

# Einleitung mit Bemerkungen zur historischen Entwicklung

Unter den partiellen Differentialgleichungen bilden die *elliptischen* eine besondere Klasse. Ihre Lösungen haben ein hohes Maß an innerer Regularität und, ähnlich wie die Funktionentheorie, welche in anderen Bereichen der Mathematik immer wieder Anwendungen hat, so fordert die Theorie der elliptischen Gleichungen nicht nur zu ihrem eigenen Aufbau heraus, sondern sie unterstützt auch die Behandlung großer Klassen der übrigen Differentialgleichungen.

Die elliptischen Differentialgleichungen 2. Ordnung sind aus der klassischen Potentialtheorie hervorgegangen, die ihrerseits mit der mathematischen Erforschung der physikalischen Kraftfelder der Gravitation, der Elektrostatik und der Magnetostatik entstanden ist. Zur Unterscheidung der klassischen von der jetzt eng mit Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie einhergehenden modernen Potentialtheorie sei auf repräsentative Lehrbücher, z.B. O.D. KELLOGG [136] bzw. L.L. HELMS [110] und J.L. DOOB [52] verwiesen, zur Übersicht auch auf einen Essay von H. BAUER [12].

Noch heute kann man für die Theorie elliptischer Gleichungen nicht auf Bausteine verzichten, die aus der Potentialtheorie stammen. Zugleich kann die klassische Potentialtheorie angesehen werden als eine Theorie der Gleichung zweiter Ordnung

$$-(u_{x_1x_1} + \dots + u_{x_Nx_N}) = f .$$

Hier bezeichnen die  $u_{x_ix_i}$  die partiellen Ableitungen 2. Ordnung der gesuchten Lösung  $u$ .

Dies ist eine elliptische Differentialgleichung, zwar eine sehr spezielle, aber mit den typischen Eigenschaften. Wir werden uns gründlich mit ihr befassen, bevor wir uns den allgemeinen elliptischen Gleichungen 2. Ordnung zuwenden werden.

## 1.1 Das Potential des Schwerefeldes

Das von NEWTON [240] um 1665 in Ausdeutung der Keplerschen Gesetze der Planetenbahnen aufgestellte Gravitationsgesetz zwischen Körpern wird heute mit der Abstraktion „Massepunkt“ formuliert:

Wenn eine Masse  $M$  im Nullpunkt des Koordinatensystems und eine Masse  $m$  im Punkte  $(x, y, z)$  konzentriert sind und wenn  $r$  ihr Abstand ist, dann beschreibt

$$k(x, y, z) = -\gamma \frac{Mm}{r^2} \left( \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right)$$

den Vektor der Anziehungskraft im Punkte  $(x, y, z)$  zwischen den beiden Massen. Dabei ist  $\gamma$  die Gravitationskonstante.

DANIEL BERNOULLI [16], wenn auch nur indirekt, und LAGRANGE [162, § 12] drückten den Vektor  $-\frac{1}{r^2}(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r})$  als  $(\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r}, \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r}, \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r})$  aus (siehe auch [161]), also als Gradienten der Funktion  $1/r = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ; das ist in heutigen Schreibweisen

$$-\frac{1}{r^2} \left( \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right) = \text{grad} \frac{1}{r} = \nabla \frac{1}{r} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{1}{r}.$$

In  $k(x, y, z) = m \text{grad}(\gamma M/r)$ , was Physiker lieber  $-m \text{grad}(-\gamma M/r)$  schreiben, kommt dann zum Ausdruck, daß  $M$  von einem Schwerefeld umgeben ist, nämlich dem Gradientenfeld der Funktion

$$\phi(x, y, z) = \frac{\gamma M}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

das von  $m$  unabhängig ist.

Heute nennen wir  $\phi$  das *Potential* oder die *Potentialfunktion* des Schwerefeldes von  $M$ .

D. BERNOULLI [16, p. 361] und LAGRANGE [162, § 12ff] untersuchten auch solche Schwerefelder, die von mehreren Massepunkten  $M_1 \dots M_n$  erzeugt werden, und formulierten das Superpositionsprinzip

$$k(x, y, z) = m \text{grad}(\phi_1 + \dots + \phi_n).$$

In Verallgemeinerung davon untersuchte LAGRANGE [162]<sup>1</sup> Gravitationsfelder von räumlich oder flächig verteilten Massen  $M$  und stellte auch dabei fest, daß außerhalb der Masseverteilung eine Funktion existiert, deren Gradient das Kraftfeld beschreibt.

Wir wollen dies am Beispiel einer räumlich verteilten Masse verdeutlichen: Jede experimentelle Überprüfung des Newtonschen Gravitationsgesetzes muß

<sup>1</sup> LAGRANGE [163, 164] sind abschließende Arbeiten. Wegen einer manchmal erst dem späteren LAPLACE gemachten Zuordnung siehe A.S. HATHAWAY [100].

in Kauf nehmen, daß  $M$  auf ein kleines Volumen verteilt ist, ebenso  $m$ , und daß  $r$  nur bis auf die Summe der Durchmesser dieser Volumina bekannt ist. Die Gültigkeit des Newtonschen Gesetzes bedeutet daher, daß es das Anziehungsgesetz zwischen zwei Körpern, die einen relativ großen Abstand voneinander haben, approximiert. Das soll insbesondere heißen, daß der Betrag der Anziehungskraft zwischen den Massen  $M$  und  $m$  eine der Zahlen  $\gamma \frac{Mm}{r^2}$  ist, wo  $r$  den Abstand zwischen einem Punkt aus dem einen und einem Punkt aus dem anderen Körper mißt.

Bei einer räumlichen Masseverteilung sei die Masse  $M$  über ein beschränktes Gebiet  $G$  verteilt mit der Dichte  $\varrho(x, y, z)$ , so daß

$$M = \iiint_G \varrho(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta .$$

Wir wollen die Anziehungskraft berechnen, die an der Stelle  $(x, y, z)$  außerhalb von  $\overline{G}$ , dem Abschluß von  $G$ , auf einen Massepunkt der Masse  $m$  wirkt. Zerlegt man  $G$  durch eine Rasterung des  $\mathbb{R}^3$  der Maschenweite  $\delta > 0$  in endlichviele  $G_1, G_2, \dots, G_n$  mit Durchmessern  $\delta_1 \leq \delta\sqrt{3}$  – ähnlich wie bei der Bestimmung des Jordaninhalts von  $G$  – und ist

$$M_i = \iiint_{G_i} \varrho(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \quad (1.1)$$

die in  $G_i$  enthaltene Masse und  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  ein in  $G_i$  liegender Punkt, dann wird die von  $M_i$  auf  $m$  in  $(x, y, z)$  ausgeübte Kraft nach Obigem approximiert durch

$$-\gamma \frac{M_i m}{r_i^2} \left( \frac{x - \xi_i}{r_i}, \frac{y - \eta_i}{r_i}, \frac{z - \zeta_i}{r_i} \right)$$

mit  $r_i = \sqrt{(x - \xi_i)^2 + (y - \eta_i)^2 + (z - \zeta_i)^2}$ . Der Fehler ist  $\mathcal{O}(\delta^4)$  für  $\delta \rightarrow 0$  für jede der drei Komponenten; denn sind  $(\xi'_i, \eta'_i, \zeta'_i)$  und  $(\xi''_i, \eta''_i, \zeta''_i)$  irgend zwei Punkte in  $G_i$  und ist  $r'_i$  der Abstand von  $(x, y, z)$  zum ersten und  $r''_i$  der zum zweiten Punkt, so ist  $\xi''_i - \xi'_i = \mathcal{O}(\delta)$  (d.h.  $|\xi''_i - \xi'_i| \leq \text{const } \delta$ , wobei const eine von  $\delta$  unabhängige, positive Konstante bezeichne),  $r''_i - r'_i = \mathcal{O}(\delta)$ , und der Betrag des Unterschieds in der beispielhaften ersten Komponente ist

$$\begin{aligned} & \left| \gamma \frac{M_i m}{r_i'^2} \cdot \frac{x - \xi'_i}{r'_i} - \gamma \frac{M_i m}{r_i''^2} \cdot \frac{x - \xi''_i}{r''_i} \right| \\ &= \gamma \frac{m M_i}{r_i'^3 r_i''^3} \left| (x - \xi''_i)(r_i''^3 - r_i'^3) + (\xi''_i - \xi'_i) r_i''^3 \right| \\ &= M_i \mathcal{O}(\delta) ; \end{aligned}$$

ferner ist der Ausdruck (1.1) von der Ordnung  $\mathcal{O}(\delta^3)$ , wenn  $\varrho$  beschränkt ist. Nach dem Superpositionsprinzip ist die Anziehungskraft, die in  $(x, y, z)$  zwischen  $m$  und der Vereinigung der  $M_i$  besteht, gleich der Summe der einzelnen

Kräfte; letztere sind uns bis auf  $\mathcal{O}(\delta^4)$  bekannt. Die Anzahl der Summanden geht höchstens wie  $\delta^{-3}$ ; also ist

$$-\sum_{i=1}^n \gamma \frac{M_i m}{r_i^2} \left( \frac{x - \xi_i}{r_i}, \frac{y - \eta_i}{r_i}, \frac{z - \zeta_i}{r_i} \right) \quad (1.2)$$

eine Approximation an den zu berechnenden Kraftvektor mit einem Fehler  $\mathcal{O}(\delta)$ .

Um diesen Ausdruck als Riemannsumme eines Integrals zu deuten, wählen wir jetzt noch den Punkt  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  so in  $G_i$  aus, daß

$$M_i = \varrho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \iiint_{G_i} d\xi d\eta d\zeta$$

gilt, was bei stetigem  $\varrho$  nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung möglich ist. Damit ist dann (1.2) Riemann-Zwischensumme von

$$-\iiint_G \frac{m\gamma\varrho(\xi, \eta, \zeta)}{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2]^{3/2}} (x - \xi, y - \eta, z - \zeta) d\xi d\eta d\zeta$$

Das ist

$$m \text{ grad} \iiint_G \frac{\gamma\varrho(\xi, \eta, \zeta)}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}} d\xi d\eta d\zeta ;$$

und wir haben hergeleitet, daß das Kraftfeld *außerhalb von*  $\overline{G}$  das Potential

$$\phi(x, y, z) = \iiint_G \frac{\gamma\varrho(\xi, \eta, \zeta)}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}} d\xi d\eta d\zeta \quad (1.3)$$

besitzt, wenn es von der in  $G$  mit der Dichte  $\varrho$  verteilten Masse  $M$  herrührt.

## 1.2 Die Laplacegleichung und die Poissongleichung

LAPLACE [165, § 8], [166, § 2] stellte für dieses Potential (1.3) Differentialgleichungen auf, denen es außerhalb  $\overline{G}$  genügt; und zwar zuerst in Polarkoordinaten und dann in rechtwinkligen cartesischen Koordinaten in der Form (siehe auch [167, p. 137f])

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = 0 ,$$

was man heute die *Laplacegleichung* nennt und häufig mit dem erst später aufgetretenen *Laplaceoperator*

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

in der Gestalt

$$\Delta\phi(x, y, z) = 0$$

schreibt. Lösungen der Laplacegleichung werden auch *harmonische Funktionen* genannt.

Der Schritt von LAPLACE hat sich als äußerst fruchtbar erwiesen, sowohl für die Potentialtheorie als auch für die Entstehung einer Theorie partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Vielleicht war das Interesse an dieser Gleichung seinerzeit dadurch besonders geweckt, daß bereits 1756/57 EULER [63, § 67] bei hydrodynamischen Problemen auf sie gestoßen war; siehe auch LAGRANGE [159, § 42], [160].

Der Nachweis, daß  $\phi$  außerhalb von  $\overline{G}$  der Laplacegleichung genügt, ist sehr einfach. Man braucht es nur in der Umgebung eines beliebigen Punktes aus  $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{G}$  zu zeigen, und dazu legt man um einen solchen Punkt eine Kugel  $B$ , die von  $\overline{G}$  einen positiven Abstand hat. In  $B$  ist  $\phi$  nach klassischen Sätzen beliebig oft differenzierbar, und man erhält die Ableitungen durch Differentiation in (1.3) unter dem Integral; man rechnet nach, daß

$$\Delta \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} = 0$$

ist.

Man kann (1.3) aber auch benutzen, um ein Potential  $\phi(x, y, z)$  für  $(x, y, z) \in G$  zu definieren. Zwar ist der Integrand in (1.3) für solche  $(x, y, z)$  singulär, trotzdem existiert das Integral. Um das einzusehen, legt man um  $(x, y, z) \in G$  als Mittelpunkt eine kleine Kugel  $B \subseteq G$  mit festem Radius  $\beta$ , und es genügt zu zeigen, daß

$$\iiint_B \frac{\varrho(\xi, \eta, \zeta)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} d\xi d\eta d\zeta \quad (1.4)$$

existiert; denn das Restintegral über  $G \setminus B$  ist unproblematisch.

Nach Einführung von Polarkoordinaten

$$(\xi - x, \eta - y, \zeta - z) = r\chi,$$

also

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}, \quad \chi \in \mathbb{R}^3, \quad |\chi| = 1,$$

geht (1.4) über in das Integral

$$\int_0^\beta \iint_{|\chi|=1} \frac{\varrho(x + r\chi_1, y + r\chi_2, z + r\chi_3)}{r} dS(\chi) r^2 dr,$$

worin  $dS$  das Flächenelement bezeichnet. Das Integral existiert, da  $\varrho$  beschränkt ist.

Durch (1.3) ist nun zwar  $\phi$  auch für  $(x, y, z) \in G$  definiert, aber es genügt in  $G$  nicht mehr der Laplacegleichung  $\Delta\phi = 0$ . Schon die Stetigkeit von  $\phi$  bedarf einer besonderen Begründung.

Jedenfalls bei in  $G$  konstantem  $\varrho(x, y, z)$  bewies POISSON [265] die Gleichung

$$\phi_{xx}(x, y, z) + \phi_{yy}(x, y, z) + \phi_{zz}(x, y, z) = -4\pi\varrho(x, y, z),$$

die er allerdings auch für veränderliches  $\varrho$  zu beweisen versuchte; daher nennt man heute eine Differentialgleichung vom Typ

$$-\Delta u = f \text{ mit } f \neq 0$$

eine *Poissongleichung*.

Für nichtkonstante Dichte  $\varrho$  führte nach weiteren Bemühungen von POISSON und anderer Autoren erst GAUSS [81] einen strengen Beweis, daß das Potential  $\phi$  in  $G$  dieser Gleichung genügt; er mußte allerdings dabei voraussetzen, daß  $\varrho$  in  $G$  stetig differenzierbar ist.

Im Jahre 1882 konnte dann OTTO HÖLDER [120] in seiner Dissertation „Beiträge zur Potentialtheorie“ die Voraussetzung der stetigen Differenzierbarkeit von  $\varrho$  durch die schwächere Forderung ersetzen, daß es  $0 < \alpha < 1$  und eine Konstante gibt, so daß

$$|\varrho(x, y, z) - \varrho(x', y', z')| \leq \text{const} [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{\alpha/2}$$

für alle  $(x, y, z) \in G, (x', y', z') \in G$ . Dies ist eine Forderung<sup>2</sup>, die für  $\varrho$  weniger als Differenzierbarkeit, aber mehr als Stetigkeit bedeutet. Sie wird uns in diesem Buch noch sehr beschäftigen, da sie für die Theorie elliptischer Differentialgleichungen eine Schlüsselrolle spielt. Man nennt sie eine *Hölderbedingung*, und man nennt solche  $\varrho$  *hölderstetig*.

Es braucht  $\phi$  in  $G$  nicht zweimal differenzierbar zu sein, wenn  $\varrho$  lediglich stetig ist. Hierzu hat PETRINI [251] ein Beispiel gegeben; siehe Abschnitt 4.3.

Die hier angesprochenen Eigenschaften des Potentials (1.3), insbesondere, daß  $\phi$  bei hölderstetigem  $\varrho$  der Poissongleichung  $-\Delta\phi = 4\pi\varrho$  genügt, werden in den Abschnitten 4.1 und 4.2 in etwas allgemeinerem Rahmen behandelt.

In der Elektrostatik gilt das nach COULOMB benannte Gesetz

$$k(x, y, z) = \frac{eQ}{r^2} \left( \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right)$$

für die Kraft, die eine im Ursprung des Koordinatensystems befindliche Ladung  $Q$  auf eine in  $(x, y, z)$  befindliche Ladung  $e$  ausübt. Genauere Literaturangaben und Hinweise auf Coulombs Vorgänger findet man in [84]. Dabei ist

<sup>2</sup> Wohl zuerst bei R. LIPSCHITZ [194], aber dort beim Studium trigonometrischer Reihen.

wieder  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ . Das von der Punktladung  $Q$  erzeugte elektrische Feld ist ein Gradientenfeld

$$E(x, y, z) = -\text{grad}(Q/r)$$

mit dem Potential

$$\phi(x, y, z) = \frac{Q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

und man erkennt die Übereinstimmung mit dem vorhin behandelten Fall des Schwerefeldes.

Ähnlich verhält es sich mit der Magnetostatik. Nach Vorarbeiten auf diesen Gebieten von POISSON [264, pp. 5, 30-34] hat GREEN [86] mit seiner zunächst nur wenig bekannt gewordenen Arbeit<sup>3</sup> „An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism“ die Potentialtheorie entscheidend gestaltet; ebenso GAUSS [81] mit „Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im umgekehrten Verhältnis der Quadrate der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstoßungskräfte“. Zuerst in diesen beiden Arbeiten wird die Benennung Potential oder Potentialfunktion für den bis dahin so wichtig gewordenen Begriff benutzt; siehe aber [14, 28].

Für historische Studien über die Epoche vor OTTO HÖLDER nennen wir die Monographien von TODHUNTER [325] und von BACHARACH [10]. Über die weitere Entwicklung der Potentialtheorie um die Jahrhundertwende berichten die Enzyklopädieartikel von BURKHARDT und MEYER [31] und LICHTENSTEIN [190]. Jedoch ist es manchmal notwendig und ein mühevoller Genuß, in den Originalarbeiten zu lesen.

### 1.3 Das Neumannsche und das Dirichletsche Randwertproblem

Warum interessiert man sich für Differentialgleichungen, denen das Potential  $\phi$  einer Verteilung von Massen oder Ladungen genügt? Anfänglich konnte man nur Hoffnungen auf weitere Einsicht damit verbinden, und erst die dadurch in Gang gesetzten Forschungen ergaben, daß man aus dem Bestehen der Poissongleichung oder der Laplacegleichung wichtige Eigenschaften von  $\phi$ , und damit des Kraftfeldes  $\text{grad } \phi$ , ableiten kann.

Beispielsweise läßt sich das Gravitationsfeld in einem beschränkten Teilgebiet  $D$  außerhalb der Masseverteilung ohne jede weitere Kenntnis der Massendichte  $\varrho$  bestimmen, wenn man das Feld nur nahe der (hinreichend glatt

<sup>3</sup> Die Verbreitung der Resultate dieser Schrift mehr als anderthalb Jahrzehnte nach ihrem Erscheinen als Privatdruck 1828 ist WILLIAM THOMSON (dem späteren LORD KELVIN) zu verdanken, der als Student durch ein Zitat in einer Arbeit von MURPHY von ihrer Existenz erfuhr und nach langem vergeblichem Suchen durch Zufall feststellte, daß sein Tutor drei Exemplare besaß. Auf Anregung Thomsons erschien in den Jahren 1850–54 ein Nachdruck in Crelles Journal.

angenommenen) Berandung  $\partial D$  von  $D$  kennt. Dies ist eine Folge der Differentialgleichung  $\Delta\phi = 0$  in  $D$ . Es genügt sogar, daß man die Normalkomponente  $\frac{\partial\phi}{\partial\nu}$  des Feldes auf  $\partial D$  kennt; dabei ist  $\frac{\partial}{\partial\nu}$  die Differentiation in Richtung der äußeren Einheitsnormalen  $\nu$  an  $D$ , also  $\frac{\partial\phi}{\partial\nu} = \nu \cdot \text{grad } \phi$  auf  $\partial D$ .

Freilich, dahinter steht die Konstruktion einer Lösung des *Neumannschen Randwertproblems*, das man auch das *2. Randwertproblem* nennt und dessen Lösung einen der Höhepunkte der Potentialtheorie darstellt. Es lautet in enger Anlehnung an das ursprüngliche „Allgemeine Problem“ bei FRANZ NEUMANN [233, p. 270]:

Es sei<sup>4</sup>  $D \subset \subset \mathbb{R}^3$  mit genügend glattem Rand, so daß in jedem Punkte  $(x, y, z) \in \partial D$  die äußere Einheitsnormale  $\nu(x, y, z)$  an  $D$  existiert und der Gaußsche Integralsatz auf  $D$  anwendbar ist.

Es sei  $g: \partial D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Gesucht ist eine in  $\overline{D}$  einmal stetig differenzierbare Funktion  $u$ <sup>5</sup>, die in  $D$  zweimal stetig differenzierbar ist, der Laplacegleichung  $\Delta u = 0$  in  $D$  und der (Neumannschen) Randbedingung  $\frac{\partial}{\partial\nu} u(x, y, z) = g(x, y, z)$  auf  $\partial D$  genügt.

Man beachte, daß unsere Formulierung des Neumannschen Randwertproblems keinen Rückgriff auf Potentiale macht, vielmehr ganz im Rahmen partieller Differentialgleichungen verläuft. Durch diese Loslösung formulieren wir es für alle stetigen  $g: \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ , also nicht nur für solche  $g$ , die auf  $\partial D$  Normalkomponente eines Gravitationsfeldes sind.

Es gibt aber stetige  $g$ , für die das Neumannsche Randwertproblem keine Lösung hat. Wenn nämlich  $u: \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lösung des Neumannproblems ist mit  $\frac{\partial u}{\partial\nu} = g$  auf  $\partial D$ , dann ist nach dem Integralsatz von Gauß

$$0 = \int_D \Delta u(x, y, z) dx dy dz = \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial\nu}(x, y, z) dS = \int_{\partial D} g(x, y, z) dS.$$

Daher ist die Bedingung  $\int_{\partial D} g dS = 0$  für die Lösbarkeit des Neumannschen Randwertproblems notwendig.<sup>6</sup>

Für die Rekonstruktion des Gravitationsfeldes in einem masselosen Gebiet aus der Kenntnis der Normalkomponenten des Feldes auf dem Rande des Gebietes genügt es nicht, zu wissen, daß eine Lösung des Neumannproblems existiert. Vielmehr ist ein Verfahren nötig, eine Lösung allein aus den Randwerten zu konstruieren, und man muß wissen, daß das Gradientenfeld der konstruierten Lösung mit dem gegebenen Gravitationsfeld übereinstimmt. Es bedarf also auch eines *Eindeutigkeitssatzes* zum Neumannschen Problem:

Wenn  $u$  und  $v$  Lösungen des Neumannschen Randwertproblems in  $\overline{D}$  sind mit  $\frac{\partial u}{\partial\nu} = \frac{\partial v}{\partial\nu}$  auf  $\partial D$ , dann ist  $\text{grad } u = \text{grad } v$ .

Wenn das Gebiet  $D$  glatt berandet ist, läßt sich dieser Eindeutigkeitssatz leicht mit dem Gaußschen Integralsatz beweisen, indem man  $w := u - v$

<sup>4</sup> Sind  $A, B \subseteq \mathbb{R}^N$  offen, so verstehen wir unter  $A \subset \subset B$ , daß  $A$  beschränkt ist mit  $\overline{A} \subseteq B$ . Man sagt dann:  $A$  ist kompakt enthalten in  $B$ .

<sup>5</sup> D.h. die ersten Ableitungen von  $u$  besitzen eine stetige Fortsetzung auf  $\overline{D}$ .

<sup>6</sup> Auch dieses und der kommende Eindeutigkeitssatz bei FRANZ NEUMANN [233].



betrachtet. Es ist  $\Delta w = 0$  und  $\frac{\partial w}{\partial \nu} = 0$  und daher

$$\iiint_D |\text{grad } w|^2 dx dy dz = \iint_{\partial D} w \frac{\partial w}{\partial \nu} dS - \iiint_D w \Delta w dx dy dz = 0 ;$$

mithin ist  $\text{grad } w = 0$ , und das ist  $\text{grad } u = \text{grad } v$ .

Jetzt werden wir das *Dirichletsche Randwertproblem* vorstellen. Bei elektrischen Feldern befinden sich die Ladungen oft auf Metallen, wo sie frei verschieblich sind, so daß die Ladungsdichte nicht a-priori vorgegeben ist, wie die Massendichte es in unserer Darstellung war, sondern sich erst unter der Wirkung des elektrischen Feldes einstellt.

Im statischen Fall kann die Feldstärke im metallischen Leiter keine Komponente haben, die eine Verschiebung bewirkt; also ist  $\phi = \text{const}$  innerhalb jeder Zusammenhangskomponente eines Leiters. Die Differenzen zwischen den Werten von  $\phi$  auf verschiedenen Zusammenhangskomponenten lassen sich als Spannungen messen. Man kennt daher im elektrostatischen Fall die Werte des Potentials  $\phi$  (bis auf eine für alle gemeinsame additive Konstante) auf den Leitern, von denen wir annehmen, daß sie ein ladungsfreies Gebiet  $D$  beranden; die Bestimmung des elektrischen Feldes  $E(x, y, z) = -\text{grad } \phi(x, y, z)$  in  $D$  läuft dann auf die Bestimmung einer Funktion  $\phi$  in  $D$  mit  $\Delta \phi = 0$  hinaus, das auf  $\partial D$  die gegebenen Werte annimmt.

Das ist ein Spezialfall des *Dirichletschen Randwertproblems*, das man auch das 1. *Randwertproblem* nennt. Allgemein lautet es für die Laplacegleichung so:

*Vorgegeben sind ein offenes (nichtleeres)  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  und eine stetige Funktion  $g: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ; gesucht ist eine auf  $\overline{\Omega}$  stetige Funktion  $u$ , die in  $\Omega$  zweimal stetig differenzierbar ist, dort der Laplacegleichung  $\Delta u = 0$  genügt, und die auf  $\partial\Omega$  mit  $g$  übereinstimmt.*

Manchmal findet man eine Formulierung, die etwas weiter gefaßt zu sein scheint, die nämlich die Stetigkeit von  $g: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  nicht nennt und nur  $u \in C^2(\Omega)$ ,  $\Delta u = 0$  in  $\Omega$  und  $\lim_{y \rightarrow x, y \in \Omega} u(y) = g(x)$  für alle  $x \in \partial\Omega$  fordert. Daraus folgt aber die Stetigkeit von  $\tilde{u}: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ , wenn man

$$\tilde{u}(x) := \begin{cases} u(x) & \text{für } x \in \Omega \\ g(x) & \text{für } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

setzt, und, wegen  $g = \tilde{u}|_{\partial\Omega}$ , auch die Stetigkeit von  $g: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

Es gibt ja zu  $\epsilon > 0$  und  $x \in \overline{\Omega}$  ein  $\delta(\epsilon, x) > 0$ , so daß  $|u(y) - \tilde{u}(x)| < \epsilon/2$  für  $y \in \Omega = \overline{\Omega} \setminus \partial\Omega$  mit  $|y - x| < \delta(\epsilon, x)$ . Zu  $x', x'' \in \overline{\Omega}$  mit  $|x' - x''| < \frac{1}{2}\delta(\epsilon, x')$  gibt es ein  $y \in \Omega \cap B_{\delta(\epsilon, x')}(x') \cap B_{\delta(\epsilon, x'')}(x'')$ ; somit ist  $|\tilde{u}(x') - \tilde{u}(x'')| \leq |\tilde{u}(x') - u(y)| + |u(y) - \tilde{u}(x'')| < \epsilon$ . Also ist  $\tilde{u}: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Daher muß auch die Vorgabe  $g: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stetig gewesen sein, und man ist wieder in der alten Situation  $\tilde{u} \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$  mit  $\Delta \tilde{u} = 0$  in  $\Omega$ ,  $\tilde{u}|_{\partial\Omega} = g$ .

Tatsächlich ist man aber auch an einer Verallgemeinerung des Dirichletproblems interessiert, bei der  $g: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  unstetig vorgegeben und eine Lösung

$u$  der Laplacegleichung in  $\Omega$  gesucht ist, die  $\lim_{x \rightarrow y, x \in \overline{\Omega}} u(x) = g(y)$  für alle solchen  $y \in \partial\Omega$  erfüllt, in denen  $g$  stetig ist. Hierzu vergleiche man den Satz 3.3.9.

Wir schließen mit einer Bemerkung über die Benennung der Randwertprobleme. Das Dirichlet-Problem zuerst von GREEN 1828 behandelt, verdankt seinen Namen dem Zusammenhang mit dem im nächsten Abschnitt zu besprechenden Dirichletschen Prinzip. Es wird heute gemeinhin angenommen, daß es CARL NEUMANN ist, der mit der Benennung des zweiten Randwertproblems geehrt wird, aber wie auf Seite 8 erwähnt, war es FRANZ NEUMANN, Carls Vater, der diese Aufgabe als erster in der Potentialtheorie formulierte<sup>7</sup> und zu ihrer Lösung ein Analogon zur Greenschen Funktion aufstellte [233, S. 272]. (Diese Schrift fußt auf Vorlesungen von FRANZ NEUMANN aus den Jahren 1852/53 und 1856/57.) CARL NEUMANN war es, der erstmals ein gemischtes Randwertproblem (Dirichlet-Bedingung auf einem, Neumann-Bedingung auf einem anderen Teil des Randes) für die Potentialgleichung behandelt hat [230]. Dieses Problem heißt heute vielfach ZAREMBA-Problem (nach [354]). Es sei noch erwähnt, daß es noch ein weiteres Randwertproblem gibt, bei dem  $\frac{\partial u(x)}{\partial \nu} + \gamma(x)u(x)$  auf dem Rande vorgegeben ist. Für dieses sind die Bezeichnungen ROBINSche Randwertaufgabe oder drittes Randwertproblem geläufig [90, 91].

## 1.4 Das Dirichletsche Randwertproblem im 19. Jahrhundert

Diese Randwertaufgabe hat Mathematiker während des ganzen 19. Jahrhunderts und noch weit im 20. Jahrhundert herausgefordert. POISSON [266] hatte Integralformeln aufgestellt, die die Lösung darstellen, wenn  $\Omega$  eine Kugel in  $\mathbb{R}^3$  oder eine Kreisscheibe in  $\mathbb{R}^2$  ist. Aber noch 50 Jahre später bedurften die Beweise der Nachbesserung durch H.A. SCHWARZ [302].

Es hatte GREEN [86] einen Ansatz gemacht, um solche Formeln für allgemeinere Gebiete  $\Omega = D$  zu bekommen. Er postulierte dabei zu jedem  $x \in D$  die Existenz einer Funktion, die er sich als elektrostatisches Potential dachte, das von einer in  $x \in D$  plazierten Einheitsladung und von einer solchen Ladungsverteilung (Influenzladung) auf  $\partial D$  ausgeht, welche von jener Einheitsladung induziert wird, wenn man  $\partial D$  erdet, also das Potential dort auf Null hält.

Hier sieht man das Konzept der von C. NEUMANN [224] und im Buch von RIEMANN & HATTENDORFF [284] so benannten *Greenschen Funktionen*, deren Existenz man seinerzeit nur mit physikalischer Analogie begründete.

GAUSS unterstellte für die Existenz eines derartigen *Gleichgewichtspotentials*, daß das Infimum des von ihm eingeführten nichtnegativen Funktionals

<sup>7</sup> Sie ergibt sich aus seiner großen Abhandlung [232, §§ 7, 8] und findet sich etwas später auch bei THOMSON [323].

$\varrho \mapsto \int_{\partial D} \int_{\partial D} \frac{\varrho(x)\varrho(y)}{|x-y|} dS(x) dS(y)$ , wenn man alle stetigen *Ladungsdichten*  $\varrho: \partial D \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  bei fester Gesamtladung zur Konkurrenz zuläßt, ein Minimum sei; vgl. [81, Art. 29f]. DIRICHLET hat in seinen Berliner [219, S. 603-605] und Göttinger Vorlesungen [51], durch die von GAUSS benutzte Charakterisierung der Gleichgewichtspotentiale beeinflusst, die Lösung der Randwertaufgabe darin gesehen, daß man unter allen Funktionen  $u \in C^2(D) \cap C^0(\overline{D})$  mit  $u|_{\partial D} = g$  die Existenz einer solchen hätte, die  $\iiint_D |\text{grad } u|^2 dx dy dz$  am kleinsten macht, aber hierüber selbst nichts publiziert.

Ähnlich argumentieren schon vorher GREEN [87], THOMSON [323] und bei einer verwandten Fragestellung KIRCHHOFF [139]. Dies ist das von B. RIEMANN [282] so genannte *Dirichletsche Prinzip*<sup>8</sup>. Daß dabei das Integral als Feldenergie gedeutet werden kann, trug dazu bei, die Existenz eines Minimums als gesichert anzusehen.

Wenn wirklich ein solches  $u \in C^2(D)$  existiert, für das das Integral minimal ist, dann sieht man leicht  $\Delta u = 0$  ein. Es wäre nämlich

$$\iiint_D |\nabla u|^2 dx dy dz \leq \iiint_D |\nabla(u + t\phi)|^2 dx dy dz$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$  und alle  $\phi \in C_c^\infty(D)$ ; eine simple Rechnung ergibt

$$0 \leq 2t \iiint_D \nabla u \cdot \nabla \phi dx dy dz + t^2 \iiint_D |\nabla \phi|^2 dx dy dz$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Dann muß aber

$$\iiint_D \nabla u \cdot \nabla \phi dx dy dz = 0$$

für alle  $\phi \in C_c^\infty(D)$  sein. Nimmt man  $\Delta u \neq 0$  an, dann gibt es eine Kugel  $B \subseteq D$ , in der  $\Delta u > 0$  oder  $\Delta u < 0$  ist; es gibt aber auch ein  $\phi \in C_c^\infty(B) \subseteq C_c^\infty(D)$  mit  $\phi \geq 0$  und  $\phi \neq 0$ . Dann ist  $\iiint_B (\Delta u)\phi dx dy dz > 0$  bzw.  $< 0$ . Im Gegensatz dazu ist aber nach partieller Integration (siehe Bemerkung A.1)

$$\begin{aligned} \iiint_B (\Delta u)\phi dx dy dz &= - \iiint_B \nabla u \cdot \nabla \phi dx dy dz \\ &= - \iiint_D \nabla u \cdot \nabla \phi dx dy dz = 0. \end{aligned}$$

RIEMANN [283] stützte seine Theorie der Abelschen Funktionen auf das Dirichletsche Prinzip, wobei das Randwertproblem in der Ebene, also  $D \subseteq \mathbb{R}^2$

<sup>8</sup> Vorher stand diese Benennung mehr für die Eindeutigkeit der Lösung der Randwertaufgabe, nicht so sehr für diese Methode zur Gewinnung einer Lösung, die auch das Thomsonsche Prinzip genannt wurde.

und nicht im Raume gestellt ist. Die Dirichletsche Randwertaufgabe, die zunächst für die Physik interessant gewesen war, hatte so auch innerhalb der Mathematik an Bedeutung gewonnen. Umso eher regten sich Zweifel an der Schlüssigkeit des Dirichletschen Prinzips. Das früheste datierbare Beispiel ist das des russischen Bergbauingenieurs THIEME (G.A. Time), der sich 1862 in Göttingen aufhielt, um bei Riemann Aufklärung über dessen Theorie der Abelschen Funktionen zu erbitten [223, S. 247]. KRONECKER nannte Casorati 1864 ein geometrisches Variationsproblem, das kein Minimum besitzt [222, S. 26].

Die schwelende Kritik hat Riemanns Überzeugung von der Richtigkeit seiner mit dem Dirichletschen Prinzip begründeten funktionentheoretischen Sätze nicht erschüttert<sup>9</sup>. Erst drei Jahre nach Riemanns Tod erhärtete WEIERSTRASS [334] die Einwände durch Publikation eines nach unten beschränkten Funktional, das keine Minimumstelle in seinem Definitionsbereich hat. Da es sich aber nicht um das Dirichletfunktional  $\phi: u \mapsto \iiint_D |\text{grad } u|^2 dx dy dz$  handelte, blieb die Frage hierfür offen; immerhin war die „Evidenz“ angeschlagen, gleichzeitig die Argumentation von GAUSS.

Zuvor hatte H. WEBER [333] den Versuch gemacht, eine konvergente Folge zu konstruieren, auf der das Dirichletsche Funktional gegen sein Infimum strebt. Methodisch knüpft er an seine Arbeit [332] an, mit der die Zeitschrift „Mathematische Annalen“ eröffnet wurde.

PRYM [270] kritisierte das Dirichletsche Prinzip unter einem anderen Gesichtspunkt als WEIERSTRASS. Er zeigte, daß die Lösung des Dirichletproblems  $\Delta u = 0$  in der Kreisscheibe  $D \subseteq \mathbb{R}^2, u|_{\partial D} = g$ , nicht bei jeder stetigen Randwertvorgabe  $g: \partial D \rightarrow \mathbb{R}$  endliches Dirichletintegral  $\iint_D (u_x^2 + u_y^2) dx dy$  zu haben braucht, so daß sich die Lösung nicht für jedes  $g$  aus dem „Dirichletschen Prinzip“ ergeben kann. HEINE [104] weist auf Annahmen beim Dirichletschen Prinzip hin. ARZELÀ [8] setzte seine Ergebnisse über Funktionenklassen für den Versuch ein, das Dirichletsche Prinzip zu retten.

Am Ende des 19. Jahrhunderts formulierte DAVID HILBERT<sup>10</sup>:

„... Das Dirichletsche Prinzip fand nur noch historische Würdigung und erschien jedenfalls als Mittel zur Lösung der Randwertaufgabe abgetan. Bedauernd spricht C. NEUMANN aus, daß das so schöne und dereinst so viel benutzte Dirichletsche Prinzip jetzt wohl für immer dahingesunken sei; nur A. BRILL und M. NOETHER rufen neue Hoffnung in uns wach, indem sie der Überzeugung Ausdruck geben, daß das Dirichletsche Prinzip, gewissermaßen der Natur nachgebildet, vielleicht in modifizierter Fassung einmal eine Wiederbelebung erfährt.“ (Bei den Arbeiten der zitierten Autoren handelt es sich um [228, p. 707], [29, p. 265].)

<sup>9</sup> F. KLEIN [142, p. 264] zitierte hierzu WEIERSTRASS.

<sup>10</sup> HILBERT [112] Vortrag mit dem Ziel einer Wiederbelebung des Dirichletschen Prinzips auf der Jahresversammlung 1899 der Deutschen Mathematiker-Vereinigung in München.

HILBERT [113]<sup>11</sup> gelang dann der entscheidende Durchbruch zur Rehabilitation des Dirichletschen Prinzips, indem er, was WEBER seinerzeit nicht gelungen war, konvergente Minimalfolgen erzeugen konnte und so die *direkten Methoden der Variationsrechnung* für die Existenz eines Minimums vom Dirichletintegral einleitete. Diese Methoden haben zu der heute sehr weit ausgebauten  $L^2$ -Theorie für Randwertaufgaben geführt. Stillschweigend benutzte HILBERT, daß die Randvorgabe  $g: \partial D \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Fortsetzung auf  $\bar{D}$  mit endlichem Dirichletintegral besitzt. Hierauf hat HADAMARD [94] mit einem berühmt gewordenen Gegenbeispiel (siehe Aufgabe 3.20) hingewiesen; die frühere Aussage von PRYM zu diesem Thema war in Vergessenheit geraten. Eine Begründung des Gaußschen Minimumprinzips erfolgte erst 1935 durch O. FROSTMAN [52, S. 802].

Inzwischen hatte die Weierstraßsche Kritik aber auch andere Ideen zur Lösung der Dirichletschen Randwertaufgabe gefördert. In erster Linie sind hier HERMANN AMANDUS SCHWARZ und CARL NEUMANN zu nennen.

H.A. SCHWARZ [300, 301] schloß an seinen Beweis der Poissonformel für das Dirichletproblem in der Kreisscheibe (siehe Abschnitt 3.1) das *alternierende Verfahren* (Vorbild bei MURPHY [212, p. 93 f.]) an, mit dem er aus der Lösbarkeit der Dirichletprobleme für Gebiete  $D_1 \subset\subset \mathbb{R}^2$  und  $D_2 \subset\subset \mathbb{R}^2$  mit  $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$ , unter Einschränkungen, die Lösbarkeit in  $D_1 \cup D_2$  mit einem Konvergenzprozess anging. So ließe sich aus der Lösbarkeit für Kreisscheiben die Lösbarkeit z.B. für von Kreisbögen berandete Gebiete der Ebene gewinnen. Die Beschränkung auf  $\mathbb{R}^2$  war für die funktionentheoretischen Bedürfnisse ausreichend.

Die Idee ist, daß man zu dem vorgegebenen  $g: \partial(D_1 \cup D_2) \rightarrow \mathbb{R}$  ein stetiges Randdatum  $g_1: \partial D_1 \rightarrow \mathbb{R}$  (beliebig) hinzudefiniert, aber mit  $g_1(x) = g(x)$  für  $x \notin D_2$ , und dann  $\Delta u_1 = 0$  in  $D_1$ ,  $u_1|_{\partial D_1} = g_1$  löst. Sei

$$D_i := \begin{cases} D_1, & \text{falls } i \text{ ungerade} \\ D_2, & \text{falls } i \text{ gerade} \end{cases}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

und sei schon  $\Delta u_i = 0$  in  $D_i$ ,  $u_i|_{\partial D_i} = g_i$ , gelöst; dann definiert man  $g_{i+1}: \partial D_{i+1} \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$g_{i+1}(x) := \begin{cases} g(x), & \text{falls } x \in \partial D_{i+1} \setminus D_i \\ u_i(x), & \text{falls } x \in (\partial D_{i+1}) \cap D_i \end{cases},$$

und man löst  $\Delta u_{i+1} = 0$  in  $D_{i+1}$ ,  $u_{i+1}|_{\partial D_{i+1}} = g_{i+1}$ . Man löst also abwechselnd in den Gebieten  $D_1$  und  $D_2$  Dirichletprobleme und erhält eine Folge  $(u_i)$ , und es ist zu zeigen, daß die Teilfolge mit ungeraden Indizes in  $D_1$  gegen ein  $u' \in C^2(D_1) \cap C^0(\bar{D}_1)$ , die mit geraden Indizes in  $D_2$  gegen ein  $u'' \in C^2(D_2) \cap C^0(\bar{D}_2)$  konvergiert, und daß

<sup>11</sup> Vortrag 1901 auf dem Festkolloquium zum 150jährigen Bestehen der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften.

$$u(x) := \begin{cases} u'(x) & \text{für } x \in D_1 \\ u''(x) & \text{für } x \in D_2 \end{cases}$$

wohldefiniert ist und das in  $D_1 \cup D_2$  gestellte Dirichletproblem löst.

Zu diesem Zweck beachten wir  $D_{i+3} = D_{i+1}$  und bilden wir  $u_{i+3} - u_{i+1}$ , also die Differenz zweier aufeinanderfolgender Lösungen in  $D_{i+1}$ . Sie ist harmonisch in  $D_{i+1}$  und stetig in  $\overline{D_{i+1}}$  mit Randwerten

$$g_{i+3}(x) - g_{i+1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in (\partial D_{i+1}) \setminus D_i \\ u_{i+2}(x) - u_i(x) & \text{für } x \in (\partial D_{i+1}) \cap D_i \end{cases}.$$

Nach dem Maximumprinzip (Korollar 2.3.5) folgt

$$|u_{i+3}(x) - u_{i+1}(x)| \leq \sup |g_{i+3} - g_{i+1}| = \sup_{(\partial D_{i+1}) \cap D_i} |u_{i+2} - u_i| \quad (1.5)$$

für  $x \in \overline{D_{i+1}}$ . Nunmehr wird von folgendem Lemma Gebrauch gemacht, das wir weiter unten noch diskutieren werden.

LEMMA: *Es gibt eine Konstante  $0 < q < 1$ , so daß alle in  $D_i$  harmonischen  $v \in C^0(\overline{D_i})$ , die auf  $(\partial D_i) \setminus D_{i+1}$  Null sind, folgender Abschätzung genügen:*

$$\sup_{(\partial D_{i+1}) \cap D_i} |v| \leq q \sup_{\partial D_i} |v|.$$

Dieses Lemma wird auf  $(u_{i+2} - u_i)$  in (1.5) angewendet. Das ergibt

$$|u_{i+3}(x) - u_{i+1}(x)| \leq q \sup_{\partial D_i} |u_{i+2} - u_i| \text{ für } x \in \overline{D_{i+1}}.$$

Mit der Setzung  $M_i := \sup_{\partial D_i} |u_{i+2} - u_i|$  haben wir dann  $M_{i+1} \leq q M_i$ , und somit  $M_i \leq q^{i-1} M_1$  für  $i \in \mathbb{N}$  mit  $0 < q < 1$ . Daher konvergiert die Teilfolge mit ungeraden Indizes  $u_{2n+1} = u_1 + \sum_{i=1}^n (u_{2i+1} - u_{2i-1})$  gleichmäßig auf  $\partial D_1$  und die mit geraden Indizes  $u_{2n} = u_2 + \sum_{i=1}^{n-1} (u_{2i+2} - u_{2i})$  gleichmäßig auf  $\partial D_2$ .

Der erste Harnacksche Satz (Korollar 3.1.3) liefert dann die gleichmäßige Konvergenz der Folge  $(u_{2n+1})$  in  $\overline{D_1}$  und die von  $(u_{2n})$  in  $\overline{D_2}$  gegen stetige und in  $D_1$  bzw.  $D_2$  harmonische Funktionen  $u'$  und  $u''$  mit den richtigen Randwerten auf  $\partial(D_1 \cup D_2)$ .

Schließlich stimmen  $u'$  und  $u''$  in  $D_1 \cap D_2$  überein, weil die Differenz  $u_{2n} - u_{2n-1}$  in  $D_1 \cap D_2$  gleichmäßig gegen Null geht. Dies wiederum wegen des ersten Harnackschen Satzes; denn auf dem Teil  $(\partial D_2) \cap D_1$  des Randes von  $D_1 \cap D_2$  ist  $u_{2n}(x) - u_{2n-1}(x) = 0$ , während auf dem restlichen Teil  $(\partial D_1) \cap D_2$  wegen  $u_{2n}(x) = u_{2n+1}(x)$  für  $x \in (\partial D_1) \cap D_2$  die Abschätzung

$$\sup_{(\partial D_1) \cap D_2} |u_{2n} - u_{2n-1}| = \sup_{\partial D_1} |u_{2n+1} - u_{2n-1}| = M_{2n-1} \leq q^{2n-2} M_1$$

besteht.

Zum Beweis des obigen Lemmas, den man auch in Lehrbüchern der Funktionentheorie findet (z.B. [126, III.6]; man ziehe auch Bemerkung 3.5.6 heran), benötigt man eine Voraussetzung an den Rand. In beliebigen Dimensionen kann ein Beweis mit Hilfe eines *Doppelschichtpotentials* geführt werden [46, 267ff]. Man kann aber auch das Lemma vermeiden, indem man die  $u_i$  als Lösungen von Integralgleichungen gewinnt [239]. Beides leitet über zu einer weiteren Lösungsmethode.

C. NEUMANN [225, 226] setzte Untersuchungen von A. BEER [13] fort über das schon bei GAUSS und GREEN vorkommende, aber erst von HELMHOLTZ [108] herausgehobene und benannte *Doppelschichtpotential*

$$W(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \mu(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \frac{1}{|x-y|} dS(y), \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

bei hinreichend glatt berandetem  $D \subset \subset \mathbb{R}^3$ .

Es ist  $W|_D$  harmonisch und läßt sich stetig auf  $\overline{D}$  fortsetzen; allerdings, auf  $\partial D$  stimmt die Fortsetzung nicht mit  $W|_{\partial D}$  überein, sondern mit  $-\mu + W|_{\partial D}$ . Die Herleitung solcher *Sprungrelationen* erfordert eine sorgfältige Analyse, auf die wir uns nicht einlassen wollen. Die Aufgabe ist nun,  $\mu$  so einzurichten, daß  $-\mu + W|_{\partial D}$  mit dem vorgegebenen Randwert  $g: \partial D \rightarrow \mathbb{R}$  übereinstimmt.

Es sei  $\mu_1 := -g$ . Zur Lösung der Aufgabe bildete C. NEUMANN mit den sukzessive definierten Doppelschichtpotentialen

$$W_n(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \mu_n(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \frac{1}{|x-y|} dS(y), \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

$$\mu_{n+1} := -W_n|_{\partial D}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} (W_{2k-1} - W_{2k})$ . Ihre Teilsumme  $\sum_{k=1}^n (W_{2k-1} - W_{2k})$  besitzt eine stetige Fortsetzung auf  $\overline{D}$ . Diese stimmt wegen der Sprungrelation auf  $\partial D$  mit

$$\sum_{k=1}^n (-\mu_{2k-1} + W_{2k-1}|_{\partial D} + \mu_{2k} - W_{2k}|_{\partial D}) = \sum_{k=1}^n (\mu_{2k+1} - \mu_{2k-1}) = g + \mu_{2n+1}$$

überein.

Wenn diese Folge von Randwerten gleichmäßig konvergiert, konvergiert die Reihe nach dem ersten Harnackschen Satz (Korollar 3.1.3) gleichmäßig gegen ein stetiges  $U: \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ , das in  $D$  harmonisch ist. C. NEUMANN bemerkte, wenn  $D$  konvex ist,

$$\min \mu_n \leq \min \mu_{n+1} \leq \max \mu_{n+1} \leq \max \mu_n. \quad (1.6)$$

Er entnahm dies einer Darstellung (siehe [136, Chap. III.7 und XI.1])

$$W(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma(x)} \tilde{\mu}(x; \xi) dS(\xi)$$

mit  $\Sigma(x) = \{\xi \in \mathbb{R}^N : |\xi| = 1 \text{ und es existiert } r > 0 \text{ mit } x + r\xi \in \partial D\}$  und mit  $\tilde{\mu}(x; \xi) := \mu(x + r\xi)$ , falls  $x + r\xi \in \partial D$ ,  $r > 0$ . Im Falle  $x \in \partial D$  ist  $2\pi = \text{vol } \Sigma(x)$ , und so erscheint  $-W(x)$  als Mittelwert von  $\tilde{\mu}$  auf  $\Sigma(x)$ . Daher sprach C. NEUMANN von der *Methode der arithmetischen Mittel*. Seine Methode enthält aber auch den Begriff einer *Konfigurationskonstante*: Während

$$\max \mu_{n+1} - \min \mu_{n+1} \leq \max \mu_n - \min \mu_n$$

sofort aus (1.6) folgt, stellt C. NEUMANN [226] zu jedem Gebiet  $D$  aus einer großen Klasse konvexer Gebiete eine Konstante  $\kappa < 1$  auf<sup>12</sup>, mit der

$$\max \mu_{n+1} - \min \mu_{n+1} \leq \kappa (\max \mu_n - \min \mu_n) \quad (1.7)$$

ist. Aus (1.6) und (1.7) folgt, daß die Folge der  $\mu_n$  gleichmäßig gegen eine Konstante  $C$  konvergiert. Dann ist  $u := U - C$  Lösung des Dirichletproblems.

Die Ergebnisse von SCHWARZ und C. NEUMANN waren willkommene Stützen für Riemanns Theorie. Vielmehr aber waren sie Anlaß zu weiteren Entwicklungen, in die zunächst ROBIN<sup>13</sup>, POINCARÉ, LYAPUNOV und FREDHOLM eintraten.

POINCARÉ [263], der bereits einen wiederum neuen Weg zur Lösung des Dirichletproblems eröffnet hatte, den wir weiter unten beschreiben, sah in Neumanns Methode mehr eine Handhabe für die konstruktive Berechnung von Lösungen, nicht deren Existenzbeweis, und suchte diese Methode auf nichtkonvexe Gebiete auszudehnen, indem er Vorstellungen anwandte, die er beim Studium der schwingenden Membran entwickelt hatte [261]. Er konnte die Konvergenz von Neumanns Reihe aus dem Verhalten einer meromorphen Funktion des von ihm eingebrachten Parameters  $\lambda$  erschließen. Diese Betrachtung brachte FREDHOLM [71, 72] zu seiner berühmten Auflösungstheorie linearer Integralgleichungen, mit der sich heute das Dirichletproblem als ein überschaubares Integralgleichungsproblem darstellen läßt. Freilich, die zurückgewonnene Energie muß man in die Qualitätsnachweise über die Sprungrelationen stecken, und das ist ein langes Kapitel der Potentialtheorie, an dem noch bis zum ersten Drittel des 20. Jahrhunderts hart gearbeitet wurde. Wir werden diesen Pfad nicht betreten und verweisen auf Lehrbücher wie [66, 89, 154] und für den neueren Stand der Dinge auf die Literatur in [315].

<sup>12</sup> Der Beweis von  $\kappa < 1$  bei C. NEUMANN [226] ist angreifbar. Es werden Minimum und Infimum sogar im Bereich der Zahlen verwechselt, während die Verwechslung beim Dirichletschen Prinzip bei Funktionalen auf Funktionenräumen geschehen war und den Anlaß zu Neumanns Arbeiten gegeben hatte.

Obwohl C. NEUMANN [228, § 6] dies mit einem schönen Lehrbeispiel eingestanden und korrigiert hat, wurde nur die fehlerhafte, ältere Version tradiert. Dies führte zu einer heftigen, aber auch konstruktiven Kritik bei LEBESGUE [177] und zu einem Beweis bei SCHÖBER [298]. Die von MONNA [209] geschilderte „Comedy of Errors“ bekommt dadurch, daß C. NEUMANNs Verbesserung in Vergessenheit geriet, eine zusätzliche Pointe. Zur Gültigkeit von (1.7) aus heutiger Sicht siehe [315].

<sup>13</sup> ROBIN behandelte das zweite und dritte Randwertproblem.



Die konstruktive Methode der arithmetischen Mittel blieb trotz der Bemühungen von POINCARÉ, und anschließend von KORN und E.R. NEUMANN (einem Neffen von Franz Neumann), am Ende des 19. Jahrhunderts in den Augen von C. NEUMANN [229] selbst „ein vorläufiges Gerüst“, welches durch „tiefer gehende Forschungen, durch mancherlei Determinationen und Rectificationen, schließlich in ein *wirklich* festes Gebäude sich selbst verwandeln werde“. Eine abschließende Untersuchung von E.R. NEUMANN ist [231]. Währenddessen hatte POINCARÉ [259, 260] bereits mit seiner „Méthode de balayage“ einen neuen Weg zur Lösung des Dirichletschen Randwertproblems gebahnt, der eher die Richtung des alternierenden Verfahrens von SCHWARZ verfolgt.

Während die Näherungen  $u_n$  bei SCHWARZ und NEUMANN der Gleichung  $\Delta u_n = 0$  genügen und ihre Randwerte gegen die Vorgabe konvergieren, erfüllen die Randwerte der  $u_n$  bei Poincarés *Methode des Fegens* (siehe [260]) für  $N = 3$ , [246] für  $N = 2$ ) stets die Randwertvorgabe, und es konvergiert  $\Delta u_n \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Das Gebiet  $D \subset \subset \mathbb{R}^2$  wird mit einer Folge von sich teils überlappenden Kreisscheiben  $B_1, B_2, B_3, \dots$  ausgefüllt, und eine weitgehend willkürliche Funktion  $f: \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ , die aber auf dem Rande  $\partial D$  mit dem Randdatum  $g$  übereinstimmt, wird zunächst in der Kreisscheibe  $B_1$  nach Regeln der Potentialtheorie, die wir erst in Abschnitt 3.2 beschreiben werden, so zu  $f_1: \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$  abgeändert, daß  $f_1(x, y) = f(x, y)$  für  $(x, y) \in \overline{D} \setminus B_1$  und  $\Delta f_1(x, y) = 0$  für  $(x, y) \in B_1$  gilt.

Sodann wird  $f_1$  in  $B_2$  in analoger Weise zu  $f_2: \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$  abgeändert, dann  $f_2$  wieder in  $B_1$  zu  $f_3$ ,  $f_3$  in  $B_2$  zu  $f_4$ ,  $f_4$  in  $B_3$  zu  $f_5$ ,  $f_5$  in  $B_1$  zu  $f_6$ , usw. Man durchläuft die Kreisscheiben in der Abfolge

$$1, 2, \quad 1, 2, 3, \quad 1, 2, 3, 4, \quad 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

In physikalischer Interpretation denkt man sich  $f$  als Potential einer in  $D$  verteilten Masse, welche, soweit sie in  $B_1$  enthalten ist, an den Rand von  $B_1$  gefegt wird. Das geht, ohne das Potential  $f$  außerhalb von  $B_1$  zu ändern, und macht  $\Delta f_1 = 0$  in  $B_1$ . Anschließend fegt man in  $B_2$  an den Rand von  $B_2$ , sodann wieder innerhalb  $B_1$ , usw.

Während also  $f$  auf  $\partial D$  bei jedem Schritt des unendlichen Prozesses ungeändert bleibt, erhält man von Schritt zu Schritt eine neue stetige Fortsetzung von  $f|_{\partial D}$  auf  $\overline{D}$ , die auf einem immer größeren Teilvolumen von  $D$  harmonisch ist. Die so konstruierte Folge  $(u_n)$  konvergiert gegen eine in  $D$  harmonische Funktion  $u$ . Unter welchen Voraussetzungen sich  $u$  stetig auf  $\overline{D}$  fortsetzen läßt und wann die Fortsetzung auf  $\partial D$  mit  $f$  übereinstimmt, muß dann natürlich auch noch untersucht werden. Wir verweisen auf [118].

Hieraus ist durch weitere Abstraktion der Existenzbeweis von PERRON [248] hervorgegangen, den wir in den Abschnitten 3.3 und 3.6 ausführlich behandeln, und der ohne Rückgriff auf die bis hier angesprochenen Verfahren dargestellt wird.

Elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Eine Einführung mit historischen Bemerkungen

Wienholtz, E.; Kalf, H.; Kriecherbauer, Th.

2009, XI, 401 S., Softcover

ISBN: 978-3-540-45717-6