
Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Einleitung mit Bemerkungen zur historischen Entwicklung | 1 |
| 1.1 | Das Potential des Schwerefeldes | 2 |
| 1.2 | Die Laplacegleichung und die Poissongleichung | 4 |
| 1.3 | Das Neumannsche und das Dirichletsche Randwertproblem | 7 |
| 1.4 | Das Dirichletsche Randwertproblem im 19. Jahrhundert | 10 |
| 2 | Die Laplacegleichung | 19 |
| 2.1 | Harmonische Funktionen und Mittelwerteigenschaft | 19 |
| 2.2 | Liouville- und Harnackeigenschaft | 28 |
| 2.3 | Das Maximum-Minimumprinzip | 31 |
| 2.4 | Analytizität | 35 |
| 2.5 | Erweiterung: Helmholtzsche Schwingungsgleichung | 39 |
| 2.6 | Ausblick: Elliptische Gleichungen 2. Ordnung | 43 |
| 2.7 | Exkurs: Eindeutige Fortsetzbarkeit | 47 |
| | Aufgaben | 53 |
| 3 | Das Dirichletproblem für harmonische Funktionen | 59 |
| 3.1 | Einführung: Eindeutigkeit, Stabilität und der Fall der Kreisscheibe | 59 |
| 3.2 | Die Poissonsche Integralformel löst das Dirichletproblem für die Kugel. | 63 |
| 3.3 | Superharmonische Funktionen und die Perronsche Lösungsmethode für beschränktes $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ | 67 |
| 3.4 | Über den lokalen Charakter der Barrierenforderung. Kriterien. | 75 |
| 3.5 | Behebbarer Singularitäten. Dirichletprobleme ohne Lösung. | 78 |
| 3.6 | Unbeschränkte Gebiete | 82 |
| 3.7 | Der Satz von Giessecke. Bemerkungen zum Dirichletschen Prinzip. | 92 |
| | Aufgaben | 97 |

| | | |
|----------|--|-----|
| 4 | Die Poissongleichung $-\Delta u = f$ | 103 |
| 4.1 | Orientierende Bemerkungen zum Newtonpotential | 103 |
| 4.2 | Differenzierbarkeitseigenschaften des Newtonpotentials und Lösung des Dirichletproblems | 107 |
| 4.3 | Petrinis Gegenbeispiel | 115 |
| 4.4 | Die Greensche Funktion zum Dirichletproblem | 118 |
| 4.5 | Die Symmetrie der Greenschen Funktion | 123 |
| 4.6 | Abschätzungen für die Ableitungen der Greenschen Funktion | 126 |
| 4.7 | Das Newtonpotential verallgemeinernde singuläre Integrale | 134 |
| 4.8 | Das Dirichletproblem für $-\Delta u = f$ bei am Rand unbeschränktem f | 142 |
| 4.9 | Erweiterung: Die Greensche Funktion für $-\Delta + 1$ | 147 |
| | Aufgaben | 161 |
| 5 | Die Greensche Funktion für die Kugel mit Anwendungen | 165 |
| 5.1 | Die Greensche Funktion für den Halbraum, die Kugel und ihr Äußeres | 165 |
| 5.2 | Einschub: Harmonische Funktionen mit einer isolierten Singularität | 170 |
| 5.3 | Die 2. Ableitungen des Greenpotentials für die Kugel | 172 |
| 5.4 | Eine erste Anwendung: Die lokale Lösbarkeit des Beltrami-Systems | 184 |
| 5.5 | Das Dirichletproblem für die Kugel bei kleiner Abweichung des Hauptteils vom Laplaceoperator | 191 |
| 5.6 | Die Methode von Leray und Schauder am Beispiel des semilinearen Dirichletproblems in der Kugel | 197 |
| | Aufgaben | 202 |
| 6 | Die Fredholmsche Alternative für das Dirichletproblem | 207 |
| 6.1 | Die Sätze von Fredholm und ihre Verallgemeinerung. Resolvente und Spektrum. | 207 |
| 6.2 | Das Dirichletproblem für $(-\Delta + a - \lambda)u = f$ | 211 |
| 6.3 | Die Gleichung $-\Delta u + \sum_{i=1}^N a_i u_{x_i} + (a - \lambda)u = f$ mit am Rand unbeschränkten a und f | 224 |
| | Aufgaben | 230 |
| 7 | Der Kelloggsche Satz | 233 |
| 7.1 | Vorbereitungen | 234 |
| 7.2 | Umformulierung und Beweis des Kelloggschen Satzes | 246 |
| 7.3 | Zwei A-Priori-Ungleichungen im Gefolge des Kelloggschen Satzes | 252 |
| | Aufgaben | 260 |

| | | |
|-----------|--|-----|
| 8 | Die globale A-Priori-Abschätzung von Schauder und ihre Anwendung auf lineare und quasilineare Dirichletprobleme | 263 |
| 8.1 | Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten | 264 |
| 8.2 | Variable Koeffizienten | 267 |
| 8.3 | Die Kontinuitätsmethode zur Lösung des allgemeinen linearen Dirichletproblems in $\overline{C}^{2,\alpha}(\Omega)$. Die Fredholmsche Alternative. | 272 |
| 8.4 | Ausblick: Das Dirichletproblem für die quasilineare elliptische Differentialgleichung 2. Ordnung nach der Methode von Leray-Schauder | 277 |
| | Aufgaben | 279 |
| 9 | Innere Abschätzungen und innere Regularität | 281 |
| 9.1 | Eine innere A-Priori-Abschätzung und ihre Anwendung | 281 |
| 9.2 | Innere Regularität von C^2 -Lösungen linearer und quasilinear elliptischer Gleichungen nach E. Hopf | 287 |
| | Aufgaben | 298 |
| 10 | Schwache Lösungen | 299 |
| 10.1 | Bemerkungen zur historischen Entwicklung | 299 |
| 10.2 | Existenz schwacher Lösungen | 304 |
| 10.3 | Innere Regularität schwacher Lösungen | 318 |
| 10.4 | Randregularität für Lösungen verallgemeinerter Dirichletprobleme | 328 |
| 10.5 | Rechtfertigung des Dirichletschen Prinzips | 332 |
| | Aufgaben | 337 |
| A | Partielle Integration. Glättungsoperatoren. | 343 |
| B | Integration über Sphären | 355 |
| C | Hölderstetigkeit | 363 |
| | Symbolverzeichnis | 371 |
| | Literaturverzeichnis | 375 |
| | Personenverzeichnis | 395 |
| | Sachverzeichnis | 399 |

Elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Eine Einführung mit historischen Bemerkungen

Wienholtz, E.; Kalf, H.; Kriecherbauer, Th.

2009, XI, 401 S., Softcover

ISBN: 978-3-540-45717-6