
Vorwort

A PREFACE gives the author his last chance of disarming critics, or, at least, of anticipating them. (T. Chaundy, The Differential Calculus. Oxford: at the Clarendon Press 1935.)

Anfang der 80er Jahre begann der Springer-Verlag mit einer neuen Reihe, „Grundwissen Mathematik“, deren Ziel es war, mathematische Theorien in Zusammenhang mit ihrer historischen Entwicklung darzustellen. Den Band „Partielle Differentialgleichungen“ sollte Ernst Wienholtz schreiben, der nicht nur die klassischen drei Typen, sondern auch symmetrisch hyperbolische Systeme darstellen wollte, denen seine besondere Liebe und Aufmerksamkeit galt. Überdies schwebte ihm für den elliptischen Fall ein neuer Beweis der eindeutigen Fortsetzbarkeit der Lösungen vor, bei dem Funktionen, die dem allgemeinen Hauptteil angepaßt sind, die Kugelfunktionen verallgemeinern sollten. Dieser Plan, seine äußerst sorgfältige Arbeitsweise und seine Verpflichtungen als Hochschullehrer ließen die Fertigstellung des Buches leider mehr und mehr in die Ferne rücken.

Bei seinem Tod 2003 hinterließ er ein mit einem selbst entwickelten Textverarbeitungssystem erstelltes und mit handschriftlichen Korrekturen und Ergänzungen versehenes Manuskript, dessen genauer Umfang aufgrund diverser Versionen verschiedener Kapitel nicht leicht abzuschätzen war. Klar war, daß sich in einem einzelnen Band moderater Dicke nur das Material über elliptische Gleichungen würde unterbringen lassen. Bald zeigte sich jedoch, daß auch dieser Teil nicht ohne beträchtliche Veränderungen würde veröffentlicht werden können. Durch die jahrelange Arbeit an dem Manuskript war ein dichtes und nicht leicht zu durchschauendes Gewebe mit einer Fülle komplizierter Querverweise entstanden. Zudem tendierte die Darstellung dazu, eher Methoden als Resultate zu betonen. Ein Gutachter, dem Teile des Textes vorlagen, schrieb, der Stoff müsse „flüssiggemacht“ werden. Dies haben wir zu erreichen versucht. Eine Auflistung der Veränderungen, die wir vorgenommen haben, erscheint uns unpassend, da dem Leser eine Bewertung derselben ohne Kenntnis des Wienholtzschen Manuskripts ja unmöglich ist.

Der Leser wird primär wissen wollen, wie sich dieses Buch von anderen Büchern über diesen Gegenstand, an denen ja kein Mangel herrscht, unterscheidet. Wie die berühmte Gaußsche Arbeit [81] schon suggeriert, werden die zentralen Eigenschaften harmonischer Funktionen (Liouville- und Har-

nackeigenschaft, Maximum- und Minimumeigenschaft sowie Analytizität) aus der Mittelwerteigenschaft und nicht, wie in der Literatur vorherrschend, aus der Poissonschen Integralformel erschlossen. Dies hat den Vorteil, daß analoge Aussagen für Lösungen anderer Gleichungen hergeleitet werden können, wenn diese einer Mittelwertgleichung oder -ungleichung genügen. Beispielhaft vorgeführt wird dies anhand der Helmholtzschen Schwingungsgleichung, die überhaupt detaillierter als gemeinhin üblich betrachtet wird.

Die Gestalt der Poissonschen Integralformel wird zu Beginn von Kapitel 3 motiviert. Der dann folgende elementare Beweis beruht auf der Beobachtung, daß der Poissonkern für die Kugel die Eigenschaften einer δ -Funktion hat. Auch hier verfährt das Gros der Literatur anders, nämlich über die Greensche Darstellungsformel und die Greensche Funktion für die Kugel, Dinge, die hier erst später in Zusammenhang mit der Poissongleichung angesprochen werden. Die Perronsche Methode zur Lösung des Dirichletproblems für harmonische Funktionen ist natürlich klassischer Bestandteil der Literatur, aber auch hier und beim sog. Zaremba-Kriterium gibt es Detailvereinfachungen im Beweis. Der Lebesguesche Dorn, für den das Dirichletproblem klassisch nicht lösbar ist, wird ausführlicher als gemeinhin behandelt. Ungewöhnlich für die Lehrbuchliteratur ist die gründliche Behandlung unbeschränkter Gebiete ohne Verwendung der Kelvintransformation.

Vereinfachungen findet man für den Nachweis, daß das Newtonpotential die Poissongleichung für hölderstetige rechte Seite löst, und es wird Petrinis Gegenbeispiel gebracht, daß Stetigkeit alleine dafür nicht ausreicht. Die Lösung des Dirichletproblems für die Poissongleichung durch das Greenpotential wird auf den Hölderschen Satz zurückgeführt und auf diese Weise bewiesen, daß die Greensche Funktion für ein Gebiet genau dann existiert, wenn jeder Randpunkt eine Barriere besitzt. Diese Vorgehensweise gestattet dann auch eine relativ einfache Herleitung der Fredholmschen Alternative in Satz 6.2.5.

Besonders hervorheben möchten wir Wienholtzens neuen und eleganten Beweis der Symmetrie der Greenschen Funktion allein unter Verwendung der Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen. Üblicherweise beruft man sich hier auf den Gaußschen Satz, was eine gewisse Qualität des Randes und des Gradienten der Greenschen Funktion voraussetzt. Kennzeichnend für dieses Buch ist, daß der Gaußsche Satz immer nur für Kugeln oder deren Komplemente angewendet wird, in welchem Fall er, wie in Anhang B dargelegt, eine unmittelbare Folge der Transformationsformel für Gebietsintegrale ist. Die Integralumformungen, die etwa im Rahmen der Fredholmschen Alternative oder für den Zusammenhang zwischen klassischen und schwachen Lösungen erforderlich sind, werden durch den – vielleicht noch immer nicht genug bekannten – Satz von Giesecke gedeckt, der einen sehr einfachen Beweis gestattet. Unseres Wissens nach neu ist der die Symmetrie der Greenschen Funktion verwendende Wienholtzsche Beweis für die Abschätzungen der Ableitungen der Greenschen Funktion, wenn der Rand einer gleichmäßigen äußeren Kugelbedingung genügt.

Daß das Greenpotential für die Kugel bei hölderstetiger Dichte hölderstetige 2. Ableitungen bis zum Rande besitzt, wird mit Hilfe eines wenig bekannten Kunstgriffs von Simoda gezeigt. In Kombination mit dem Banachschen Fixpunktsatz ergibt sich dann sofort die lokale Lösbarkeit des Beltrami-Systems sowie mit Hilfe der Bernsteinschen Kontinuitätsmethode und einer aus einem Kompaktheitsargument folgenden A-Priori-Ungleichung die Lösbarkeit des Dirichletproblems für die Kugel bei kleiner Abweichung des Hauptteils vom Laplaceoperator. Ferner läßt sich sodann die Leray-Schaudersche Methode am Beispiel des semilinearen Dirichletproblems für die Kugel darstellen.

Die Untersuchung der Poissongleichung für ein Gebiet mit einem $C^{2,\alpha}$ -Rand geschieht nun in der Weise, daß gezeigt wird, daß sich dieser lokal auf einen Teil einer Sphäre abbilden läßt, wobei der Laplaceoperator in einen allgemeinen elliptischen Differentialoperator 2. Ordnung überführt wird, dessen Hauptteil sich wenig vom Laplaceoperator unterscheidet. Dies führt zu einem neuen Beweis des Kelloggschen Satzes und in Kombination mit dem Banachschen Satz von der offenen Abbildung zu einer A-Priori-Abschätzung, die dann zu einer Herleitung der globalen A-Priori-Abschätzung von Schauder verwendet wird. Mit dem Schauderschen Satz und der zugehörigen Fredholmschen Alternative in Abschnitt 8.3 und mit Satz 9.1.2 ist dann ein abschließendes Resultat über die klassische Lösbarkeit des Dirichletproblems für lineare elliptische Gleichungen 2. Ordnung erreicht.

Nun ist nicht zu verkennen, daß sich im Lauf der Zeit die Interessen und Prioritäten in Forschung und Lehre stark gewandelt haben. In dem von uns hinzugefügten Kapitel 10 gehen wir daher kurz auf schwache Lösungen einer Gleichung oder eines Randwertproblems ein, wobei der Leser auch hier einiges anders als üblich dargestellt finden wird. (Wienholtz selbst hatte die Sätze 10.3.4 und 10.3.9 als Beweisvarianten in das klassische Material von Kapitel 4 eingearbeitet.) Für eine einführende Vorlesung in die Theorie der partiellen Differentialgleichungen, in der alle drei Typen angesprochen werden, lassen sich unschwer kleine Teile aus den Kapiteln 2–4 und 10 herausgreifen. Die Schaudersche Theorie könnte aufgrund des hier gegebenen stufenweisen Aufbaus zum Gegenstand einer Reihe von Seminarvorträgen gemacht werden.

Dem Konzept der Reihe „Grundwissen“ entsprechend, enthält dieses Buch eine Fülle historischer Bemerkungen. Gerade bei den partiellen Differentialgleichungen hat ein Theorem – und erst recht ein Begriff oder eine Technik – meist eine komplizierte Entwicklungslinie, die aus dem Blickwinkel der Gegenwart zu skizzieren versucht wird. Das Wienholtzsche Manuskript enthielt mit Jahreszahlen versehene Autorennamen, so daß eine Identifizierung der Arbeiten, die er zitieren wollte, nahezu immer möglich war. Wir haben die Anzahl der Literaturverweise um gut ein Drittel vermehrt.

Wir sind A. Hinz (München) und C.G. Simader (Bayreuth) für die Überlassung eigener Vorlesungsskripte sowie für viele anregende Diskussionen über lange Jahre hinweg zu Dank verpflichtet. Frau M. Wienholtz-Hatzidaki und Herrn Dr. D. Wienholtz danken wir für die großzügige Überlassung aller Rechte gegenüber dem Springer-Verlag. Dem Springer-Verlag danken wir für

VIII Vorwort

die angenehme Zusammenarbeit und insbesondere für die Möglichkeit, dieses Buch in alter Rechtschreibung erscheinen zu lassen. Ein besonders herzlicher Dank gilt Frau Eberhardt (Bochum) für ihre hervorragende Arbeit und Engelsgeduld bei der Erstellung der Druckvorlage.

München und Bochum, im April 2009

Hubert Kalf und Thomas Kriecherbauer

Elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Eine Einführung mit historischen Bemerkungen

Wienholtz, E.; Kalf, H.; Kriecherbauer, Th.

2009, XI, 401 S., Softcover

ISBN: 978-3-540-45717-6