen mit MATLAB.

Programmbeispiel 10-2 Zyklische Faltung

```
% Circular convolution
% s3s10_2.m * mw * 11/15/2007
N = 8;                                                    % period
x1 = [1,-1,1,-1,zeros(1,4)] ;                            % signal 1
x2 = [1,1,-1,-1,zeros(1,4)];                             % signal 2
% Circular convolution
x3 = zeros(1,N);
for n =1:N
  for k =1:N
      x3(n) = x3(n) + x1(k)*x2(mod(n-k,N)+1);
  end
end
% Graphics
figure('Name','Cyclic Convolution','NumberTitle','off');
subplot(3,1,1), stem(0:N-1,x1,'filled','MarkerSize',5);
axis([0 N-1 -1 1]); grid;
ylabel('x_1[n] \rightarrow')
subplot(3,1,2), stem(0:N-1,x2,'filled','MarkerSize',5); grid
axis([0 N-1 -1 1]);
ylabel('x_2[n] \rightarrow')
subplot(3,1,3), stem(0:N-1,x3,'filled','MarkerSize',5); grid
axis([0 N-1 -1 1]);
ylabel('x_3[n] \rightarrow')
xlabel('n \rightarrow')
```


© Martin Werner, Fulda 2008

MATLAB-Übung M10-3 FIR-Filterung mit der DFT

In dieser Übung knüpfen wir an vorhergehende Ergebnisse an und stellen den Bezug zu den Anwendungen der digitalen Signalverarbeitung her. Dabei gehen wir in zwei Schritten vor: Im ersten benutzen wir die DFT um eine Bandpass-Filterung direkt im Frequenzbereich vorzunehmen. Im zweiten stellen wir den Zusammenhang mit dem Zeitbereich her und analysieren das Ergebnis.

a) Bandpass-Filterung eines Rauschsignals

Ein normiertes, unkorreliertes gaussverteiltes Rauschsignal $x[n]$ der Länge 128, siehe MATLAB-Befehl `randn`, soll gemäß dem Wunschfrequenzgang

$$H_w\left(e^{j\Omega}\right) = \begin{cases} 1 & \text{für } \frac{3\pi}{8} < |\Omega| < \frac{5\pi}{8} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad |\Omega| \leq \pi \tag{10.1}$$

mit der DFT gefiltert werden.

Wir skizzieren zunächst den Wunschfrequenzgang für Ω im Bereich von 0 bis 2π in Bild 10-2. Die normierte Mittenkreisfrequenz Ω_c und die normierte Bandbreite W sind $\pi/2$ bzw. $\pi/4$.

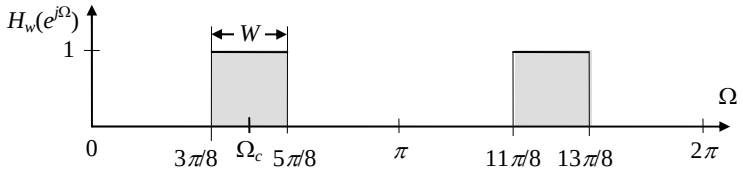


Bild 10-2 Wunschfrequenzgang des Bandpass-Filters

Da das Signal $x[n]$ genau 128 Werte umfasst, erhalten wir nach der DFT die Abtastung des Spektrums.

$$X[k] = X\left(\exp\left[j\frac{2\pi}{N}k\right]\right) \quad \text{für } k = 0,1,2,\ldots,N-1 \text{ und } N = 128 \tag{10.2}$$

Die Wirkung des Bandpass-Filters im Frequenzbereich (10.1) ist offensichtlich. Durch die Multiplikation des Spektrums mit dem Wunschfrequenzgang werden alle Spektralanteile außerhalb des Durchlassbereichs zu null gesetzt. Konsequenterweise setzen wir alle DFT-Koeffizienten außerhalb des Durchlassbereichs zu null. Die Rücktransformation des so manipulierten Spektrums liefert dann das gewünschte gefilterte Signal $y[n]$.

Das Programmbeispiel 10-3 stellt eine mögliche MATLAB-Realisierung vor.

In Bild 10-3 sind die Simulationsergebnisse zu sehen. Das gefilterte Signal $y[n]$ zeigt den Einfluss des relativ schmalbandigen Bandpass-Filters mit der normierten Mittenkreisfrequenz von $\pi/2$. Die Mittenkreisfrequenz entspricht einer Periode von 4 Zeitschritten. Dies führt im Signal $y[n]$ zu entsprechenden, deutlich sichtbaren Mustern.

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

Programmbeispiel 10-3 Bandpass-Filterung mit der DFT

```
% Bandpass filtering with DFT
% s3s10_3.m * mw * 11/17/2007
%% Noise signal
N = 128;                                                    % DFT length
x = randn(1,N);                                            % noise signal
X = fft(x,N);                                % % DFT spectrum of noise signal
%% Bandpass filter
H = zeros(0,N);
for k=1:N
  wk = (2*pi/N)*(k-1);
  if wk > 3*pi/8 & wk < 5*pi/8                                % passband
    H(k) = 1;
  elseif wk > 11*pi/8 & wk< 13*pi/8                           % passband
    H(k) = 1;
  else                                                        % stopband
    H(k) = 0;
  end
end
Y = X.*H;   % filtering in frequency domain
y = real(ifft(Y,N));
%% Graphics
figure('Name','Bandpass Filtering with DFT','NumberTitle','off');
subplot(4,1,1), stem(0:N-1,x,'filled','MarkerSize',5);
axis([0 N-1 -4 4]); grid;
ylabel('x[n] \rightarrow')
subplot(4,1,2), stem(0:N-1,y,'filled','MarkerSize',5); grid
axis([0 N-1 -2 2]);
ylabel('y[n] \rightarrow')
subplot(4,1,3), stem(0:N-1,abs(X),'filled','MarkerSize',5); grid
axis([0 N-1 0 30]);
ylabel('|X[k]| \rightarrow')
subplot(4,1,4), stem(0:N-1,abs(Y),'filled','MarkerSize',5); grid
axis([0 N-1 0 20]);
ylabel('|Y[k]| \rightarrow')
xlabel('n, k \rightarrow')
```

b) Impulsantwort und Betragsfrequenzgang des FIR-Filters

Bevor wir mit der Analyse des implizit benutzten FIR-Filters beginnen, blicken wir auf das Beispiel in ([Wer08], Abschnitt 8.6) zurück, der Berechnung der Impulsantwort des idealen zeitkontinuierlichen Bandpasses. Die Ergebnisse lassen sich auf den zeitdiskreten Fall übertragen, so dass wir sowohl das Resultat bereits erahnen wie auch später unsere Berechnungen überprüfen können.

Wir gehen vom DFT-Spektrum `H(k)` des Bandpass-Filters in Programmbeispiel 10-3 aus

$$H[k] = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 25,25,\ldots 39 \text{ und } k = 89,90,\ldots 103 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{10.3}$$

und führen die Rücktransformation der Länge $N = 128$ durch. Es ergibt sich die Impulsantwort in Bild 10-4 oben.

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

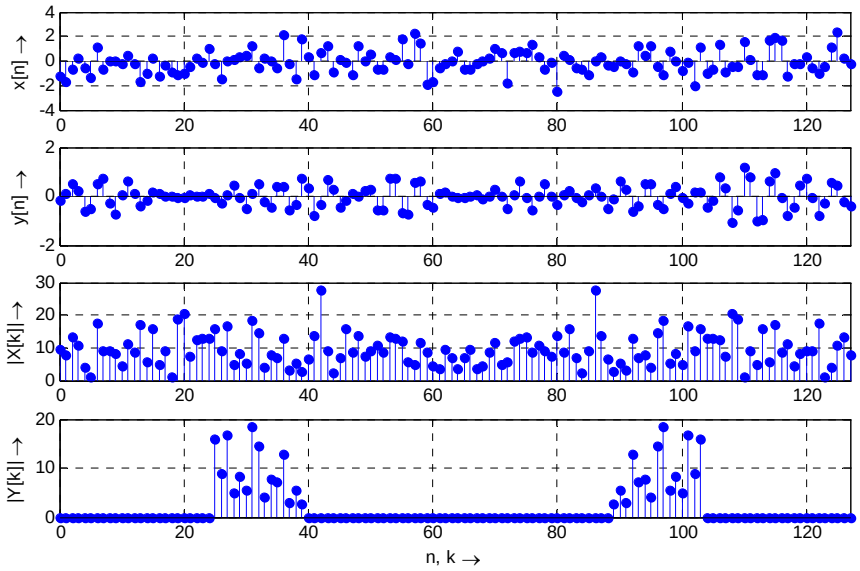


Bild 10-3 Rauschsignal $x[n]$, gefiltertes Signal y[n], Betrag des DFT-Spektrums vor der Filterung $X[k]$ und nach der Filterung $Y[k]$ (Simulationsergebnisse zu Programmbeispiel 10-3)

Zur übersichtlichen graphischen Darstellung werden noch kleinere Anpassungen in Bild 10-4 oben vorgenommen. Zunächst wird mit dem Befehl `fftshift` die Impulsantwort durch (N/2-mal) 64-mal zyklisches Verschieben in die für uns gewohnte Reihenfolge der Koeffizienten gebracht.

Aus [Wer08], Abschnitt 8.6, wissen wir, dass sich die Impulsantwort des idealen Bandpass-Filters als Produkt aus einer si-Funktion mit einer Kosinusfunktion darstellt. Dabei ist die Kreisfrequenz der Kosinusfunktion gleich der Mittenkreisfrequenz des Durchlassbereichs und die Abstände der Nulldurchgänge der si-Funktion gleich π dividiert durch die Bandbreite W. Wir übertragen die Zusammenhänge ins Zeitdiskrete.

Die normierte Mittenkreisfrequenz beträgt $\Omega_c = \pi / 2$, so dass die Kosinusfolge $\cos\left(\pi/2 \cdot [n - N/2]\right)$ resultiert. Mit n = 60, 61, …, 68 erhalten wir für sie „1, 0, –1, 0, 1, 0, –1, 0, 1“, wie wir auch im Bild in der Mitte oben erkennen können.

Um die theoretischen Zusammenhänge aufzuzeigen, ist die si-Funktion als Einhüllende zusätzlich in Bild 10-4 eingezeichnet. Die Abstände der Nulldurchgänge, d. h. der Faktor B im Argument der `sinc`-Funktion beträgt (1/8)·(7/8). Der erste Faktor entspricht der nominellen halben Bandbreite $W / 2 = \pi / 8$, wobei π in der `sinc`-Funktion bereits enthalten ist. Der zweite Faktor berücksichtigt, dass die Bandgrenze tatsächlich eher in der Mitte zwischen den beiden DFT-Koeffizienten im Übergang vom Durchlassbereich (Wert 1) und Sperrbereich (Wert 0) anzunehmen ist. Das Resultat in Bild 10-4 rechtfertigt die Annahme.

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

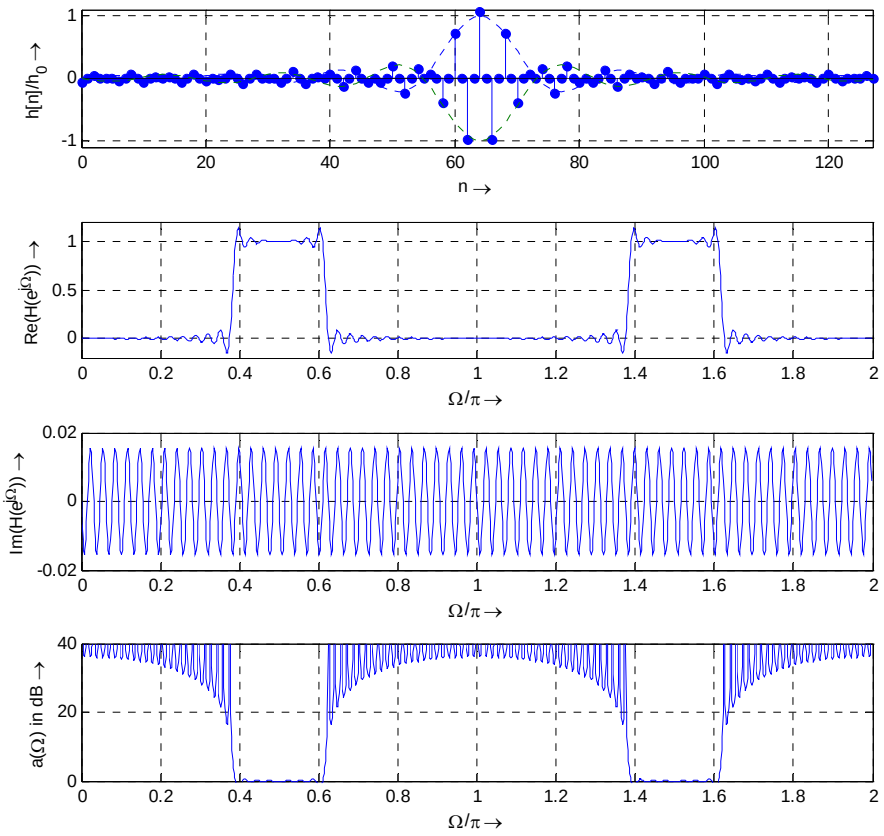


Bild 10-4 Impulsantwort, Realteil und Imaginärteil des Frequenzganges und Frequenzgang der Dämpfung für das FIR-Bandpass-Filter „DFT“

Schließlich sei zur Impulsantwort angemerkt, dass im Programm die Impulsantwort entsprechend dem Ergebnis für den idealen Bandpass skaliert wurde, so dass sich ein Maximalwert von annähernd eins ergibt, siehe Programmvariable `h0`.

Zur Darstellung des Frequenzganges wird die Zero-padding-Methode angewandt. Es wird die Impulsantwort durch Anhängen von Nullen, hier auf das Achtfache, verlängert und dann der DFT unterworfen. Es resultiert die im Rahmen der Bildauflösung quasi-kontinuierliche Darstellung des Spektrums in Bild 10-4. Das Bild zeigt den Realteil und den Imaginärteil, wobei die Phasenverschiebung aufgrund der zeitlichen Verschiebung der Impulsantwort im Programm kompensiert wurde. Wir erkennen im dominierenden Realteil deutlich den Frequenzgang des FIR-Bandpass-Filters mit Über- und Unterschwingern entsprechende dem gibbschen Phänomen. Das Oszillieren des Frequenzganges ist typisch für den Filterentwurf auf der Basis einer abgebrochenen Fourier-Reihe [Wer06a].

Der Imaginärteil des Frequenzganges zeigt einen sinusförmigen Verlauf mit relativ kleiner Amplitude. Da die Impulsantwort des idealen Bandpasses eine gerade Funktion ist, erwarten wir, dass der Imaginärteil verschwindet. Aus dem Zuordnungsschema der Fourier-Transforma-

© Martin Werner, Fulda 2008

tion und der DFT können wir schließen, dass die Impulsantwort hier einen ungeraden Anteil enthält. Der sinusförmige Verlauf des Imaginärteils legt nahe, dass dieser Anteil in der Impulsantwort impulsförmig ist. Darüber hinaus können wir aus der Periode die Lage des Impulses feststellen.

Im interpolierten DFT-Spektrum ergibt sich für den Imaginärteil eine Periode von 16. Da wir im Programm die DFT-Länge um den Faktor 8 verlängert haben, entspricht das bzgl. der Länge $N = 128$ einer Periode von 2. In den Zeitbereich transformiert liefert dies einen Impulsanteil an der Stelle $n = N / 2$. Da wir die Impulsantwort zur grafischen Darstellung in Bild 10-4 um $N / 2$ verschoben haben, müssen wir den ungeraden Anteil dort an der Stelle $n = 0$ suchen. Tatsächlich finden wir am linken Ende der Impulsantwort einen Wert, der keinen Partner für die gerade Symmetrie am rechten Ende besitzt.

Anmerkung: Sie können die gerade Symmetrie erzwingen, indem sie diesen Wert zu null setzen, siehe auskommentierte Befehle im Programmbeispiel 10-4. Dann verschwindet der Imaginärteil im Bild.

Abschließend ist der Verlauf der Dämpfung im logarithmischen Maß in Bild 10-4 unten zu sehen. Wir erkennen gut die selektive Wirkung des Bandpasses. Jedoch ist die Sperrwirkung mit einer garantierten Dämpfung unter 40 dB bescheiden verglichen mit einem Butterworth-Tiefpass.

Programmbeispiel 10-4 Realisierung eines Bandpass-Filters mit der DFT

```
% Bandpass filtering with DFT
% s3s10_4.m * mw * 11/17/2007
%% Bandpass filter
N = 128;                                                % DFT length
H = zeros(0,N);
for k=1:N
  wk = (2*pi/N)*(k-1);
  if wk > 3*pi/8 & wk< 5*pi/8
    H(k) = 1;
  elseif wk > 11*pi/8 & wk< 13*pi/8
    H(k) = 1;
  else
    H(k) = 0;
  end
end
% Impulse response
h = real(ifft(H,N));
% Frequency response
NN = 8*N;
HH = fft(fftshift(h),NN);                  % interpolate (zero padding)
% hh = fftshift(h); hh(1)=0;                          % enforce symmetry
% HH = fft(hh,NN);                         % interpolate (zero padding)
%% Graphics
figure('Name','Bandpass Filtering with DFT','NumberTitle','off');
                % right sided normalized impulse response (causality)
n = 0:N-1;
h0 = (1/4)*(3.5/4)  % maximum of impulse response 2*Omega_cut_off_LP/pi
subplot(4,1,1), stem(n,fftshift(h)/h0,'filled','MarkerSize',5);
axis([0 N-1 -1.1 1.1]); grid;
ylabel('h[n]/h_0 \rightarrow')
xlabel('n \rightarrow')
hold on                          % sinc envelope depending on bandwidth
```


© Martin Werner, Fulda 2008

```
B = (1/8)*(3.5/4);     % relative normalized (one-sided) bandwidth pi/8
plot(n,sinc((n-N/2)*B),':',n,-sinc((n-N/2)*B),':')
hold off
w = 0:NN-1; w = 2*pi*w/NN;                % normalized radian frequency
ww = exp(j*w*N/2);             % phase compensation term for time shift
subplot(4,1,2),plot(w/pi,real(HH.*ww)); grid
axis([0 2 -.2 1.2]);
ylabel('Re(H(e^{j\Omega})) \rightarrow')
xlabel('\Omega/\pi \rightarrow')
subplot(4,1,3),plot(w/pi,imag(HH.*ww)); grid
axis([0 2 -.02 .02]);
ylabel('Im(H(e^{j\Omega})) \rightarrow')
xlabel('\Omega/\pi \rightarrow')
subplot(4,1,4),plot(w/pi,-20*log10(abs(HH.*ww))); grid
axis([0 2 0 40]);
ylabel('a(\Omega) in dB \rightarrow')
xlabel('\Omega/\pi \rightarrow')
```

MATLAB-Übung M10-4 Schnelle Faltung mit der Overlap-Add-Methode

In dieser Übung soll ein Zufallssignal tiefpassgefiltert werden.

a) Schreiben Sie ein MATLAB-Programm, das die Impulsantwort eines FIR-Tiefpasses mit vorzugebender normierter Grenzkreisfrequenz Ω_g erzeugt. Der Einfachheit halber gehen Sie von einem idealen Tiefpass aus und gehen wie im Beispiel in [Wer08], Abschnitt 9.6.2, vor.

b) Ergänzen Sie das Programm so, dass das zu filternde Signal mit dem MATLAB-Befehl `randn(1,1e4)` erzeugt wird.

c) Fügen Sie nun die Filterung mit der Overlap-Add-Methode hinzu. Wählen Sie die DFT-Länge gleich 1024.

d) Führen Sie mit MATLAB die (aperiodische) Faltung durch und ergänzen Sie Ihr Programm um eine aussagekräftige Grafik.

Lösung

Siehe Programmbeispiel M10-5.

Programmbeispiel 10-5 Schnelle Faltung mit der Overlap-Add-Methode

```
% Fast convolution using overlap-add method
% s3s10_5.m * mw * 09/26/2007
%% Low-pass design - Fourier method
Omeg_c = 1/5;                          % cut-off radian frequency / pi
n0 = 4/Omeg_c; n = 1:2*n0-1;
Lh = 2*n0-1;                             % length of impulse response
h = Omeg_c*sinc(Omeg_c*(n-n0));                    % impulse response
%% Input signal
Lx = 1e4;                                          % input signal length
randn('state',0);                  % initialize random number generator
x = randn(1,Lx);                       % input signal - random sequence
yap = conv(h,x);               % a periodic convolution - for reference
%% Fast convolution using overlap-add method
Nfft = 1024;                                        % desired fft length
```


© Martin Werner, Fulda 2008

```
LxB  = Nfft - Lh + 1;                       % block length of x for fft
H    = fft(h,Nfft);                  % dft spectrum of h of length Nfft
BNr  = 1;                                  % initialize block number
y_OS = zeros(size(yap));                  % allocate memory for result
while BNr*LxB <= Lx-LxB
    n1 = (BNr-1)*LxB;              % start of block for fft in signal x
    n2 = n1 + LxB;                   % end of block for fft in signal x
    X = fft(x(n1+1:n2),Nfft);                % dft spectrum of block
    yB_OS = ifft(H.*X);                                % output block
    y_OS(n1+1:n1+Nfft) = y_OS(n1+1:n1+Nfft) + yB_OS;
    BNr = BNr + 1;
end
MAX = max(abs(yap(1:floor(Lx/Nfft))-y_OS(1:floor(Lx/Nfft))));
fprintf('maximum deviation = %g \n',MAX)
%% Graphics
FIG1 = figure('Name','Overlap-add
Method','NumberTitle','off','Units','normal',...
  'Position',[.5 .4 .45  .55]);
N = 100; n = 0:N; Offset = 1000;
subplot(4,1,1), stem(n,[h/Omeg_c zeros(1,N+1-
length(h))],'filled','MarkerSize',5),grid
  axis([0 N -.5 1]); ylabel('h[n] * \pi / \Omega_c \rightarrow')
n = Offset:Offset+N;
subplot(4,1,2), stem(n,x(n+1),'filled','MarkerSize',5),grid
  axis([Offset Offset+N -4 4]);ylabel('x[n] \rightarrow')
subplot(4,1,3), stem(n,yap(n+1),'filled','MarkerSize',5),grid
  axis([Offset Offset+N -2 2]); ylabel('y_{conv}[n] \rightarrow')
subplot(4,1,4), stem(n,y_OS(n+1),'filled','MarkerSize',5),grid
  axis([Offset Offset+N -2 2]);
  xlabel('n \rightarrow'),ylabel('y_{os}[n] \rightarrow')
```

MATLAB-Übung M10-5 Schnelle Faltung mit der Overlap-Save-Methode

Wiederholen Sie die Aufgabe M10-4 mit der Overlap-Save-Methode.

Lösung

Siehe Programmbeispiele 10-5 und 10-6.

Programmbeispiel 10-6 Schnelle Faltung mit der Overlap-Save-Methode

Programmausschnitt

```
%% Fast convolution using overlap-save method
Nfft = 1024;                                      % desired fft length
LxB  = Nfft - Lh + 1;                       % block length of x for fft
H    = fft(h,Nfft);                  % dft spectrum of h of length Nfft
BNr  = 1;                                  % initialize block number
m   = Nfft - LxB;                                  % auxiliary index
x = [zeros(1,m) x];                                % preceding zeros
y_OS = zeros(size(yap));                  % allocate memory for result
while BNr*LxB <= Lx-LxB
    n1 = (BNr-1)*LxB;              % start of block for fft in signal x
    n2 = n1 + Nfft;                  % end of block for fft in signal x
```


© Martin Werner, Fulda 2008

```
    X = fft(x(n1+1:n2),Nfft);                    % dft spectrum of block
    yB_OS = ifft(H.*X);                                  % output block
    y_OS(n1+1:n1+LxB) = yB_OS(Nfft-LxB+1:Nfft);
    BNr = BNr + 1;
end
```

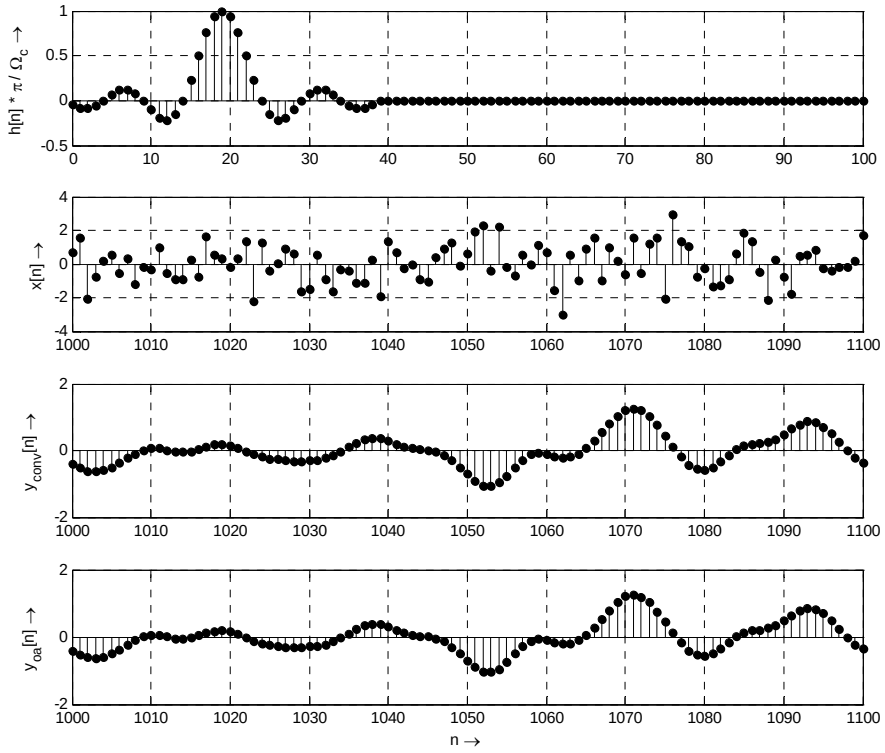


Bild 10-5 Schnellen Faltung mit der Overlap-Add-Methode (M10-4)

© Martin Werner, Fulda 2008

11 Digitale Verarbeitung analoger Signale

11.1 Übungen mit MATLAB

MATLAB-Übung M11-1 Abtasttheorem

Erzeugen Sie mit 8 kHz abgetastete Sinussignale mit den Frequenzen 1, 2, …, 7 kHz und geben Sie die Signale mit dem MATLAB-Befehle `soundsc` als Audiosignale aus.

Lösung

Programmbeispiel 11-1 Spiegelfrequenzen

```
% Sampling theorem - mirror frequencies
% s3s11_1.m * mw * 11/17/2007
FS = 8000;                                  % sampling frequency in Hz
t = 0:1/FS:1;                                       % normalized time
x = [];
for k = 1:7                                          % signal 1...7 kHz
  x = [x sin(2*pi*k*1e3*t)];
end
soundsc(x,FS)                                                % sound
```

MATLAB-Übung M11-2 Spreizen

Erzeugen Sie eine Kosinusfolge der Länge 16 mit der normierten Kreisfrequenz $\Omega = 2\pi/8$ und spreizen Sie die Folge durch Einschieben von jeweils $L = 2$, 3 und 4 Nullen. Vergleichen Sie die DFT-Spektren der Signale vor und nach dem Spreizen.

Hinweis: Bild 11-1 zeigt ein mit dem Programmbeispiel 11-2 erzeugtes Lösungsbeispiel.

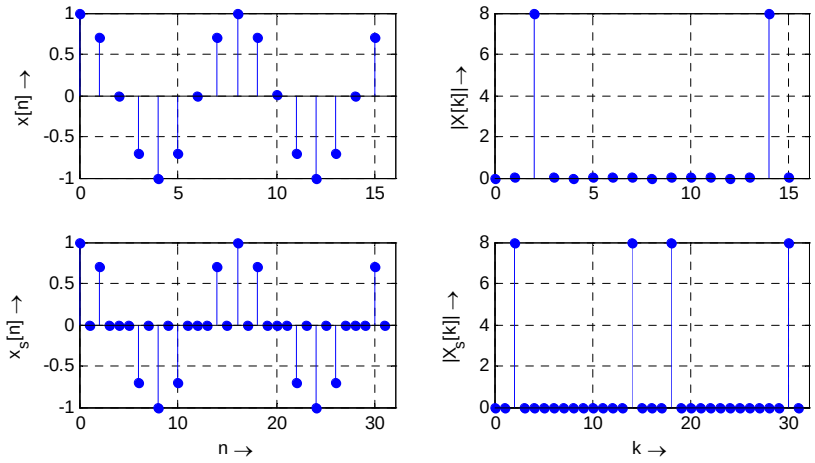


Bild 11-1 Kosinusfolge vor und nach dem Spreizen mit $L = 2$ (links) und zugehörige DFT-Spektren (rechts), siehe Programmbeispiel 11-2

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

Programmbeispiel 11-2 Spreizen

```
% Spreading
% s3s11_2.m * mw * 11/17/2007
N = 16;                                                  % signal length
L = 2;                                                 % spreading factor
n = 0:N-1;
x = cos((2*pi/8)*n);
xs = zeros(1,N*L);
xs(1,1:L:N*L) = x;
% DFT spectra
X  = fft(x);
Xs = fft(xs);
% Graphics
k = 0:N*L-1;
figure('Name','Spreading','NumberTitle','off');
subplot(2,2,1), stem(n,x,'filled','MarkerSize',5); grid
axis([0 N -1 1]);
ylabel('x[n] \rightarrow')
subplot(2,2,2), stem(n,abs(X) ,'filled','MarkerSize',5); grid
axis([0 N 0 N/2]);
ylabel('|X[k]| \rightarrow')
subplot(2,2,3), stem(k,xs,'filled','MarkerSize',5); grid
axis([0 N*L -1 1]);
ylabel('x_s[n] \rightarrow'); xlabel('n \rightarrow');
subplot(2,2,4), stem(k,abs(Xs) ,'filled','MarkerSize',5); grid
axis([0 N*L 0 N/2]);
ylabel('|X_s[k]| \rightarrow'); xlabel('k \rightarrow');
```


© Martin Werner, Fulda 2008

12 Grundbegriffe aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung

12.1 Aufgaben

Aufgabe A12.1-1 Histogramm ✍

Eine Messung der elektrischen Spannung an einem Temperatursensor einer Anlage hat bei einem Stichprobenumfang von 10 000 die Werte in Tabelle 12-1 ergeben.

Hinweis: Der Sensor erfasst Temperaturen im Bereich von 0 bis 99°C mit der Auflösung von 1°C.

Tabelle 12-1 Häufigkeiten der Temperaturwerte in °C

Messintervall	0...9	10...19	20...29	30...39	40...49	50...59	60...69	70...79	80...89	90...99
Häufigkeit	0	0	301	1680	3110	3229	1350	210	20	0

a) Skizzieren Sie das Histogramm der relativen Häufigkeiten der Temperatur.

b) Bestimmen Sie den linearen Mittelwert und die Varianz der Temperatur.

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der approximierenden Normalverteilung.

d) Nehmen Sie an, dass im Betrieb der Anlage die Temperatur nicht größer als 79°C sein darf. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Überschreitung auftritt?

12.2 Lösungen

Lösung A12.1-1 Histogramm ☑

a) Histogramm, siehe Bild 12-1

b) Linearer Mittelwert $\mu \approx 49{,}4$

Varianz $\sigma^2 \approx 119{,}2$

c) siehe Bild 12-1

$$f_T(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 119{,}2}} \cdot \exp\left(-\frac{[x - 49{,}4]^2}{2 \cdot 119{,}2} \right)$$

d) Wahrscheinlichkeit für die Temperaturüberschreitung $P(T > 79°C) \approx 20/10000 = 0{,}002$

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

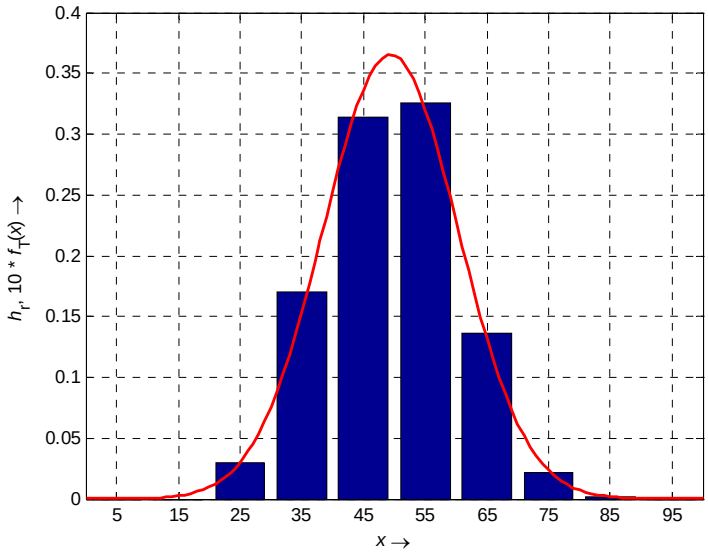


Bild 12-1 Relative Häufigkeiten h_r mit approximierender WDF $f_1(x)$

12.3 Übungen mit MATLAB

MATLAB-Übung M12-1 Zufallszahlen und Histogramm

a) Erzeugen Sie mit MATLAB eine Stichprobe von normierten gaußverteilten Zufallszahlen und führen Sie eine Häufigkeitsanalyse durch. Stellen Sie Ihr Ergebnis als normiertes Histogramm dar, d. h. mit einer Fläche gleich eins. Tragen Sie auch die WDF der approximierenden Normalverteilung ein.

Hinweis: siehe MATLAB-Befehle `randn`, `hist` und `bar`.

b) Variieren Sie den linearen Mittelwert und die Varianz der Zufallszahlen durch eine lineare Abbildung und beobachten Sie die Änderungen im Histogramm.

Erklären Sie die Ergebnisse.

c) Variieren Sie den Stichprobenumfang und die Intervalleinteilung im Histogramm. Diskutieren Sie die Ergebnisse.

Programmbeispiel 12-1 Zufallszahlen und Histogramm

```
% Random numbers and histogram
% s3s12_1.m * mw * 03/20/2008
N = 400;                                    % number of samples
X = randn(1,N);                               % random numbers
% Histogram
delta = 1;
Hi = -4:delta:4;
hx = hist(X,Hi);
```


© Martin Werner, Fulda 2008

```
% Empirical mean and variance
xmue = sum(X)/N;
sx = sum((X-xmue).^2)/(N-1);
fprintf('\n')
fprintf('linear mean: %8.5f\n',xmue)
fprintf('variance   : %8.5f\n',sx)
% Approximating gaussian bell function
x = -4:.1:4;
f = (1/sqrt(2*pi*sx))*exp(-(1/(2*sx))*(x-xmue).^2);
% Graphics
figure('Name','random numbers and histogram','NumberTitle','off');
subplot(2,1,1), plot(1:N,X,'.'), grid
axis([1 N -4 4]);
ylabel('{\itx}_{\iti} \rightarrow'); xlabel('{\iti} \rightarrow');
hx = hx/(N*delta);
subplot(2,1,2), bar(Hi,hx,'y'), grid
ylabel('norm. Histogram, {\itf}_{\itX}({\itx}) \rightarrow');
xlabel('{\itx} \rightarrow');
hold on
plot(x,f,'LineWidth',2)
hold off
```

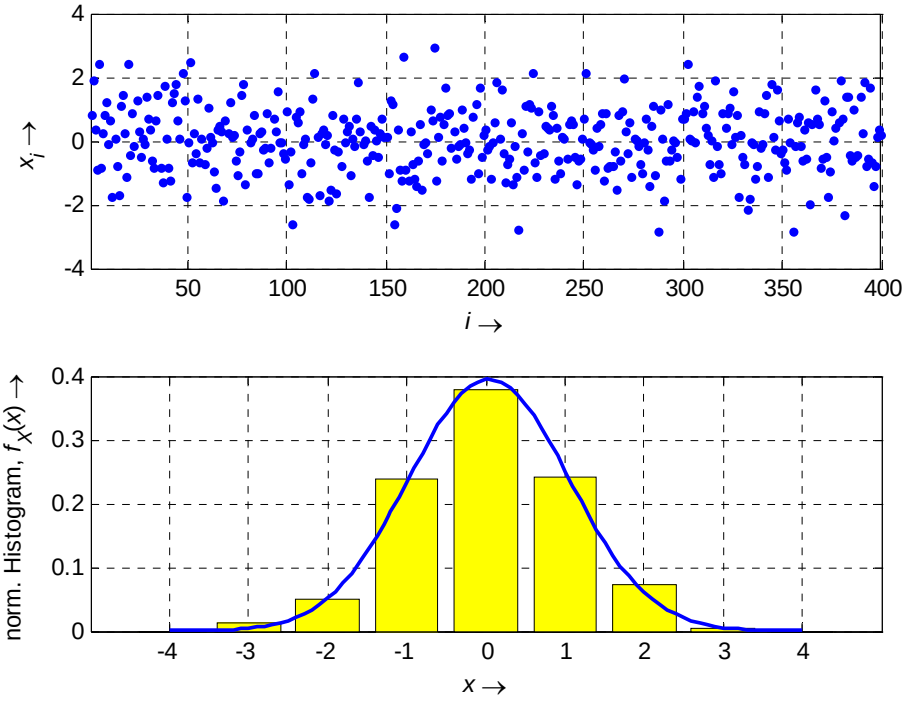


Bild 12-2 Zufallszahlen und normiertes Histogramm mit approximierender WDF

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

MATLAB-Übung M12-2 Korrelation

Durch die Addition $Y = a \cdot X + b \cdot Z$, mit den normalverteilten SV X und Z, entsteht ein Paar linear abhängiger stochastischer Variablen (X,Y). Erzeugen Sie mit MATLAB eine ausreichende Stichprobe. Stellen Sie die Wertepaare in einem Streudiagramm dar und tragen Sie die Regressionsgerade ein.

Variieren sie die Faktoren a und b und diskutieren Sie die entsprechenden Änderungen im Streudiagramm.

Programmbeispiel 12-2 Korrelation

```
% Correlation
% s3s12_2.m * mw * 11/18/2007
N = 400;                                                % number of samples
x = randn(1,N);                                            % random numbers
z = randn(1,N);                                            % random numbers
a = -.8;
b = sqrt(1-a*a);
y = (a*x + b*z)/sqrt(2);
% Empirical correlation coefficient
xmue = sum(x)/N;
sx = sum((x-xmue).^2)/(N-1);
ymue = sum(y)/N;
sy = sum((y-ymue).^2)/(N-1);
rxy = (1/(N-1))*sum((x-xmue).*(y-ymue))/sqrt(sx*sy);
fprintf('\n')
fprintf('nmue: %8.5f     sx: %8.5f\n',xmue,sx)
fprintf('ymue: %8.5f     sy: %8.5f\n',ymue,sy)
fprintf('rxy : %8.5f\n',rxy)
% Graphics
b = rxy*sqrt(sy/sx);
a = ymue - b*xmue;
sigma = ((N-1)/(N-2))*sy*(1-rxy^2);
fprintf('b   : %8.5f     a : %8.5f     sigma: %8.5f\n',b,a,sigma)
figure('Name','Scatter plot','NumberTitle','off');
scatter(x,y,3,'filled')
axis([-3 3 -3 3]); grid
ylabel('y \rightarrow'); xlabel('x \rightarrow');
n = -3:3;
hold on
plot(n,b*n+a,'LineWidth',2)
hold off
```


© Martin Werner, Fulda 2008

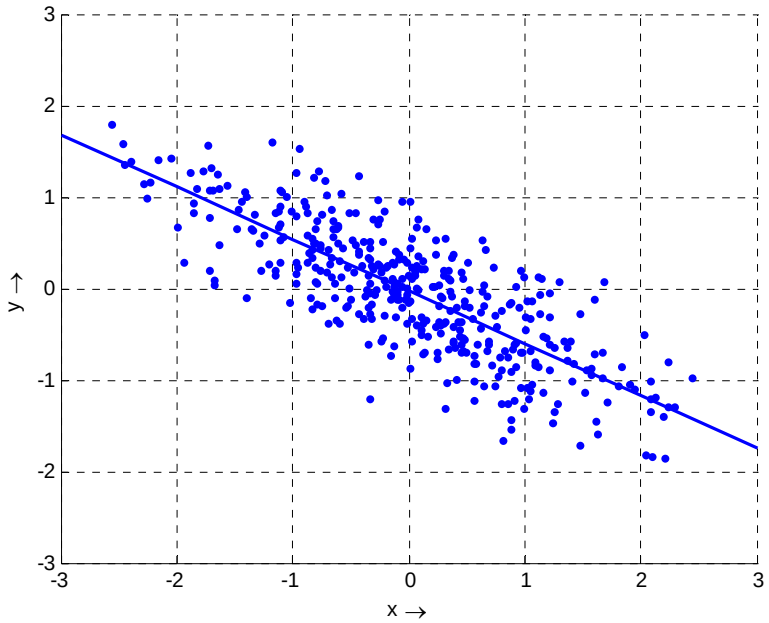


Bild 12-3 Streudiagramm mit empirischem Korrelationskoeffizient $r_{xy} = -0{,}80$

MATLAB-Übung M12-3 Nichtlineare Abbildungen

Erzeugen Sie mit MATLAB durch die nichtlineare Abbildung normalverteilter Zufallszahlen $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ eine Stichprobe rayleighverteilter Zufallszahlen stochastischer Variablen. Nehmen Sie das Histogramm auf und vergleichen Sie das empirische Ergebnis mit der theoretisch zu erwartenden WDF.

Programmbeispiel 12-3 Rayleigh-Verteilung

```
% Nonlinear mapping and histogram
% s3s12_3.m * mw * 11/18/2007
N = 1000;                                        % number of samples
X = randn(1,N); Y = randn(1,N);                    % random numbers
R = sqrt(X.^2+Y.^2);
% Histogram
delta = .2;
Hi = 0:delta:4;
hr = hist(R,Hi);
% Empirical mean and variance
rmue = sum(R)/N;
sr = sum((R-rmue).^2)/(N-1);
fprintf('\n')
fprintf('linear mean: %8.5f\n',rmue)
```

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

```
fprintf('variance   : %8.5f\n',sr)
% Approximating Rayleigh pdf (sigma = 1)
r = 0:.1:4;
f = r.*exp(-.5*r.^2);
% Graphics
figure('Name','Pdf of Rayleigh distribution','NumberTitle','off');
subplot(2,1,1), plot(1:N,R,'.'), grid
axis([1 N 0 5]);
ylabel('r_i \rightarrow'); xlabel('i \rightarrow');
hr = hr/(N*delta);
subplot(2,1,2), bar(Hi,hr,'y'), grid
ylabel('norm. Histogram, f_R(r) \rightarrow'); xlabel('r
\rightarrow');
hold on
plot(r,f,'LineWidth',2)
hold off
```

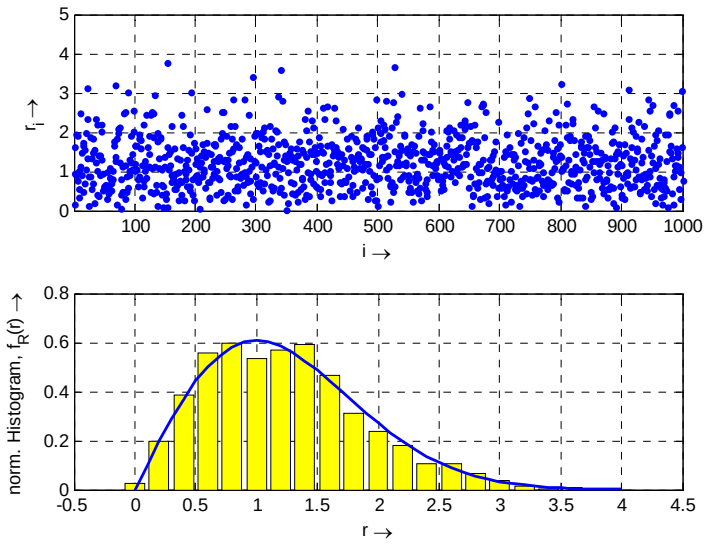


Bild 12-4 Rayleighverteilte Zufallszahlen und Histogramm (Programmbeispiel 12-3)

© Martin Werner, Fulda 2008

13 Stochastische Signale und LTI-Systeme

13.1 Aufgaben

Aufgabe A13.1-1 Autokorrelationsfunktion ✍

Welche der 5 Funktionen in Bild 13-1 können prinzipiell keine Autokorrelationsfunktion eines reellen stationären Prozesses sein? Begründen Sie Ihre Antworten.

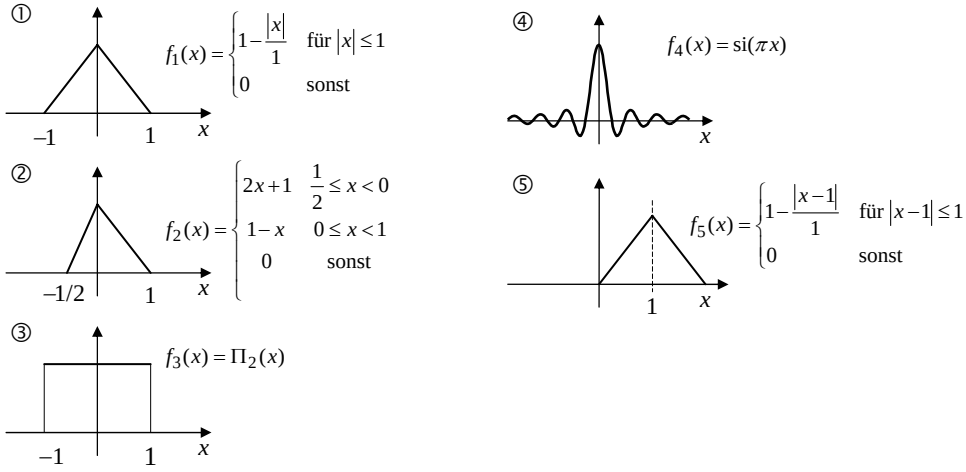


Bild 13-1 Funktionen $f_1(x)$ bis $f_5(x)$

Aufgabe A13.1-2 Zufallsprozess und LTI-System ✍

Der am Eingang des LTI-Systems mit der Übertragungsfunktion

$$H(s) = \frac{1}{s+2}$$

auftretende stochastische Prozess $X(t)$ ist normalverteilt und hat den linearen Mittelwert und die Varianz gleich 1.

a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion am Systemeingang an.

b) Bestimmen Sie die mittlere Leistung des Eingangsprozesses.

c) Geben Sie den linearen Mittelwert am Systemausgang an.

Im Weiteren wird der Eingangsprozess in einen deterministischen Anteil, entsprechend dem linearen Mittelwert, und einen stochastischen Anteil $Z(t)$ zerlegt. Dabei sei $Z(t)$ ein weißer Prozess.

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

d) Geben Sie das Leistungsdichtespektrum ohne deterministischen Anteil am Systemausgang an.

e) Berechnen Sie die mittlere Leistung am Systemausgang ohne und mit deterministischem Anteil.

Aufgabe A13.1-3 Zufallsprozess und LTI-System ✍

Der am Eingang des LTI-Systems mit der Übertragungsfunktion

$$H(z) = \frac{1}{z + 1/2}$$

auftretende stochastische Prozess $X[n]$ ist normalverteilt und hat den linearen Mittelwert 0 und die Varianz gleich 1.

a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion am Systemeingang an.

b) Bestimmen Sie die mittlere Leistung des Eingangsprozesses.

c) Geben Sie den linearen Mittelwert am Systemausgang an.

e) Geben Sie das Leistungsdichtespektrum ohne deterministischen Anteil (Mittelwert) am Systemausgang an.

Aufgabe A13.1-4 SNR ✍

Der Empfang eines durch breitbandiges weißes Rauschen additiv gestörten Nachrichtensignals $x(t)$ in Form einer elektrischen Spannung soll durch ein ideales Tiefpassfilter $h_{TP}(t)$ verbessert werden. Das Nachrichtensignal besitzt die Grenzfrequenz f_g = 200 kHz und die Leistung S = 1 V^2 bezogen auf den Referenzwiderstand 1Ω. Die zweiseitige Rauschleistungsdichte der Störung ist $N_0 / 2 = 10^{-8}$ V^2 / Hz bezogen auf den Referenzwiderstand 1Ω.

a) Bestimmen Sie das Signal-Rauschverhältnis (SNR) in dB am Ausgang des idealen Tiefpasses. Wählen Sie dabei die Grenzfrequenz des Tiefpasses $f_{g,TP}$ so, dass das Nutzsignal durch die Filterung nicht verändert wird, aber die Leistung des resultierenden Störanteils möglichst klein wird.

b) Berechnen Sie für die Nachrichtenübertragung in (a) die theoretisch maximale fehlerfrei übertragbare Bitrate.

Hinweis: Siehe Shannonsche Kanalkapazität in der Nachrichtentechnik $C = B \cdot \mathrm{ld}(1+SNR)$ bit mit der Bandbreite B und dem Zweierlogarithmus ld und der Dimension [C] = bit/s.

Aufgabe A13.1-5 SNR ✍

Es soll eine binäre Datenübertragung mit Tiefpassfilterung im Empfänger untersucht werden. Bild 5.1 stellt die grundlegende Situation dar. Es werden für die logische „1“ Rechteckimpulse mit der Amplitude A = 1 mV und der Dauer T = 1 µs gesendet. Die logische „0“ wird mit der Amplitude $-A$ dargestellt.

Das Nachrichtensignal wird durch ein breitbandiges weißes Rauschen additiv gestört.

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

a) Geben Sie das Rauschleistungsdichtespektrum der Störung an, wenn die Übertragung bei Zimmertemperatur stattfindet und die Leitung bei Leistungsanpassung mit 1 kΩ abgeschlossen ist.

b) Zur Rauschunterdrückung wird im Empfänger ein idealer Tiefpass mit der Grenzfrequenz gleich der Nyquist-Frequenz eingesetzt. Bestimmen Sie die Leistung der Störung am Ausgang des Tiefpasses.

   Hinweis: Die Nyquist-Frequenz ist gleich der halbe (positiven) Frequenz bei der das Spektrum des Rechteckimpulses die erste Nullstelle hat.

c) Ist unter den gegebenen Randbedingungen eine fehlerfreie Übertragung prinzipiell möglich? Begründen Sie Ihre Antwort.

   Hinweis: Siehe Shannonsche Kanalkapazität in der Nachrichtentechnik $C = B \cdot \mathrm{ld}(1+SNR)$ bit mit der Bandbreite B und dem Zweierlogarithmus ld und der Dimension [C] = bit/s.

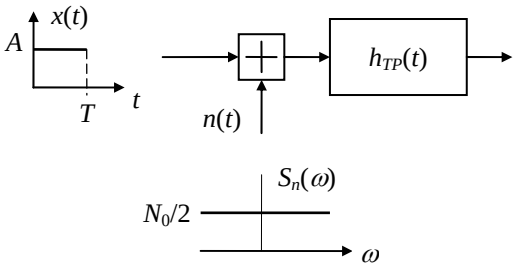


Bild 13-2 Binäre Datenübertragung mit Rauschunterdrückung

Aufgabe A13.1-6 Matched-Filter

Zur Signaldetektion bei additiver weißer Rauschstörung soll ein Matched-Filter eingesetzt werden. Beantworten Sie die nachfolgenden Fragen.

a) Welche Bedingung muss das zu erkennende Signal $x(t)$ erfüllen?

b) Wie ist das „realisierbare“ Matched-Filter zu dimensionieren?

c) Welchen Wert erhält man im optimalen Detektionszeitpunkt für das Nutzsignals am Ausgang des Matched-Filters.

d) Welche weitere Bedingung muss hier die Rauschstörung erfüllen, damit die Detektion mit dem Matched-Filter die Fehlerwahrscheinlichkeit minimiert.

Aufgabe A13.1-7 Matched-Filter

Folgendes Signal soll in weißem Rauschen mit einem Matched-Filter detektiert werden.

$$x[n] = \Pi_1[n-1] - \Pi_1[n-4] + \Pi_2[n-8]$$

a) Skizzieren Sie das Signal $x[n]$.

b) skizzieren Sie die Impulsantwort des kausalen Matched-Filters.

c) Geben Sie die Impulsantwort des kausalen Matched-Filters analytisch an.

d) Skizzieren Sie das Ausgangssignal des Matched-Filters, wenn $x[n]$ gesendet wird.

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

e) Wie nennt man ein Signal wie das Ausgangssignal des Matched-Filters in (c)?

f) Welchen Maximalwert erhält man am Ausgang des Matched-Filters in (c)?

Aufgabe A13.1-8 Matched-Filter ✍

Folgendes Signal soll in weißem Rauschen mit einem Matched-Filter detektiert werden.

$$x(t) = \Pi_1(t-0{,}5) + \Pi_1(t-1)$$

a) Skizzieren Sie das Signal $x(t)$.

b) Skizzieren Sie die Impulsantwort des kausalen Matched-Filters.

c) Wie nennt man ein Signal wie das Ausgangssignal des Matched-Filters in (b) und welchen Maximalwert (Zahlenwert) erhält man?

d) Skizzieren Sie das Ausgangssignal des Matched-Filters, wenn $x(t)$ gesendet wird.

Hinweis: Die Aufgabe kann durch eine maßstäbliche Skizze grafisch gelöst werden.

13.2 Lösungen

Lösung A13.1-1 Autokorrelationsfunktion ☑

Die AKF eines reellen Prozesses ist eine gerade Funktion mit Maximum an der Stelle null. Die Fourier-Transformierte der AKF, das LDS, ist eine nichtnegative Funktion. Die Funktionen 2,3 und 5 können deshalb keine AKF sein.

Lösung A13.1-2 Zufallsprozess und LTI-System ☑

a) WDF $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(\frac{-(x-1)^2}{2}\right)$

b) Mittlere Leistung am Eingang $m_{2X} = \sigma_X^2 + \mu_X^2 = 2$

c) Linearer Mittelwert am Ausgang $\mu_Y = \mu_X \cdot H(0) = 1/2$

d) LDS $S_{Y-}(\omega) = \frac{N_0}{2} \cdot H(j\omega) \cdot H(-j\omega) = \frac{N_0}{2} \cdot \frac{1}{j\omega+2} \cdot \frac{1}{-j\omega+2} = \frac{N_0}{2} \cdot \frac{1}{\omega^2+4}$

mit $S_Z(\omega) = N_0/2$

e) Ohne deterministischen Anteil

$$P_{Y-} = \frac{N_0}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega^2+4} d\omega = \frac{N_0}{2} \cdot \frac{1}{2} \arctan\frac{\omega}{2}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{N_0}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

mit deterministischem Anteil

$$P_Y = P_{Y-} + \mu_Y^2 = \frac{\pi N_0}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \cdot (1 + \pi N_0)$$

© Martin Werner, Fulda 2008

Lösung A13.1-3 Zufallsprozess und LTI-System ☑

a) WDF $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-x^2/2\right)$

b) Mittlere Leistung am Eingang $m_{2X} = \sigma_X^2 = 1$

c) Linearer Mittelwert am Ausgang $\mu_Y = 0$

d) LDS $S_Y(\Omega) = S_X(\Omega) \cdot H\left(e^{j\Omega}\right) \cdot H\left(e^{-j\Omega}\right) = S_X(\Omega) \cdot \frac{1}{e^{j\Omega} + 1/2} \cdot \frac{1}{e^{-j\Omega} + 1/2} = \frac{S_X(\Omega)}{5/4 + \cos\Omega}$

Lösung A13.1-4 SNR ☑

a) $$SNR = \frac{S}{N} = \frac{S}{N_0 \cdot f_g} = \frac{1\,\mathrm{V}^2}{2 \cdot 10^{-8}\,\frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{Hz}} \cdot 2 \cdot 10^5\,\mathrm{Hz}} = \frac{1}{4 \cdot 10^{-3}} = 250 \mathrel{\hat{=}} 24\,\mathrm{dB}$$

mit $$N = \frac{N_0}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_g}^{+\omega_g} 1\,d\omega = \frac{N_0}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot 2\omega_g = N_0 \cdot f_g$$

b) $C = B \cdot \mathrm{ld}(1+SNR)\,\mathrm{bit} = 2 \cdot 10^5 \cdot \mathrm{ld}(251)\,\mathrm{bit/s} \approx 1{,}59\,\mathrm{Mbit/s}$

Lösung A13.1-5 SNR ☑

a) $S_n(\omega) = \frac{N_0}{2} = 2 \cdot kTR = 2 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23}\,\frac{\mathrm{Ws}}{\mathrm{K}} \cdot 273\,\mathrm{K} \cdot 10^3\,\Omega \approx 7{,}5 \cdot 10^{-18}\,\mathrm{V^2s}$

b) Nyquist-Frequenz $f_N = 1 / 2T = 0{,}5\,\mathrm{MHz}$

Störleistung $N = N_0 \cdot f_g \approx 7{,}5 \cdot 10^{-18}\,\mathrm{V^2s} \cdot 0{,}5 \cdot 10^6\,\mathrm{Hz} = 3{,}75 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{V^2}$

c) Unter der Annahme, dass die Tiefpassfilterung das Nutzsignal nicht verändert, wird – ohne Störung – die Amplitude ±1 mV abgetastet, so dass $S = A^2 = 10^{-6}\,\mathrm{V^2}$ resultiert. Es ergibt sich das Verhältnis der Signalleistung zur Störleistung $SNR \approx 267 \cdot 10^3$.

Aus der shannonschen Formel für die Kanalkapazität folgt

$C = 0{,}5 \cdot 10^6\,\mathrm{Hz} \cdot \mathrm{ld}(1+267 \cdot 10^6)\,\mathrm{bit} \approx 346\,\mathrm{kbit/s}$

Dem steht die Bitrate von 1bit / T = 1 Mbit/s gegenüber, so dass eine fehlerfreie Übertragung nicht möglich ist.

Lösung A13.1-6 Matched-Filter ☑

a) Das Signal $x(t)$ muss von endlicher Dauer T sein.

b) Impulsantwort des Matched-Filters $h_{MF}(t) = x(T-t)$

c) Die Signalenergie E_x

d) Die Rauschstörung muss normalverteilt sein, siehe AWGN.

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

Lösung A13.1-7 Matched-Filter ☑

a)

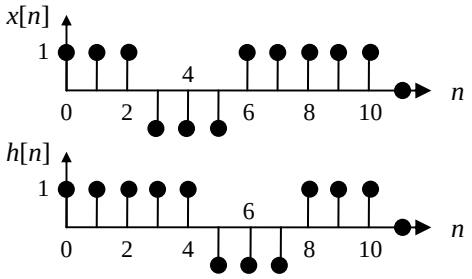


Bild 13-3 Signal $x[n]$ und Impulsantwort des kausalen Matched-Filters $h[n]$

c) $h[n] = x[10-n] = \Pi_1[10-n-1] - \Pi_1[10-n-4] + \Pi_2[10-n-8] =$

$\Pi_1[9-n] - \Pi_1[6-n] + \Pi_2[2-n] = \Pi_1[n-9] - \Pi_1[n-6] + \Pi_2[n-2]$

Anmerkung: Der Rechteckimpuls ist eine gerade Funktion, weshalb die Argumente mit –1 multipliziert werden dürfen.

d)

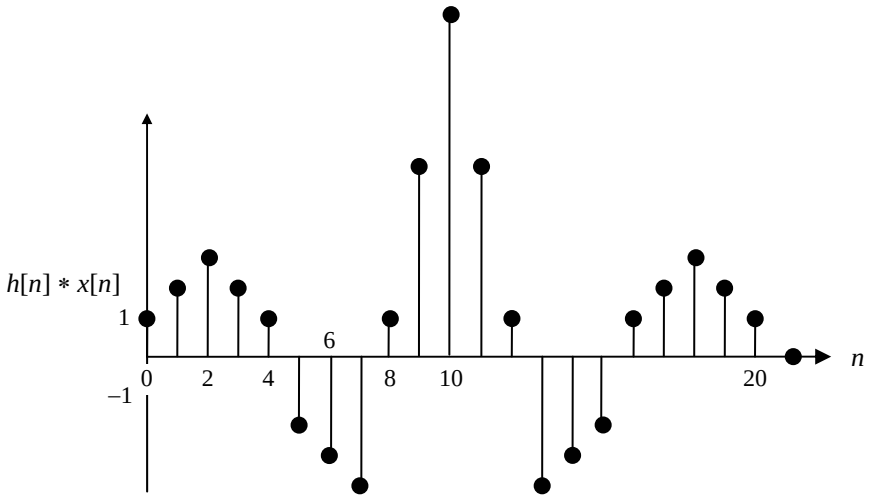


Bild 13-4 Ausgangssignal des kausalen Matched-Filters

e) Zeit-AKF

f) Energie $E_x = 11$

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

Lösung A13.1-8 Matched-Filter ☑

a)

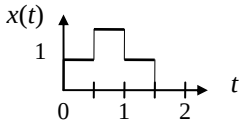


Bild 13-5 Signal $x(t)$

b) $h(t) = x(t)$, siehe Bild 13-5.

c) Zeit-AKF, der Maximalwert ist gleich der Energie des Signals E_x.

d)

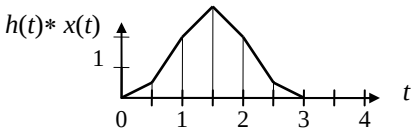


Bild 13-6 Ausgangssignal des Matched-Filters $h(t) * x(t)$

13.3 Übungen mit MATLAB

MATLAB-Übung 13-1 Zum zentralen Grenzwertsatz

In dieser Übung soll durch eine MATLAB-Simulation verifiziert werden, dass die Summe einer Vielzahl unabhängiger stochastischer Variablen eine näherungsweise normalverteilte stochastische Variable liefert, sofern kein Einzelbeitrag dominiert.

Bevor wir mit dem Programmieren beginnen können, müssen wir die Aufgabenstellung genauer definieren. Dabei sollen Aufwand und Ergebnis in vernünftigem Verhältnis stehen.

Der Einfachheit halber vereinbaren wir deshalb:

(i) Die zu addierenden SV seien zunächst normiert und gleichverteilt.

(ii) Die Summenvariable sei eine normierte SV, wobei alle Summanden gleichgewichtig eingehen.

(iii) Den Nachweis führen wir durch den Vergleich des Histogramms mit der theoretisch berechneten WDF der Normalverteilung.

Aus der (i) und (ii) folgt die Abbildungsvorschrift

$$X = \sum_{m=1}^{M} \frac{1}{\sqrt{M}} \cdot \frac{Y_i - \mu}{\sigma} \quad \text{mit } E(Y_i) = \mu \text{ und } D(Y_i) = \sigma^2 \tag{13.1}$$

© Martin Werner, Fulda 2008

Anmerkung: Das ist eine vereinfachte Formulierung zum zentralen Grenzwertsatz mit unabhängigen und identisch verteilten SV Y_i, siehe Grenzwertsatz von Lindeberg-Levy [BSMM99].

Eine entsprechende WDF finden wir im Beispiel zur Quantisierung Abschnitt 12. Mit (13.1) folgt das MATLAB-Programm in Programmbeispiel 13-1.

In Bild 13-7 werden zwei Histogramme mit der WDF der normierten Gaußverteilung verglichen. Für $M = 3$ erhalten wir speziell für kleine Amplituden, $x \approx 0$, deutliche Abweichungen von der Normalverteilung. Für $M = 10$ liegt eine im Rahmen der Messgenauigkeit gute Übereinstimmung mit der Normalverteilung vor. Man beachte jedoch, dass auch in diesem Fall der maximale Betrag der Amplitudenwert beschränkt ist. D. h. in der Simulation können keine größeren Amplituden auftreten als

$$\max|X| = \sqrt{3 \cdot M} \tag{13.2}$$

Anmerkungen: (i) Für $M = 2$ erhalten wir ein Simulationsergebnis, das wir mit einem relativ einfach zu gewinnenden theoretischen Resultat vergleichen können. (ii) Die Wahl der Zufallszahlengeneratoren kann in manchen Anwendungen entscheidenden Einfluss auf die Simulationsergebnisse haben, insbesondere dann, wenn es auf seltene Ereignisse (hier große Beträge der Amplituden) ankommt oder wenige Zufallszahlen in großen Folgenabständen miteinander verknüpft werden.

Programmbeispiel 13-1 Addition stochastischer Variablen - Zentraler Grenzwertsatz

```
% Central limit theorem
% s3s13_1.m * mw * 03/25/2008
M = 10;                          % number of random variables to be add
N = 10000;                               % number of samples per cycle
K = 100;                                 % number of simulation cycles
delta = .1;                                  % width of histogram bins
Hi = -5:delta:5;                                             % bin centers
hx = zeros(size(Hi));
for k =1:K
  X = zeros(1,N);
  for m = 1:M
    Y = (2*rand(1,N)-1)/sqrt(1/3);     % norm. uniformly distributed rv
    X = X + Y/sqrt(M);
  end
  hx = hx + hist(X,Hi);                                        % histogram
end
hx = hx/K;
% approximating gaussian bell function
x = -5:.1:5; sigma2 = 1; mue = 0;
f = (1/sqrt(2*pi*sigma2))*exp(-(1/(2*sigma2))*(x-mue).^2);
% graphics
figure('Name',['histogram: M = ',num2str(M)],'NumberTitle','off');
hx = hx/(N*delta);
bar(Hi,hx,'y'), grid
axis([-5 5 0 .5])
ylabel('norm. Histogram, f_X(x) \rightarrow'); xlabel('x
\rightarrow');
hold on
plot(x,f)
hold off
```


© Martin Werner, Fulda 2008

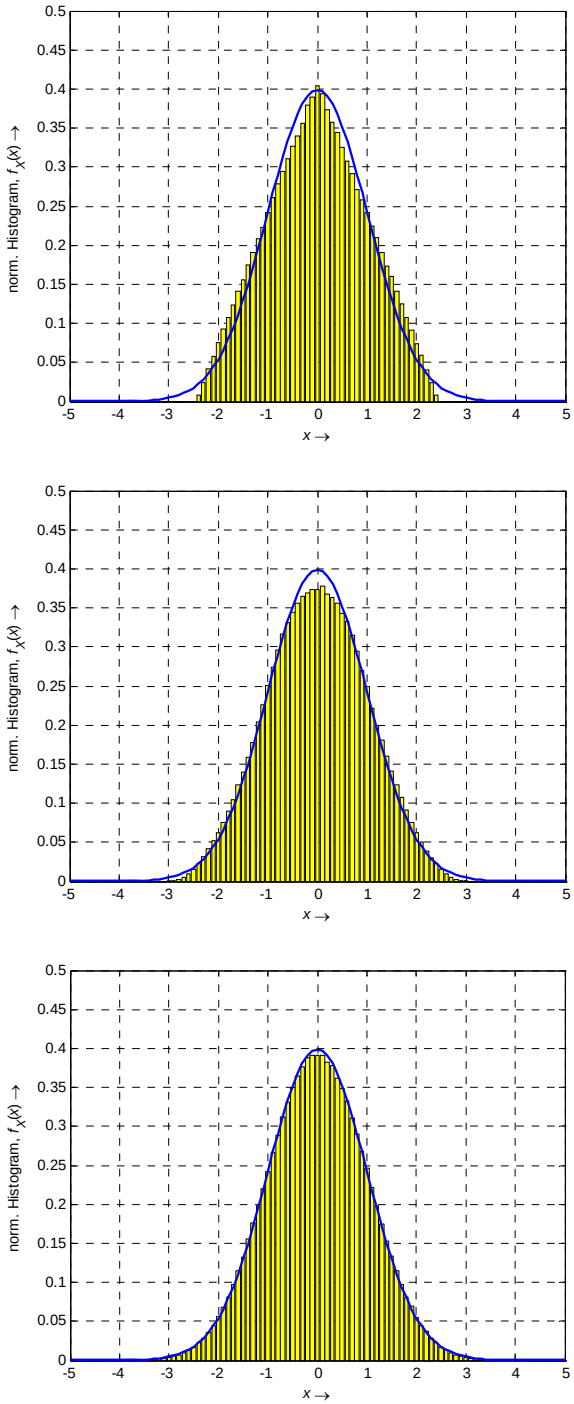


Bild 13-7 Normierte Histogramme für $M = 2$ (oben), 3 (mittig) und 10 (unten) und Vergleich mit der WDF der Normalverteilung

© Martin Werner, Fulda 2008

MATLAB-Übung 13-2 Zeit-AKF zu einem System 2. Ordnung

In [Wer08] wird als Übungsbeispiel die AKF für ein System 2. Ordnung berechnet. Hier soll die berechnete Zeit-AKF durch eine MATLAB-Simulation des Systems in verifiziert werden.

Wir schreiben dazu ein MATLAB-Programm, dass das System durch den MATLAB-Befehl `filter` realisiert. Die AKF bestimmen wir mit dem Schätzer in Tabelle 13-1, siehe auch Programmbeispiel 13-2. Das Simulationsergebnis in Bild 13-8 bestätigt die theoretischen Überlegungen.

Anmerkung: Die MATLAB Signal Processing Toolbox stellt für die Schätzung der Korrelation den Befehl `xcorr` zur Verfügung.

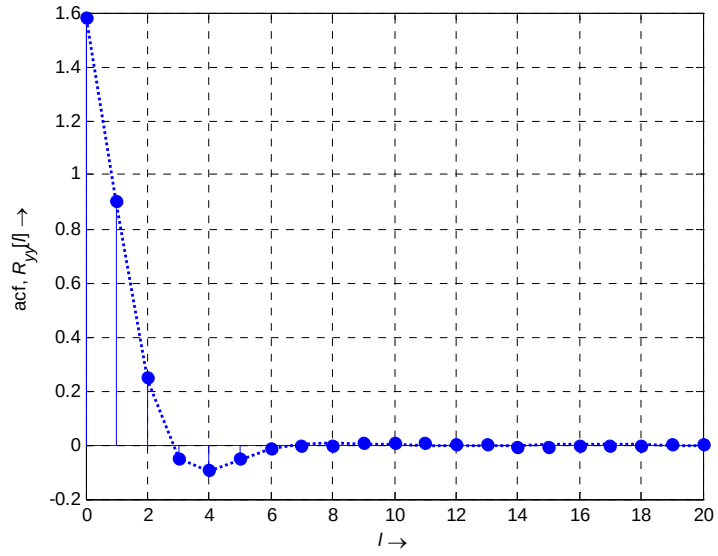


Bild 13-8 Geschätzte (o) und berechnete (--, interpoliert) Zeit-AKF des Systems 2. Ordnung

Programmbeispiel 13-2 AKF eines Systems 2. Ordnung

```
% Time auto-correlation, 2nd order system
% s3s13_2.m * mw * 03/25/2008
K = 21;                       % length of estimated correlation sequence
N = 100000;                                % length of random sequence
x = randn(1,N+K);          % normally distributed, white input sequence
a = [1 -0.71 +0.25];                                      % denominator
b = [0 1 0];                                                % numerator
y = filter(b,a,x);                                     % 2nd order system
% correlation
Ryy = zeros(1,K);
for k =1:K
  Ryy(k) = sum(y(1:N).*y(k:N+k-1))/N;                    % acf estimator
end
fprintf('acf : Ryy[0] = %g\n',Ryy(1))                      % mean power
```


© Martin Werner, Fulda 2008

```
% approximating time acf (theory)
p = roots(a);
r = abs(p(1));
Omega = angle(p(1));
B = (1/(p(1)-p(2)))*(1/(1/p(1)+a(2)+a(3)*p(1)));
l = 0:K-1;
RYY = 2*r.^l.*(real(B)*cos(Omega*l)-imag(B)*sin(Omega*l));
% Graphics
figure('Name','auto-correlation function','NumberTitle','off');
stem(l,Ryy), grid
axis([0 K-1 -.2 1.6])
ylabel('acf, R_{yy}[l] \rightarrow'); xlabel('l \rightarrow');
hold on
plot(l,RYY,':')
hold off
```

MATLAB-Übung 13-3 AKF und Prädiktion 1. Ordnung

Wir betrachten das Ausgangssignal $y[n]$ des Systems 2. Ordnung in der MATLAB-Übung 13-2 mit der zugehörigen Zeit-Autokorrelationsfunktion $R_{yy}[l]$. Durch einen linearen Prädiktor 1. Ordnung entsprechend

$$u[n] = y[n] - \frac{R_{yy}[1]}{R_{yy}[0]} \cdot y[n-1] \tag{13.3}$$

soll das Ausgangssignal $y[n]$ dekorreliert werden.

Das zugehörige MATLAB-Programm ist im Programmbeispiel 13-3 zu finden. Die resultierenden Zeit-AKF vor und nach der Prädiktion zeigt Bild 13-9. Darin ist deutlich zu erkennen, dass sowohl die mittlere Leistung, siehe $R_{uu}[0]$, als auch die Korrelation benachbarter Werte, siehe $R_{uu}[1]$, abnimmt.

Anmerkung: In der Sprachverarbeitung wird die Aufgabe der linearen Prädiktion ausführlich behandelt und es wird basierend auf der Korrelation des Signals ein Gleichungssystem zur Bestimmung der Prädiktionskoeffizienten eines FIR-Filters abgeleitet, so dass der mittlere quadratische Fehler minimal wird. Mit dem MATLAB-Befehl `lpc` (Linear Prediction Coefficients) können Sie das Programm um eine lineare Prädiktion höherer Ordnung erweitern. Damit kann im Beispiel die Korrelation nahezu beseitigt werden [Wer07].

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

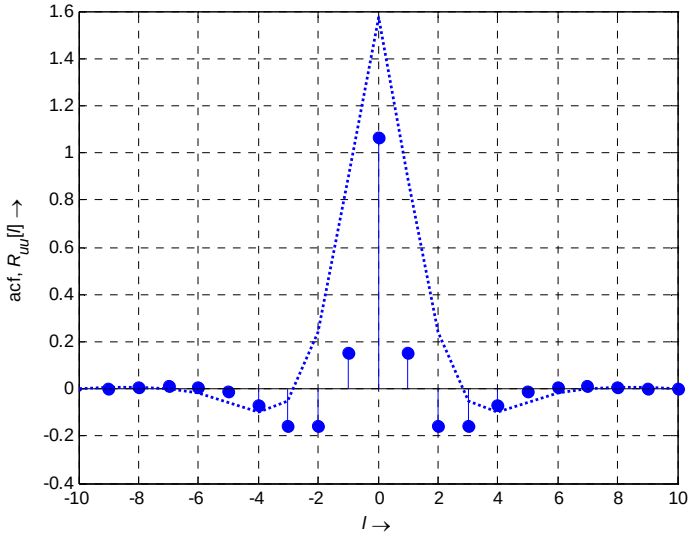


Bild 13-9 Zeit-AKF des Systems 2. Ordnung (--, interpoliert) und geschätzte Zeit-AKF nach Prädiktion (o)

Programmbeispiel 13-3 AKF und Prädiktion 1. Ordnung

```
% 1st order prediction, 2nd order system
% s3s13_3.m * mw * 03/25/2008
K = 11;                         % length of estimated correlation sequence
N = 100000;                                  % length of random sequence
x = randn(1,N+K);          % normally distributed, white input sequence
a = [1 -0.71 +0.25];                                        % denominator
b = [0 1 0];                                                  % numerator
y = filter(b,a,x);                                      % 2nd order system
% analytical time acf
p = roots(a);
r = abs(p(1));
Omega = angle(p(1));
B = (1/(p(1)-p(2)))*(1/(1/p(1)+a(2)+a(3)*p(1)));
l = -K:1:K;
RYY = 2*r.^abs(l).*(real(B)*cos(Omega*abs(l))-
imag(B)*sin(Omega*abs(l)));
% 1st order linear prediction
u = y(2:length(y)) - RYY(K+2)/RYY(K+1)*y(1:length(y)-1);
% correlation (two-sided)
Ruu = (1/N)*xcorr(u,K);
fprintf('acf : Ruu[0] = %g\n',Ruu(K+1)) % mean power
% Graphics
stem(l,Ruu), grid
axis([-K+1 K-1 -.4 1.6])
ylabel('acf, R_{uu}[l] \rightarrow'); xlabel('l \rightarrow');
hold on
plot(l,RYY,':')
hold off
```


© Martin Werner, Fulda 2008

MATLAB-Übung 13-4 Chirp-Signal

a) Verifizieren Sie die Aussagen und insbesondere grafischen Darstellungen in [Wer08] Abschnitt 13.3.3 durch eine MATLAB-Simulation.

b) Ändern Sie die Programmeinstellungen und beobachten Sie Veränderungen in den Signalen und Spektren. Diskutieren Sie die Ergebnisse.

c) Addieren Sie zum Chirp-Signal eine Rauschstörung und beobachten Sie das Signal nach dem Matched-Filterempfang. Diskutieren Sie die Ergebnisse.

Zu (b)

Bild 13-11, Bild 13-12 und Bild 13-12 illustrieren das Beispiel für die Mittenfrequenz f_0 = 4 kHz und den Programmparameter `sf` = 2. Letzterer bedeutet, dass die Momentanfrequenz von 0 bis 8 kHz variiert. Beide Einstellungen können in den Bildern verifiziert werden.

Von besonderer Bedeutung für die Anwendung von Chirp-Signalen ist hier die Form der Zeit-AKF. Im Vergleich zu [Wer08] Abschnitt 13.3.3 ergibt sich nochmals eine Halbierung der Breite.

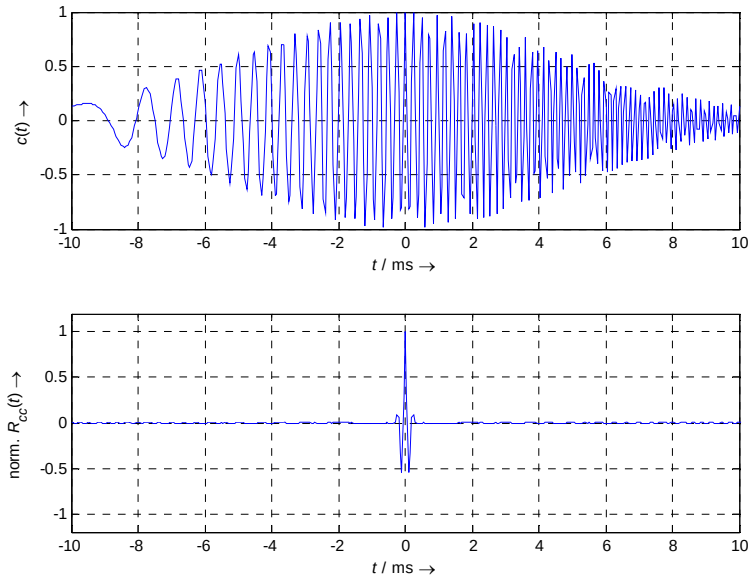


Bild 13-10 Chirp-Signal und Zeit-AKF für f_0 = 4 kHz und `sf` = 2

© Martin Werner, Fulda 2008

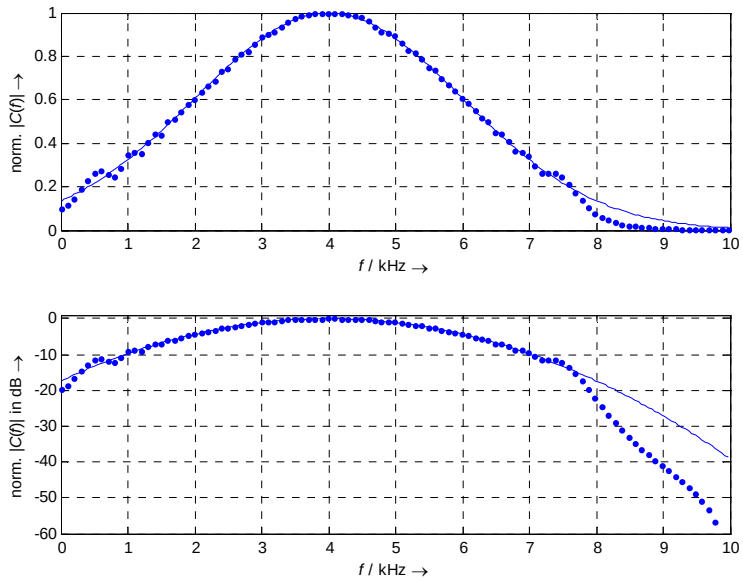


Bild 13-11 Spektrum des Chirp-Signals für f_0 = 4 kHz und `sf` = 2

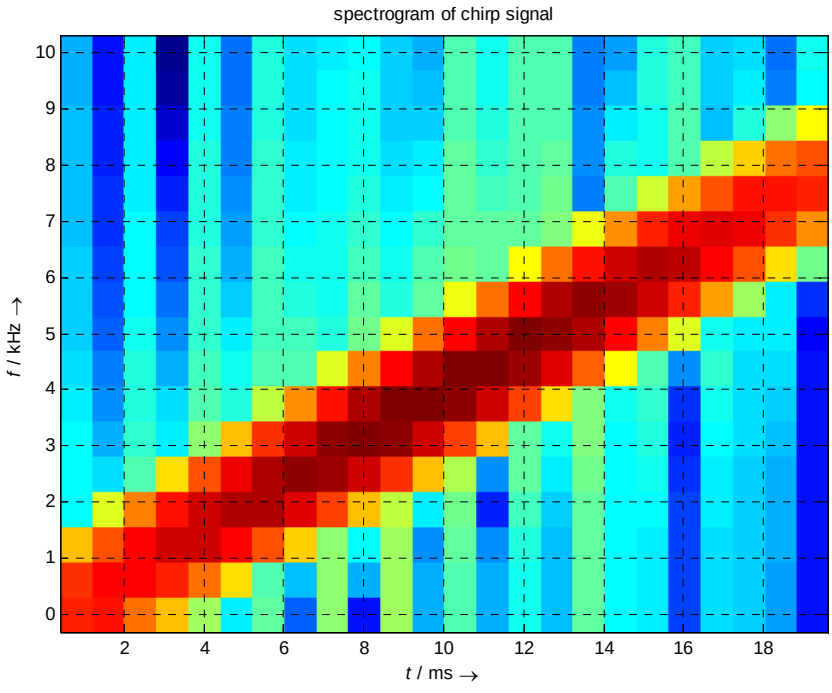


Bild 13-12 Spektrogramm für f_0 = 4 kHz und `sf` = 2

© Martin Werner, Fulda 2008

Programmbeispiel 13-4 Chirp-Signal

```
% time auto-correlation function of chirp signals
% chirp_gauss.m * mw * 03/25/08
% chirp signal
N  = 200;                    % half length of chirp signal, Tc = 2*N/fs
fs = 20e3;                                % sampling frequency, 20 kHz
f0 = 4e3;                                    % center frequency, 2 kHz
sf = 2;                                                % scaling factor
mue = (sf*f0/fs)*(1/(2*N));                       % normalized chip rate
T = N/sqrt(2);                               % normalized chirp "duration"
n = -N:N;                                                % normalized time
gauss = exp(-(1/T)^2*n.^2);                             % gaussian envelope
phi = 2*pi*(f0/fs)*n + pi*mue*n.^2;                            % phase term
chirp = cos(phi).*gauss;                                     % chirp signal
soundsc(chirp,fs);                                           % audio output
Rcc = conv(fliplr(chirp),chirp);                    % matched filter receiver
% Graphics
FIG1 = figure('Name','chirp signal','NumberTitle','off',...
  'Units','normal','Position',[.4 .3 .55  .65]);
t = n/fs;
subplot(2,1,1), plot(t*1e3,chirp), grid
axis([-1e3*N/fs 1e3*N/fs -1 1]);
xlabel('{\itt} / ms \rightarrow'), ylabel('{\itc}({\itt})
\rightarrow')
% title('chirp signal')
n = -2*N:2*N;
t = n/fs;
subplot(2,1,2),plot(t*1e3,Rcc/max(Rcc)), grid
axis([-1e3*N/fs 1e3*N/fs -1.2 1.2]);
xlabel('{\itt} / ms \rightarrow')
ylabel('norm. {\itR}_{{\itcc}}({\itt}) \rightarrow')
% title('time auto-correlation function')
FIG2 = figure('Name','chirp signal : spectrum','NumberTitle','off',...
  'Units','normal','Position',[.4 .3 .55  .65]);
Chirp = abs(fft(chirp)); Chirp = Chirp/max(Chirp);
w = 0:2*N;
f = fs*w/(2*N+1);
subplot(2,1,1),plot(1e-3*f(1:2:N+1),Chirp(1:2:N+1),'.'), grid
axis([0 1e-3*fs/2 0 1]);
xlabel('{\itf} / kHz \rightarrow')
ylabel('norm. |{\itC}({\itf})| \rightarrow')
% gaussian bell function
alpha = fs*(2*sqrt(2)/N)*sqrt(1 + pi^2*(sf*f0/fs)^2*(N/4)^2);
alpha = alpha/(2*pi); % corner frequency (theoretical)
gauss = exp(-((f-f0).^2)/alpha^2);
hold on
plot(1e-3*f(1:N+1),gauss(1:N+1)/max(gauss))
hold off
% title('spectrum')
subplot(2,1,2),plot(1e-3*f(1:2:N+1),20*log10(max(Chirp(1:2:N+1),1e-
6)),'.'), grid
axis([0 1e-3*fs/2 -60 1]);
xlabel('{\itf} / kHz \rightarrow')
ylabel('norm. |{\itC}({\itf})| in dB \rightarrow')
```

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

```
hold on
plot(1e-3*f(1:N+1),20*log10(max(gauss(1:N+1)/max(gauss),1e-6)))
hold off
% spectrogram
FIG3 = figure('Name','chirp signal :
spectrogram','NumberTitle','off',...
  'Units','normal','Position',[.4 .3 .55  .65]);
M = 32;
specgram(chirp,M,fs*1e-3,gausswin(M),M/2), grid
title('spectrogram of chirp signal')
ylabel('{\itf} / kHz \rightarrow')
xlabel('{\itt} / ms \rightarrow')
```

13.4 Anhang zum Matched-Filter

Beispiel RC-Tiefpass als Empfangsfilter

In vielen Fällen genügt es, das Matched-Filter durch einen einfachen Tiefpass anzunähern ohne dass die Empfangsqualität stark degradiert. Wir zeigen das am Beispiel des Rechteckimpulses als Sendesignal und einem einfachen RC-Tiefpass mit der Zeitkonstanten $\tau = RC$ als Empfangsfilter.

Das Ausgangssignal des Matched-Filters wird in Beispiel 3.2-4 berechnet. Mit dem Maximalwert des Nutzanteils, siehe (3.50),

$$y(T) = A \cdot \bigl(1 - \exp(-T/\tau)\bigr) \tag{13.4}$$

wird im Falle einer weißen Rauschstörung ein SNR erreicht von

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{0,RC} = \frac{A^2 \cdot \bigl(1-\exp(-T/\tau)\bigr)^2}{\underbrace{\frac{N_0}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+\omega^2\tau^2}\, d\omega}_{1/2\tau}} = \frac{2A^2\tau}{N_0/2} \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{T}{\tau}\right)\right)^2 \tag{13.5}$$

Anmerkung: Das Integral mit dem Betragsquadrat des Frequenzgangs des RC-Tiefpasses (8.99) führt nach der Substitution $x = \omega\tau$ auf die Arcustangens-Funktion.

Das SNR enthält als freien Parameter die Zeitkonstante des RC-Tiefpasses. Sie gilt es nun so zu bestimmen, dass das SNR maximal wird.

Als Rechenvereinfachung betrachten wir statt τ die Hilfsvariable $x = T/\tau$ mit T und $\tau > 0$. Zusätzlich verwenden wir die Energie des Rechteckimpulses $E_x = A^2T$. Damit schreibt sich das SNR

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{0,RC} = \frac{E_x}{N_0/2} \cdot 2 \cdot \frac{(1-e^{-x})^2}{x} \tag{13.6}$$

Da wir das Maximum suchen, bestimmen wir zunächst die Nullstelle(n) der Ableitung

© Martin Werner, Fulda 2008

$$\frac{d}{dx}\frac{(1-e^{-x})^2}{x} = \frac{2(1-e^{-x})e^{-x}\cdot x-(1-e^{-x})^2\cdot 1}{x^2} \tag{13.7}$$

Nach kurzer Zwischenrechnung erhält man die Bedingung

$$2x+1 \overset{!}{=} e^x \tag{13.8}$$

Jetzt kann beispielsweise wie in Bild 13-13 die Lösung grafisch erfolgen.

$$\tau_0 = \frac{T}{1,2564} = 0,7959\cdot T \tag{13.9}$$

Dass die Dimensionierung des RC-Gliedes mit τ_0 tatsächlich das maximale SNR liefert, macht die Gegenüberstellung von (13.6) mit dem SNR des idealen Matched-Filters (13.138) in Bild 13-14 deutlich. Man findet das Maximum des SNR an der Stelle τ_0 = 0,7959·T. Im Vergleich zum idealen Mached-Filter-Empfang mit 0 dB tritt nur eine Degradation von 0,815 dB auf.

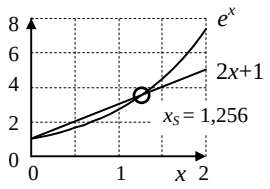


Bild 13-13 Grafische Lösung

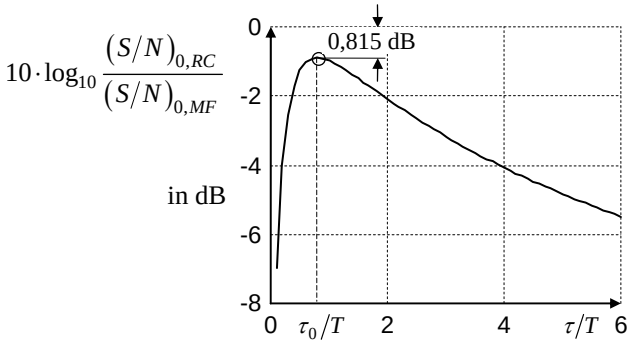


Bild 13-14 Vergleich des resultierenden SNR des Matched-Filters mit dem des RC-Tiefpasses

Beispiel Rahmensynchronisation mit Barker-Codewort

Wir greifen das Beispiel in Abschnitt 3.1.6 auf und stellen die Anwendung im ISDN-Teilnehmeranschluss der U_{KO}-Schnittstelle vor. Dort wird zur Rahmensynchronisation der Barker-Code der Länge 11 aus Tabelle 3-1 eingesetzt. Bild 13-15 zeigt das vereinfachte Übertragungsmodell für die Synchronisation. Für das Rechenbeispiel wird am Empfängereingang weißes Rauschen mit der zweiseitigen Rauschleistungsdichte N_0 / 2 vorausgesetzt. Wie groß ist das maximale *SNR* am MF-Ausgang?

© Martin Werner, Fulda 2008

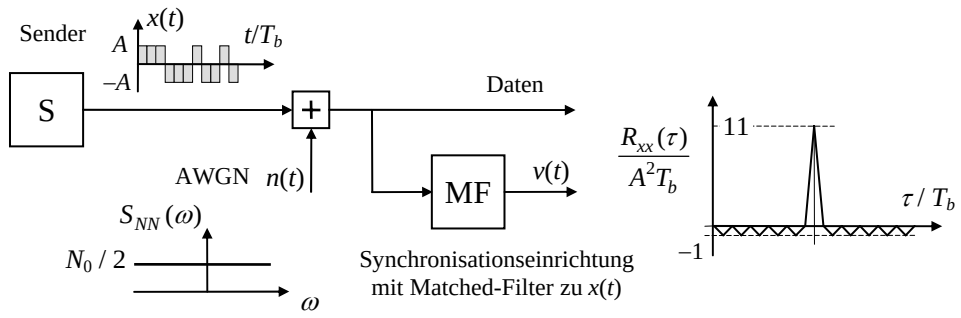


Bild 13-15 Rahmensynchronisation mit Barker-Code

Das maximale *SNR* am MF-Ausgang beträgt

$$SNR_{MF} = \frac{(11 \cdot A^2 T_b)^2}{\sigma_2^2} \tag{13.10}$$

Mit

$$\sigma_2^2 = \frac{N_0}{2} \cdot R_{xx}(0) = \frac{N_0}{2} \cdot 11 \cdot A^2 T_b \tag{13.11}$$

erhält man

$$SNR_{MF} = \frac{11 \cdot A^2 T_b}{N_0 / 2} \tag{13.12}$$

© Martin Werner, Fulda 2008

14 Zustandsraumdarstellung

14.1 Aufgaben mit Lösungen

- Zurzeit keine weiteren Übungsbeispiele –

14.2 Übungen mit MATLAB

MATLAB-Übung 14-1 Zustandsvariablen

In dieser Übung sollen am Beispiel eines Systems 2. Ordnung die in [Wer08] Abschnitt 14.3 gemachten Aussagen zur Zustandsraumdarstellung verifiziert werden. Anhand der Impulsantwort wird gezeigt, dass die Ähnlichkeitstransformation die Zustandsgrößen, nicht aber die Übertragungseigenschaften ändert.

Mit MATLAB wird das System in der Zustandsraumdarstellung in der transponierten Direktform II mit

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1,6 & 1 \\ -0,8 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1,6 \\ 0,2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_2^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad d_2 = 1 \tag{14.1}$$

und in der Normalform, siehe [Wer08],

$$\mathbf{A}_N = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,4 \\ -0,4 & 0,8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_N = \begin{pmatrix} 1,48 \\ -0,64 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_N^T = \begin{pmatrix} 0 & -2,5 \end{pmatrix}, \quad d_N = 1 \tag{14.2}$$

simuliert.

Das Programm ist in Programmbeispiel 14-1 zu finden. Die grafische Darstellung der Ergebnisse in Bild 14-1 zeigt die ersten 30 Werte der Impulsantworten und die ersten 15 Werte der Zustandsvariablen im Zustandsraum.

Wie erwartet stimmen die Impulsantworten überein. Die Zustandsvariablen bewegen sich nach der Impulserregung auf unterschiedlichen Spiralbahnen in den Ursprung. Die Systeme sind stabil.

Bei der Realisierung der Systeme, z. B. auf einem Festkomma-Signalprozessor mit 16 Bit Wortlänge, können die Unterschiede in den Zustandsgrößen wegen den auftretenden Wortlängeneffekten eine wichtige Rolle spielen. So ist die Realisierung in Normalform robuster gegen Überläufe und inneres Geräusch [RoMu87][Wer07].

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008

Programmbeispiel 14-1 Zustandsraumdarstellung

```
% State space variable
% ssv.m * mw * 20/02/2005
NSC = 31; % Number of simulation cycles
% Transposed direct form II
A2 = [1.6 1; -.8 0];  b2 = [1.6; .36];   c2T = [1 0];    d2 = 1;
s2 = zeros(2,NSC);                              % state space variables
y2 = zeros(1,NSC);                                      % output signal
% Normal form
AN = [.8 .4; -.4 .8]; bN = [1.64; -.64]; cNT = [0 -2.5]; dN = 1;
sN = zeros(2,NSC);                              % state space variables
yN = zeros(1,NSC);                                      % output signal
% Simulation of impulse response
x = [1 zeros(1, NSC-1)];                                        % impulse
for n = 1:NSC-1
    s2(:,n+1) = A2*s2(:,n)  + b2*x(n);      % Transposed direct form II
    y2(n)     = c2T*s2(:,n) + d2*x(n);
    sN(:,n+1) = AN*sN(:,n)  + bN*x(n);                    % Normal form
    yN(n)     = cNT*sN(:,n) + dN*x(n);
end
% Graphics
FIG = figure('Name','Impulse response and state space
variables','NumberTitle','off');
% Impulse response
n = 0:NSC-1;
subplot(2,2,1), stem(n,y2)
axis([0 NSC -2 4]); grid;
xlabel('n \rightarrow'), ylabel('h[n] \rightarrow')
title('Transposed direct form II')
subplot(2,2,3), stem(n,yN)
axis([0 NSC -2 4]); grid;
xlabel('n \rightarrow'), ylabel('h[n] \rightarrow')
title('Normal form')
% State space variables
s2 = s2(:,1:15); sN = sN(:,1:15);
subplot(2,2,2), plot(s2(1,:),s2(2,:),':',s2(1,:),s2(2,:),'o')
axis([-4 4 -4 4]); grid
xlabel('s_1[n] \rightarrow'), ylabel('s_2[n] \rightarrow')
subplot(2,2,4), plot(sN(1,:),sN(2,:),':',sN(1,:),sN(2,:),'o')
axis([-2 2 -2 2]); grid
xlabel('s_1[n] \rightarrow'), ylabel('s_2[n] \rightarrow ')
```


© Martin Werner, Fulda 2008

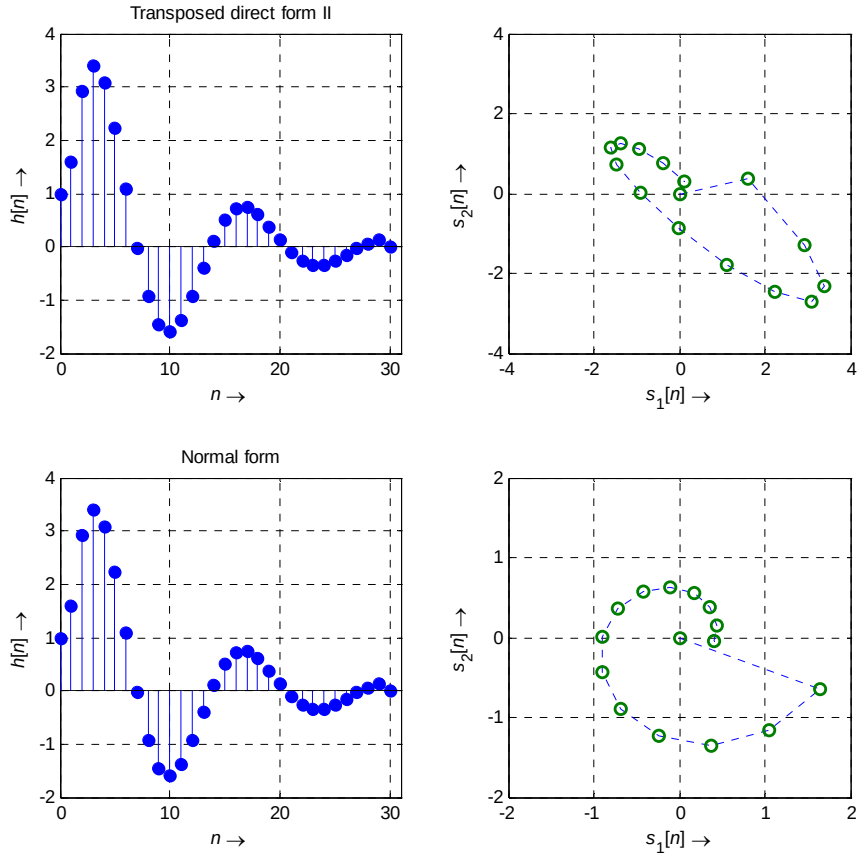


Bild 14-1 Ausschnitte aus den Impulsantworten und Verläufen der Zustandsvariablen für das System 2. Ordnung in transponierter Direktform II (oben) und Normalform (unten)

Übungsteil zum Buch [Wer08] – Martin Werner: *Signale und Systeme. Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB-Übungen und Lösungen.* 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008
© Martin Werner, Fulda 2008